Quelques étapes dans l'évolution du rôle du problème dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire en France.

Galisson Marie-Pierre,
IUFM Nord-Pas de Calais, Laboratoire André Revuz, Paris 7, France
mpgalisson@aol.com

Résumé

Notre objectif est de caractériser des étapes dans la trajectoire d'un « objet » qui évolue en fonction des besoins en mathématiques de la société et en fonction d'une conception de l'apprentissage véhiculée par les textes officiels. Notre étude porte sur des textes officiels, des discours de pédagogues, de mathématiciens et s'inscrit dans le cadre de l'anthropologie didactique des savoirs : nous tentons d'appréhender des conditions et contraintes qui déterminent la nature et les fonctions des problèmes dans l'enseignement primaire en France depuis 1882.

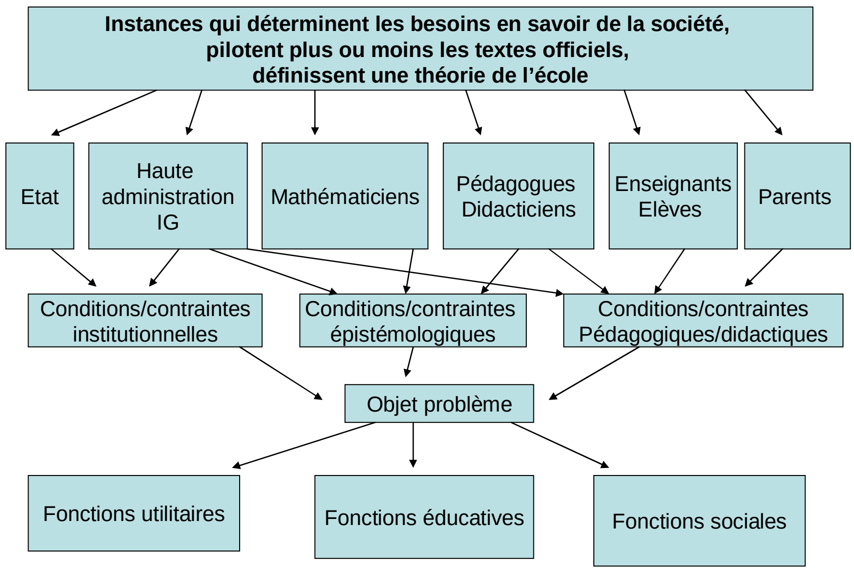
Introduction

Les programmes de l'école primaire française en vigueur en 2007-2008 réaffirmaient, en continuité avec ceux de 2002, le rôle central de la résolution de problèmes dans l'élaboration des connaissances mathématiques. Une typologie des problèmes, explicitée dans le document d'accompagnement des programmes de 2002, permettait de les caractériser selon leurs fonctions : problèmes pour apprendre (construire de nouvelles connaissances, réinvestir des connaissances déjà travaillées, mobiliser plusieurs catégories de connaissances dans des situations plus complexes), problèmes pour chercher (développer des stratégies sans recourir à une solution experte inaccessible au niveau considéré). Cette caractérisation des problèmes en termes de fonctions définit un aspect d'un modèle d'apprentissage par la résolution de problèmes dont on identifie l'émergence officielle dans les programmes primaires de 1985. Le terme « problème » était alors réhabilité aux dépens de termes « situations », « situations-problèmes » évocateurs de la réforme des « maths modernes ». Une classification, émergente dans les Instructions Officielles de 1977, résiste donc jusqu'en 2008.
Ce constat laissait entendre qu'une dimension d'un modèle d'apprentissage, conçu, éprouvé après la tourmente de la réforme des « maths modernes » conservait sa pertinence. La réintroduction du terme « problème » dans la définition d'une formation mathématique primaire traduisait aussi une évolution : des « situations » mêmes liées aux intérêts des élèves, élaborées pour exhiber quelques structures à l'origine de la reconstruction de la mathématique savante ne permettent pas l'accès à un mode de pensée mathématique partagé ; la légitimité du problème repose sur la cohérence de ses fonctions avec une classification reconnue comme pertinente pour apprendre des mathématiques.
Cette évolution de la nature et des fonctions du problème dans la formation mathématique des élèves de l'école primaire nous a conduits à nous pencher sur l'étude des conditions et des contraintes qui peuvent déterminer cette évolution. Cette étude s'inscrit donc dans le cadre d'analyse de l'anthropologie didactique des savoirs, dans sa composante écologique (Artaud, 1997). Le problème, par le biais de ses fonctions, constitue une « niche » pour des objets de savoir, enjeux d'un apprentissage : il assure à ceux-ci des conditions de viabilité. Il peut constituer en lui-même un objet d'apprentissage (problème-type) et dans ce cas, satisfaire à d'autres fonctions (sociales, économiques). Le rôle du problème dans le processus de

transformation des organisations mathématiques et didactiques de l'institution primaire nous incite encore à nous interroger sur les interactions de certains niveaux de co-détermination comme la société, l'école, la pédagogie, l'école,… (Chevallard, 2002) qui pilotent ce processus. Enfin, la transformation même des conditions et des contraintes qui au cours du temps préserve ou modifie le rôle du problème dans la formation des élèves de l'école primaire (illustrant l'application des deux principes, celui de l'hétérogénéité historique et institutionnelle, celui du proche développement (Chevallard, 1998)) nous conduit à mener cette étude sur quelques périodes « emblématiques » depuis l'instauration officielle en France d'une instruction primaire publique, laïque et obligatoire en 1882.
Nous chercherons à montrer que certaines de ces conditions et contraintes peuvent fournir des outils d'intelligibilité pour mieux appréhender des questions actuellement en débat.
Faire des mathématiques à l'école primaire, est-ce acquérir des outils pour résoudre des problèmes ? Est-ce résoudre des problèmes ? Est-ce répondre à des questions générées par un environnement, questions qui nécessairement en appellent à des connaissances, à des modélisations de type mathématique ?

Quelques éléments pour un cadre d'analyse

Pour appréhender les conditions et contraintes qui déterminent ce qu'est un problème scolaire, les enjeux auxquels il doit répondre, pour identifier les instances qui génèrent ces conditions et contraintes, leur cohérence faible ou forte à travers leurs influences respectives, notre analyse porte sur un ensemble de documents comportant des textes officiels, des rapports de la haute administration, des discours de pédagogues, de mathématiciens, de didacticiens. Ces textes ne révèlent pas une réalité mais des finalités officielles (des prescriptions) ou des principes défendus par des courants reconnus pour leur influence sur la politique éducative d'une période donnée. Ils reflètent une image de la légitimité culturelle et épistémologique du problème dans une culture primaire subordonnée à une certaine théorie de l'école.
Nous avons ci-dessous tenté de schématiser notre grille d'analyse.



Les besoins en savoirs déterminés par la société relèvent des institutions représentatives de celle-ci. Ces institutions règlent, en fonction des besoins en savoirs, les principes qui fondent une théorie de l'école en termes d'enjeux sociaux et éducatifs. La viabilité de l'« école » est liée à des conditions et des contraintes qui, en fonction des instances qui les génèrent, sont institutionnelles (obligation scolaire, certification ; temps scolaire, méthode et organisation pédagogiques), épistémologiques (transposition didactique ; légitimité et pertinence des savoirs enseignés), pédagogiques et didactiques (théorie de l'apprentissage, formation des maîtres ; organisations mathématiques et didactiques, temps de l'étude).
Nous supposons que ces diverses contraintes et conditions rendent compte de la nature du « problème » et de ses fonctions éducatives, utilitaires ou sociales. Nous distinguerons principalement trois époques : la période où, sous la 3ème République, sont mises en œuvre les lois organiques qui constituent l'enseignement primaire en service public et sous la 5ème République, la période des « maths modernes » et la période actuelle.

Problèmes et résolution de problèmes dans les deux éditions du Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire de F. Buisson (1887, 1911) : le rôle du problème dans la formation des élèves de l'école primaire sous la 3ème République

Premier texte officiel qui inscrit les « problèmes » dans un plan d'études pour l'école primaire, le programme de « calcul et d'arithmétique » du 27 juillet 1882 indique : *« Petits problèmes oraux et écrits, portant sur les sujets les plus usuels ; exercices de raisonnement sur les problèmes et les opérations exécutées »* (cours élémentaire), *« Problèmes d'application. Solutions raisonnées »* (cours moyen), *« Méthode de réduction à l'unité appliquée à la résolution des problèmes d'intérêt d'escompte, de partage, de moyennes… »* (cours supérieur). Il officialise l'existence d'un objet d'étude dont la nature et les fonctions peuvent être précisées si on se réfère à sa caractérisation dans les deux éditions (1878-1887, 1911) du Dictionnaire de Pédagogie et d'instruction primaire de F. Buisson. Une analyse comparée de ces deux éditions qui constituent une « encyclopédie pratique des connaissances nécessaires ou utiles à l'instituteur » (préface de la 1ère édition) permet d'esquisser par le biais de deux articles une conception du problème primaire qui ne se modifiera guère tout au cours de la période classique (c'est-à-dire jusqu'aux années 1960). Précisons que ces deux éditions sont rédigées par des collaborateurs aux statuts divers, membres de l'administration centrale de l'Instruction publique, inspecteurs généraux, académiques, primaires, des scientifiques et des professeurs…
Les finalités officielles (les besoins en savoir qu'elles traduisent) s'inscrivent dans une politique éducative cohérente avec les enjeux déterminés aux niveaux des institutions sociales (Inspection Générale, mathématiciens, pédagogues, acteurs de l'école, parents).

Le problème : entre fonction utilitaire et fonction éducative

La première édition du dictionnaire comporte un article intitulé « Problèmes », signée par Pierre Leyssenne, Inspecteur Général et auteur de nombreux manuels à destination du primaire. Dans *Le nouveau Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, c'est Carlo Bourlet, mathématicien, promoteur de la réforme de l'enseignement des sciences au lycée (1902), auteur d'une conférence sur « *La pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaires* » qui signe l'article « Mathématiques ».
La présence d'un article intitulé « Mathématiques » novateur (Assude et Gispert, 2003), coïncidant avec la disparition du réseau d'articles relatifs aux usages pratiques de l'arithmétique (actions, comptabilité…) présent dans la première édition, met en exergue

l'unité du savoir mathématique et marque le rapprochement en termes pédagogiques entre le primaire et le premier cycle du secondaire. C. Bourlet désamorce dans son préambule la polémique entre pratique et théorie, utilitaire et éducatif, voire primaire et secondaire, évoque le double but d'un enseignement mathématique conforme aux finalités d'une politique éducative qui promeut des humanités modernes, scientifiques contribuant à l'instauration d'une unification nationale, au progrès économique, à la stabilisation de l'ordre social. Il définit ainsi les finalités d'une formation mathématique primaire (Buisson, 1911) :

« 1° faire acquérir aux élèves des notions utiles, parfois indispensables dans la vie ; 2° développer en eux les facultés du raisonnement, l'esprit de logique, d'analyse et de méthode. En d'autres termes, cet enseignement doit être à la fois utilitaire et éducatif. On a trop souvent, le tort de croire que ces deux tendances sont contradictoires, et de n'accorder de valeur éducative qu'aux études abstraites, ne donnant lieu à aucune application pratique réelle. C'est une grave erreur. »

Educatifs et utilitaires, les problèmes selon C. Bourlet s'ouvrent désormais à d'autres domaines que l'arithmétique, comme la géométrie, l'algèbre, domaines qui relèvent de l'ordre secondaire.

Il n'en demeure pas moins que C. Bourlet reproduit mot à mot des extraits de l'article de P. Leyssenne qui promouvait l'hégémonie des problèmes d'arithmétique, une conception spécifique de l'arithmétique primaire, de la nature des bons problèmes, de leurs fonctions, de l'art de les choisir et d'en régler la résolution.

« L'arithmétique devant contribuer, même à l'école primaire, à l'éducation générale de l'esprit, tout exercice qui force l'enfant à réfléchir, à chercher, à comparer, à déduire, à juger, semble à ce titre du domaine de l'enseignement primaire. C'est là, il nous semble, une grave illusion. Il ne faut pas perdre de vue que l'enseignement donné dans nos écoles primaires s'adresse aux masses profondes des populations scolaires rurales, vouées de très bonne heure au travail des champs, et aux enfants de la classe ouvrière des villes, que réclament aussi dès l'âge le plus tendre l'atelier, la mine ou le comptoir[…] Avant tout, l'enfant doit savoir calculer sûrement et rapidement et résoudre toutes les questions pratiques qu'il peut être appelé à rencontrer sur sa route pendant sa vie. Tel est le caractère que doivent avoir les problèmes à l'école primaire […] »

Les conseils de P.Leyssenne, adoptés par C.Bourlet, définissent donc des modèles de problèmes conformes à l'orthodoxie primaire : leur caractère pratique les distingue de ceux qui relèvent de l'ordre secondaire.

Ces propos semblent disqualifier la conception d'un domaine érigé en une discipline incomparable pour l'intelligence, apte à développer les facultés de réflexion (telle que la revendiquent d'autres rédacteurs). Ils renvoient surtout aux contraintes temporelles, institutionnelles et sociales qu'explicitent officiellement l'arrêté du 27 juillet 1882 relatif aux objets et méthodes de l'éducation intellectuelle à l'école primaire : un nombre limité de connaissances, faute de temps, des connaissances appropriées aux futurs besoins professionnels des élèves et au développement « de bonnes habitudes d'esprit ».

Le rôle du problème dans la définition d'un texte de savoir à enseigner

Les problèmes usuels, selon P. Leyssenne/C. Bourlet, portent d'abord sur le système métrique, puis sur les règles de trois, les problèmes d'intérêt, d'escompte, […] les questions « si variées du tant pour cent ». Ils motivent l'existence et le développement des notions, des techniques et théories abordées en calcul et arithmétique dans les programmes homologues de l'école primaire. Homologues, parce que procédant de l'application de la méthode concentrique introduite par l'Inspecteur d'Académie O. Gréard, en 1868, dans les écoles du département de la Seine, les programmes constituent une organisation du savoir arithmétique

formant un tout structuré et complet sur une année (Artaud, 1997), approfondie en fonction du niveau.
Ces contraintes déterminent une organisation mathématique classique qui reprend fidèlement celle d'un traité savant, *Les éléments d'arithmétique* de Bézout. Ce traité, régulièrement réédité depuis 1764, complété en 1795 par une annexe relative au système légal des mesures, a été transposé à destination du secondaire en 1808 par le Baron Reynaud. Celui-ci a introduit la célèbre et controversée « méthode de réduction à l'unité » qui évite le recours à la théorie des proportions pour résoudre les problèmes de proportionnalité. Cette méthode élargit tant dans le primaire que dans le premier cycle du secondaire le champ des *solutions des problèmes de l'Arithmétique à l'aide des seules combinaisons des quatre règles* (problèmes qui conservent leur habillage classique (problèmes d'ouvriers…) mais qui s'adaptent aussi au développement des pratiques sociales (caisse d'épargne, rentes sur l'Etat,…).
Cette caractérisation du problème primaire légitime l'étude d'une organisation arithmétique « classique » et déjà éprouvée, non spécifique de l'ordre primaire. La mode de résolution « primaire » des problèmes sacrifie-t-elle alors une certaine dimension éducative ?
Il n'en est rien. P. Leyssenne comme C. Bourlet, puisque celui-ci reprend exactement les propos du premier, déplorent l'absence du raisonnement, le recours abusif à des méthodes telles que la méthode de réduction à l'unité et la prééminence des techniques opératoires. Dénonçant encore l'usage de procédures arithmétiques obsolescentes (méthode de fausse supposition), ils promeuvent le recours à des notions plus théoriques (notion de rapport, empruntée à la théorie des proportions), l'usage de l'outil algébrique : *« il simplifiera singulièrement le langage dans certains problèmes, d'ailleurs faciles, mais qu'on ne parvient à expliquer que péniblement et à grand renfort de phrases embarrassées. »*
« Et, enfin, […], y a-t-il aujourd'hui un ouvrier qui quelque jour n'ait pas occasion d'appliquer une formule ? » rajoute C. Bourlet.
Sans dissiper les tensions entre éducatif et pratique, l'étude de ces deux articles met en lumière la fonction formatrice du problème tant pour l'élève que pour le maître. Le problème se caractérise comme le support privilégié d'une matière à enseigner « l'arithmétique » constituée en « discipline », c'est-à-dire régulatrice des conduites des sujets de l'institution élèves et maîtres, mais aussi comme un vecteur de développement : ses fonctions éducatives et utilitaires imposent qu'il relève d'autre domaines des mathématiques, l'algèbre, la géométrie (en lien avec le système métrique).

Problème et conception d'un mode d'apprentissage

La rénovation pédagogique, mise en œuvre par la 3ème République avec la généralisation de la méthode intuitive et pratique, confère de nouvelles fonctions au problème. L'enseignement primaire *« est essentiellement intuitif et pratique ; intuitif (en italique dans le texte) ; c'est-à-dire qu'il compte avant tout sur le bon sens naturel, sur la force de l'évidence, sur cette puissance innée qu'a l'esprit humain de saisir du premier regard et sans démonstration non pas toutes les vérités, mais les vérités les plus simples et les plus fondamentales ; pratique (en italique dans le texte), c'est-à-dire qu'il ne perd jamais de vue que les élèves de l'école primaire n'ont pas de temps à perdre en discussions oiseuses, en théories savantes […]* » précise le paragraphe relatif à la méthode dans le programme annexé à l'arrêté du 27 juillet 1882.
C'est dans cet esprit, qu'Henri Sonnet, Inspecteur d'Académie, rédacteur de l'article « Arithmétique » dans la 1ère édition du Dictionnaire, que P. Leyssenne, et d'autres rédacteurs du Dictionnaire, tous auteurs de manuels, caractérisent le statut novateur des problèmes.
L'exposition dogmatique et la mémorisation préliminaire des concepts abstraits sont disqualifiées, il faut introduire les notions sous la forme de petits problèmes usuels. Les

problèmes reposent sur des manipulations effectives, empruntent à « la leçon de chose » (observation de vignettes de manuels évoquant des situations familières). Dans les manuels, après formulation des notions rencontrées, ils se conjuguent au questionnaire (restitution de la leçon) et donnent lieu à des applications directes (impliquant calcul mental ou écrit avec des nombres abstraits ou concrets (sans ou avec unités de grandeurs)). Enfin, ils sollicitent un « raisonnement » impliquant la compréhension d'un énoncé lié à une pratique sociale, la maîtrise de l'opération ou de la suite d'opérations qui permet d'aboutir à une solution.
Ils règlent le temps d'un apprentissage qui s'inscrit dans un quadrillage temporel piloté par la méthode concentrique.
Ils conservent leur rôle prédominant en termes de certifications (et de promotion sociale) : à côté des questions de cours, la résolution des problèmes d'arithmétique appliquée à la vie pratique s'est constituée en épreuve sommative ou prédictive (le certificat d'études primaires, les brevets).

Rôle du problème dans la formation mathématique « primaire » pendant la période « classique »

Les effets du processus d'acculturation produit par cette formation prêtent à diverses interprétations.
Leur fonction éducative du point de vue mathématique est contestée mais non leurs fonctions pratiques et sociales :
« Ces problèmes sont des applications des mathématiques (en fait, des calculs) à des situations de vie courante où interviennent des grandeurs. Ils ont alors une finalité de préparation à la vie pratique : savoir effectuer les calculs que nécessitent certaines circonstances courantes. Mais leur finalité ne s'arrête pas là ! Ils sont aussi des agents d'intégration sociale à un monde d'adultes déterminé par la mise en scène de contextes particuliers » (Harlé, 1984), constate le didacticien A. Harlé. L'activité de résolution qu'ils imposent est sans rapport avec la réalité d'une activité mathématique. Les récits des énoncés peuvent susciter l'incompréhension résultant d'un décalage entre la vie de l'élève, le contexte du problème et la situation mathématique ; ils induisent un recours abusif à la mémoire pour retenir les problèmes-types et ils entraînent la dénaturation des notions mathématiques : *« Les nombres qui ne prennent pas leur indépendance vis-à-vis des grandeurs par la distinction « nombres concrets –nombres abstraits, les « Quatre opérations » appliquées aux grandeurs ce qui a pour effet de rendre la multiplication non commutative, le cours sur la proportionnalité qui se réduit à l'apprentissage de « problèmes- types .»* (Harlé, 1984)
D'un point de vue non mathématique et non didactique, l'évidence de leurs effets sur la formation de l'individu, voire sur la transformation d'un environnement sociétal est établie.
Historien, P. Cabanel met en évidence sur un exemple l'existence d'un apprentissage qui se décline sur quatre plans : *« le raisonnement, l'opération de calcul elle-même, le fonctionnement de la caisse d'épargne, qui sera très probablement la « banque de sa vie d'adulte (mais non celle des bacheliers) ; le devoir même de l'épargne. »* (Cabanel, 2002)
Sociologue, G. Vincent confirme l'impact de l'idéologie véhiculée par les problèmes sur l'émergence d'une raison calculatrice, sur la transformation des structures socio-économiques. (Vincent, 1980).

Conclusion de la première partie.

En conclusion, les lois Ferry (gratuité en 1881, obligation en 1882), la loi Goblet (laïcité et organisation pédagogique en 1886) qui confèrent à l'école primaire son statut organique stable jusque dans les années 1960, créent des conditions et des contraintes qui relèvent essentiellement des registres institutionnel et pédagogique. La nature et le champ d'application des problèmes adaptés aux enjeux éducatifs et sociaux de l'école primaire ne sont pas novateurs : ils peuvent expliquer la résistance et l'hégémonie d'une organisation mathématique fécondée par les diverses transpositions d'un traité « savant » d'arithmétique pratique. Les problèmes pratiques motivent l'existence d'un corpus constitué de quatre blocs : nombres entiers, décimaux et opérations, fractions, système métrique, rapports et proportions. Educatifs et utilitaires, ils contribuent à la mise en œuvre d'une pédagogie « active » qui nourrit une nouvelle conception de l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire, ils légitiment la nature de raisonnements qui peuvent requérir des notions théoriques (propriétés des nombres, éléments d'algèbre et de géométrie) et réduire ainsi l'écart entre ce qui relève du primaire et ce qui relève du secondaire.

Dans le contexte donné, les raisons d'être des problèmes pratiques de l'école primaire renvoient à leur dimension fonctionnelle. En cela, ils participent d'un processus d'acculturation : leur influence dans la transformation d'un rapport au monde du travail, à la raison ne peut être niée. Le problème « primaire » contribue à forger une certaine conception de la citoyenneté, et celle-ci peut être appréhendée à partir des points de vue philosophiques des acteurs du système (positivistes, spiritualistes,..). Les fonctions du problème « primaire » mettent encore en évidence le rôle d'une Instruction Publique républicaine qui n'est pas celui que promouvait Condorcet : le principe de l'indépendance de la raison ne peut-être totalement compatible avec le principe d'un ordre républicain.

Quelques éléments sur la nature et les fonctions de l'activité mathématique de l'élève depuis la réforme des mathématiques modernes jusque dans les années 1990

Dans les années 1960, les conditions et les contraintes qui assurent la légitimité des problèmes « primaires » sont modifiées à tous les niveaux de co-détermination.

Au niveau de la société, les besoins en savoirs engendrés par le développement économique international impliquent la généralisation d'un enseignement scientifique accessible au plus grand nombre. Ils entraînent la suppression de la dualité primaire/secondaire, une réorganisation du système d'enseignement liée à l'allongement de la scolarité obligatoire. Institutionnellement, ces besoins conduisent à l'émergence de nouvelles structures, les Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM), qui contribuent à l'émergence d'une science nouvelle, la didactique des mathématiques.

Aux niveaux des mathématiciens, des scientifiques, des pédagogues, des professeurs de mathématiques, une réforme des contenus et des méthodes de l'enseignement rapprochant le savoir enseigné du savoir « savant » est une nécessité reposant sur un principe : la « mathématique » joue un rôle éminent dans toute formation scientifique. Ce principe est défendu par les politiques.

La mathématique est à la fois utile et éducative comme le prétend avec force « la Charte de Chambéry » élaborée en 1968 par l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (APMEP) : *« Ce qu'on appelle un peu vite la mathématique moderne, ce qu'il conviendrait mieux d'appeler la conception constructiviste, axiomatique, structurelle des mathématiques, fruit de l'évolution des idées, s'adapte « comme un gant », nous permettrons-nous de dire, à la formation de la jeunesse de notre temps. »*

Dans l'enseignement primaire, les promoteurs de la réforme comptent parmi leurs rangs des inspecteurs généraux, l'ensemble des pédagogues (par exemple N. Picard, collaboratrice du département de la recherche pédagogique de l'Institut Pédagogique National), les professeurs d'écoles normales. Ils s'appuient sur les travaux de la commission « Recherche et Réforme » de l'APMEP et de la commission ministérielle Lichnérowicz qui rendent compte de la mutualisation des apports de la recherche mathématique, psychologique, pédagogique, des expériences en classe conduites par des chercheurs.

Mathématique moderne et nouvelle théorie de l'école.

Nicole Picard exprime les convictions partagées d'une communauté qui promeut la fonction de la mathématique dans une nouvelle théorie de l'école.

Elle démontre dans le compte-rendu d'une expérience conduite en 1964 et 1965, publié dans le Courrier de La revue Pédagogique (1966), la pertinence éducative, psychologique et épistémologique de la mathématique contemporaine à l'école élémentaire : la réflexion sur la mathématique elle-même doit prévaloir sur l'acquisition de techniques pour certaines périmées, la mathématique doit permettre de combler les inégalités sociales, contribuer à intégrer dans la société contemporaine les enfants issus « des milieux sous-développés » (les milieux des travailleurs manuels). La reconnaissance des structures et l'acquisition d'un langage mathématique dont les élèves vont découvrir eux-mêmes la syntaxe au travers d'expériences constituent la finalité première de l'enseignement élémentaire.

C'est sur la mutualisation féconde des apports de la recherche en mathématiques et en psychologie qu'est fondé un théorème d'existence : le processus de mathématisation chez les enfants.

« A partir des concepts d'ensembles, de relations, ils peuvent découvrir ce qu'est un opérateur et comment l'on s'en sert, découvrir la structure de groupe à partir de groupes finis, utiliser des fonctions numériques et non numériques, tout cela avant dix ou onze ans ». (Picard, 1966).

J. Piaget montre en effet que le développement intellectuel de l'enfant procède par des étapes caractérisées par des structures qui entretiendraient des rapports analogiques avec les structures mathématiques. Mais il souligne aussi prudemment la nécessité d'une gradation dans les étapes vers l'axiomatisation, l'importance d'un travail sur des structures concrètes (non nécessairement pauvres). (Piaget, 1967)

Ces conditions permettent l'émergence d'une nouvelle pédagogie « active », une pédagogie qui prend en compte le rôle prioritaire d'une formation mathématique « liée au développement des structures mentales […] » (Commission R.R. de l'APMEP, 1968).

Les finalités de cette formation esquissées par les promoteurs de la réforme sont d'une grande ambition. Citons par exemple le canadien Z.P. Dienes : « *la compréhension mathématique universelle peut s'obtenir à condition d'y mettre le prix* », (Diénès, 1967) ou G. Brousseau : *« L'emploi précoce et familier d'une formalisation efficace m'a paru être une des clés de l'enseignement de l'algèbre, de l'arithmétique et de la logique. Il m'a semblé que l'on pouvait là gagner plusieurs années si l'on arrivait à comprendre comment pouvait s'opérer l'acquisition d'un langage formel, la création d'une syntaxe, l'accroissement ou la reprise d'un répertoire. »* (Brousseau, 1972)

La résolution de problèmes dans les textes officiels (1970) et ce qu'il en advient.

La circulaire du 2 janvier 1970 peut affirmer qu'il ne s'agit plus « de préparer les élèves à la vie active et professionnelle en leur faisant acquérir des techniques de résolution de problèmes catalogués et « suggérés par la vie courante », mais bien de leur assurer une approche correcte et une compréhension réelle des notions mathématiques ». Le programme annexé est un allégement de celui de 1945 : les notions numériques sont préservées, rassemblées sous l'intitulé « Eléments de mathématiques », la géométrie et les mesures relèvent des activités d'éveil.

Si le terme « problème » existe dans les « Commentaires du programme », il est associé étroitement au terme « situation ». Le choix des « situations » dépend désormais de la créativité du maître. Une certaine initiation à la vie courante n'est pas écartée, elle doit toutefois être liée aux intérêts des enfants. Les « situations retenues » auront pour fonction, soit de motiver l'introduction de notions nouvelles, soit de permettre l'application de propriétés ou de relations préalablement étudiées. Dans ce contexte, les problèmes pratiques sur le système métrique, les problèmes de proportionnalité s'éclipsent pour s'insérer dans une rubrique consacrée aux fonctions numériques.
Les problèmes pratiques ne motivent plus une organisation et une étude réglée du savoir « mathématique » : la construction des notions, les structures ensemblistes et algébriques qui leur sont constitutives doivent générer des situations mathématiques pertinentes parce qu'illustrations concrètes de ces structures.
« Résoudre un problème, c'est donc analyser la situation, les informations données, dégager éventuellement des chaînes de situations élémentaires, les schématiser afin de mettre en évidence les relations mathématiques qui les décrivent, utiliser ces relations et leurs propriétés pour en déduire les renseignements cherchés »(circulaire du 2 janvier 1970). L'objectif pour l'élève, c'est de passer d' « une situation à un schéma mathématique » et réciproquement d'imaginer une situation à partir d'un schéma. Entrer dans la réalité mathématique pour l'élève, c'est découvrir comme le mathématicien.
C'est, dans les faits (manuels en usage), acquérir un lexique ensembliste, utiliser des schémas (diagramme de Venn, tableaux, arbres…). Les schémas, aides au raisonnement, outils pour abstraire les structures deviennent objets d'étude, l'apprentissage du lexique est détaché de sa syntaxe.
Permettre, à tout élève, de dégager d'un ensemble de modèles mathématiques exhibés à partir des situations, « les structures essentielles » est une ambition vite défaite.

Vers une nouvelle conception du rôle du problème dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire (1977-1985).

Les programmes qui suivent (1977, 1978, 1980) se défont progressivement en CP, puis en CE et enfin en CM d'un environnement « ensembliste » (l'intitulé « Eléments de mathématiques » disparaît). Ils préservent l'ambition d'une formation mathématique qui privilégie le sens des notions et l'usage des situations. Ils bénéficient des apports de la recherche en didactique des mathématiques (la théorie des situations de G. Brousseau qui modélise la construction des connaissances en termes de dialectique : action, formulation, validation ; les travaux du groupe ERMEL (Equipe de recherche mathématique à l'école élémentaire de l'Institut Nationale de Recherche Pédagogique). L'introduction dans le recueil « Contenus de formation à l'école élémentaire, cycle moyen, CNDP (1980) » d'une typologie des « situations-problèmes » catégorisées selon leurs fonctions -l'approche et la construction de nouveaux outils mathématiques- le réinvestissement des acquis antérieurs et la perception de leurs limites d'utilisation (situation de contre exemple)- le moyen de permettre à l'élève de « mettre en œuvre son pouvoir créatif et affiner la rigueur et la sûreté de son raisonnement » met en évidence l'influence des chercheurs.
Simultanément les programmes insistent sur le rôle des techniques opératoires pour la résolution de problèmes. En 1980, les instructions précisent qu'un apprentissage d'ordre méthodologique est nécessaire pour améliorer les capacités des élèves à résoudre des problèmes. La prise en compte des interférences entre langage naturel et langage mathématique, la nécessité de valider une procédure, de communiquer une solution en ne se satisfaisant plus d'un schéma renvoient encore à la mise en œuvre d'une « pédagogie par objectifs » qui doit favoriser le développement de l'élève dans sa globalité.

Dans les programmes de 1985, la réintroduction du terme « problème », le retour explicite de problèmes relevant de la proportionnalité, de la « règle de trois » illustrent une certaine Contre- Réforme. Les programmes insistent sur la nécessité des apprentissage de base et donc sur l'organisation d'un texte de savoir qui renoue avec celui des traités classiques. Ils évoquent le recours au concret, à l'empirique, aux techniques ; les problèmes relevant des fonctions numériques subsistent, préservant l'existence d'une notion « théorique » unificatrice. Par ailleurs, la typologie des problèmes repose toujours sur la classification des instructions de 1980.
Dans l'esprit des concepteurs de ce programme, (par exemple l'Inspecteur Général L. Corrieu), la nouvelle pédagogie « active » ne disqualifie pas totalement le modèle « heuristique » qui identifiait l'activité mathématique de l'élève à celle du mathématicien ; il est associé à un modèle plus traditionnel dans lequel reprennent place des activités permettant le travail et la maîtrise des techniques.
« *Un enseignement bien conçu devra donc respecter un équilibre entre la construction de notions ou de schémas de pensée et la mise au point de techniques susceptibles d'être réinvesties ou parfois même appliquées mécaniquement* », écrivent les auteurs du guide pédagogique du manuel de CP « Vivre les mathématiques » (1985), publié sous la direction de L.Corrieu.

Conclusion de la deuxième partie.

Ephémère, la «Réforme des maths modernes » montre que la transformation des enjeux d'une formation mathématique accessible à tous, de haut niveau nécessitait des conditions qui institutionnellement, épistémologiquement, pédagogiquement ne pouvaient être instaurées dans un court terme imposé politiquement (nouveau rapport au temps du savoir, texte de savoir de référence, formation des maîtres). Substituer une approche structurelle à l'approche fonctionnelle des savoirs à travers la résolution de problèmes concrets, introduire un environnement théorique (éléments de logique, ensembles et opérations sur les ensembles, relations, codages de cardinaux et d'ordinaux) à l'école primaire étaient des principes utopiques.
Toutefois, en imposant le principe qu'une formation mathématique pour tous ne peut se réduire à sa composante pratique, les promoteurs de la réforme transforment une conception de l'apprentissage dans laquelle le problème trouve de nouvelles fonctions : participer de la construction des notions, développer la créativité et la rigueur de l'élève. Si l'organisation mathématique qu'esquissent les programmes de 1985 emprunte à l'organisation classique, le nouveau statut du problème implique une nouvelle organisation didactique qui s'appuie sur les recherches didactiques et pédagogiques. Celles-ci portent tout autant sur le problème dont la finalité est d'élaborer une notion nouvelle, outil pertinent pour sa résolution, que sur le problème, objet dont la résolution nécessite une représentation qui nécessite l'articulation de divers registres sémiotiques. La résolution de problèmes conquiert son rôle de levier d'apprentissage déterminant dans la formation mathématique des élèves. Une conception de l'apprentissage des mathématiques, non plus liée à un courant philosophique structuraliste, mais fondée sur des hypothèses étayées par des recherches didactiques (Brousseau), psychologiques (Vergnaud) tend à se diffuser au travers de manuels officieusement reconnus (tels ceux rédigés par le groupe ERMEL de l'INRP). Les problèmes retrouvent une dimension fonctionnelle (mais orientée vers les savoirs eux-mêmes) dans l'existence de « situations didactiques ».

Conclusion et Perspectives.

Depuis la disparition du certificat d'études primaire en 1989, faire des mathématiques à l'école, c'est acquérir les fondements d'une réelle culture mathématique. L'évolution des contraintes et conditions qui régulent le fonctionnement de l'école est liée au développement des recherches pédagogiques et didactiques. En intégrant la prise en compte de la durée dans les processus d'apprentissage et le principe que la dimension éducative de l'enseignement a pour objet le développement de l'élève dans sa globalité, les programmes s'inscrivent dans une organisation pédagogique en cycles, se déclinent en termes de compétences. L'hypothèse socio-constructiviste que les connaissances mathématiques s'élaborent en termes d'outils de résolution de problèmes rend compte de l'esprit des programmes de 1995, 2002 et 2007. Introduits officiellement en 1995, « les problèmes pour chercher » mettent en lumière la coexistence de deux conceptions de l'activité mathématique : faire des mathématiques, c'est utiliser des outils pour résoudre des problèmes, mais c'est aussi « élaborer une démarche originale dans un véritable problème de recherche, c'est-à-dire un problème pour lequel on ne dispose d'aucune solution éprouvée ». Cet état des lieux traduit une évolution « sereine » qui place la résolution de problèmes au cœur des apprentissages, élargit le champ des savoirs enseignés aux domaines autres que l'arithmétique (exploitation de données numériques, espace et géométrie, grandeurs et mesures). Il montre que certaines notions (fonctions), certaines techniques, certains problèmes relèvent désormais du collège.

Les programmes en vigueur depuis la dernière rentrée (2008-2009), sans remettre le rôle essentiel de la résolution de problèmes dans l'activité mathématique de l'élève, marquent cependant une rupture avec cette conception de l'apprentissage ; la construction des connaissances « *élaborées comme réponses efficaces à des problèmes […] identifiées puis étudiées dans le but d'être utilisables pour résoudre de nouveaux problèmes* » (Cycle 2 programme 2002 et 2007), l'activité consistant à « *chercher et produire une solution originale dans un problème de recherche* » (cycle 3 programme 2002) ne sont plus mentionnées. Par contre, ces programmes réintroduisent des techniques écartées (par exemple, la règle de trois). Sous-tendraient-ils que le travail des techniques doit précéder l'approche de leur sens ?

Notre grille d'analyse peut nous apporter quelques éléments pour comprendre les modifications de certaines conditions et contraintes.

L'Etat, la haute administration doivent tenir compte d'une nouvelle définition des savoirs élaborée à un niveau international, imposée par une culture de l'évaluation : la définition du socle commun de connaissances (B.O. n°29, 20 juillet 2006) prend appui sur les propositions du parlement européen en termes de compétences-clés, mais réfère aussi aux évaluations internationales (PISA). La présence dans ces évaluations de problèmes pratiques (modérément réussis par les élèves français), nécessitant l'application de techniques de calcul élémentaire mais aussi la capacité à modéliser une certaine réalité, remet en question le curriculum de 2002 ; l'accent sur la maîtrise des techniques et la restauration d'un temps d'apprentissage réglé peuvent en résulter dans les programmes de 2008. Une perspective toutefois : la réforme des maths modernes enclencha le développement sur les processus de conceptualisation des élèves ; les recherches actuelles sur l'apprentissage par la modélisation et à la modélisation peuvent profiter d'une même impulsion.

Plus localement, l'Inspection Générale (rapport- n° 2006-034 juin 2006) met en évidence les dysfonctionnements auxquels peut mener l'activité de résolution de problèmes (une vision brouillée tant pour les élèves que pour les maîtres). Partageant ce constat, A. Mercier souligne notamment la nécessité que les « problèmes pour chercher » conduisent à « des résultats socialement garantis, démontrés en principe et dont il est possible de rendre compte » (Mercier, 2007). Il souligne encore que sous la 3ème République, les maîtres disposaient des outils théoriques pour comprendre les enjeux des problèmes posés aux élèves ; ce privilège (auquel tend à contribuer l'auteur) doit être accordé aux maîtres actuels.

La question des enjeux des problèmes, de leur sens est donc fondamentale. Le principe sur lequel reposait le modèle d'apprentissage qui a prévalu jusqu'à présent peut rester pertinent :

*« Le véritable moteur de la construction et de l'appropriation des savoirs est le **sens** qui n'est alimenté et activé qu'à la faveur de **questions** que se posent ou peuvent se poser les élèves à partir de problèmes reconnus authentiques par eux, ni évidents, ni trop complexes, qui est optimisé en fonction de l'**enjeu** introduit par ces questions, aiguisé par le **défi** qu'éventuellement elles contiennent et par les **réponses** qui ont pu être proposées a priori par les élèves. L'histoire nous livre d'ailleurs que c'est dans ces conditions que la connaissance scientifique a pu se développer »* (Gras, 1997)

Mais le champ des problèmes reconnus authentiques par les élèves (et par les maîtres) doit être compatible avec les besoins en savoir identifiés dans le contexte actuel. La contribution de la formation mathématique à une éducation citoyenne est inscrite dans les programmes, cette condition semble imposer la détermination d'un champ de questions, de problèmes motivés non seulement par leur pertinence mathématique, mais aussi sociale, et accessibles aux élèves. La mise en œuvre du socle commun, sous la responsabilité des instances représentatives de la société, peut être une opportunité pour élaborer un domaine de « mathématiques appliquées » adapté à l'école primaire permettant aux problèmes d'assurer pleinement leurs fonctions éducatives et sociales dans la formation mathématique et citoyenne des élèves.

Bibliographie

Artaud, M. (1997) Introduction à l'approche écologique du didactique : l'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *Actes de la 9ème Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques.* Houlgate, ARDM et IUFM de Caen, pp101-139.

Assude,T & Gispert,H. Les mathématiques et le recours à la pratique » *in L'école républicaine et la question des savoirs,* sous la direction de D. Denis et P. Kahn CNRS Edition (2003).

Brousseau, G. (1972), *Processus de mathématisation,* APMEP, n° 282, p.71.

Cabanel, P. (2002), *La République du certificat d'études : histoire et anthropologie d'un examen (XIX-XX s),* Histoire de l'Education Belin, pp142-147.

Chevallard, Y. (1991) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée Sauvage, Grenoble (2nde Edition).

Chevallard, Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : la théorie anthropologique. *Actes de l'Université d'été,* Université B.Pascal, IREM de Clermont-Ferrand.

Chevallard, Y. (2002) Organiser l'étude. Cours 3. Ecologie et régulation. *Actes de la 11ème Ecole de Didactiques des mathématiques.* La Pensée Sauvage, Grenoble.

Dienes Z.P. (1965), *La mathématique moderne dans l'enseignement primaire,* OCDL, p.7.

Harlé, A. (1984), *L'arithmétique des manuels de l'enseignement élémentaire au début du XXème siècle.* Thèse de doctorat. Paris VII, pp 274-277

Buisson, F. (1911), *Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire,* Paris, Hachette, pp 1259-1273.

D'Enfert, R. (2003), *L'enseignement mathématique à l'école primaire, de la Révolution à nos jours, textes officiels,* tome 1 : 1791-1914, Paris INRP.

Gras R.,Bardy P., Parzysz B. (1997), Echanges SBPM-APMEP, *Mathématiques et Pédagogie.*

Mercier A. (2007), « Une question curriculaire de l'enseignement élémentaire des mathématiques : « la résolution de problèmes », *Actes du séminaire national : « l'enseignement mathématique à l'école primaire »* pp93-116. http://eduscol.education.fr/D0217/actes_math_ecole_primaire.htm
Piaget, J. (1967), L'initiation aux mathématiques, les mathématiques et la psychologie de l'enfant, *L'enseignement Mathématique*, tome 13, pp 289- 292.
Picard, N. (1966) L'initiation mathématique au cycle élémentaire, *Le courrier de la recherche pédagogique*, mars 1966, n°27, IPN, pp27-72.
Vincent, G.(1980) *L'école primaire française* ; *étude sociologique*, Lyon, P.U. de Lyon, Maison des sciences de l'homme, pp 129-186.
La mathématique au cycle élémentaire, *Recherche pédagogiques*, INRDP (1972)
Bulletin Officiel de l'Education Nationale (1944-1995).
Rapport- n°2006-034 Juin 2006, IGEN
Contenus de formation à l'école élémentaire, cycle moyen, CNDP (1980).
Qu'apprend-on à l'école élémentaire (2002), (2007) SCEREN.

Galisson Marie-Pierre, IUFM Nord-Pas de Calais, Laboratoire André Revuz, Paris 7, France
mpgalisson@aol.com