DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES DANS LA FORMATION DES PROFESSEURS DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE : QUELLES SITUATIONS, QUELS APPORTS THEORIQUES ?

Isabelle Bloch[1]

IUFM d'Aquitaine & daest (laboratoire de didactique et anthropologie des enseignements scientifiques et techniques),

Université Bordeaux 2

Résumé : Au début de leur cursus professionnel, les futurs professeurs manifestent souvent à propos des mathématiques, des conceptions très formelles, se traduisant par l'impossibilité d'envisager des "mises en scène" du savoir mathématique sous forme de situations à dimension adidactique, et l'impossibilité d'anticiper les erreurs des élèves puisque le savoir est supposé transparent dès son énonciation. Nous avons entrepris un travail afin d'articuler des situations à jouer par les professeurs en formation, et des apports théoriques sur la didactique. Cet article expose les principes de cette organisation, des exemples de situations, et quelques résultats constatés dans les classes des professeurs en formation.
Mots clés : Théorie des Situations Didactiques, contrat didactique du professeur stagiaire, vecteurs, algèbre.

INTRODUCTION

Les professeurs français ayant réussi le CAPES de mathématiques sont affectés en formation et se voient parallèlement confier une classe de collège ou lycée. Presque tous rencontrent d'importantes difficultés dans leurs premières tentatives d'enseignement : ils héritent de leurs études universitaires une conception très formelle des mathématiques, qui leur interdit d'envisager des "mises en scène" du savoir mathématique, ainsi que de comprendre les procédures d'élèves rencontrées dans leurs classes.

La formation tente de leur fournir les premiers éléments pour évoluer dans leur classe avec un minimum de réussite ; elle essaye aussi de faire évoluer leurs conceptions de ce que peut être

[1] isabelle.bloch@univ-pau.fr
Adresse : Isabelle Bloch, Maître de Conférences - Mathématiques
IUFM d'Aquitaine – Antenne de Pau, 44 boulevard Jean Sarrailh – 64000 PAU
Fax : (33) 559 131 273

l'activité mathématique, et de les munir de connaissances de didactique afin qu'ils puissent anticiper et analyser leur pratique.

Pour atteindre ces objectifs, il paraît d'abord nécessaire de faire vivre aux professeurs eux-mêmes un certain nombre de situations sur des concepts clés de l'enseignement secondaire, avec une double visée :

- que ces situations soient à même de révéler aux jeunes professeurs un aspect des mathématiques que leurs études universitaires avaient occulté, à savoir l'activité de résolution de problème ;
- que ces mêmes situations puissent être mises en œuvre dans les classes des professeurs, sans trop de "risque" puisqu'elles auront été analysées et testées en formation, et que le professeur aura anticipé, par sa propre participation, les procédures possibles et les erreurs attendues.

L'intérêt de ce dispositif est que les formateurs peuvent, en visite chez le stagiaire ou en séance de mémoire professionnel, avoir un retour sur la façon dont l'enseignant a géré la situation dans sa classe ; les apports théoriques porteront alors sur les connaissances nécessaires au professeur pour conduire ce type de situation.

Dans cette optique nous pointons quelques conceptions repérées chez les professeurs en formation, et caractérisons le contrat didactique du professeur novice ; nous examinons le travail didactique nécessaire pour assurer la transition de la position d'étudiant à la position de professeur, et montrons comment la Théorie des Situations Didactiques permet d'envisager la construction de situations spécifiques de formation concernant quelques concepts de l'enseignement secondaire. En conclusion nous donnons des éléments sur la mise en œuvre des situations par les professeurs débutants.

I. CONTRAT DE L'ETUDIANT *VERSUS* CONTRAT DU PROFESSEUR

I.1. Conceptions des mathématiques et de leur enseignement

a) les mathématiques

Les étudiants acquièrent à l'Université une conception très formelle des mathématiques : le savoir déclaré est supposé transparent, mais non fonctionnel : ils sont peu habitués à résoudre des problèmes avec les mathématiques qu'ils connaissent. Pour eux, un théorème a une preuve, mais pas de justification en termes de résolution de problèmes car la théorie mathématique est sa propre justification. Leur culture des problèmes pouvant être résolus avec les outils mathématiques vus à l'Université est d'ailleurs très pauvre, et de nombreux auteurs ont pointé l'inefficience de leurs savoirs mathématiques.[2]

b) l'enseignement des mathématiques

Pour les étudiants sortant de l'Université, un bon cours de mathématiques est un cours frontal, de type cours dialogué, où le professeur dit "la loi mathématique". Ils n'imaginent pas que cette loi puisse être contestée, ou ne pas être comprise, surtout à un niveau comme le secondaire où n'interviennent que des mathématiques élémentaires. D'ailleurs le formalisme leur semble évident, au point que les phénomènes de perte de sens qui lui sont parfois attachés les déstabilisent fortement : ainsi une jeune professeur, ayant donné à ses élèves de 14 ans, un exercice sur la trigonométrie dans un triangle rectangle ABC : calculer la somme des carrés des cosinus des angles aigus, n'osait pas avouer que les élèves avaient calculé : $\mathrm{Cos}^2\,\widehat{ABC} + \mathrm{Cos}^2\,\widehat{ACB} = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{A^2B^2}{B^2C^2} + \frac{A^2C^2}{B^2C^2}$ puis avaient "simplifié" par B^2 et C^2 !

Cette double dimension nous conduit à penser qu'il est nécessaire, si l'on veut faire évoluer les jeunes professeurs, de leur proposer d'analyser des pratiques, *et* de les mettre en mesure de faire l'expérience de situations à dimension adidactique afin qu'ils puissent questionner

[2] Voir Robert, 2001.

l'enseignement qu'ils ont reçu. Il faudra aussi les munir de connaissances sur la façon de conduire le type de situations que nous leur proposons.

I.2. Le contrat didactique : versant étudiant et versant professeur

A l'Université, les étudiants ne sont pas responsables des mathématiques qui leur sont enseignées, ni du point de vue de la validité ni de l'organisation temporelle. Lorsqu'ils sont devant une classe, ils deviennent responsables du vrai et du faux, ainsi que de l'organisation de l'année scolaire, sans avoir acquis réellement les moyens de se forger un point de vue réflexif sur les savoirs de l'enseignement secondaire. Cela les rend excessivement dépendants de la transposition didactique institutionnelle, telle qu'elle se manifeste dans les manuels ou les discours professionnels. Or l'enseignement secondaire actuel privilégie l'ostension de quelques "emblèmes" des notions mathématiques, comme supposés porteurs du sens des notions, et ne travaille que peu la dimension de résolution de problème, pas plus que ne le faisait l'Université pour ses savoirs plus ambitieux. De ce fait les jeunes professeurs ne peuvent que difficilement imaginer des problèmes relatifs aux savoirs du secondaire, et accessibles aux élèves.

Ainsi le contrat didactique du professeur débutant se caractérise par :

- l'illusion que la manipulation d'ostensifs est porteuse du sens des objets mathématiques ;
- un manque de connaissances sur les problèmes susceptibles d'être l'objet de l'activité mathématique dans l'enseignement secondaire ;
- une absence de moyens pour prendre la responsabilité de l'organisation de l'enseignement sur le long terme.

Ce contrat se manifeste, en formation, par le refus de rédiger complètement une solution d'exercice, ou la difficulté à prévoir une série d'exercices sur un thème donné, et à anticiper des procédures d'élèves.

Le nouveau contrat doit les rendre capables :

- d'organiser le temps didactique ;
- de définir le corpus des situations et des exercices à donner aux élèves, de façon à étudier une notion et atteindre un objectif ;
- de relier enseignement et apprentissage et se donner des moyens d'évaluation.

L'introduction de situations en formation vise principalement les deux derniers points.

I.3. La TSD et la construction de situations de formation

La TSD[3] a proposé de nombreuses situations pour l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, mais beaucoup moins pour les niveaux supérieurs[4]. Pour des savoirs plus complexes, la question n'est plus de construire *une* bonne situation, mais d'organiser des réseaux de problèmes, et d'activités à proposer aux élèves, afin d'explorer les sens fondamentaux que prend un concept dans ses relations avec d'autres à l'intérieur d'une théorie. Le gain espéré pour les élèves est d'élargir leur rôle dans la recherche et l'argumentation, ainsi que l'ont pointé les chercheurs, et ainsi de les faire accéder à une meilleure compréhension du "jeu mathématique".[5]

Avec les professeurs stagiaires nous faisons l'hypothèse qu'il est possible de les faire travailler sur des situations de ce type, avec deux objectifs :

- les munir de situations robustes qu'ils peuvent ensuite réinvestir dans leurs classes ;
- faire évoluer leurs connaissances mathématiques et leurs conceptions des mathématiques et de leur enseignement.

Les situations présentées aux professeurs stagiaires sont donc construites sous deux contraintes :

[3] Théorie des situations didactiques
[4] Voir Brousseau, 1998.
[5] Voir par exemple Legrand, 1996.

- questionner les enseignants sur leur savoir mathématique, par confrontation aux situations, ce qui implique qu'elles ne soient pas immédiatement décodables ;
- posséder des caractéristiques qui les rendent transférables dans une classe, même pilotées par un enseignant novice.

Pour construire de telles situations, nous faisons appel à la TSD :

- identifier un "jeu" où le concept visé est pertinent ;
- faire apparaître les principales variables didactiques et choisir leurs valeurs ;
- organiser le jeu en deux phases : l'une directe, l'autre retournée, la dernière étant celle qui conduit le joueur à confronter son action à un milieu de référence où la connaissance visée est nécessaire.[6]

II. EXEMPLES DE SITUATIONS : LES VECTEURS ET L'ALGEBRE

II.1. Le" rallye du plan" : produit de vecteurs par des réels

Une situation pour introduire la fonctionnalité de la notion de base du plan vectoriel, a été construite par A.Berté et expérimentée avec des professeurs stagiaires.[7]

Le jeu direct – plus classique – est introduit auparavant, il consiste à mettre en œuvre la multiplication des vecteurs par des réels. Le "rallye du plan" est le jeu retourné[8] : il s'agit d'atteindre les points entourés, en donnant le bon message n'utilisant que des combinaisons linéaires de vecteurs connus. La validation matérielle se fait par transparence (grille sur transparent appliquée sur la réponse) ; la validation théorique est un débat sur la façon d'écrire et d'interpréter les messages, et la possibilité de le faire dans tous les cas. Une variable didactique est le nombre de vecteurs : un vecteur, certains points seulement sont atteints ; deux vecteurs, tous les points sont atteints d'une seule façon ; trois vecteurs, tous les points sont atteints de plusieurs façons. La nature des coefficients est aussi une VD.

[6] Voir Bloch 2000, Bloch 2002.

Cette situation a deux objectifs pour les professeurs :

- montrer la fonctionnalité du concept de vecteur : le choix judicieux de certains vecteurs est ce qui permet d'atteindre tous les points du plan affine ;
- construire une situation sur le lien point-vecteur.

Et pour les élèves :

- trouver des produits de vecteurs par des réels, y compris non rationnels ;
- utiliser la grille comme outil de validation ; relier avec d'autres outils rencontrés ultérieurement, comme le coefficient directeur d'une droite.

Cette situation est intéressante à jouer avec de jeunes professeurs, car ils ont un point de vue particulièrement formel de l'algèbre linéaire ; et c'est un réel travail pour eux, que de voir l'adéquation de la situation à la notion de base, et de trouver les variables didactiques.

II.2. Les suites de Fibonacci

La situation, non décrite ici, est due à B.Véron.[9]. Elle introduit le travail algébrique sur la mise en équations et la notion de variable, à partir d'un travail de recherche sur les suites de Fibonacci vérifiant certaines contraintes. Elle a pour objectif d'introduire l'algèbre non comme une collection de règles, mais comme moyen de résolution de problèmes.

III. CONCLUSION

Il est toujours difficile d'évaluer l'impact d'une formation de professeurs : même si une situation est bien construite, de nombreux facteurs, comme l'inexpérience dans la conduite de la classe, peuvent empêcher la réussite. Cependant plusieurs professeurs ont essayé dans leur

[7] Voir schéma en annexe.
[8] Voir Bloch, 2000.
[9] Voir Véron, 2001.

classe les situations vues en formation[10], avec un succès plus que raisonnable. Par ailleurs, dans le questionnaire qu'ils ont rempli à l'issue de leur formation, ils mentionnent que ce travail les a amenés à découvrir des dimensions des mathématiques qu'ils ignoraient à l'Université. Ces deux résultats montrent que l'influence de ce travail est réel sur les conceptions des professeurs en formation.

[10] D'autres situations ont été proposées en formation, par exemple sur les fonctions (voir Bloch 2003) ou la numération (voir Bloch 2000).

Références :

Bloch I. (2000) "Dimension adidactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement' d'une situation." Actes du colloque Guy Brousseau, DAEST, Université Bordeaux 2.

Bloch I. (2002) "Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations". Dorier, éditeur : Actes de la XIème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Bloch I. (à paraître 2003) "Teaching functions in a graphic milieu : what kind of knowledge enable students to conjecture and prove". Educational studies in Mathematics, Kluwer Academic Publishers, the Netherlands.

Brousseau G. (1998) Théorie des Situations Didactiques. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Gascon J. (1994) Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative a "l'arithmétique généralisée". *Petit x* **37**, 43-63. Grenoble : Université Joseph Fourier.

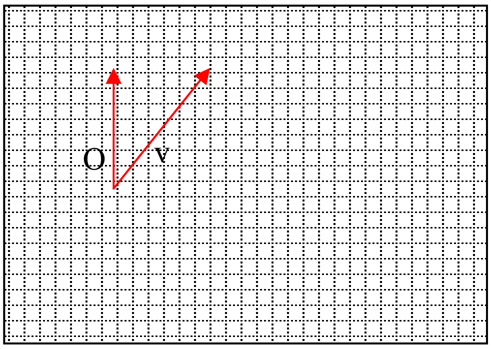
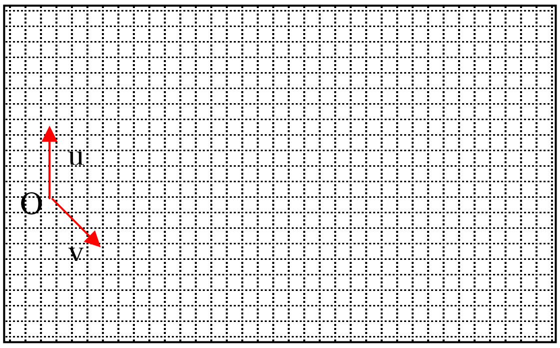
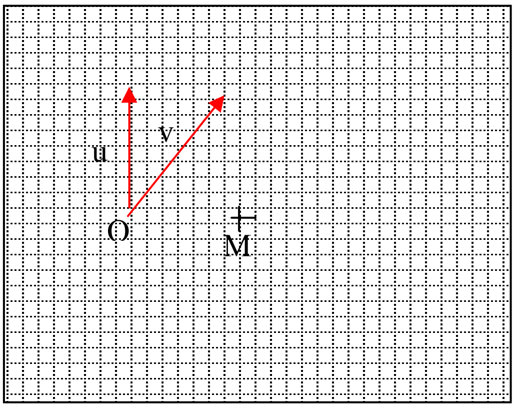
Legrand M. (1996) "La problématique des situations fondamentales." *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **16-2**, 221-280. Grenoble : La Pensée Sauvage.

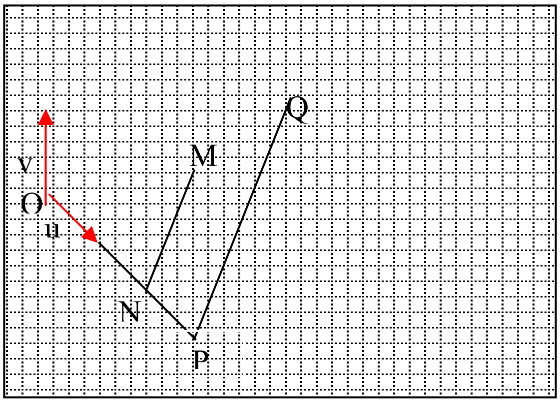
Robert A. (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes du métier d'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **21-1/2**, 57-80. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Véron B. (2001) Calcul littéral, équations, inéquations. Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques, **435**, 440-444. Paris : APMEP.

ANNEXE : LE RALLYE DU PLAN

Phase 1 : on connaît un vecteur $\vec{u}$, certains points sont donnés, par exemple A, et on doit envoyer un message pour placer B tel que $\overrightarrow{AB} = 3/2\ \vec{u}$
Phase 2 : on connaît deux vecteurs u et v

<table>
<tr>
<td>Jeu n°1
Grille pour les récepteurs

</td>
<td>Jeu n°2
Grille pour les récepteurs

</td>
</tr>
<tr>
<td>Jeu n°1
Grille pour les transmetteurs


L'autre équipe a la même grille que vous, mais seulement avec le point O et les vecteurs u et v. Envoyez-leur un message pour placer le point M. Il est sur le cercle (O, OI) , et sur une droite orthogonale au support de v.
Votre message qui doit contenir seulement O, u, v et des nombres.</td>
<td>Jeu n°2
Grille pour les transmetteurs


L'autre équipe a la même grille que vous, mais seulement avec le point O et les vecteurs u et v. Envoyez-leur un message pour placer le point M. Il est placé tel que (MN) // (PQ) et les points N, P, Q sont exactement sur des points de la grille.
Votre message doit contenir seulement O, u, v et des nombres.</td>
</tr>
</table>