Hassane Squalli
Faculté d'éducation
Université de Sherbrooke
Sherbrooke (Québec)
J1K 2R1,Canada
Hassane.Squalli@USherbrooke.ca

Thème 5: Transitions institutionnelles: primaire/secondaire, secondaire/supérieur

Titre : Le développement de la pensée algébrique depuis l'école primaire : exemple de la généralisation

Résumé

L'idée d'initier les élèves à l'algèbre dès l'école primaire a été formulée il y a quelques années déjà par plusieurs chercheurs, et elle est maintenant admise chez un nombre de plus en plus grand d'éducateurs en mathématiques. Ce courant, reconnu sous l'appellation « early algebra » ou « algèbre avant la lettre » ne vise pas à ajouter un nouveau contenu mathématique à enseigner au primaire, mais plutôt à orienter les activités mathématiques vers le développement de la pensée algébrique, comme formuler et justifier des généralisations. Cette communication veut débattre de la pertinence de cette idée avec les participants en prenant comme exemple le processus de généralisation en algèbre.

Texte

L'algèbre a toujours été et continue à être un sujet scolaire aride et difficile. Ce fait est encore plus évident au moment où l'algèbre devient un sujet d'enseignement pour tous les élèves.

Historiquement, l'algèbre est venue après l'arithmétique. Aussi, l'idée que l'apprentissage de l'algèbre doit venir après celui de l'arithmétique a longtemps prévalu dans la communauté des éducateurs en mathématiques. Prendre l'arithmétique comme prérequis à l'apprentissage de l'algèbre est aussi un argument d'ordre didactique qui met en avant la dialectique de l'ancien et du nouveau, permettant ainsi de créer, espère-t-on, une certaine continuité dans l'enseignement des mathématiques. De nombreuses recherches ont été menées sur les ressemblances et les différences qui existent entre l'arithmétique et l'algèbre, en vue de mieux comprendre comment l'enseignement de l'algèbre peut s'appuyer sur l'expérience qu'ont les élèves en arithmétique. L'article synthèse de Kieran (1992) fait état de nombreux travaux à ce sujet. Mais le passage pour les élèves d'un stade arithmétique à un stade algébrique est loin d'être facile à réaliser et pose problème (Vergnaud, Cortes et Favres-Artigue, 1988; Kieran, 1992; Rojano, 1996). De plus, il apparaît que les longs apprentissages qu'ont réalisés les élèves en arithmétique peuvent venir faire obstacle à leur apprentissage de l'algèbre (Booth, 1988; Squalli, Dumont et Tanguay, 2002). À titre d'exemple, pour montrer aux élèves comment opérer sur des expressions algébriques certains enseignants – s'appuyant sans doute sur certains manuels – vont s'appuyer sur l'analogie avec les algorithmes de calcul des opérations arithmétiques de l'addition (ou de la soustraction). Ils apprennent aux élèves à calculer une somme comme (2x + 3y + 2) + (6x – y – 1) en procédant par colonnes selon les termes semblables, comme dans l'algorithme d'addition.

Bien que, d'un point de vue mathématique, il soit légitime de faire une analogie entre le calcul polynomial et les algorithmes des opérations arithmétiques, cela ne fournit pas pour autant une justification à utiliser une telle analogie en enseignement. En effet, cette analogie entend créer un pont entre deux domaines de calcul. Un calcul arithmétique pour lequel l'élève possède une longue pratique et des schèmes bien établis. Un calcul algébrique auquel on tente de l'initier. Il est illusoire de croire qu'en faisant appel aux connaissances arithmétiques de l'élève, celui-ci ne va activer que celles strictement nécessaires au bon fonctionnement de l'analogie. Le cas de Jeanne, une élève de secondaire 2, est à ce titre très illustratif (Squalli, Dumont et Tanguay, 2003). Pour simplifier l'expression $2u+4-3u-7u+7$, Jeanne a procédé ainsi :

$$\begin{array}{rcr} 2u & + & 4 \\ 3u & - & 7 \\ +u & + & 7 \\ \hline 5u & + & 4 \end{array}$$

Elle a transformé l'expression algébrique initiale $2u + 4 – 3u –7u + 7$ en (2u + 4) + (3u – 7) + (u + 7) commettant deux erreurs. La première consiste à omettre le signe – affecté au monôme 3u; la seconde consiste à remplacer le terme –7u par –7 + u. À notre avis, Jeanne a été contrainte à commettre ces deux erreurs du fait qu'elle tente « coûte que coûte » d'appliquer le schème de l'algorithme d'addition/soustraction des nombres. En lisant de gauche à droite l'expression initiale, elle commence par extraire le binôme 2u + 4 qui se présente sous la forme recherchée : *coefficient nombre + nombre*. Une fois ce premier binôme retranscrit sur une première ligne, Jeanne doit composer un deuxième binôme à partir de l'expression –3u –7u + 7. Elle s'est alors retrouvée face à deux contraintes. La première est que l'expression commence avec le signe –. Or, dans la culture arithmétique, ce signe n'a aucune signification quand il n'est pas placé entre deux nombres. Jeanne a choisi de l'omettre tout simplement ! Dans la seconde ligne de son calcul, elle écrit, en effet, 3u et non –3u. La seconde contrainte provient du fait que dans l'expression $-3u-7u+7$, le terme *3u* est suivi du monôme *–7u*, un terme de la forme *coefficient lettre* et non de la forme *nombre* comme attendu. Pour ce conformer au modèle initial, Jeanne « casse » le monôme $-7u$ et en extrait le *nombre* (-7) restant pour composer son deuxième binôme. Elle retranscrit alors en deuxième ligne le binôme 3u – 7. Finalement, Jeanne utilise le u restant du terme $-7u$ pour former le troisième binôme : $u + 7$ qu'elle retranscrit dans une troisième ligne. Jeanne n'a alors qu'à faire le bilan des deux colonnes de la matrice ainsi formée. Comme bilan de la colonne formée des termes $2u$, $3u$ et u, Jeanne écrit $5u$ et non $6u$ *!* Le coefficient 5 est obtenu en sommant les coefficients 2 et 3. Jeanne n'aurait pas comptabilisé le terme u de la dernière ligne. Cette erreur pourrait être expliquée par la conjugaison de l'analogie avec la représentation décimale des nombres et d'une conception du zéro : dans l'expression u, l'élève interprète le manque de coefficient devant le u non pas comme voulant signifier 1 (u signifie $1.u$) mais comme « rien dans la position des u ».

Entre l'arithmétique et l'algèbre, il n'y a pas que des continuités, il y a aussi de multiples discontinuités, comme cela est documenté dans la littérature didactique.

Au cours de la dernière décennie, des éducateurs en mathématiques de plus en plus nombreux proposent de commencer l'étude de l'algèbre dès le primaire[i]. Ils précisent qu'il ne s'agit pas d'un enseignement précoce de l'algèbre du secondaire, ni d'une « préalgèbre » préparant les élèves à l'algèbre du secondaire. Il s'agit plutôt d'amener les élèves à développer la pensée algébrique[ii] sans nécessairement utiliser le langage littéral de l'algèbre. C'est une algèbre avant la lettre mettant l'accent sur la pensée et non sur le contenu mathématique (Squalli, 2002b, 2003).

La généralisation est l'une des composantes essentielles de la pensée algébrique qu'on peut viser à développer chez les élèves depuis l'école primaire. La généralisation est, comme l'abstraction, un processus essentiel dans l'activité mathématique (Mason, 1996) et en particulier en algèbre (Squalli, 2000; Kaput, 1998). Mason y voit même le cœur des mathématiques, "*generalization is the life blood, the heart of mathematics*" (1996). En effet, la plupart des faits mathématiques sont de nature générale comme :

- Le périmètre d'un carré est quatre fois la mesure de son côté.
- Un nombre est pair si et seulement si son chiffre des unités est pair.
- La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est 180 degrés.
- Si G est un groupe d'ordre n, l'ordre de tout sous-groupe de G est un diviseur de n.
- …

La généralisation est essentielle à la construction des connaissances mathématiques et joue donc un rôle fondamental dans l'apprentissage des mathématiques. Sierpinska (1995) y voit un passage obligé au développement de la compréhension mathématique.

Selon Mason (1994), généraliser c'est tirer des conclusions valables pour tous les cas à partir de quelques exemples. La généralisation commence dès qu'on pressent un cheminement sous-jacent, même si on est encore incapable de le formuler. Grossièrement, on peut distinguer trois moments importants dans le processus de généralisation : 1) pressentir la généralisation; 2) formuler la généralisation et 3) justifier la généralisation.

Ces trois moments sont interconnectés. Différentes stratégies peuvent y être utilisées : généralisation par répétition, généralisation par répétition guidée; généralisation à partir d'un exemple générique, généralisation s'appuyant sur une autre généralisation, généralisation s'appuyant sur une visualisation (Squalli et Drapeau, *soumis*).

D'une manière naturelle, les élèves construisent des généralisations souvent de façon inconsciente. Par exemple, certains diront que le nombre 246 est divisible par 6, car le chiffre des unités est égal à 6, et généraliseront cette procédure à tous les nombres de la forme ab6 (a et b étant des chiffres, a non nul); d'autres diront que le nombre 918 est divisible par 9, car 918 est composé de 9 et de 18, tous deux divisibles par 9 et généraliseront cette découverte au cas des nombres de la forme (9|ab ==> 9|ab9, " a, b chiffres); ou encore (c|ab ==> c|abc, " a, b , c chiffres), (Guzmán, Kieran et Squalli, 2002). Certaines de ces règles personnelles peuvent s'avérer vraies pour des cas particuliers mais fausses en général (c'est le cas du premier exemple) ou toujours vrai (cas du deuxième exemple). Il est important d'amener les élèves à verbaliser la règle générale implicite qu'ils utilisent et la justifier.

Afin de documenter comment favoriser l'émergence de généralisations en contexte de classe, chez des élèves en difficulté grave d'apprentissage, avant toute introduction à la notation algébrique conventionnelle, nous avons expérimenté une activité basée sur la situation « Jeux de découverte et de justification de règles fonctionnelles ». Pour l'activité elle-même, on utilise une grille numérique formée de 10 lignes et 10 colonnes, contenant la suite des nombres de 1 à 100; sur laquelle on place une forme (constitué de cinq rectangles opaques sauf un, voir figure 1) selon une orientation fixée. Le but de l'activité est de construire une stratégie gagnante pour une forme donnée, c'est-à-dire permettant de prédire le nombre apparaissant dans la case nommée sortie étant donné un nombre initial connu dans la case nommée entrée.

Quel est le lien avec l'algèbre ? Chaque forme est reliée à une relation fonctionnelle : une relation de dépendance entre *l'input*, le nombre initial de la case entrée lu sur la grille numérique est *l'output*, soit le nombre de la grille ainsi défini se trouvant dans la case sortie de la forme. À chaque forme correspond donc une règle fonctionnelle qu'il s'agit de trouver.
Cette situation amène les élèves à approcher la notion de fonction ou de régularité. Cette notion est assurée par l'invariance de la forme et sa mobilité (le fait qu'elle soit détachée de la grille et peut être déplacée sur la grille).

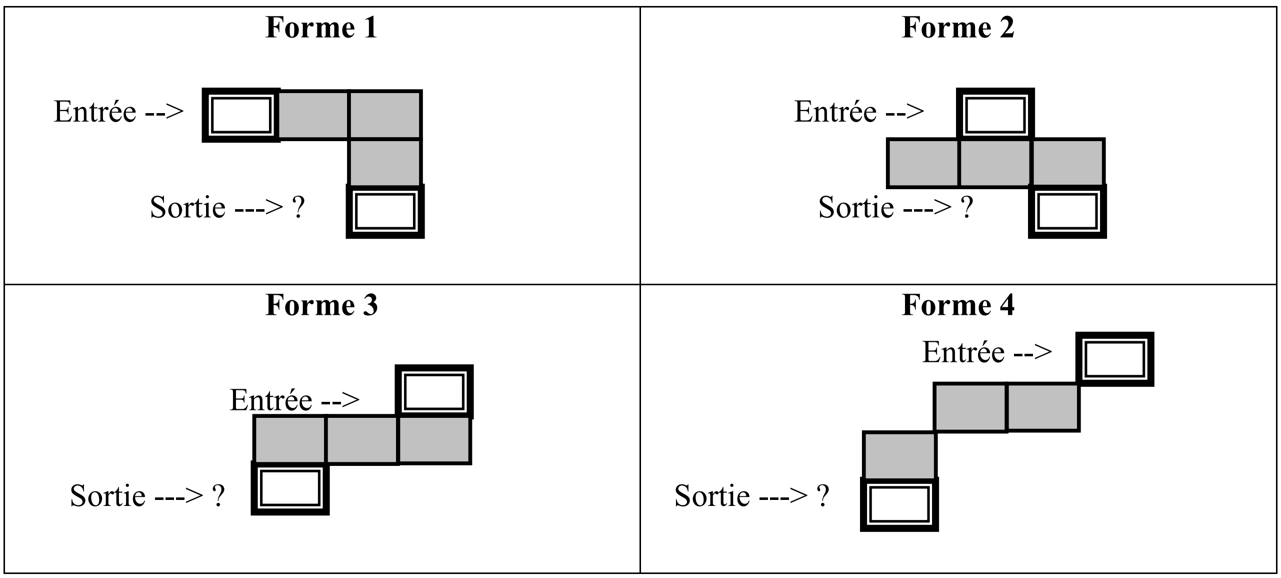

Figure 1

L'activité est structurée autour de 5 phases. Les élèves travaillent en équipes de 4.

<u>Phase 1 : Phase d'initiation</u> : L'enseignante explique aux élèves le déroulement du jeu et joue contre un élève en utilisant la forme 1.

<u>Phase 2 : Construction de stratégie gagnante d'équipe</u>: Après un travail individuel avec la forme 2, pour se familiariser avec le matériel, opérer la forme sur plusieurs nombres et trouver une stratégie gagnante, on joue un contre un. Un élève tient la grille, dicte le nombre initial à son coéquipier qui doit découvrir le nombre dans la case sortie *sans utiliser la grille* (mais il conserve la forme 2). On inverse les rôles. Les élèves confrontent leurs stratégies pour se préparer et jouent contre l'autre dyade de l'équipe. La grande équipe formule sa stratégie gagnante.

Phase 3 : jeu entre équipes avec le support de la grille : On joue avec la forme 2. Un représentant de chaque équipe est envoyé au tableau sans aucun support, et doit utiliser la stratégie de son équipe pour trouver le nombre adéquat en fonction du nombre initial dicté par l'enseignant.

Phase 4 : jeu entre équipes sans le support de la grille : Même déroulement que la phase précédente à la différence que, dans cette phase, les équipes construisent une stratégie gagnante pour la forme 3 mais sans le support de la grille numérique.

Phase 5 : Élaboration de la forme la plus difficile (10 minutes) : Dans cette dernière phase, chacune des équipes doit construire une forme qu'elle pense être la plus difficile possible (tout en respectant certaines contraintes imposées par l'enseignante, comme le nombre maximum de cases). Ils doivent connaître une stratégie gagnante pour leur forme. Chaque équipe tente de trouver une stratégie gagnante pour les formes des autres équipes.

Voici quelques résultats préliminaires de cette recherche.

Réussite de la dévolution

Les élèves ont accepté de s'engager dans la situation sans questionner sa pertinence. Bien que la plupart soient considérés comme des élèves en trouble de comportement, souffrant de déficit d'attention, ils ont tous été actifs durant pratiquement toute la durée de l'activité, laquelle était relativement longue (90 minutes).

Stratégies de généralisation identifiées

Nous avons pu identifier deux catégories de généralisation.

Catégorie 1 : La forme sert de « patron de pensée ».

Le sujet s'appuie sur la forme de la forme pour prédire l'output étant donné l'input. Pour que les stratégies de cette catégorie soient applicables et efficaces pour n'importe quel nombre, il faut que l'élève ait une bonne image du voisinage des nombres sur la grille. Il y a quatre différents niveaux :

1er niveau : Pour découvrir l'output mentalement à partir de l'input, l'élève parcourt les différentes cases de la forme sans sortir de celle-ci.

Exemple : Pour la forme 2, Samuel descend d'une rangée, va à droite de un et descend une autre rangée. Il suit donc la forme sans prendre de raccourci.

2e niveau : Même stratégie que dans le niveau 1, mais le sujet prend des raccourcis ou sort de la forme.

Exemple : Pour la forme 2, Kouakou descend d'une rangée en diagonale à droite puis descend d'une rangée. Il prend donc un raccourci tout en restant dans la forme. Byanka, quant à elle, descend deux rangées et se déplace d'une case à droite. Elle sort donc de la forme.

3e niveau : Le raisonnement porte sur la forme et non sur la grille.

Exemple: Pour la forme 3, Kouakou indique « + 10, - 3, + 10 ». Bien qu'il y ait une erreur (il aurait dû indiquer « + 2 » plutôt que « + 3 »), il y a une réflexion sur la forme.

4e niveau : Le sujet remplace la forme par une règle. Cette règle s'inspire de la forme, mais peut être basée sur des raccourcis ou des débordements de la forme.

On remarque pour le premier et le deuxième niveau une dépendance à la grille, alors que pour le troisième et le quatrième niveau, il y a un détachement de la grille.

Catégorie 2 : Le sujet s'appuie sur la régularité numérique entre l'input et l'output. La forme de la forme ne joue aucun rôle ici.

Exemple: Pour la forme 2, Kevin indique qu'il ajoute 1 aux unités et 2 aux dizaines.Cette règle se présente à l'élève comme une stratégie gagnante induite à partir de quelques essais particuliers.

En guise de conclusion, nous invitons le lecteur à réfléchir aux questions suivantes :

1) Est-il pertinent de proposer de telles activités à des élèves du primaire ?

2) Est-il pertinent de proposer de telles activités à des élèves en difficulté grave d'apprentissage?

3) Est-ce que l'enseignement de l'algèbre avant la lettre au primaire est possible? Est-il pertinent? Si oui, quelle est la conséquence sur l'arithmétique enseignée au primaire et sur l'algèbre enseignée au secondaire?

Références

Guzmán, J. H., Kieran C. et Squalli, H. (2002) La calculadora con pantalla multilínea y el surgimiento de estrategias numéricas en alumnos de primero, segundo y tercer año de secundaria. *Educacion matematica*.

Kaput, J.J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by «algebrafying» the K-12 curriculum. In the *Proceedings of a National Symposium, may 27 and 28, 1997. The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum* (pp. 25-26). Washington, D.C. : National Academy Press.

Mason, J. (1995). *Invoking Children's Powers of Mathematical Thinking. in the Early Development of Algebraic Reasoning* : Draft papers for the National Council of Teachers of Mathematics Research Precession Symposium.

Mason, J. (1994) L'esprit mathématique. Montréal : Modulo éditeur

Mason, J. and D. Pimm (1984). Generic Examples: Seeing the General in the Particular. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 15, pp. 277-289.

Sierpinska, A. (1995) *La compréhension en mathématiques*. Montréal : Modulo Éditeur. Collection La Spirale.

Squalli, H. et Drapeau, G. (soumis) L'algèbre comme outil de généralisation. *Bulletin de l'AMQ*. Montréal : Association Mathématique du Québec.

Squalli, H. (2003). Plaidoyer en faveur d'une algébrisation des mathématiques de l'école primaire. *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques 2003*. Université du Québec à trois-Rivières. Trois-Rivière, Québec.

Squalli, H., M. Dumont, et al. (2002a). L'analogie: un moyen heuristique efficace, mais avec des effets pervers. Cas d'une élève en difficulté en algèbre. *Envol*, vol. 120, pp. 19-22.

Squalli, H. (2002b) Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire : un exemple de raisonnements à l'aide de concepts mathématiques. *Instantanés mathématiques.* Volume XXXIX, pp. 4-13. Automne 2002.

Squalli, H. (2000) Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Thèse de doctorat. Université Laval : Québec

---

Notes

[i] Les derniers *Principles and Standards for School Mathematics* du NCTM proposent même d'enseigner l'algèbre depuis la maternelle! (NCTM, 2000).

[ii] Ensemble de processus de pensée (comme généraliser, opérer sur l'inconnue, exprimer des relations fonctionnelles, etc.) essentiels dans les activités mathématiques où figurent des opérations (comme l'addition, la multiplication, la relation suivi de, etc.) mais répétées un nombre fini de fois (Squalli, 2000).