Quels besoins mathématiques pour la formation des professeurs ? Le cas des systèmes de nombres

Gisèle Cirade * Université de Toulouse II-Le Mirail (France), IUFM de Midi-Pyrénées & ERT 64 GRIDIFE ; UMR P3 ADEF, Aix-Marseille université, INRP, France
gisele.cirade@toulouse.iufm.fr

Résumé

L'univers mathématique auquel sont confrontés les professeurs en formation initiale se révèle pour eux plein d'embûches à propos de questions souvent inattendues pour un observateur extérieur, mais que révèlent les dispositifs mis en place dans la formation que nous avons pu observer cliniquement sur plusieurs années. Nous avons choisi d'exposer, dans le cas des systèmes de nombres, quelques-unes des difficultés rencontrées par les élèves professeurs, qui, en bien des cas, apparaissent à l'analyse comme des symptômes de difficultés qui affectent la profession elle-même.

1. Introduction

Les nombres constituent une part essentielle autant qu'immémoriale de l'univers mathématique mais, dans le curriculum scolaire aujourd'hui en France, cette part est mitée par d'innombrables lacunes que le professeur stagiaire en formation initiale à l'IUFM[1] découvre, non sans surprise et sans inquiétude, non sans en être plus ou moins fortement gêné en tout cas, lorsqu'il entreprend, comme il le doit, de l'enseigner.

Dans le cadre d'une recherche (Cirade, 2006) portant sur la formation initiale des professeurs de mathématiques dispensée au fil de plusieurs années à l'IUFM d'Aix-Marseille, depuis l'entrée en première année afin de préparer le concours de recrutement jusqu'à la prise en main de classes de collège ou de lycée en deuxième année, nous avons pu mettre en évidence l'écart considérable qui existe entre les *mathématiques à enseigner* et le repérage nécessaire d'un corpus de *mathématiques pour la profession* (de professeur de mathématiques) qui devrait permettre d'élaborer des *mathématiques pour l'enseignement* à la fois authentiques épistémologiquement, cohérentes formellement et adéquates didactiquement.

Ce travail de recherche s'est appuyé sur une étude *clinique* de ladite formation, étude qui s'est donnée pour objet la *parole* qui circule au sein de la formation étudiée en exploitant un dispositif interne à la formation, celui des *questions de la semaine* auquel fait écho le *forum des questions* où formés et formateurs ont tour à tour la parole, sous une forme écrite ou rapidement mise par écrit. C'est sur ces traces écrites, figurant dans les *notes du séminaire* rédigées chaque année par le formateur qui en a la charge, que nous allons nous appuyer pour exposer quelques exemples de problèmes mathématico-didactiques auxquels sont confrontés les élèves professeurs en formation et qui, en bien des cas, sont révélateurs de problèmes rencontrés, plus largement, par la profession.

2. Les décimaux comme symptôme

La question des nombres, ou plutôt des *systèmes* de nombres (N, Z, D, Q, etc.), cristallise en elle un ensemble de difficultés que, vraisemblablement, les lauréats des concours de

* Université de Toulouse II-Le Mirail (France), IUFM de Midi-Pyrénées & ERT 64 GRIDIFE.

1. IUFM : institut universitaire de formation des maîtres.

recrutement entrant en deuxième année d'IUFM n'anticipent guère. Sans doute y a-t-il là, en grande partie, un fait d'époque, écho d'une formation mathématique dans laquelle le souci de la construction des systèmes de nombres n'affleure plus guère, alors que, par contraste, la question occupait le devant de la scène à l'époque des « mathématiques modernes ». Longtemps, la formation supérieure en mathématiques fait rencontrer la « construction » de Z à partir de N, puis de Q à partir de Z, par « symétrisation », ensuite de R à partir de Q, enfin, de C à partir de R, par différents procédés. Or cet accent mis sur la construction des systèmes de nombres, qui atteint son apogée dans les années 1970, va ensuite être levé progressivement, au point que nombre de candidats au CAPES de mathématiques semblent aujourd'hui découvrir ces constructions à l'occasion de la préparation au CAPES, concours dont la liste des sujets de l'épreuve dite « d'exposé » (première épreuve orale d'admission) comporte traditionnellement la « construction du corps Q des rationnels » ainsi que la « construction du corps C des complexes »[2].

Avant d'examiner concrètement les difficultés signalées par les élèves professeurs, il convient de s'arrêter un instant sur la question de l'anneau D des nombres décimaux. Hier comme aujourd'hui, en effet, ce système de nombres, si important traditionnellement dans l'enseignement scolaire des mathématiques, notamment à l'école primaire, semble tout à fait marginalisé dans la construction d'inspiration savante des structures numériques. Ce fait a été pointé et développé par Alain Bronner (1997), l'examen minutieux d'un ouvrage de Jacques Dixmier (1973) auquel cet auteur a procédé étant très éclairant à cet égard :

> Alors que les décimaux sont enseignés dès l'école élémentaire, il semble que les étudiants n'aient plus qu'une familiarité de surface avec ces nombres et l'ensemble D […] Dans la période actuelle, ∃ est un des objets ignorés de l'enseignement universitaire, et même du deuxième cycle de l'enseignement secondaire. […] La place de D dans l'enseignement supérieur est minorée au profit de Q qui occupe l'espace : R est le complété de Q, et c'est sur ce dernier que l'édifice numérique est bâti. Par exemple dans le cours de mathématiques de première année de l'enseignement supérieur de J. Dixmier on rencontre les ensembles N, Z, Q, R. Les trois derniers ensembles de nombres sont construits formellement ; en particulier R est présenté à l'aide des suites de Cauchy de Q. Mais nous ne rencontrons pas de trace de l'ensemble D dans les 615 pages de ce livre, ni même une écriture décimale. (p. 216)

Le parti pris traditionnel, que le point de vue moderne n'a guère entamé[3], consiste à regarder les décimaux comme des cas particuliers de rationnels, dont on fait donc état après avoir construit le corps Q, construction pour laquelle les décimaux n'apporteraient rien s'ils avaient été construits avant, puisque le corps des fractions des décimaux n'est rien d'autre que le corps des fractions des entiers, à savoir Q lui-même. Même à l'acmé des mathématiques modernes, les meilleurs auteurs traitent l'anneau D avec une certaine distance. En 1964, ainsi, dans un ouvrage intitulé *Les notions de mathématiques de base dans l'enseignement du second degré*, Jacqueline Lelong-Ferrand, qui, dans le chapitre V, « Extensions algébriques successives de la notion de nombre », a consacré quelque quinze pages à la construction de Z et de Q, ne consacre que quelques lignes, dans le chapitre VI intitulé « Approximations décimales. Nombres réels », à l'anneau des nombres décimaux, au moment où elle va s'employer à étudier de façon extensive les approximations décimales de nombres réels. Ce projet, bien entendu, suppose que l'on dise quelques mots des nombres décimaux eux-mêmes, ce que l'auteure entreprend de faire dans les termes suivants :

2. Depuis la session 2006, la liste comporte aussi la construction de Z. En revanche, la construction du corps R des *réels* n'apparaît pas dans les sujets proposés ces dernières années.

3. C'est aussi ce point de vue qu'adopte par exemple Daniel Perrin (2005) dans son ouvrage intitulé : *Mathématiques d'école*.

> Avant de parler de développements décimaux illimités, il nous faut rappeler brièvement ce qu'est un *nombre décimal* : cette notion, connue en principe depuis l'école primaire, a besoin d'être précisée auprès des élèves ; et il est bon de justifier les opérations effectuées sur les nombres décimaux.

Les décimaux sont alors définis comme des nombres rationnels particuliers, à la façon classique. Avant de se lancer dans les notions de valeur approchée, de développement décimal, de développement décimal illimité, de nombre réel, l'auteure que nous suivons ici consacre alors ces quelques lignes à l'anneau des décimaux, auquel toutefois elle n'attribue pas de notation propre :

> Les nombres décimaux constituent un sous-ensemble de l'ensemble Q des nombres rationnels ; et il est facile de voir que la somme et le produit de deux nombres décimaux sont des nombres décimaux : en langage algébrique, on peut dire que l'ensemble des nombres décimaux est *stable* vis-à-vis des opérations d'addition et de multiplication.
>
> D'autre part, nous pouvons considérer des fractions décimales dont le numérateur *a* est un entier relatif quelconque : les nombres décimaux correspondants seront dit *relatifs*. On voit alors facilement que les nombres décimaux relatifs constituent un *anneau* (sous-anneau de l'anneau Q). Mais le quotient de deux nombres décimaux n'est pas toujours un nombre décimal : les nombres décimaux ne constituent donc pas un corps.

Les décimaux sont donc pensés comme des rationnels particuliers. On voit au passage le problème d'enseignement qui en résultera : comment penser, dans les premières années de l'enseignement scolaire, les nombres décimaux, alors que les nombres rationnels ne sont pas encore disponibles ? À nouveau, on constate ainsi un désajustement entre une certaine culture mathématique noosphérienne[4] et les besoins de la profession en mathématiques pour l'enseignement. Soulignons ici un point majeur de désajustement. Dans le paradigme des mathématiques modernes, la considération d'un système de nombres nouveau suppose ce qu'on nomme alors la « construction » de ce système de nombres. Or le critère qu'il y a bien une construction mathématiquement légitime et licite est celui-ci : étant donné un système de nombres déjà disponible, $\mathcal{N}$, pour en construire une extension $\tilde{\mathcal{N}}$, il convient d'abord de disposer d'un ensemble $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{N}$ (en général, grâce à l'identification de $\mathcal{N}$ à son image par un plongement dans $\mathcal{M}$), tel que l'on ait $\tilde{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{M}$. La toute première étape qui rend possible la construction de $\tilde{\mathcal{N}}$ est ainsi la définition de $\mathcal{M}$. Ainsi en va-t-il avec le procédé de symétrisation évoqué plus haut.

L'exigence structurelle de proposer en premier lieu un cadre ensembliste, généralement obtenu par un produit cartésien d'ensembles supposés donnés et suivi éventuellement d'un passage au quotient par une relation d'équivalence, qui continue d'être proposée aux étudiants en mathématiques, laisse désarmée une profession qui doit construire D à partir de N sans disposer au préalable d'un ensemble plus large et qui, de même, construira le quotient $\frac{a}{b}$ comme un nombre nouveau dont la seule « définition » sera que son produit par *b* est égal à *a*. Cette suite d'extensions du système des nombres supposé disponible procède d'un point de vue *réaliste*, lié notamment aux besoins de nombres pour mesurer : *le besoin*, si l'on peut dire, *est la preuve de l'existence !* Le fait qu'on puisse couper un segment de longueur 10 cm en 3 segments de même longueur est une preuve de l'existence d'un nombre qui, multiplié par 3, donne 10.

L'anneau des décimaux pourrait être construit par l'introduction d'un nombre ω tel que $10\,\omega = 1$, ce qui conduirait à écrire, au moins au niveau supérieur, dans les *mathématiques pour la profession*, non dans les mathématiques à enseigner, que D = Z[ω]. Si, dans cette

---

4. L'ouvrage de Jacqueline Lelong-Ferrand que nous avons cité est ainsi « le développement d'un cours donné à la Faculté des Sciences de Paris en 1962-1963 », cours qui s'adressait aux « étudiants se destinant à l'enseignement des mathématiques dans le second degré ».

construction, on souhaitait disposer d'un ensemble « préalable », qui ne soit pas Q et dans lequel on puisse définir ω, il faudrait prendre le quotient de l'anneau des polynômes Z[X] par l'idéal principal engendré par le polynôme $10\,X-1$, ω étant alors identifié à la classe d'équivalence contenant le polynôme X. Cette « construction » est évidemment trop complexe pour permettre de définir les décimaux dans l'enseignement scolaire, et la solution classique (et moderne) consistant à définir les décimaux comme des rationnels particuliers apparaît ainsi, rétrospectivement, comme sans doute la plus économique. Le problème toutefois est que même cet investissement-là n'est pas à l'ordre du jour du curriculum mathématique actuel : au statut « ancillaire » des décimaux, traditionnel depuis Stevin et que valide à sa façon le CAPES de mathématiques[5], s'ajoute ici une lacune mathématique et épistémologique, dont l'effet le plus sûr est de produire un refoulement du problème des décimaux, ce qui conduira à attribuer *aux élèves* l'origine des difficultés que l'enseignement et l'utilisation de ces nombres feront éventuellement surgir dans la classe.

3. Les nombres et leurs écritures

L'observation des questions soulevées par les professeurs stagiaires montre que leur rencontre avec les problèmes liés au système de nombres utilisé ne concerne pas, mathématiquement du moins, les décimaux, mais d'abord les « fractions ». Le gros morceau, en effet, est constitué en premier lieu par l'enseignement des fractions et, d'une façon difficilement dissociable, de « l'écriture fractionnaire » des « nombres », comme le montrent un grand nombre de questions rédigées par les élèves professeurs. La problématicité surgit en effet, apparemment, dans la notion d'écriture fractionnaire, qui semble apparaître à la fois non familière et (donc) inutile à introduire. C'est ainsi que, en 2005-2006, alors que le sujet a été encore peu travaillé, un professeur stagiaire ayant en responsabilité une classe de quatrième (élèves de 13-14 ans) pose la question suivante[6] :

> Quel est l'intérêt d'appeler les nombres rationnels « nombres en écriture fractionnaire » au collège ? (2005-2006, 4e, semaine 10)

D'emblée, cette interrogation montre une confusion, source indéfinie de difficultés, entre le nombre et son *écriture* (ou plutôt *ses* écritures possibles). Bien entendu, l'écriture fractionnaire est d'abord motivée par la rencontre avec le besoin de nombres rationnels qui se trouvent être non décimaux : si l'on peut *aussi* écrire l'entier 2 sous la forme fractionnaire $\frac{6}{3}$, on ne peut écrire *a priori* le rationnel non décimal $\frac{5}{3}$ *que* sous cette forme – on découvrira *ensuite* qu'on peut aussi l'écrire $\frac{10}{6}$, ou $\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$, ou $\frac{1,5}{0,9}$, etc. Mais dans tous les cas envisagés, au collège notamment, deux ordres de fait doivent être dégagés. Le premier tient à ce que, pour un type d'entités mathématiques donné, par exemple pour ce qui est des nombres rationnels, on dispose d'une écriture que l'on peut qualifier de *canonique*, telle que chacune des entités du type considéré s'y écrive d'une façon *unique* – ou, pour le dire autrement, y reçoive un

5. Lors des sessions 2003 à 2005, dans l'unique exposé mentionnant les décimaux, intitulé « Nombres décimaux. Applications. », l'anneau D, qui n'est même pas nommé, n'a ni à être construit (comme doivent l'être Q et C), ni à être étudié en tant qu'anneau (comme doit l'être Z). En 2006 et 2007, les décimaux n'apparaissent plus que de façon secondaire, dans le sujet « Construction du corps Q des rationnels. Nombres décimaux, développement décimal d'un nombre rationnel. », avant de disparaître en 2008, ce sujet étant maintenant intitulé « Construction du corps Q des rationnels. Propriétés. », sans qu'aucun sujet « nouveau » mettant en jeu les nombres décimaux ne soit ajouté.

6. Les questions présentées sont suivies de l'information codée suivante : année de la formation, classe en responsabilité, semaine dans l'année.

nom unique : « $\frac{5}{3}$ » est ainsi le nom canonique d'un nombre rationnel qui peut être désigné par bien d'autres écritures : $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = 1 + \frac{2}{3} = \ldots$ Ce premier ordre de fait est largement souligné dans le séminaire proposé aux professeurs stagiaires : le formateur insiste sur l'exigence d'apprendre à regarder comme répondant à un *même besoin du travail mathématique* – disposer d'un nom canonique permettant l'identification formelle des entités manipulées – les opérations sur les entiers (qui permettront par exemple de trouver le nom canonique, 15, du nombre dont une écriture est $2 \times 4 + 7$), les opérations sur les rationnels et la simplification des fractions d'entiers (qui permettent par exemple d'obtenir le nom canonique, $\frac{7}{12}$, du nombre dont une écriture est $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} - 1$), les calculs « sur les radicaux » (qui permettent par exemple de déterminer le nom canonique, $1 + \sqrt{3}$, du nombre dont une écriture est $\frac{2}{\sqrt{3} - 1}$), les calculs dans le corps des complexes (qui permettront de déterminer le nom canonique, 2i, du nombre complexe dont une écriture est $(1 + i)^2$), etc.

Le second ordre de fait qui coexiste avec le premier (relatif à la notion d'écriture canonique d'un type d'entités mathématiques) est non seulement que, dans le travail mathématique, une entité apparaît généralement sous une forme non canonique, ce qui appelle sa mise sous forme canonique à des fins d'identification formelle, mais que, quelle que soit l'écriture que reçoit à un moment donné du travail une certaine entité, il convient, *en fonction du projet mathématique poursuivi*, de la réécrire dans une forme en général non canonique mais appropriée pour *montrer* certaines propriétés de l'entité, moyennant un raisonnement en général simple sur la *forme* de l'écriture. C'est ainsi par exemple que si l'on veut comparer les fractions $\frac{3}{7}$ et $\frac{12}{25}$, il n'est pas déraisonnable en ce cas (puisque 3 divise 12 alors que 7 ne divise pas 25) de réécrire la fraction $\frac{3}{7}$ sous la forme $\frac{12}{28}$, ce qui fait apparaître d'un simple coup d'œil que $\frac{3}{7} = \frac{12}{28} < \frac{12}{25}$. Pareillement, l'expression du nombre complexe 2i sous la forme $(1 + i)^2$ permettra de voir que les racines carrées de 2i sont $1 + i$ et $-(1 + i) = -1 - i$.

4. Quotients et rationnels

Arrêtons-nous maintenant sur le premier type de besoins numériques qui, ne pouvant être satisfait par les décimaux, engendre le recours à l'écriture fractionnaire : le besoin de rationnels non décimaux. La question est, aujourd'hui, fort peu claire chez les professeurs, en dépit de la problématique qui s'exprime nettement dans les programmes du collège, anciens et rénovés. Pour la *doxa* professorale, semble-t-il, ce qu'on va noter *a priori* $\frac{4}{3}$ désignerait le « quotient » de 4 par 3. Il est vrai que le programme de sixième (élèves de 11-12 ans) indique qu'il faut « interpréter $\frac{a}{b}$ comme quotient de l'entier a par l'entier b, c'est-à-dire comme le nombre qui multiplié par b donne a. ». Mais qu'entend-on par quotient ? La naturalisation de l'opération de *division* pratiquée avec les entiers puis avec certains décimaux conduit sans doute à supposer que cette opération est toujours possible, ou du moins *à faire comme s'il en était ainsi*. De là le postulat implicite que l'on opèrerait dans un *corps* de nombres : la fraction

$\frac{4{,}2}{3}$ désignerait, dans cette vision naturalisante des choses, un nombre dont l'identité serait révélée *en effectuant la division* de 4,2 par 3, opération que, à la manière française, on « pose » ainsi :

$$\begin{array}{r|l} 4{,}2 & \underline{3\quad\quad} \\ 1\,2 & 1{,}4 \\ 0 & \end{array}$$

Dans ce cas, l'écriture fractionnaire $\frac{4{,}2}{3}$ apparaît comme une manière (provisoire) de désigner le nombre (décimal) 1,4. Qu'en est-il alors de $\frac{4}{3}$? Il est intéressant de noter qu'on trouve très rarement dans l'enseignement prodigué au collège, en sixième ou en cinquième (élèves de 12-13 ans), la preuve que ce quotient, s'il existe, *n'est pas* un nombre décimal. Il est pourtant facile de montrer que si, par exemple, on prenait pour quotient $q = 1{,}33$, on aurait $3 \times q = 3{,}99 \neq 4$; et, plus généralement (mais de façon plus « abstraite »), que si l'on prenait un décimal q dont la dernière décimale non nulle soit l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le produit $3 \times q$ aurait pour dernière décimale, selon le cas, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, mais jamais 0, ce qui montre qu'on n'obtient jamais l'égalité $3 \times q = 4$.

L'idée semble prévaloir que la notation fractionnaire $\frac{a}{b}$ est un artifice utile qui, toutefois, reste un artifice face à la véritable « réalité numérique », celle du nombre qui serait le quotient de a par b, et qui s'obtiendrait par une extension de l'algorithme usuel de division. C'est au reste ce que formalise la notion de *développement décimal* (« illimité ») d'un rationnel, avec sa partie apériodique et sa partie périodique : ainsi la fraction (ou l'écriture fractionnaire) $\frac{103}{666}$ désigne-t-elle le quotient de la division de 103 par 666, que l'on trouve égal à $0{,}1\overline{546}$. Il s'agit là d'une idée prégnante[7] dans la culture mathématique scolaire, selon laquelle ce nombre, en quelque sorte, existerait « déjà » et n'aurait donc pas à être « introduit » ni, à plus forte raison, « créé » : ce serait le nombre même que l'on obtient *en effectuant la division* de a par b. C'est ce point de vue qui organise par exemple la logique de la question suivante, formulée par une professeure stagiaire de l'année 2005-2006 ayant en responsabilité une classe de cinquième, après une première présentation de la théorie des « fractions d'entiers ».

> Le thème […] est la comparaison et l'addition en écriture fractionnaire. Pour l'instant, on a écrit que $\frac{a}{b}$ est le quotient de a par b… (Je comptais donner la définition « $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a » lorsque j'entamerai la multiplication en écriture fractionnaire.) Puis j'ai précisé que, lorsque a et b étaient des nombres entiers, le quotient $\frac{a}{b}$ était appelé fraction (comme je l'ai vu dans de

---

7. La prégnance de cette idée est si forte qu'on la voit réapparaître dans le document d'accompagnement du programme du cycle terminal de la série littéraire paru en janvier 2006 où figure une rubrique intitulée *Écriture décimale d'un nombre rationnel*, qui commence ainsi : « La définition donnée en classe de sixième de l'écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ (a et b étant deux entiers naturels avec b non nul) est : "$\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b donne a, autrement dit $\frac{a}{b}$ est le résultat de la division décimale de a par b." » Le commentaire « autrement dit $\frac{a}{b}$ est le résultat de la division décimale de a par b » est un ajout – et une « invention » – des rédacteurs du document d'accompagnement cité : ce commentaire n'apparaît nullement, sous cette forme ou dans une autre formulation, dans le programme de 6e ancien ou nouveau.

nombreux livres, ainsi qu'avec ma [professeure conseillère pédagogique]). Depuis ma visite et la discussion qui a suivi, je sais qu'il y a un problème dans cette définition (entre la nature et l'écriture d'un nombre), mais je dois dire que je saisis mal le problème. Peut-on revenir un peu sur tout ça ? (2005-2006, 5e, semaine 18)

Tout se passe comme si cette vision des fractions était hantée par un spectre : celui de la « valeur » de la fraction, soit le nombre que désignerait la fraction et qui serait *la véritable réalité numérique*, objet de tout calcul et de toute considération. Cela barre l'accès à un point essentiel de la construction – ou de la découverte – des systèmes de nombres que l'on trouve pourtant développé dans la formation presque chaque année depuis bien longtemps. À titre d'exemple, considérons la question suivante :

Pour définir la fraction $\frac{b}{a}$ ($b \in$ N, $a \in$ N*), on dit que c'est l'unique solution de l'équation $a \times x = b$. Donc, sous-entendu, la multiplication est bien définie ! Mais quelle est cette multiplication ? On définit un objet $\frac{b}{a}$ sur lequel on sait déjà opérer ! En principe, on définit des objets, *puis* des opérations sur ces objets. (2002-2003, 4e, semaine 8)

Cette question montre bien que la définition de $\frac{a}{b}$ comme le nombre dont le produit par b est égal à a n'est pas reçue sans difficulté par les professeurs stagiaires. Elle donne l'exemple même du paralogisme qu'il s'agit pour le formateur d'éradiquer : l'élève professeur raisonne dans le paradigme « modernisme » au lieu de se placer d'un point de vue « réaliste ». Les notes du séminaire proposent alors le développement suivant, étayé par un exemple dans lequel il s'agit de mesurer la longueur d'un segment partagé en trois segments de même longueur.

Le raisonnement de la [deuxième] question part de prémisses inadéquates (de type « modernistes »). La problématique adoptée au collège en ce qui concerne les *nombres* (en général) est de type *réaliste* : on suppose – il s'agit là d'un composant clé de la *théorie* sous-jacente au curriculum mathématique du collège… – *qu'existent les nombres dont on a besoin pour mesurer les grandeurs géométriques usuelles*. Le « système de nombres » ainsi nécessaire, $\mathcal{N}$, est dans le même mouvement – la chose est consubstantielle à l'idée même de nombres – supposé constituer un *demi-anneau commutatif, unifère et intègre dont les lois prolongent celle de* N.

Il y a donc cette découverte, vécue sans doute comme étrange par beaucoup d'entre eux, que, à partir du moment où l'on admet que $\frac{a}{b}$ est un nombre – donc l'élément d'un anneau commutatif, unitaire et intègre qui contient les décimaux comme sous-anneau – et que ce nombre est solution de l'équation $bx = a$, *toutes* les opérations sur les écritures de la forme $\frac{a}{b}$ sont complètement déterminées (sans recours à quelque mise en relation modélisante que ce soit) : les dés sont jetés, les jeux sont faits ! Le point « faible » de la construction précédente est, à l'évidence, qu'on ne s'y préoccupe pas de sa consistance. Là encore un développement spécifique vient resituer fermement les choses, en précisant que « bien entendu, il resterait à montrer que l'anneau commutatif, unitaire, intègre supposé existe bien, c'est-à-dire, en termes de logique, que si l'hypothèse d'existence du système des nombres entiers naturels n'entraîne pas de contradiction, alors il en est de même de l'hypothèse de l'existence du système des quotients d'entiers naturels. De tels résultats dits de *consistance* (ou de non-contradiction) *relative* n'apparaissent pas avant le XIXe siècle. » Cette mise en perspective historique ouvre sur une conclusion tout aussi ferme, qui souligne le leurre d'une croyance naïve en la possibilité de donner une démonstration mathématique de consistance « absolue ».

Au collège et au-delà, on s'en tiendra à l'approche « réaliste » des nombres sagement proposée par les programmes, en n'oubliant pas que la seule preuve d'existence possible serait un résultat de consistance *relative*, du type : si le « système de nombres » supposé, par exemple le système $\mathcal{N}$ des quotients $\frac{a}{b}$, comportait une *contradiction*, alors *il en irait de même d'un système de nombres réputé pourtant non contradictoire*, ici N. Tel est le sens – bien mal compris, si l'on voit en elles des preuves de non-contradiction *absolue* – des prétendues « constructions » de Z à partir de N et de Q à partir de Z (ou de Q_+ à partir de N).

On voit ici affleurer des besoins en *mathématiques pour la profession*, c'est-à-dire ces mathématiques que la profession doit connaître pour permettre aux professeurs de s'engager dans l'enseignement de ce que le programme prescrit, et dont la non-disponibilité risque de peser lourd lorsqu'il s'agira pour eux de concevoir et réaliser leur enseignement.

5. Décimaux et approximations décimales

L'oubli déjà noté des décimaux dans la formation mathématique supérieure induit un éloignement à leur endroit de la part de ces ex-étudiants que sont les professeurs stagiaires. Ceux d'entre eux enseignant en collège – notamment – doivent alors apprendre à avoir à ces nombres un rapport pour eux inédit. À cette occasion, ils vont s'apercevoir que cette matière mathématique recèle bien des points obscurs. On a vu plus haut l'incertitude qu'engendrait la co-présence, dans le texte des programmes, de deux expressions voisines mais distinctes, « fraction » et « écriture fractionnaire ». La question suivante montre une tentative d'expliquer cette « anomalie » par une perturbation apportée précisément par les décimaux :

> Doit-on parler de la « fraction » $\frac{2}{3}$ ou de « l'écriture fractionnaire » $\frac{2}{3}$ en classe de 4^{e} ? Il me semble que l'on parle de fraction lorsque numérateur et dénominateur sont des entiers (non nul pour le dénominateur), et le terme « écriture fractionnaire » est réservé aux quotients de décimaux (non nuls). Cette distinction ne semble pas aussi nette dans les programmes ni chez les collègues. Qu'en est-il exactement ? (2001-2002, 4^{e}, semaine 7)

La question suivante manifeste aussi le sentiment d'une perturbation que l'on tente – la chose est rarissime – de neutraliser par l'invocation bienveillante de la calculatrice.

> Quel est l'intérêt de cette compétence exigible : « Ramener une division dont le diviseur est décimal à une division dont le diviseur est entier » ? On transforme ainsi $\frac{1,65}{0,5}$ en $\frac{16,5}{5}$; or la calculatrice peut effectuer la division dans les deux cas. (2004-2005, 5^{e}, semaine 10)

Une autre question montre que la « perturbation » vécue par le professeur correspond parfois à une perturbation réelle du côté des élèves. C'est ce que suggère en tout cas la question ci-après, dont l'auteur a en responsabilité une classe de seconde (élèves de 15-16 ans).

> Pour mettre sous forme réduite une écriture fractionnaire du type $\frac{228}{136,8}$, quelques élèves ont utilisé la notion de PGCD dans l'anneau des décimaux D. Cette généralisation, clairement inconsciente de la part des élèves, fournit cependant une méthode de réduction des écritures fractionnaires. Faudrait-il « censurer » cette technique pour lui préférer la voie classique consistant à se ramener dans Q ? Peut-on l'accepter sans entrer précisément sur les détails de la divisibilité dans D ? (2004-2005, 2de, semaine 14)

Le caractère perturbateur des décimaux est, on le voit, relativement multiforme. La question précédente a le mérite de rappeler subrepticement que les questions de la division et de la divisibilité dans D sont, à l'évidence, très peu familières dans la culture mathématique des élèves professeurs. En conséquence, on avance très précautionneusement, comme cela semble être le cas de l'auteur de la question suivante :

Le programme de 6e mentionne que l'on peut introduire la division en encadrant un entier ou un décimal par deux multiples consécutifs d'un nombre entier. À partir de cette idée peut-on introduire la division décimale et euclidienne ? (2000-2001, 2de, semaine 18)

Cette question fera d'ailleurs l'objet d'une réponse explicite de la part du formateur, qui a sans doute vu là une lacune mathématique de ceux auxquels il s'adresse. Après avoir repris la notion de division euclidienne, le développement s'attache à préciser celle de division décimale et l'on voit apparaître, à peine esquissée, la notion de *valeur décimale approchée*. La situation comporte quelques subtilités. De fait, la notion générale de valeur décimale approchée pose problème dans la culture professorale, comme il ressort de la question ci-après.

Je suis mal à l'aise sur les valeurs approchées car je ne sais pas si on doit respecter la définition et dire explicitement aux élèves que π a une infinité de valeurs approchées à 10^{-2} près : 3,14 car $|\pi - 3{,}14| \le 10^{-2}$, 3,15 car $|\pi - 3{,}15| \le 10^{-2}$, 3,141 car $|\pi - 3{,}141| \le 10^{-2}$, etc. Est-ce un résultat mathématique (je l'entends chez mes collègues) de dire qu'une valeur approchée à 10^{-2} près est un nombre décimal à *deux* chiffres après la virgule ? (2001-2002, 4e, semaine 8)

Cette question, à nouveau, va susciter une réponse en forme de mise au point qui précisera par exemple que, traditionnellement, « *la* valeur approchée décimale à 10^{-p} près *par défaut* à p décimales au plus est le plus grand nombre α^* de la forme $m \cdot 10^{-p}$ tel que $\alpha^* \le \alpha$ ».

La calculatrice, qui peut apparaître comme opportunément bienfaisante, on l'a vu, est généralement tenue pour un mauvais objet. C'est ce qui apparaît, de façon caricaturale, dans la question suivante dont nous ne reproduisons que les premières lignes :

Le problème des calculatrices est qu'elles donnent aux élèves qui en sont utilisateurs privés depuis des années [l'impression] que l'écriture canonique des nombres est leur écriture décimale. Du coup, tout problème concernant le calcul sur les fractions ou les radicaux est considéré comme résoluble à la calculatrice et donc non motivé. […] (2004-2005, 4e, semaine 8)

Il est vrai que la calculatrice vient souligner crûment l'absence de maîtrise des questions d'approximations décimales dans la culture mathématique scolaire. Loin d'apaiser l'inquiétude qu'engendre une culture inadéquate, elle exacerbe les difficultés engendrées par cette insuffisante maîtrise des phénomènes d'approximation numérique. En réalité, la calculatrice révèle non seulement une réelle faiblesse de la culture mathématique de la profession en la matière, mais elle surprend même des manières de faire anciennement installées chez les élèves professeurs. Ainsi en va-t-il dans le cas de figure suivant, qu'aucune question n'atteste dans le corpus des questions des professeurs stagiaires, mais que nous avons pu observer notamment dans le cadre de la préparation au CAPES.

Je rencontre des difficultés pour la recherche d'approximation d'un nombre par les suites. Par exemple, $|u_n - \alpha| \le 10^{-3}$, on cherche un n convenable qui vérifie cette inégalité. Le n_0 trouvé convient, *i.e.* $|u_{n_0} - \alpha| \le 10^{-3}$. Mais on doit donner la valeur de u_{n_0} qui est elle-même une valeur approchée, alors comment faire ?

À des techniques anciennes, justes mais non mises à jour, il faut ainsi opposer une pratique dont la justification ne va nullement de soi, même si, en général, elle n'entraîne pas de véritable problème, qui consiste à déterminer n tel que u_n soit une valeur approchée à 10^{-3} près de α et à adopter pour valeur décimale approchée prétendument à 10^{-3} près de α une valeur tronquée de la valeur décimale approchée de u_n qu'affiche la calculatrice, en général sans contrôle sérieux sur la troncature effectuée[8].

8. Si, notamment, on ne conserve que les trois premières décimales, on a toutes chances de fournir une valeur incorrecte : $u_n = 0{,}9995 - \frac{1}{n}$ est à moins de 10^{-3} de sa limite $\ell = 0{,}9995$ dès que $n \ge 1\,000$; or on a $u_{1\,000} = 0{,}9985$. Si l'on tronque à la 3e décimale, on obtient $u_{1\,000}^* = 0{,}998$ et l'on a donc $\ell - u_{1\,000}^* = 0{,}0015 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Dans l'organisation mathématique savante, le traitement des approximations décimales repose sur la théorie des nombres réels, indisponible dans une forme satisfaisante tout au long des années de la scolarité obligatoire et au-delà. En 2004-2005, afin de travailler sur la difficulté de constituer une théorie et une technologie scolaires des écritures décimales[9], le séminaire propose aux élèves professeurs un petit travail à partir des trois questions suivantes :

1. Pourquoi est-il utile de connaître et de manipuler l'écriture décimale des nombres non entiers ?
2. Quelles connaissances sont utiles à propos de l'écriture décimale des nombres, et pourquoi (ou pour quoi) ?
3. Quelle est l'influence de l'apparition et de l'emploi des calculatrices sur les réponses à apporter aux questions précédentes ?

Se référant notamment aux questions 2 et 3, le formateur donnera quelques séances plus tard un développement relatif à la notion d'écriture décimale d'un nombre, que nous ne ferons qu'évoquer ici. Après avoir considéré les nombres qui « possèdent une écriture décimale » – il s'agit en fait des nombres décimaux –, on établit que pour tout nombre $\alpha > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre décimal d_n tel que $d_n \leq \alpha < d_n + 10^{-n}$. Cela permettra de parler, de façon générale, de *l'écriture décimale* d'un nombre α *jusqu'au rang n* ; on peut alors vérifier que deux nombres qui ont les mêmes écritures décimales jusqu'à n'importe quel rang sont égaux. Bien entendu, selon la philosophie réaliste du numérique que l'on a déjà rencontrée, ce développement, qui se présente comme valant pour « tout nombre », alors même que le corps des nombres réels n'a pas été défini, doit être lu en quelque sorte « à l'envers » : ce qu'on appellera système de nombres est un anneau (ou un demi-anneau) qui, outre le fait d'être unitaire, commutatif et intègre, doit être ordonné et archimédien. On notera en passant qu'il y a là le point de départ d'une construction rigoureuse des nombres réels, ceux-ci étant identifiés aux « développements décimaux illimités » (DDI), c'est-à-dire aux suites infinies de nombres entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, où a_0 est un entier quelconque tandis que les termes suivants sont compris entre 0 et 9 et ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. Cette vision de la définition des nombres réels, dont Henri Lebesgue (1931) s'était fait l'avocat avant-guerre, fut mise à l'honneur, autour de 1970, dans le cadre de la « réforme des mathématiques modernes » : elle apparaissait alors dans le programme de la classe de quatrième[10]. Cette introduction dans le curriculum des collèges avait été préparée au cours des années 1960 par différents auteurs : ainsi trouvera-t-on dans l'ouvrage déjà cité de J. Lelong-Ferrand (1964, pp. 127-141) une construction complète des réels fondée sur la notion de développement décimal illimité, construction que nous ne ferons que mentionner ici, mais dont on peut penser que sa présence dans la formation des futurs professeurs ne serait pas déraisonnable. Cette analyse rejoint celle d'A. Bronner (1997) qui, dans ses travaux, a étudié l'influence de la noosphère durant la période citée :

> En fait l'introduction de la construction de l'ensemble des nombres réels dès le collège par la démarche précédente était préméditée dans la noosphère. Des premiers indices apparaissaient déjà chez H. Lebesgue (1931), et plus près de nous, par exemple chez J. Lelong-Ferrand (1964). […] J. Lelong-Ferrand situe la position de cette démarche dans la noosphère avant qu'elle soit intronisée dans le secondaire dans la période des mathématiques modernes […] Ainsi, à travers les idées développées par les mathématiciens précédents, et apparues bien avant la réforme – pour Lebesgue avant 1930 – nous retrouvons *les traits des programmes de la période 68-78*. Ces positions de membres de la sphère savante sur le problème de l'enseignement des structures numériques dans le secondaire ont dû grandement influencer cette réforme. (pp. 122-127)

9. Il s'agit ici de *théorie* et de *technologie* au sens de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 2007, pp. 714-716).

10. Voir par exemple Biancamara et al. (1971, pp. 144-161).

6. Besoins numériques

Le besoin des nombres réels positifs s'introduit de manière un peu oblique et relativement cachée dans la formation proposée – par les notions d'*espèce de grandeurs* et de *mesure des grandeurs*. Les besoins numériques au collège mettent clairement en évidence la nécessité de disposer au moins des nombres *constructibles*, même si le corps des constructibles ne permet pas de satisfaire entièrement les besoins numériques du travail mathématique, et cela dès la classe de sixième. C'est ainsi que le nombre π, par exemple, nécessaire pour exprimer la mesure d'un arc de cercle est, on le sait, transcendant. D'une manière plus large, le problème des angles et de la mesure des angles vient compliquer subrepticement le problème du système des nombres nécessaire : on peut voir que tout un ensemble de besoins numériques conduisent inévitablement vers l'introduction du corps « complet » des nombres réels, ce qui rejoint l'expérience historique. Bien avant d'avoir clarifié les propriétés d'irrationalité, d'algébricité, de constructibilité et de transcendance, les mathématiciens avaient supposé – implicitement puis explicitement – la disponibilité d'un tel système de nombres. Ce problème général et récurrent a conduit A. Bronner (1997, 2007) à introduire la désignation de *nombres idécimaux* pour pointer ces besoins mathématiques et la nécessité de s'intéresser à de tels nombres.

Quoique bien réelles, les nombreuses obscurités qui, dans la culture des professeurs de mathématiques, affectent la question du système des nombres utilisé, ne doivent pas être l'arbre qui cache la forêt : c'est presque en chaque domaine, en chaque secteur, à propos de chaque thème des programmes de l'enseignement secondaire que surgissent des difficultés *mathématiques* dans l'accomplissement de la mission *didactique* du professeur. La réforme du programme de seconde, à la rentrée 2000, propose une innovation maladroitement étiquetée : à la partie obligatoire du programme est joint un volet constitué de « thèmes d'étude » associés à chacun des trois grands domaines composant le programme – « statistique », « géométrie », « calcul et fonctions ». Le professeur doit travailler avec sa classe, dans une certaine liberté didactique, sur au moins un thème d'étude par domaine. Nous nous arrêterons ici, pour terminer, sur le thème « Caractérisation des éléments de ∃ et de Θ, soit en termes de développement décimal fini ou périodique, soit comme quotient irréductible d'entiers (le dénominateur étant ou non de la forme $2^p \times 5^q$) ». Il s'agit là d'une question qui, au moment de sa réintroduction, a cessé depuis longtemps de figurer dans la culture des professeurs de mathématiques. Dans la formation, la question est plusieurs fois abordée – en relation précisément avec sa réintroduction en classe de seconde. Les développements qui lui sont consacrés commencent par rappeler qu'il s'agit là d'un thème autrefois présent dans l'enseignement primaire supérieur. À titre d'illustration, les notes du séminaire comportent des extraits d'un manuel d'arithmétique conforme au programme du 26 juillet 1909 (Marijon et al., s.d.). Les notes examinées soulignent également que l'un des grands types de problèmes autrefois proposés à un niveau élémentaire consistait à trouver ce que l'on appelle alors la *fraction génératrice* d'un nombre rationnel non décimal donné par son développement périodique illimité. À cela s'ajoute une remarque sur la détermination de la longueur de la partie périodique du développement : cette détermination, lit-on, « était en fait regardée autrefois comme se situant au-delà de l'horizon mathématique des études secondaires ». Le rédacteur des notes indique que, lorsque la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, et b divisible ni par 2 ni par 5, la longueur ℓ de sa partie périodique est égale au plus petit des entiers naturels n tels qu'on ait $10^n \equiv_b 1$. C'est ainsi que, si $b = 11$, on a $10^1 = 10 \equiv_{11} 10$ et $10^2 = 100 = 9 \times 11 + 1 \equiv_{11} 1$, en sorte que $\ell = 2$, etc. Le manque dont le travail du séminaire se fait l'écho est patent, classique autant que l'est la solution qui, ici, lui est apportée. Il semble que, de façon durable, répétitive, certaines questions de mathématiques qui constituent le soubassement irremplaçable de l'enseignement secondaire soient mises en jachère, après avoir dûment porté fruits. Ainsi voit-on se multiplier les guérets mathématiques, où la profession ne parvient pas à satisfaire ses besoins de connaissances.

Mais aujourd'hui, en bien des cas, le problème se pose aussi de savoir s'il existerait *d'autres* techniques, qui apparaîtraient plus appropriées que des techniques anciennes, étant donné les conditions et les contraintes sous lesquelles une classe d'aujourd'hui vit sa vie mathématique. Ainsi en va-t-il dans la question suivante, où l'on voit les élèves jouer la calculatrice *contre* la théorie mathématique, sans doute en partie parce que cette théorie est évanescente.

> Concernant le thème d'étude « Nature d'un nombre », j'ai proposé à mes élèves de travailler le sujet d'étude « Nombres décimaux ». Nous avons fait émerger la technique suivante, relative au type de tâches T : « Étant donné un nombre en écriture fractionnaire, déterminer si ce nombre est décimal. » Une première technique a été essayée en tapant à la calculatrice. Elle ne marchait pas puisque les décimales étaient trop nombreuses pour la calculatrice. Une deuxième technique a été mise en place : 1) décomposer le numérateur et le dénominateur de cette fraction ; 2) rendre la fraction irréductible ; 3) si le dénominateur de la fraction irréductible est une puissance de 2 ou de 5, alors… Or, lors d'un DS, les élèves continuent d'utiliser la calculatrice pour déterminer la nature du nombre $\frac{49}{375}$; ils trouvent $\frac{49}{375} =$ 0,13066667, donc c'est décimal. Ils résistent au travail sur le thème « Représentation des nombres dans la calculatrice », qui poussait à « se méfier » des nombres affichés dans la calculatrice. (2004-2005, 2de, semaine 9)

Or on peut faire entrer en piste un théorème mathématique à la fois facile à établir et « inconnu » jusqu'ici : en l'espèce, il permet de s'assurer que si la division de 49 par 375 tombait juste, cela se produirait *au plus tard* à la 8^e décimale[11]. Il suffit donc d'obtenir

$\frac{49}{375} =_{calc}$ 0,130666667 sur une calculatrice pour conclure que ce nombre *n'est pas décimal*.

On voit ici comment les dispositifs mis en place dans la formation permettent de faire émerger les difficultés rencontrées par les élèves professeurs avant de les transmuer en *problèmes*, qui constituent autant de défis lancés à la formation, mais aussi, au-delà, à la profession tout entière qui se trouve face à un immense chantier à faire progresser.

Références

Biancamaria, P., Dehame, E. & Kerambi, G. (1971). *Mathématiques, classe de quatrième*. Paris : Fernand Nathan (Collection Queyzanne et Revuz).

Bronner, A. (1997). *Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Bronner, A. (2007). *La question du numérique : le numérique en questions*. Habilitation à diriger des recherches, Université Montpellier II, Montpellier.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (éds), *Sociedad, Escuela y Matemáticas* (pp. 705-746). Jaén: Universidad de Jaén.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille I, Marseille.

Cirade, G. (sous presse). Les professeurs en formation initiale face au casse-tête des nombres. Dans A. Bronner et al. (éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*.

11. Pour plus de détails, voir Cirade (sous presse).

Dixmier, J. (1973). *Cours de mathématiques du premier cycle*. Paris : Gauthier-Villars.

Lebesgue, H. (1931). *La mesure des grandeurs* (éd. 1975). Paris : Albert Blanchard.

Lelong-Ferrand, J. (1964). *Les notions de mathématiques de base dans l'enseignement du second degré*. Paris : Armand Colin.

Marijon, A., Péquinot, A. & Ségala, J.-L. (s.d.). *Arithmétique, cours complet*. Paris : Hatier.

Ministère de l'Éducation nationale. (2006). *Mathématiques. Cycle terminal de la série littéraire*. Paris : CNDP.

Perrin, D. (2005). *Mathématiques d'école. Nombres, mesures et géométrie*. Paris : Cassini.