Faïza CHELLOUGUI
Assistante en Didactique des Mathématiques à la
Faculté des Sciences de Bizerte
Doctorante en Didactique des Mathématiques :
Thèse en co-tutelle entre Lyon1 et Tunis
Adresse électronique : chellouguifaiza@yahoo.fr
Adresse postale : BP-102, Tunis 1006.

Thème du Colloque n°5

**Communication : La quantification dans l'enseignement tunisien :**

**Une question cruciale de la transition « lycée–université »**

**Résumé**

Dans l'enseignement secondaire tunisien les quantificateurs exprimés en langue naturelle sont présents d'une manière explicite au lycée dans les énoncés des résultats du cours, mais ils sont peu utilisés dans les applications et les exercices (Chellougui, 2000).
Dés le début de la première année d'université scientifique, des énoncés formalisés explicitement quantifiés sont introduits, sans qu'un travail spécifique sur les règles de fonctionnement du symbolisme soit conduit.
Les observations que nous avons conduites au cours de l'année 2001/2002 auprès de 97 étudiants de la première année (mathématiques et informatique) mettent en évidence les difficultés d'appropriation et de gestion des quantificateurs. Si bien que le formalisme, qui devrait être une aide à la conceptualisation, semble pour de nombreux étudiants être un obstacle aux acquisitions mathématiques.

## Introduction

Dans le cadre de ma recherche en didactique des mathématiques, recherche concernant le lycée et l'université, les résultats obtenus ont confirmé l'importance des quantificateurs universel et existentiel dans l'analyse des énoncés mathématiques.

Dans l'activité mathématique, les notions logiques nécessaires ont été introduites dans le langage courant, des difficultés peuvent être dues à des défauts d'interprétation du vocabulaire logico-mathématique ou des lacunes d'ordre opératoire. Ces difficultés sont essentiellement liées à la permutation de l'ordre des quantificateurs universel et existentiel, à l'interprétation des énoncés comportant une double quantification, à la conversion d'un énoncé d'une langue naturelle en une langue formelle, comme la conversion inverse et à l'interaction entre un opérateur de négation et un opérateur de quantification. Ces difficultés engendrent le plus souvent des ambiguïtés et des implicites dans les énoncés proposés aux étudiants.

Dans l'enseignement secondaire tunisien et dans la pratique mathématique, l'usage symbolique des quantificateurs n'a été introduit à aucun moment, d'une part, et les quantificateurs exprimés en langue naturelle sont présents d'une manière explicite mais ils sont peu utilisés dans les applications et les exercices (Chellougui, 2000), d'autre part. Le problème essentiel est présent chez les étudiants qui ne sont pas préparés à ce que proposent les enseignants dans certaines activités mathématiques.

Dans la première partie de mon exposé, à partir d'une étude succincte des réformes de l'enseignement secondaire tunisien d'une part, et à partir d'une analyse de quelques chapitres du manuel tunisien de la $7^{\text{ème}}$ année, section mathématique, d'autre part, j'essaye de relever la présence et l'utilisation des quantificateurs dans l'enseignement secondaire.

La deuxième partie, s'intéresse à la manipulation des quantificateurs par les étudiants dans la pratique mathématique. Les observations que j'ai conduites au cours de l'année 2001/2002 auprès de 97 étudiants de la première année (Mathématiques et informatique) mettent en évidence les difficultés d'appropriation et de gestion des quantificateurs. Si bien que le formalisme qui devrait être une aide à la conceptualisation, semble pour de nombreux étudiants être un obstacle aux acquisitions mathématiques.(Chellougui, 2000)

## L'utilisation des quantificateurs dans l'enseignement secondaire

Dans ce qui suit je présente une approche didactique de la quantification à travers une étude succincte des programmes et des manuels tunisiens centrée sur les expressions utilisant les quantificateurs. J'adopte l'hypothèse que les quantificateurs sont des notions paramathématiques en référence à Chevallard (1985) : ces notions ne font pas l'objet d'un enseignement ; ce sont des objets de savoir auxiliaires, nécessaires à l'apprentissage des objets mathématiques proprement dits. Ce sont des notions-outils de l'activité mathématique.

### Les réformes de 1958 à 1991.

L'enseignement secondaire tunisien a connu quatre réformes importantes : en 1958, 1969, 1978 et 1991.

### La réforme de 1958 :

L’enseignement des mathématiques selon cette réforme s’appuyait sur le contenu de manuels français où le vocabulaire logique était introduit : implication, équivalence logique, signification des quantificateurs "il existe" et "quel que soit".

La réforme de 1969 :

Dans les textes de la réforme de 1969, la notion de logique constitue un objet d’étude et doit être entendue comme une élaboration par l’élève lui-même d’un langage formel à partir de ses propres connaissances.

Il est recommandé que l’élève note les règles d’emploi des quantificateurs, tant pour formuler les énoncés que pour conduire les raisonnements.

La réforme de 1978 :

Aucun changement n’a été signalé pour l’enseignement de la logique selon les textes de la réforme de 1978 jusqu’à 1988. Les programmes de cette dernière année ont marqué des modifications ; les quantificateurs sont utilisés avec prudence et sans qu’une référence explicite ne leur soit faite. De plus, la tendance à formaliser l’écriture mathématique est devenue moins nette.

La réforme de 1991 :

L’étude de la logique formelle disparaît des textes de la réforme de 1991. Les symboles utilisant les deux quantificateurs ($\forall$ et $\exists$ ) ne doivent pas être utilisés comme des symboles d’abréviation, ils sont remplacés par les expressions écrites correspondantes.

**Etude de quelques chapitres du manuel tunisien 4ème année secondaire (section : mathématiques) :**

Je propose d’étudier quelques chapitres du manuel scolaire tunisien : 4ème année de l’enseignement secondaire (Tome1, 1998) utilisés en section : Mathématiques. L’analyse de certains contenu de ce manuel permettra d’interpréter certaines représentations utilisées en matière de formalisme par les étudiants. Le niveau scolaire cité présente un intérêt particulier, vu que je veux étudier l’utilité des quantificateurs à travers les connaissances antérieures des étudiants et la façon dont ils ont été abordés à la fin de l’enseignement secondaire.

En outre l’étude des manuels aide à mieux cerner le rôle de l’écrit ; la variété des formulations, les types de représentations et les exigences de rigueur sur les notions écrites (éventuellement définition, théorème, remarque, commentaire).

J’ai choisi d’étudier les chapitres comportant les notions de suites numériques et ceux concernant la continuité et les limites d’une fonction. Dans l’enseignement supérieur, certaines de ces notions sont réintroduites de la même manière qu’au secondaire et enrichies par d’autres notions, comme les suites numériques, les suites extraites, les suites de Cauchy, etc. Ainsi, on rencontre des notions pouvant apparaître comme des généralisations simples d’autres notions déjà introduites dans l’enseignement secondaire et ne nécessitant en particulier aucun formalisme nouveau pour leur introduction comme par exemple le théorème des valeurs intermédiaires.

Pour analyser les types de formulations utilisés dans différentes rubriques (Définitions, Théorèmes, Démonstrations, Activités….), j’ai mis en place une catégorie comportant 4 caractéristiques différentes de formulations.

1)Formulation portant une quantification explicite par l’introduction d’un élément générique. Par exemple, comme l’illustre le théorème suivant :

> " Soient U et V deux suites réelles. Si U converge vers 0 et s’il existe un entier $n_0$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait : $|V_n| \leq |U_n|$ alors V converge vers 0"

(Théorème, 7ème Sec Tome1, p.31, 1998)

2)Formulation portant un élément générique. Par exemple : Théorème de l’unicité d’une limite : "Si une fonction f admet une limite finie en $x_0$ alors cette limite est unique ($x_0$ fini ou infini)."

(Théorème, 7ème Sec Tome 1, p.54, 1998)

3) Formulation portant une quantification universelle implicite. Par exemple, une réponse dans un exercice résolu est ainsi formulée : "La fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ est croissante, alors si $x \leq 3$ on a : $f(x) \leq f(3)$..."

(Exercice, 7ème Sec Tome 1, p.39, 1998)

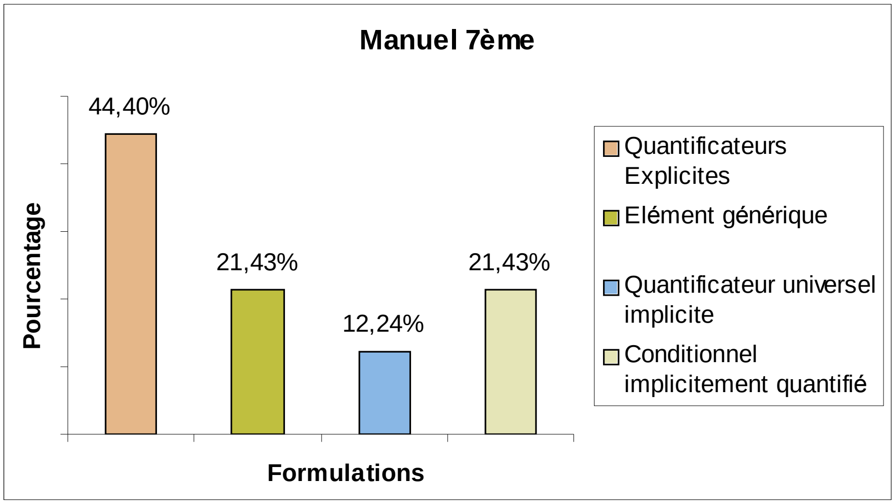
4) Formulation portant un conditionnel implicitement quantifié, où l’antécédent est implicitement quantifié alors que le conséquent est explicitement quantifié. Exemple : définition de limite finie d’une suite réelle "On dit que la suite U admet pour limite l si, pour tout ε strictement positif, il existe un entier naturel p tel que :

$$(n \in I \text{ et } n > p) \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon."$$

(Définition, 7ème Sec Tome1, p.21, 1998)

L’histogramme suivant illustre les résultats obtenus en pourcentage du nombre associé à chaque type de formulation par rapport au nombre total.

Histogramme :




**<u>L’utilisation des quantificateurs dans l’enseignement supérieur</u>**

A la fin du premier semestre de l’année universitaire 2001/2002, j’ai proposé aux étudiants de première année (Mathématiques et Informatique) un test qui a été déjà abordé à travers les séries d’exercices. Il porte sur des notions et des méthodes enseignées au lycée et à l’université telles que : relations binaires, sens de variation d’une fonction, théorème des valeurs intermédiaires, méthode de démonstration par récurrence.

Ce test a été élaboré d’une part en fonction d’erreurs fréquemment rencontrées et de modes de raisonnement qui semblent nécessaires à une bonne maîtrise de l’activité mathématique, et d’autre part en tenant compte du fait que les connaissances mathématiques utilisées ne soient pas complexes. Ce test comporte trois exercices et concerne principalement les capacités en matière de formalisme des connaissances élémentaires en logique relatives à la maîtrise de la relation d’ordre dans le corps ordonné des réels, à la disponibilité du raisonnement par récurrence ainsi qu’à l’étude d’une fonction réelle de la variable réelle.

Dans ce document je propose d’étudier une partie de l’exercice suivant :

> « On munit l’ensemble $\mathbb{N}^*$ de la relation $\Re$ définie par : $\forall$ $(p,q) \in \mathbb{N}^*\mathrm{x}\mathbb{N}^*$ : $p\Re q \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}^*$ ; $p^n = q$. Montrer que $\Re$ est une relation d’ordre ».

La réponse à cet exercice nécessite une écriture quantifiée et des notions variées telles que la réflexivité, l'antisymétrie et la transitivité. Les exemples de réponses ci-dessous correspondent à la notion d'antisymétrie.

J'ai résumé les caractéristiques de la formulation mathématique utilisée dans chacune des procédures produites par les étudiants suivant trois niveaux différents de formulations :

- 1)Présence explicite des quantificateurs.

Exemple : Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^*\mathrm{x}\mathbb{N}^*$, $\left.\begin{array}{r} p\Re q \Leftrightarrow \exists\ n\in \mathbb{N}^*,\ p^n=q \\ q\Re p \Leftrightarrow \exists\ m\in \mathbb{N}^*,\ q^m=p \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} p^n=q \\ q^m=p \end{array}\right\} \Leftrightarrow q^{mn}=q \Leftrightarrow q\Re q \Leftrightarrow p=q$$

- 2)Présence implicite du quantificateur universel.

Exemple : $\left.\begin{array}{l} p\Re q \Leftrightarrow \exists\ n\in \mathbb{N}^*,\ p^n=q \\ q\Re p \Leftrightarrow \exists\ n\in \mathbb{N}^*,\ q^n=p \end{array}\right\} \Rightarrow p=q$

- 3)Absence des quantificateurs.

Exemple : $\left.\begin{array}{l} p\Re q \Leftrightarrow p^n=q \\ q\Re p \Leftrightarrow q^n=p \end{array}\right\} \Leftrightarrow p^n p=q^n q \Leftrightarrow p^{n+1}=q^{n+1} \Leftrightarrow p=q$

Le tableau suivant, illustre le nombre de procédures rencontrées par les étudiants par chaque niveau de formulation :

| Niveau | Nombre de procédures rencontrées |
|---|---|
| Présence explicite des quantificateurs | 42 |
| Présence implicite du quantificateur universel | 20 |
| Absence des quantificateurs | 12 |

Quelques analyses des résultats obtenus

Les résultats établis montrent qu'un nombre important d'étudiants ont utilisé explicitement les quantificateurs et ont essayé d'appliquer le principe de la définition d'une relation binaire antisymétrique, mais celle-ci n'était pas rigoureuse.

Sur l'ensemble des réponses produites par les étudiants, des problèmes du statut des lettres sont bien réelles. Le fait d'utiliser la même notation "n" pour appliquer la définition des deux relations $p\Re q$ et $q\Re p$ introduit l'hypothèse que "n" est indépendant des relations utilisées. J'illustre par l'exemple suivant :

$$\forall\,(p,q) \in \mathbb{N}^*\mathrm{x}\mathbb{N}^*,\ \left.\begin{array}{l} p\Re q \Leftrightarrow p^n=q,\ \exists\, n\in \mathbb{N}^* \\ q\Re p \Leftrightarrow q^n=p \end{array}\right\} \Rightarrow p=q$$

Ici, il y a un problème de quantification sous-entendue : l'existence de "n" est vraie quelle que soit la relation binaire $\Re$. Cette erreur engendre des difficultés dans l'activité mathématique et une absence de contrôle de la démonstration. En effet, une lettre utilisée pour une instance d'un énoncé existentiel ne peut pas être utilisée pour désigner un autre objet (Arsac & Durand-Guerrier, 1999).

D'autres réponses présentent des ambiguïtés dans l'emploi des quantificateurs ce qui induit en erreurs les auteurs, je présente l'exemple suivant :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*\ \forall\, q \in \mathbb{N}^*,\ \left.\begin{array}{l} p\Re q \Leftrightarrow p^n=q \\ q\Re p \Leftrightarrow q^n=p \end{array}\right\}.\ \text{Si } p=1,\ 1^n=q \text{ donc } q=1 \text{ et on a } p=q$$

La réponse ici, est justifiée par un simple passage de l'examen d'un cas particulier à un énoncé universel sur un ensemble infini. En se référent aux règles de déductions de Copi (Hottois, 1989), cette réponse correspond à une règle de généralisation universelle sur un exemple particulier ce qui n'est pas valide. En effet, il s'agit de réponses illustrant la conception commune : affirmer la vérité d'un cas particulier c'est affirmer le cas général sur un ensemble infini.

## **Conclusion**

L'analyse succincte des programmes a permis de mettre l'accent, d'une part, sur le rôle attribué à la logique formelle, dans l'enseignement tunisien, et d'autre part, sur l'emploi des éléments de logique dans le raisonnement mathématique. Pour les rubriques qui présentent des formulations portant un élément générique, une quantification universelle implicite ou un conditionnel implicitement quantifié, semblent claires pour les auteurs des manuels et peut être pour les enseignants, mais peuvent être sources de certaines difficultés dans la compréhension des connaissances mathématiques pour les apprenants. Cette étude a permis d'évaluer le maniement des quantificateurs et d'apprécier la valeur et la place de ces outils dans le manuel de $7^{\text{ème}}$ année de l'enseignement secondaire. Ceci a aussi permis d'en déduire les difficultés potentielles pour l'apprenant.

L'analyse des réponses produites par les étudiants montrent que, d'une part, l'ambiguïté concernant le maniement des quantificateurs et le statut des lettres sont bien réelles pour un nombre non négligeable d'étudiants, d'autre part, les notions mathématiques en jeu sont mal maîtrisées. Quelques étudiants cherchent parfois à donner des réponses en mobilisant à chaque fois les énoncés et en démontrant un énoncé universel sur un en semble infini à la suite d'un examen de quelques cas particuliers. De ce fait, certaines réponses pourraient servir pour étudier ou illustrer les conceptions des élèves et des étudiants sur quelques niveaux de formulations.

**Bibliographie**


Arsac G., Durand-Guerrier V. (1999), Démonstration et quantification existentielle, in *Acte de la dixième école d'été de didactique des mathématiques.*

Chellougui F. (2000), *Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques à la fin de l'enseignement secondaire et au début du supérieur scientifique,* Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue, Université de Tunis.

Chevallard Y. (1985), *Transposition didactique du savoir savant au savoir à enseigner,* La Pensée sauvage éditions.

Durand-Guerrier V. (1994), Problèmes de raisonnement et de logique chez les élèves de terminales C et de premier cycle universitaire scientifique ; les difficultés liées à l'implication ; questions méthodologiques, in *Actes du Premier Colloque Jeunes Chercheurs en Sciences Cognitives*, Université Joseph Fourrier Grenoble 1, La Motte d'Aveillans.

Hottois G. (1989), *Penser la logique. Une introduction technique, théorique et philosophique à la logique formelle*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles.


**Manuels scolaires et aides pédagogiques pour l'enseignement secondaire tunisien**


Manuel Tunisien. (1979), *Mathématiques, 5$^{ème}$ année de l'Enseignement Secondaire, Section : Maths-Sciences et Maths-Technique,* République Tunisienne, Centre National Pédagogique (CNP).

Manuel Tunisien. (1998), *Mathématiques,* 6$^{ème}$ *année de l'Enseignement Secondaire, Section : Mathématiques, Tome 1.* République Tunisienne, CNP.

Manuel Tunisien. (1998), *Mathématiques, 7$^{ème}$ année de l'Enseignement Secondaire, Section : Mathématiques, Tome 1.* République Tunisienne, CNP.

Programmes Officiels de l'Enseignement du Second Cycle. (1969), Fascicule n°3, Discipline : Mathématiques, République Tunisienne, STD.

Programmes de Mathématiques Enseignement Secondaire. (1976), République Tunisienne, Direction de l'Enseignement secondaire technique et Professionnel.

Programmes Officiels de l'Enseignement Secondaire, Mathématiques. (1978, 1982, 1986, 1988, 1993, 1998), République Tunisienne, CNP.