Approche de la démonstration en géométrie dans les nouveaux manuels tunisiens, Cas de la translation du plan en 1ère année secondaire

Abrougi-Hattab Hanène
Faculté des Sciences de Bizerte (Tunisie)
hanene_abrougui@yahoo.fr

Résumé
L'objectif de cette communication est d'étudier la place de la démonstration en géométrie dans les nouveaux manuels tunisiens de mathématiques. Nous nous intéressons à étudier l'organisation des chapitres de géométrie dans ces manuels, relativement à la démonstration. Plus précisément, nous regardons, si les théorèmes, objets d'enseignement, sont démontrés ou non et dans le cas où ils le sont, de quelle manière est présentée la démonstration. De plus, nous essayons de caractériser les processus de dévolution et d'institutionnalisation, dans l'introduction des nouveaux théorèmes, et plus généralement des nouveaux savoirs, en délimitant ce qui est laissé à la charge de l'élève et ce qui relève de la responsabilité de l'enseignant.
Notre choix d'étude s'est fixé sur la notion de translation du plan. Comme pour toute transformation du plan, le nombre de théorèmes relatifs à la translation et qu'il est intéressant d'étudier est important. De plus, cette notion est introduite en 1ère année secondaire (élèves 15-16 ans), niveau scolaire dans lequel l'élève est théoriquement assez familiarisé avec les démonstrations, puisqu'il a commencé à en faire depuis deux ans, ce qui peut être garant de l'apparition de démonstrations. Ainsi, notre étude permettra d'éclairer d'une part, certains choix des auteurs des manuels relativement à l'introduction de la notion de translation et d'autre part, l'approche adoptée relativement à la démonstration en géométrie, d'une façon plus générale.

1. Introduction et problématique

En Tunisie, les nouveaux programmes de mathématiques publiés à partir de 2004, par le centre national pédagogique, prônent l'activité de l'apprenant dans la construction des savoirs mathématiques à enseigner. En effet, selon les instructions des programmes de mathématiques de septembre 2005, relatives aux niveaux scolaires 1ère et 2ème années secondaires (élèves 15-17 ans), *« les élèves développeront leurs aptitudes à chercher, expérimenter, conjecturer, ou contrôler un résultat »* ; de plus, il est précisé que *« les élèves approfondiront leur compréhension des concepts mathématiques, intégreront leurs connaissances et leurs habilités dans divers domaines mathématiques pour résoudre des problèmes. De même les élèves développeront leurs aptitudes à utiliser différentes approches de recherche, à élaborer des stratégies de résolution, à modéliser des situations réelles et à persévérer dans leurs efforts. ».*

Dans la même perspective, l'approche adoptée dans les nouveaux manuels[1] se caractérise par une volonté de faire participer l'apprenant à la construction des nouveaux savoirs. En effet, dans chaque chapitre, des activités d'exploration, figurant sous une rubrique dont l'intitulé varie selon le manuel, visent à amener l'élève à la découverte des nouveaux savoirs. Ainsi, dans le manuel de 1ère année (élèves 15-16 ans), les activités de la rubrique *« Découvrir »* ont pour objectif de permettre aux élèves de *« développer leur capacité à chercher, à expérimenter, à modéliser, à conjecturer et à raisonner »,* ainsi que de *« construire les savoirs et les savoir-faire à connaître ».* Sous la rubrique « Explorer » du manuel de 2ème année, des activités, choisies dans

[1] En Tunisie, pour chaque niveau scolaire, il existe un seul manuel officiel par niveau scolaire. Les manuels officiels de tous les niveaux scolaires de la 7ème année de l'enseignement de base (élèves de 12-13 ans) à la terminale (élèves de 18-19 ans) ont été récemment renouvelés.

des champs disciplinaires variés, ont *« pour objet un apprentissage progressif et graduel des nouvelles notions »* et précèdent ou suivent les définitions et les théorèmes, objets de savoir.
Notre objectif est de délimiter, dans cette manière d'aborder l'apprentissage des notions mathématiques enjeu d'enseignement, accordant a priori une place importante à l'activité de l'élève, la part de dévolution et le mode d'institutionnalisation. Dans le cadre de la théorie des situations, la dévolution et l'institutionnalisation apparaissent comme des processus gérés par l'enseignant, entre autres, par le moyen du contrat didactique. Perrin-Glorian et Hersant (2003) expliquent bien que « *le professeur doit faire en sorte que les élèves interagissent avec le milieu de la situation adidactique choisie, c'est le processus de dévolution. Il devra aussi les aider à donner un statut de savoir utile et réutilisable à certaines connaissances utilisées pour résoudre le problème, c'est le processus d'institutionnalisation* ». Dans notre cas, nous nous intéressons à ces deux processus du point de vue du manuel ; autrement dit, nous essayons de circonscrire, dans l'introduction des théorèmes objets d'enseignement, a priori, les occasions laissées aux élèves pour interagir avec le milieu et les lieux où l'enseignant doit intervenir pour institutionnaliser les savoirs, objets d'enseignement.
En outre, nous essayons de délimiter la place accordée à la démonstration. En effet, il nous paraît intéressant de voir, dans cette nouvelle approche de l'apprentissage de quelle manière est abordée la démonstration. Plus précisément, nous regardons, si les théorèmes, objets d'enseignement, sont démontrés ou non et dans le cas où ils le sont, de quelle manière est présentée la démonstration.
Notre choix d'étude s'est fixé sur la notion de translation du plan. Comme toute transformation du plan, cette dernière génère un nombre important de théorèmes qu'il serait intéressant d'étudier. De plus, cette notion est introduite en 1ère année secondaire (élèves 15-16 ans), niveau scolaire dans lequel l'élève est théoriquement assez familiarisé avec les démonstrations, puisqu'il a commencé à en faire depuis deux ans, ce qui peut être garant de l'apparition de démonstrations. Ainsi, notre étude permettra d'éclairer d'une part, certains choix des auteurs du manuel relativement à l'introduction de la notion de translation et d'autre part, l'approche adoptée relativement à la démonstration en géométrie, d'une façon plus générale.
L'étude des organisations didactiques adoptées dans les nouveaux manuels relativement aux différentes notions de géométrie et dans les divers niveaux scolaires serait à faire afin de compléter notre étude et de confirmer la pertinence de nos résultats.

2. Approche méthodologique

Notre objectif étant de délimiter - dans les activités du chapitre introduisant de nouveaux théorèmes et plus généralement de nouveaux savoirs mathématiques - la part de dévolution et le mode d'institutionnalisation, d'une part et la place accordée à la démonstration, d'autre part, nous envisageons de procéder ainsi :

- Considérant la dévolution et l'institutionnalisation comme deux processus complémentaires qui règlent les interactions autour du savoir, nous étudierons ces processus « ensemble » et ce en dégagent, dans les activités étudiées, les questions pouvant renseigner sur l'un ou l'autre des processus.

  Une lecture globale des activités de la rubrique *« Découvrir »* a permis d'identifier différents types de questions. Deux types nous paraissent intéressants à prendre en considération pour cette étude:

  * Des questions qui ont pour objectif d'amener l'élève à découvrir, seul, le (ou une partie du) résultat mathématique visé par l'activité. Elles peuvent apparaître en début d'activité. Elles sont généralement simples, leur résolution pouvant s'appuyer sur une démarche empirique et/ou une lecture directe du dessin. Par exemple : *« Vérifier à l'aide du papier calque que (V) et (V') sont superposables »* ou bien *« Nommer des vecteurs égaux à* $\overrightarrow{AB}$ ». Nous considérons que ces questions favorisent le processus de dévolution dans la mesure où elles représentent des occasions pour que l'élève puisse

interagir avec le milieu et nous pouvons les qualifier de « questions de dévolution» (QDév).
* Des questions que nous qualifions de « questions d'institutionnalisation » (QInst). Les réponses correctes à ces questions permettent de faire émerger directement le résultat visé par l'activité. L'élève peut fournir des éléments de réponse à ces questions, justes ou erronés, mais ces derniers ne peuvent être validés que par une intervention structurée de l'enseignant permettant d'une part, la gestion des réponses données par les élèves et d'autre part, le traitement adéquat de la réponse, amenant à la mise en place du nouveau savoir. Elles apparaissent surtout à la fin de l'activité et peuvent être formulées ainsi : « conclure », « que peut-on dire de l'image d'une droite par une translation ? »….

- Afin de délimiter la place accordée à la démonstration, nous projetons de voir, si les théorèmes, objets d'enseignement, sont démontrés ou non, et dans le cas où ils le sont, de quelle manière est présentée la démonstration. Pour cela, nous tenterons de répondre aux questions suivantes :
    - Y'a-t-il une demande explicite de démonstration ?
    - Pour démontrer un théorème objet d'enseignement, le manuel demande-t-il à l'élève de faire la démonstration entière ou procède-t-il par découpage en étapes à l'aide de questions.
    - Dans ce dernier cas, l'activité propose-t-elle des questions par lesquelles l'élève peut intégrer les différentes étapes et percevoir la démonstration dans sa globalité ?

  L'étude des questions, que nous qualifions de « questions de démonstration » (QDém), dans lesquelles on demande à l'élève de montrer une assertion pourra nous aider afin d'apporter des éléments de réponse, particulièrement aux deux premières interrogations. Des éléments de réponse à la troisième interrogation peuvent être fournis par l'étude des questions d'institutionnalisation. Notons, par ailleurs, que nous nous intéresserons aux questions de démonstration dans l'ensemble des activités (visant la démonstration d'un théorème ou non) afin de mieux délimiter la place de la démonstration dans le chapitre étudié[2].

Avant d'aborder l'analyse des activités, et afin d'aider le lecteur à mieux cerner le contexte d'enseignement de la translation, nous commencerons par décrire succinctement le manuel de première année secondaire puis nous développerons une description générale du chapitre « Vecteurs et translations » permettant de voir quelles notions relatives à la translation sont présentées dans ce chapitre.

3. Organisation du manuel de 1ère année de l'enseignement secondaire

Chaque chapitre du manuel de 1ère année secondaire est organisé en sept rubriques.
La première rubrique, intitulée *« Reprendre »* a pour objectif de rappeler des résultats utiles pour la nouvelle leçon et d'identifier des lacunes éventuelles de l'apprenant ; elle aurait ainsi une fonction de rappel et d'évaluation prédictive (ou diagnostique).
La seconde rubrique, intitulée *« Découvrir »* comporte un nombre important d'*activités* dont l'objectif est de faire découvrir à l'apprenant les nouveaux savoirs. De ce fait, ces dernières seraient un lieu ou l'enseignant peut favoriser la dévolution.

[2] Bien que certaines questions de démonstration, simples, sont, a priori, réalisables par les élèves, nous avons exclu les questions de démonstration des questions de dévolution car nous n'avons pas le moyen de vérifier que la tâche de démonstration peut être dévolue ou non à l'élève de ce niveau scolaire, car exigeant un niveau d'abstraction minimal, à l'opposé des tâches de dessin et de lecture directe du dessin.

Les activités de la rubrique « Découvrir » peuvent se subdiviser en trois grands groupes :

- Des activités dont l'objectif est d'introduire une définition
- Des activités dont l'objectif est d'introduire un théorème, sans démonstration
- Des activités dont l'objectif est d'introduire un théorème, avec démonstration

Ces activités ne peuvent pas être différenciées sans avoir abordé, d'assez près, leur contenu. En effet, elles ne sont pas toujours intitulées et le titre, lorsqu'il est présent, est relatif à leur contenu mathématique et non à leur fonction didactique. De plus, elles sont rarement suivies du résultat à institutionnaliser, ce dernier apparaissant souvent plus loin, dans la rubrique *« Retenir »* : *« Ce qui frappe, c'est la richesse et l'abondance des situations abordées accompagnées d'une absence totale de hiérarchie dans les activités ; toutes les activités se valent et risquent d'être indispensables ; de plus l'objectif et l'utilité de l'activité ne sont pas précisés »* (Abdeljaouad, 2007).

Rappelons que notre étude ultérieure sera centrée essentiellement sur les activités de cette rubrique.

Sous le terme *« Retenir »*, la troisième rubrique regroupe les résultats qu'il est indispensable à l'élève de connaître, souvent intitulés de phrases renseignant sur leur contenu mathématique, mais sans spécifier s'il s'agit de théorèmes, définitions, conséquences etc. Ces derniers sont ceux qui ont été « découverts » par les élèves lorsqu'ils ont réalisé les activités de la rubrique *« Découvrir »*. De ce fait, l'institutionnalisation doit porter sur ces résultats, mais il n'est pas indiqué de quelle manière peuvent s'articuler l'institutionnalisation et la réalisation des activités de découverte. Il est complètement laissé à la charge de l'enseignant de décider de l'organisation qui lui semble la plus appropriée. Notons que certains de ces résultats (surtout des définitions) sont énoncés pour la deuxième fois car déjà énoncés, dans la rubrique *« Découvrir »* et que d'autres apparaissent dans cette dernière rubrique mais ne figurent pas parmi les résultats à retenir, ce qui rend les choix à faire et les décisions à prendre, par l'enseignant, relativement à l'organisation des leçons, encore plus difficiles.

Le manuel offre à l'apprenant l'occasion de faire sa propre évaluation grâce aux items proposés dans la rubrique *« s'auto-évaluer »*. Les rubriques *« Mobiliser ses compétences »* et *« Exercices et problèmes »* présentent un ensemble de situations où il est question d'investir les savoirs, objets d'enseignement (applications directes ou mobilisation dans des situations plus complexes nécessitant des adaptations). Enfin, la rubrique *« math-culture »* propose une ouverture sur d'autres champs disciplinaires tels que l'histoire des mathématiques, la physique, l'architecture etc.

Dans notre étude, nous nous intéressons à l'étude du chapitre « translation » du manuel de 1ère année secondaire et nous nous restreindrons à l'analyse des activités de la rubrique *« Découvrir »*.

4. La notion de translation dans le manuel de 1ère année secondaire

La notion de translation est introduite, pour la première fois dans l'enseignement tunisien, en première année de l'enseignement secondaire, dans un chapitre intitulé *« Vecteurs et translations »*[3]. Ce dernier présente, dans la rubrique *« Découvrir »*, sept activités introduisant la notion de vecteur et établissant des égalités vectorielles et sept autres activités relatives à la translation. Remarquons, tout de suite, que la translation n'apparaît pas, à ce niveau scolaire, comme une application du plan ; ainsi, il n'est pas question de définir la translation comme une transformation du plan dans lui-même ; le manuel introduit plutôt la définition de l'image d'un point par une translation. L'apprentissage est centré sur la détermination de l'image d'un objet géométrique par une translation en restant dans une conception globale et non ponctuelle de cette transformation. Par ailleurs, la notation représentative de la translation (un « t » indexé par un

[3] L'enseignement de la notion de translation s'étale sur les première et deuxième années de l'enseignement secondaire tunisien (élèves de 15-17 ans).

vecteur) n'est pas d'usage, à ce niveau scolaire, et il s'agit d'écrire en toutes lettres « translation de vecteur… »[4].
Les notions suivantes, relatives à la notion de translation, sont objets d'enseignement dans le chapitre *« Vecteurs et translations »* :
- Image d'un point par une translation (et conservation des distances)
- Image d'une droite par une translation
- Image d'un segment par une translation
- Image d'un cercle par une translation
- Image d'un polygone par une translation (Conservation des angles, du périmètre et de l'aire).

Notons que les théorèmes relatifs à la conservation du parallélisme, de l'orthogonalité, du contact et du barycentre par une translation apparaissent dans le manuel de 2ème année secondaire. De même, l'introduction de la translation comme application du plan, la notation $t_{\vec{u}}$ et la propriété caractéristique sont objets d'enseignement en seconde.

5. Analyse des activités de la rubrique « Découvrir »

Sous la rubrique « Découvrir » du chapitre « Vecteurs et translation », sept activités se rapportent à la notion de translation. Elles ont pour objectif de définir l'image d'un point par une translation et d'introduire quelques propriétés de la translation. Nous explicitons leur objet dans le tableau suivant :

Activité	Objet
8	Construction d'images de points par une translation donnée (en utilisant le terme glissement et sans explicitation du terme translation)
9	Construire l'image d'un point par une translation et montrer son existence et son unicité (le terme translation n'est pas encore utilisé)
10	Etablir, à l'aide d'une démonstration, la conservation de la distance par une translation
11	Etablir, à l'aide d'une démonstration, que l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle
12	Etablir, à l'aide d'une démonstration, que l'image d'un segment par une translation est un segment qui lui est isométrique
13	Etablir, à l'aide du papier calque, qu'une figure et son image par translation sont superposables et à l'aide du quadrillage qu'il y a conservation de périmètres et d'aires par translation
14	Etablir, à l'aide du papier calque, qu'une figure (cercle puis polygone) et son image par translation sont superposables et que la translation conserve les angles

Tableau 1 : Tableau récapitulatif de l'objet des activités étudiées

Une première lecture de ces activités permet de les répartir ainsi :
- Les activités 8 et 9 ont pour objectif d'introduire une définition (image d'un point par une translation) ;
- Les activités 10, 11 et 12 ont pour objectif d'introduire des théorèmes avec leur démonstration (conservation de la distance, image d'une droite, image d'un segment) ;
- Les activités 13 et 14 ont pour objectif d'introduire des théorèmes sans démonstration (superposabilité, conservation du périmètre, de l'aire et des angles).

Notre projet est d'étudier les deux derniers groupes d'activités. Toutefois, la présence de questions de démonstration dans le premier groupe d'activités nous a incité à regarder de plus près ce dernier.

[4] Notons aussi que le vecteur de la translation est noté à l'aide de deux points ($\overrightarrow{AB}$ par exemple) et non par une seule lettre ($\vec{u}$ par exemple). L'introduction des notations $\vec{u}$ du vecteur et $t_{\vec{u}}$ de la translation se fait au cours de l'année suivante (élèves 16-17 ans).

5.1. Activités introduisant une définition

Les activités 8 et 9 apparaissent dans une partie de la rubrique *« Découvrir »* intitulée *« Image d'un point par une translation »*. Une définition, explicitant l'image d'un point par une translation suit l'activité 9 (voir annexe).

Dans l'activité 8, il s'agit de placer des points obtenus par *« glissement »* d'une équerre, le long d'une droite, d'une position à une autre. L'objectif est d'amener l'apprenant à constater que, par glissement, le vecteur dont la première extrémité est un point de l'équerre, dans la première position, et dont la deuxième extrémité est le même point de l'équerre, dans la deuxième position, ne change pas et de lui faire ainsi découvrir le vecteur de la translation, de façon intuitive et pragmatique (voir annexe). Le terme « translation » n'apparaît pas encore de façon explicite. Dans cette activité, toutes les questions proposent des tâches qui peuvent être facilement réalisées par l'élève. Ces tâches se ramènent à : « reproduire un dessin », « marquer des points obtenus par glissement », « nommer des vecteurs égaux à un vecteur donné», « comparer des distances », où il s'agit de dessiner ou de faire une lecture directe du dessin. De ce fait, la dévolution peut être, a priori, assurée. Par ailleurs, nous estimons que, malgré l'absence de questions d'institutionnalisation, cette activité peut être exploitée par l'enseignant pour introduire, à partir de la démarche empirique employée, la définition de l'image d'une droite par une translation présentée dans le manuel.

L'activité 9 poursuit l'introduction de l'image d'un point par une translation. Elle vise l'établissement de l'existence et l'unicité de l'image d'un point par une translation, c'est-à-dire la justification que la translation est une application du plan[5]. Le terme « translation » n'apparaît toujours pas, mais l'approche des auteurs est moins empirique que dans l'activité précédente. En effet, dans la première question, il est demandé à l'élève de montrer l'existence et l'unicité d'un point M' vérifiant l'égalité $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$; A, B et M étant des points donnés du plan, et de construire ce point M'. Deux cas sont traités : le cas où M est un point de la droite (AB) et le cas où il n'appartient pas à la droite (AB). Les tâches proposées sont « reproduire un dessin », « construire un point », « montrer l'existence et l'unicité d'un point vérifiant une égalité vectorielle ». La réalisation des deux premières tâches faciliterait l'accomplissement de la dernière puisque l'idée de démonstration peut émerger de la construction réalisée. Nous remarquons que, bien qu'il soit question d'introduire une définition, l'activité présente deux questions de démonstration, ce qui montre l'importance accordée par le manuel à la démonstration. En effet, l'activité 8, très empirique, aurait pu suffire, aux yeux des auteurs du manuel, pour introduire cette même définition. Toutefois, ces derniers ont jugé utile de proposer une activité où l'existence et l'unicité de l'image d'un point par une translation sont démontrées.

5.2. Activités introduisant un théorème avec sa démonstration

Rappelons que les activités 10, 11 et 12 ont pour objectif d'introduire un théorème avec sa démonstration.

Dans l'activité 10, intitulée *« Conservation des distances »*, l'élève est amené, par le biais de trois questions, à montrer que la translation conserve les distances. Dans la première question l'élève doit expliquer pourquoi $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$(M' image de M et N' image de N par une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$). Dans la deuxième question, il lui est demandé de déduire que les distances MN et M'N' sont égales et enfin il est amené à conclure sur la conservation des distances par une translation. Les deux premières questions sont des questions de démonstration et la troisième, avec sa formulation très ouverte « conclure », nécessite une intervention

[5] Comme nous l'avons déjà précisé, la translation n'est pas encore présentée comme application du plan, à ce niveau scolaire.

structurée de l'enseignant permettant de récapituler les deux questions précédentes et de dégager le résultat visé à savoir *« la translation conserve les distances »*[6].

L'activité 11 est intitulée *« Image d'une droite par une translation »* ; elle vise à montrer que l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle. Cette démonstration nécessite l'établissement d'une double inclusion : $t_{\overrightarrow{AB}}(\Delta) \subset \Delta'$ (Δ' étant la parallèle à Δ passant par l'image d'un point quelconque de Δ) et $\Delta' \subset t_{\overrightarrow{AB}}(\Delta)$. Pour cela, les auteurs du manuel procèdent graduellement afin d'amener l'élève à démontrer la double inclusion. Les deux premières questions proposent des constructions (d'images de points d'une droite Δ par une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$) puis, l'émission d'une conjecture *« Quelle conjecture peut-on faire ? »*. Une fois exploré de manière intuitive, le théorème *« l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle »* est objet de démonstration dans les questions suivantes. La première inclusion est prouvée dans la question 3 (l'image d'un point M de Δ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est sur Δ') et la deuxième inclusion est prouvée dans la quatrième question. Dans cette dernière, l'élève commence par construire l'antécédent N d'un point N' de Δ', puis il doit démontrer que NEE'N' est un parallélogramme (E étant un point de Δ et E' son image par translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$). Enfin, on demande à l'élève « *Que peut-on dire de l'image de la droite* Δ *par la translation de vecteur* $\overrightarrow{AB}$*?* ». Cette question favorise l'institutionnalisation du théorème objet d'étude de l'activité, en incitant à récapituler toutes les réponses obtenues aux questions intermédiaires et en érigeant la double inclusion en une égalité.
Notons que le passage de la démonstration que NEE'N' est un parallélogramme à l'énoncé du théorème nécessite une étape dans laquelle l'élève devrait prouver que le point N, antécédent de N', est bien sur Δ et établir définitivement la deuxième inclusion, ce qui n'est pas facile à percevoir ni à prouver par ce dernier. De ce fait, nous considérons que la dernière partie de l'exercice ne peut pas être réalisée sans un apport de l'enseignant, par lequel il attire l'attention de l'élève sur la position de l'antécédent de N'. D'ailleurs, l'enseignant doit intervenir aussi afin de permettre l'établissement du lien entre les différentes questions de l'activité et du théorème visé. En définitive, cette activité compte quatre questions de dévolution, deux questions de démonstrations et une question d'institutionnalisation.

L'activité 12 est intitulée *« image d'un segment par une translation »*. Comme dans l'activité précédente *« image d'une droite par une translation »*, il s'agit d'amener l'élève à démontrer, par une double inclusion, que l'image d'un segment est un segment qui lui est isométrique. Trois questions sont proposées. Dans la première question, il s'agit de montrer que l'image N' d'un point N appartenant à un segment [EF] (par une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$) est sur le segment [E'F'] (E' et F' images de E et F par la même translation), et ce en établissant l'égalité E'N' + N'F' = E'F'. Ceci permettra d'établir que l'image du segment [EF] par la translation considérée est incluse dans le segment [E'F']. Dans la deuxième question, il s'agit de montrer que l'antécédent M d'un point M' de [E'F'], par la même translation, est sur [EF]. Enfin, la question *« Que peut-on dire de l'image du segment [EF] par la translation de vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *? »* est posée. L'élève doit établir que l'image de [EF] par la translation est égale à [E'F'], segment isométrique à [EF].
Ainsi, les deux premières questions sont des questions de démonstration et la troisième est une question amenant à une institutionnalisation du théorème visé. Comme dans l'activité précédente, cette dernière question ne peut être traitée adéquatement sans une intervention structurée et préalablement planifiée de l'enseignant. En effet, celui-ci doit d'une part, amener

[6] Ce théorème apparaît dans la rubrique *« Retenir »*, sous cette forme, sans intitulé et sans désignation du type (théorème, conséquence, proposition…).

l'élève à ériger la double inclusion en égalité et d'autre part, mettre en évidence le fait que le segment image est isométrique au segment initial.

5.3. Activités introduisant un théorème sans sa démonstration

Les activités 13 et 14, introduisant un théorème sans sa démonstration, apparaissent dans un paragraphe de la rubrique « Découvrir » intitulé « Figures superposables ».

Dans l'activité 13, un voilier est représenté sur un papier quadrillé et il est demandé à l'élève d'une part, de calculer des longueurs et des aires, à l'aide du quadrillage, d'éléments du voilier représenté et des mêmes éléments de son image par translation et d'autre part, de vérifier à l'aide du papier calque que le voilier et son image par translation sont superposables (voir annexe). Les tâches proposées sont « reproduire un dessin », « calculer une longueur à partir du quadrillage », « calculer une aire à partir du quadrillage », « vérifier la superposabilité de deux dessins à l'aide du papier calque », « tracer l'image d'un dessin par une translation ». Ainsi, par le biais de questions de dévolution, uniquement, l'activité vise à amener l'apprenant à constater la conservation des longueurs et des aires par translation ainsi que la superposition d'une figure et de son translaté.

Dans l'activité 14, il s'agit aussi de mettre en évidence qu'une figure et son translaté sont superposables, les figures particulières considérées étant le cercle et le polygone. Par ailleurs, l'activité vise à amener l'élève à constater que le disque initial et le disque image ont la même aire et que les angles du polygone considéré sont conservés par translation (voir annexe). Les tâches proposées sont « tracer l'image d'un dessin par une translation », « vérifier la superposabilité de deux dessins à l'aide du papier calque », « comparer des aires visuellement ». De ce fait, elles peuvent être facilement dévolues aux élèves car elles nécessitent uniquement des manipulations empiriques et une lecture du dessin. Seule la dernière question de l'activité *« que peut-on dire des angles respectifs de (D) et de (D') ? »* est une question suggérant l'institutionnalisation du théorème « la translation conserve les angles » ; mais en absence de toute question de démonstration, nous estimons qu'il n'est pas question d'accompagner le théorème de sa démonstration.

6. Dévolution, institutionnalisation et place de la démonstration dans le manuel

Dans ce paragraphe, nous allons essayer de décrire les processus de dévolution et d'institutionnalisation dans le manuel et de délimiter la place de la démonstration en nous appuyant sur les résultats de l'analyse des activités de la rubrique *« Découvrir »*. Ces derniers peuvent être résumés dans le tableau suivant :

Activité	Objet	Activité introduisant	Types de questions	
8	Image d'un point par une translation donnée : Approche empirique	Une définition	QDév (6), QInst (0)	QDém (0)
9	Image d'un point par une translation donnée : Démonstration (existence, unicité)	Une définition	QDév (2), QInst (0)	QDém (2)
10	Conservation de la distance par translation : Démonstration	Un théorème avec démonstration	QDév (0), QInst (1)	QDém (2)
11	Conservation de la direction par translation : Démonstration	Un théorème avec démonstration	QDév (5), QInst (1)	QDém (2)
12	Image d'un segment par translation : Démonstration	Un théorème avec démonstration	QDév (0), QInst (1)	QDém (2)
13	Superposabilité et conservation de périmètre et d'aire par translation : approche empirique	Un théorème sans démonstration	QDév (5), QInst (0)	QDém (0)
14	Superposabilité et conservation des angles par translation : approche empirique	Un théorème sans démonstration	QDév (5), QInst (1)	QDém (0)

Tableau 2 : Tableau récapitulatif des types d'activités et des types de questions dans les activités étudiées
(QDév : questions de dévolution, QInst : questions d'institutionnalisation, QDém : questions de démonstration)

6.1. Dévolution, institutionnalisation

D'après le tableau 2, les questions de dévolution sont les plus nombreuses et trouvent leur place dans les différents types d'activités. A l'aide de ces questions, l'enseignant peut faire en sorte que les élèves interagissent avec la situation, puisque ces dernières offrent des opportunités de travail sur des tâches empiriques simples, ne nécessitant pas l'intervention du maître. Elles sont apparues de façon plus importante dans les activités ne proposant pas de démonstration, substituant ainsi la validation par la démonstration à une validation empirique centrée sur des constructions, des manipulations et une lecture du dessin. Elles sont apparues aussi de façon importante dans une activité introduisant une définition et dans une activité proposant une démonstration et ce afin de préparer l'émission de conjecture et/ou l'idée de démonstration. Ainsi, ces questions occupent une place importante dans tous les types d'activités étudiés. Les élèves seraient donc en mesure de s'engager dans la résolution, en donnant des propositions de réponses. Nous estimons que l'engagement des élèves dans des procédures de résolution peut favoriser la découverte des notions nouvelles sans pour autant en être garant.
Ces constats confirment et consolident ce que nous avons signalé, dans l'introduction, à savoir que les auteurs du manuel accordent une grande importance à l'activité de l'apprenant dans la construction de ses connaissances, et se situent, de ce fait, dans une perspective constructiviste de l'apprentissage.

Les questions d'institutionnalisation sont moins fréquentes et sont apparues dans toutes les activités introduisant un théorème avec sa démonstration et dans une activité introduisant un théorème sans sa démonstration. De plus, nous avons constaté que ces questions visent plutôt la mise en évidence du résultat mathématique visé et son énonciation que la synthèse des différentes questions de l'activité précédant l'institutionnalisation (questions de démonstration relatives aux pas élémentaires de la preuve ou bien questions de dévolution)[7]. De ce fait, dans le cas d'activités introduisant un théorème avec sa démonstration, l'enseignant ne se sent pas dans l'obligation de revenir sur les questions de démonstration pour en faire la synthèse et l'élève risque de ne pas percevoir que les questions auxquelles il vient de répondre, avec l'aide de son enseignant, constituent « une seule » démonstration, celle du résultat visé par l'activité.
Certes, certains enseignants soucieux de la rigueur mathématique et de donner du sens aux notions enseignées, peuvent revenir explicitement sur la démonstration en faisant la synthèse de tout le travail déjà élaboré, mais ceci a de fortes chances de ne pas se produire vu le type de formulation des questions d'institutionnalisation et les contraintes du temps.
Dans le même ordre d'idées, l'absence de questions d'institutionnalisation, dans certaines activités, laisse à l'enseignant la responsabilité entière de structurer l'institutionnalisation. Il est possible alors qu'il énonce directement le résultat visé par l'activité ou bien il peut chercher à établir une organisation didactique permettant de faire apparaître le lien entre les questions proposées et le résultat visé, lien dont la mise en évidence n'est prise en charge que partiellement par les questions de l'activité et qui ne serait pas toujours facile à établir[8].
Ces constats nous amènent à nous interroger sur la manière avec laquelle les enseignants - surtout les plus jeunes - gèrent l'institutionnalisation et à penser qu'il y a une véritable difficulté dans sa planification et sa réalisation adéquatement. Nous considérons qu'un manuel d'accompagnement du manuel de l'élève - ou livre du maître[9]- serait utile afin d'aider

[7] Les questions d'institutionnalisation apparues dans les activités sont : « conclure », « que peut-on dire de l'image de la droite Δ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$», « que peut-on dire de l'image du segment [EF] par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$», « que peut-on dire des angles respectifs de (D) et (D') ? ».
[8] Nous avons noté, dans l'activité 11, un écart important entre les réponses aux questions de démonstrations et l'institutionnalisation visée.
[9] En Tunisie, l'enseignant du collège et du lycée (élèves de 12 à 19 ans) ne dispose pas d'un livre du maître. Le seul manuel officiel à sa disposition est le livre de l'élève.

l'enseignant à traiter convenablement les questions d'institutionnalisation et à faire converger le rapport personnel de l'élève -à l'objet démonstration- vers le rapport institutionnel (Chevallard, 1992).

6.2. Place de la démonstration

L'étude des activités de la rubrique *« Découvrir »* a montré que parmi les cinq théorèmes proposés, trois d'entre eux sont démontrés[10]. De plus, une activité préparant l'introduction d'une définition a comporté une démonstration. Les démonstrations ne sont pas données explicitement, mais elles sont proposées par le biais d'un ensemble de questions figurant dans les activités[11].
Les deux théorèmes qui ne sont pas démontrés concernent, respectivement, l'image d'un cercle et l'image d'un polygone par une translation (conservation de l'aire, du périmètre et des angles du polygone). Bien que la première démonstration peut se faire par l'établissement d'une double inclusion -comme dans les cas de l'image d'une droite et l'image d'un segment- les auteurs du manuel ne l'ont pas proposé, probablement par souci d'allègement. La deuxième démonstration n'est pas accessible à l'élève car nécessitant des savoirs non disponibles.
En outre, parmi les démonstrations proposées, l'une d'entre elles s'intéresse à établir l'existence et l'unicité d'un point, deux autres proposent l'établissement d'une double inclusion. Nous considérons que ces types de démonstrations sont assez élaborés et leur présence à ce niveau scolaire est un indice renseignant sur la volonté des auteurs du manuel d'introduire des types variés de démonstration, pas nécessairement simples, lorsque l'occasion le permet.
Ainsi, nous estimons que les auteurs du manuel accordent de l'importance à la démonstration et que si leur démarche s'écarte du modèle classique selon lequel la démonstration est donnée explicitement à la suite du théorème[12], c'est surtout par souci d'aider l'élève à s'approprier la démonstration, en l'amenant graduellement, et de façon informelle, à comprendre la structure de l'argumentation logique la constituant.

7. Conclusion

L'étude que nous avons menée a permis d'une part, de caractériser les processus de dévolution et d'institutionnalisation dans l'introduction des nouveaux savoirs relatifs à la translation du plan, en 1ère année secondaire, et d'autre part, d'éclairer certains choix des auteurs de ce manuel relativement à la place de la démonstration.

Les organisations didactiques adoptées par les auteurs du manuel, relativement à l'enseignement de la translation du plan, favorisent la dévolution, et ce par le biais d'un nombre important de questions de dévolution qui offrent à l'élève la possibilité de participer à la construction des connaissances, objets d'apprentissage. De plus, l'apparition de questions d'institutionnalisation apparaissent dans certaines activités dans l'objectif de favoriser la mise en place des nouveaux savoirs. Ainsi, les auteurs opteraient pour approche constructiviste de l'apprentissage, évitant les dérives du constructivisme radical[13].

Quant à la démonstration, elle trouve sa place parmi les activités proposées aux élèves, même si les théorèmes, objets d'enseignement, ne sont pas tous démontrés. Les choix des auteurs se

[10] Conservation des distances, image d'une droite et image d'un segment par une translation.
[11] Nous rappelons que la démonstration est découpée en un ensemble de pas ou arcs transitifs de substitutions (Duval et Egret, 1989), dont chacun correspond à une question de démonstration proposée dans l'activité.
[12] La démonstration apparaissait explicitement comme un texte qui répondait à certaines normes, allant des hypothèses aux conclusions, énonçant correctement les théorèmes utilisés (Barbin, 1996).
[13] Le constructivisme radical est une théorie pédagogique qui affirme que l'élève ne s'approprie que les connaissances qu'il produit lui-même. Elle assure donc que, sans autre intervention didactique, les élèves peuvent (doivent) produire, par une construction autonome, des connaissances équivalentes à celles que la société veut leur enseigner.

veulent en adéquation avec la rigueur de l'activité mathématique, dans la mesure où des démonstrations de certains théorèmes sont données à faire[14]. Nous avons d'ailleurs souligné la diversité et la force des types de démonstrations apparues (existence, unicité…), pourtant à un niveau scolaire non encore spécialisé.

Toutefois, dans les organisations didactiques adoptées, un inconvénient majeur a été repéré : la mise en relation des questions de dévolution ou de démonstration avec les questions d'institutionnalisation, n'est pas entièrement prise en charge par le manuel et elle n'est pas toujours facile à faire par l'enseignant, lors de l'institutionnalisation. Dans les activités introduisant un théorème avec sa démonstration, par exemple, l'élève peut ne pas percevoir le lien entre les tâches qu'on lui demande d'accomplir et la démonstration visée par l'activité. Sans une institutionnalisation bien structurée, mettant en relation ce qui a été déjà réalisé et la connaissance visée, l'élève ne serait pas en mesure de percevoir la démonstration, sa fonction, son utilité et perdrait de vue un aspect fondamental de l'activité mathématique.
Cet inconvénient peut entraver une compréhension des notions mathématiques enseignées et un apprentissage adéquat de la démonstration.

Pour pallier à cet inconvénient, nous recommandons ce qui suit :
- L'élaboration d'un manuel du professeur explicitant clairement les intentions des auteurs du manuel par rapport à l'enseignement de la démonstration et leurs choix dans la conception des activités « de découverte » proposées. Cela peut aider l'enseignant dans le traitement convenable des questions d'institutionnalisation, d'une part, et dans la gestion et la structuration adéquates de l'institutionnalisation, d'autre part. Nous estimons que dans ce cas, l'enseignant peut favoriser la convergence du rapport personnel de l'élève vers le rapport institutionnel;
- La nécessité d'une structuration préalable, par l'enseignant, de l'institutionnalisation, s'appuyant sur ses savoirs, en particulier les savoirs disciplinaires, didactiques et pédagogiques[15];
- La nécessité de l'usage, par l'enseignant, en classe, d'un discours métamathématique relatif à la démonstration qui explicite d'une part, l'importance de cette dernière, son utilité et sa nécessité dans l'activité mathématique et d'autre part, sa structure et les règles régissant son élaboration et son fonctionnement, et ce à différents moments de l'enseignement et lorsque l'enseignant le juge utile.
Les deux dernières recommandations peuvent amener à repenser la formation initiale et continue du professeur.

Les résultats de notre étude restent, toutefois, très relatifs et sont à compléter et à consolider à l'aide d'une étude concernant les autres chapitres du manuel, prioritairement de géométrie, mais aussi relatifs aux notions algébriques, d'analyse etc. Une étude des choix des auteurs des manuels dans les autres niveaux scolaires pourrait aussi compléter ce travail et caractériser les choix de la noosphère en ce qui est de la dévolution, de l'institutionnalisation et de la place de la démonstration.

[14] La démonstration est le procédé de validation qui caractérise les mathématiques par rapport aux sciences expérimentales et elle occupe du point de vue épistémologique une place centrale dans cette discipline (Arsac, 1988).
[15] Perrin-Glorian distingue quatre types de savoirs de l'enseignant : les savoirs disciplinaires, les savoirs didactiques, les savoirs pédagogiques et les savoirs institutionnels (Première école d'été tunisienne de didactique des mathématiques, août 2008).

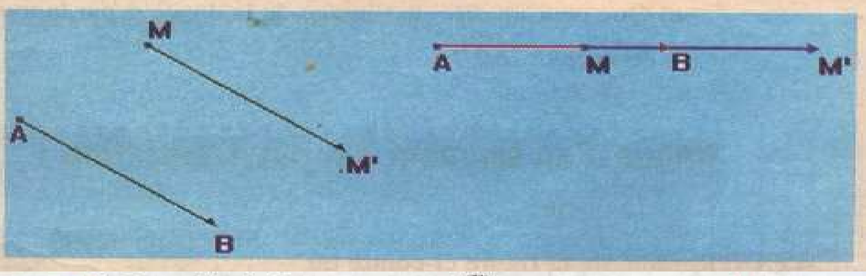
Bibliographie

- **Abdeljaouad M, 2007**; « Peut-on enseigner les mathématiques sans démonstrations? », Miftah al-Hissab n°105.
- **Arsac G., 1988**; « Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France », RDM vol 9 n°3, p 247-280.
- **Barbin E., 1996**; « Quelles conceptions épistémologiques de la démonstration pour quels apprentissages? » in L'enseignement des mathématiques: des repères entre savoirs, programmes et pratiques, Ed Tropiques, p 195-210.
- **Chevallard Y., 1992**; « Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique », RDM vol 12 n°1, p 73-111.
- **Duval R. et Egret M.A., 1989**; « L'organisation déductive du discours, Interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration », Annales de didactique et de sciences cognitives, p25-40, IREM de Strasbourg.
- **Perrin-Glorian M.J et Hersant M., 2003**; « Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires », RDM vol 23 n°2, p 217-276.

ANNEXE

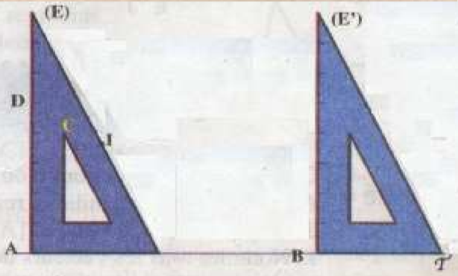
Définition

Soient A et B deux points distincts et M un point du plan.
On dit que le point M' est l'image du point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.



Activité 8

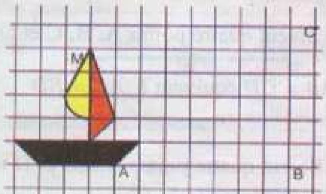
1- Reproduire la figure ci-contre.
2- On a fait glisser l'équerre, le long de la droite $\mathcal{T}$, de la position ($\mathcal{E}$) jusqu'à l'amener à la position($\mathcal{E}$').
Par ce glissement, B correspond à A, C' à C, D' à D et I' à I.
Marquer les points C', D' et I'.



3- Nommer des vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$?
4- Que peut-on dire des distances CD et C'D' ; DI et D'I' ; CI et C'I' ?
5- a) Marquer un point M sur ($\mathcal{E}$) et placer sur ($\mathcal{E}$') le point M' qui lui correspond par ce glissement.
b) Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{MM'}$?

Activité 13

1- Reproduire la figure ci-contre.
2- L'unité d'aire étant celle d'un petit carré.
Calculer la longueur de la coque de (V) et l'aire de ses voiles .
3- a) Tracer (V') l'image du voilier (V) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
b) Vérifier à l'aide du papier calque que (V) et (V') sont superposables.
4- On note (V'') l'image de (V) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Que vaut la longueur de la coque et l'aire des voiles de (V'')?



Activité 14

Reproduire la figure ci-contre.
1- Tracer l'image (C') du cercle (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2- Vérifier à l'aide du papier calque que (C) et (C') sont superposables.
Que peut-on dire des aires respectives des disques délimités par (C) et (C') ?
3- Tracer l'image (D') du polygone (D) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
4) Vérifier à l'aide du papier calque que (D) et (D') sont superposables.
Que peut-on dire des angles respectifs de (D) et (D')?