Enseigner les nombres complexes dans une perspective historique

H. Rosseel et M. Schneider

Ladimath, FuNDP,
Namur, Belgique

Résumé: L'histoire des nombres complexes offre un exemple significatif des distances qui séparent heuristique, théorisation et acceptation d'un concept. C'est en nous inspirant de cette histoire que nous avons élaboré un projet d'enseignement des nombres complexes, matière au programme de dernière année de l'enseignement secondaire en Belgique.
Les activités que nous proposons aux élèves sont en accord avec l'évolution historique. Cependant, si notre approche s'inspire des différentes théories développées dans l'histoire (Argand, Wessel et Gauss pour l'aspect géométrique, Cauchy et Hamilton pour le point de vue structurel), elle n'en respecte pas forcément la chronologie. En effet, elle mêle d'emblée les aspects géométrique, algébrique et trigonométrique de cette matière.
Pour élaborer ce projet, nous avons pris en considération les réserves exprimées par les élèves à l'encontre des nombres complexes, partagées par les mathématiciens dans l'histoire et constituant un obstacle épistémologique. Considérant que ce dernier s'est résorbé, dans l'histoire, par l'apparition de modèles qui concrétisent ces nombres, nous introduisons ces derniers comme codages symboliques de similitudes directes de centre (0, 0). Parallèlement, un regard plus algébrique est proposé par l'étude d'un texte historique et par le débat épistémologique qu'il suscite. Le statut de nombre est enfin octroyé à ces couples en raison des opérations de calcul auxquelles ils se prêtent.

Pour alimenter les actes de ce congrès, nous reprenons ici une synthèse et un extrait d'un article paru dans le n° 63 de la revue *Petit X*: *Ces nombres que l'on dit « imaginaires »* (H. Rosseel, M. Schneider).

Après avoir constaté un malaise exprimé par les élèves à l'encontre des nombres complexes, les auteurs décrivent les grandes lignes et les enjeux de leur projet d'enseignement. S'ensuivent une description des réactions des élèves à ce projet et à d'autres approches plus classiques de ce contenu d'enseignement, recueillies par le biais d'interviews, ainsi qu'une analyse de ces réactions dont nous reprenons l'extrait qui suit.

« 1. Un obstacle épistémologique observé dans l'histoire des mathématiques

Les réactions recueillies ici corroborent les réserves que G.T. Bagni (1997) a pu observer chez les élèves à l'encontre des nombres complexes, réserves que nous avons évoquées dans l'introduction. En effet, dans les interviews de professeurs stagiaires tout comme dans celles d'élèves ayant reçu un enseignement « classique » des nombres complexes, s'exprime un malaise certain, comme le montrent plusieurs de leurs propos. Ces réserves s'atténuent dans le cadre du projet analysé ici mais le passage du registre géométrique au registre algébrique demeure périlleux, certains élèves donnant un sens à ces nombres dans le premier registre mais demeurent perplexes pour le second. Nous reviendrons plus loin sur le rôle joué par le projet à ce point de vue. Dans cette section, nous tentons d'interpréter le malaise exprimé à la lumière de l'histoire des mathématiques qui peut s'avérer éclairante pourvu qu'on en fasse un usage suffisamment ample et contextualisé.

a) Un malaise observé dans l'histoire et résorbé dans un registre physico-géométrique

Les vicissitudes liées à l'émergence des nombres complexes dans l'histoire des mathématiques sont touffues. En l'espace restreint de cet article, nous en retiendrons d'abord les réserves exprimées à l'encontre de ces nombres, puis leur acceptation progressive au fur et à mesure de l'apparition de modèles qui les concrétisent.

Les nombres complexes font leur apparition vers le milieu du 16^{e} siècle dans la théorie des équations. En particulier, des algébristes italiens : del Ferro, Cardan, Tartaglia et Bombelli résolvent des équations de degré 3 et introduisent des racines carrées de nombres négatifs qui se simplifient pour aboutir à des racines entières. Encore appelées entités « imaginaires », ces écritures seront longtemps exploitées avant qu'on leur reconnaisse le statut de nombres. Les réserves exprimées à leur encontre sont nombreuses. Par exemple, Berkeley, au 17^{e} siècle, souligne la difficulté à leur octroyer un sens quelconque : « le signe algébrique qui dénote la racine carrée d'un négatif a son usage dans les opérations logiques, quoiqu'il soit impossible de former par lui une idée de quelque quantité que ce soit ». L'absence de modèle « tangible » des expressions imaginaires restera une préoccupation lancinante, malgré l'opérationnalité que plusieurs mathématiciens, tel Leibniz au 17^{e} siècle, leur reconnaissent dans les calculs : « Ces notions imaginaires ont ceci d'admirable que, dans le calcul, elles n'enveloppent rien d'absurde ou de contradictoire et que cependant elles ne peuvent être présentées dans la nature des choses ».

Mais, comme le développe J.-L. Verley (1998), cette efficacité dans le calcul algébrique ne suffit pas à les faire accepter. A cet égard, leur représentation par des modèles géométriques semble avoir joué un rôle tout aussi important : les segments orientés chez Wessel (fin du 17^{e} siècle) et la multiplication d'un segment par un autre qu'il interprète en termes de rotation et, bien sûr, le plan de Gauss (19^{e} siècle) : « De même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini, où, chaque point déterminé par son abscisse a et son ordonnée b, représente en même temps la quantité $a + bi$ ». Enfin, on doit à Cauchy (19^{e} siècle) une représentation des nombres complexes sous forme trigonométrique, en termes de rayons vecteurs définis par un module (leur longueur) et un argument (angle d'inclinaison par rapport à un axe), la multiplication dans les complexes s'interprétant alors comme un produit de modules et une somme d'arguments.

Sortis ainsi d'un univers algébrique, les nombres complexes ont acquis leurs lettres de noblesse dans un double registre alliant géométrie et physique. S'en est suivi une définition par Hamilton des nombres complexes en termes de couples de réels munis des deux opérations ad hoc, définition jugée enfin « propre ».

b) Caractère problématique des extensions du concept de nombre

Les nombres complexes ne sont pas les seuls à avoir provoqué une crise dans l'histoire des mathématiques. On pense bien sûr aux irrationnels et au problème d'incommensurabilité des grandeurs. Mais, à un niveau plus élémentaire de l'emboîtement des ensembles de nombres, G. Glaeser (1981) développe les avatars historiques des entiers négatifs qui sont au moins aussi spectaculaires que ceux liés à l'émergence des irrationnels ou des complexes.

Ces crises historiques ont aujourd'hui leurs équivalents scolaires, bien que les difficultés s'expriment d'une toute autre manière en raison de différences notables dans la culture mathématique « ambiante ». Il n'empêche que, des naturels aux complexes, les diverses sortes de nombres constituent, pour les élèves, des connaissances qui, à un moment donné, font obstacle à l'apprentissage de nombres d'un type nouveau. C'est en ce sens que G. Brousseau (1998) parle à ce propos *d'obstacle épistémologique* : « Puisque le fait de plonger un ensemble dans une extension change ses « propriétés » et celles de ses éléments que l'on peut désormais utiliser, nous pouvons nous attendre à de grandes difficultés et à des résistances au changement d'emploi lorsque l'habitude jouera un rôle – qu'il s'agisse d'habitudes psychologiques ou culturelles. C'est un des principaux obstacles épistémologiques que l'on rencontre en mathématiques. » Nous ne nous étendrons pas ici sur le concept d'obstacle épistémologique, renvoyant à G. Brousseau (op. cit.) le lecteur qui souhaite approfondir ce concept. Contentons-nous de souligner le caractère quasiment inéluctable et la robustesse des obstacles épistémologiques qui, sous des formes diverses, se manifestent tant dans l'histoire des mathématiques que dans l'apprentissage des élèves d'aujourd'hui.

Notons, dans l'obstacle mentionné ici, l'effet d'écran créé par des habitudes mentales qui restreignent le champ de conscience des individus et les empêchent de penser autrement, comme l'ont montré les psychologues du comportement. Il est possible que la seule évocation du mot « nombre » renvoie d'office les élèves aux propriétés qu'ils ont l'habitude de voir associer aux nombres qu'ils connaissent : de là leur difficulté à voir les choses autrement, à « penser à côté », c'est-à-dire à pouvoir englober dans ce vocable « nombre » des objets inattendus, dotés de propriétés autres, en contradiction avec celles des nombres qu'ils connaissent. C'est comme si on avait habitué des enfants à appeler « animaux » les chiens, seuls animaux qu'ils auraient rencontrés jusque là. Il ne faudrait pas s'étonner qu'ils refusent d'appeler « animal » le premier chat qu'ils verraient. Les obstacles épistémologiques rejoignent donc ici ce que M. Schneider (2002) appelle les *obstacles psychologiques*, par référence aux travaux de ce domaine de la psychologie. Toutefois, les premiers obstacles sont liés à des objets de savoir alors que les autres ne le sont pas forcément.

c) Une vision positiviste des mathématiques, attestée par ailleurs

Les obstacles épistémologiques liés aux extensions des ensembles de nombres pourraient relever, ainsi que développé par M. Schneider (notes de cours à paraître), d'une vision positiviste des mathématiques qui consiste à concevoir les concepts mathématiques comme le reflet des « objets » du monde naturel. En ce sens, les nombres se doivent d'être « concrétisés » par l'un ou l'autre de ces objets, tout comme le sont les nombres naturels par une collection d'objets de même nature que l'on cherche à dénombrer ou les nombres rationnels ou irrationnels par la mesure de grandeurs. A l'opposé, une vision socio-constructiviste considère les concepts mathématiques comme des produits imaginés par l'esprit humain, en fonction de projets bien déterminés, ces derniers pouvant être très spéculatifs. La manière dont s'est résorbée, dans l'histoire des mathématiques, la crise des relatifs est à cet égard particulièrement significative. Après avoir interprété cette crise et en particulier les réserves exprimées vis-à-vis de la fameuse règle « moins par moins donne plus » par la « difficulté de s'écarter d'un sens *concret* attribué aux êtres numériques », G. Glaeser situe le travail d'Hermann Hankel en 1867 comme un épilogue heureux de cette crise. Ce dernier « trivialise » ces nombres et leurs règles de multiplication en passant d'un point de vue *concret* à un point de vue « formel ». Il justifie en effet ces règles non pas par le biais d'un modèle concret mais par le respect d'un *principe de permanence* : la multiplication dans Z doit prolonger la multiplication dans N tout en gardant de « bonnes propriétés », entre autres, en respectant les règles de distributivité. Ainsi, 0 peut s'écrire, d'une part, sous la forme a x 0 = a x (b + opp b) = ab + a x (opp b) et, d'autre part, sous la forme = 0 x (opp b) = (opp a + a) x (opp b) = (opp a) x (opp b) + a x (opp b). De là, on tire que (opp a) x (opp b) = ab.

La vision positiviste des mathématiques décrite plus haut est probablement celle que partagent de nombreux élèves du cycle secondaire. Un argument en faveur de cette hypothèse est qu'une telle conception des mathématiques permet d'interpréter maintes réactions et erreurs d'élèves dans d'autres contenus mathématiques tels l'analyse et les probabilités, ainsi que l'a développé M. Schneider (1991 et notes de cours à paraître).

Dans le cas présent, il nous semble pouvoir interpréter, par cette analyse, plusieurs des propos recueillis soit à l'occasion de l'expérimentation du projet, soit lors des interviews. En effet, si les élèves ou les professeurs stagiaires sont mal à l'aise vis-à-vis des nombres complexes, c'est précisément parce qu'ils ne peuvent leur associer ni un modèle concret comme la longueur d'un segment, ni une écriture familière comme celle d'un nombre décimal fut-il illimité qui « raccrocherait » les nombres complexes à d'autres nombres auxquels ils ont pu déjà faire correspondre de tels modèles. Par exemple, les élèves ou professeurs stagiaires évoquent l'impossibilité d'écrire les nombres complexes en chiffres et c'est en ce sens que certains parlent de caractère non dénombrable, comme ils nous l'ont précisé par la suite. Un autre évoque que le seul aspect concret d'un nombre complexe est sa norme, soit sa distance à l'origine.

Ainsi, les réserves liées aux entités imaginaires peuvent s'interpréter par cette difficulté à les penser comme concepts imaginés (le qualificatif est particulièrement pertinent ici) plutôt que comme abstraction qui prolonge une quelconque réalité sensible tout comme les figures géométriques peuvent être « abstraites » d'objets matériels. »

2. D’une solution formaliste à la crise à une solution intuitionniste

A partir de cette analyse, les auteurs développent deux solutions à cette crise. La première s’inscrit dans un courant formaliste : elle consiste à postuler l’existence d’un nombre dont le carré vaut – 1 et à construire, à partir de là, une théorie dont la consistance repose essentiellement sur un critère de non-contradiction. Cette solution n’est pas sans risque, l’écueil majeur étant la perte de sens que certains élèves expriment mais que d’autres pourraient partager sans forcément l’expliciter pour des raisons essentiellement liées au contrat didactique (au sens de G. Brousseau, 1998). Une banalisation des notations et l’usage prématuré du mot « nombre » pourraient aggraver ce risque. L’autre solution, celle que préconisent les auteurs, s’intègre dans un courant intuitionniste, un modèle géométrique octroyant d’emblée un sens à la théorie construite, comme dit plus haut. Elle n’empêche pas que demeure un « fossé » entre les domaines géométrique et algébrique dans l’acceptation de ces nombres. Cependant, elle a le mérite d’instaurer dans la classe un débat épistémologique sur le statut des concepts mathématiques et, par là, d’améliorer le rapport des élèves au savoir mathématique dans le sens d’un questionnement explicite de son sens et de sa portée.

Bibliographie succincte

BAGNI G.-J. (1997), *History and didactics of mathematics : an experimental research*, Nucleo di ricerca in didattica della matematica, Bologne

BROUSSEAU G. (1998), *La théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, Grenoble

GLAESER G. (1981), Epistémologie des nombres relatifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 2-3, pp. 303-346

SCHNEIDER M. (1991), Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.11 n° 2.3, pp. 241-294

SCHNEIDER M. (2002), Problèmes et situations-problèmes : un regard pluraliste, *Mathématique et Pédagogie*, n° 137, pp. 13-48

SCHNEIDER M. (notes de cours à paraître), *N’y aurait-il qu’un seul obstacle épistémologique en mathématiques ?*

VERLEY J.-L. (1998), Présentation historique générale in *Images, Imaginaires, Imagination, une perspective historique pour l’introduction des nombres complexes*, Ellipses, Paris