LE RAISONNEMENT EN ARITHMETIQUE : D'UNE ANALYSE EPISTEMOLOGIQUE A UNE ANALYSE DIDACTIQUE.

VERONIQUE BATTIE

EQUIPE DIDIREM – UNIVERSITE PARIS 7 – FRANCE

RESUME : A l'articulation entre analyses épistémologique et didactique, notre recherche vise à identifier les potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage du raisonnement mathématique et à étudier l'écologie de celles-ci en particulier à la fin du cursus secondaire français (lors de laquelle les élèves passent l'examen du baccalauréat) où ce champ a été réintroduit en 1998. Basée sur l'exploitation d'un outil d'analyse issu de notre travail épistémologique, cette recherche est menée à travers l'étude de différents corpus : sujets du baccalauréat, ressources destinées aux enseignants, copies d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat, transcriptions d'une séance de recherche en groupes en classe de terminale scientifique.

Dans l'enseignement secondaire français, la place de l'arithmétique, arène des nombres par excellence, a fortement varié qualitativement et quantitativement dans l'histoire des programmes. Après des années de purgatoire, elle a réapparu en 1998 en terminale scientifique[1] (18 ans, grade 12), dans le cadre de l'enseignement de spécialité et depuis, les classes de troisième (15 ans, grade 9) et seconde (16 ans, grade10) se sont trouvées aussi concernées. Cette réintroduction a été en partie motivée par l'idée que l'arithmétique pouvait favoriser un travail sur le raisonnement mathématique. Une telle évolution curriculaire induit inévitablement des questions didactiques, notamment les suivantes : l'arithmétique des programmes actuels de terminale favorise-t-elle un travail sur le raisonnement mathématique et, si oui, quelles en sont les spécificités ? L'arithmétique telle qu'elle est enseignée actuellement à ce niveau le permet-elle effectivement ? Ce sont ces questions didactiques qui sont au cœur de notre recherche (Battie, 2003) mais, pour les aborder, un travail

[1] Dernière classe du cursus secondaire français, à la fin de laquelle les élèves passent l'examen du baccalauréat.

épistémologique préliminaire nous a semblé s'imposer afin d'étudier préalablement les potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage du raisonnement mathématique.

De nombreuses recherches didactiques ont abordé, depuis plus de vingt ans, des questions relatives au raisonnement mathématique et à la preuve, c'est-à-dire à la rationalité mathématique. Certaines d'entre elles ont bien mis en évidence les difficultés rencontrées par les élèves et étudiants (cf. par exemple (Dreyfus,1999), (Hanna,2000) pour deux publications récentes) ainsi que des spécificités de la rationalité mathématique suivant les domaines (*International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* (http://www-didactique.imag.fr/preuve)). Cependant, même si, comme nous l'avons mentionné plus haut, le discours « noosphérien » tend à considérer comme une évidence les potentialités offertes par ce champ pour l'apprentissage de la rationalité mathématique, nous n'avons pas directement réponse aux questions que nous nous posons. En effet, au niveau relativement avancé que nous considérons ici, ces potentialités nous semblent avoir été moins systématiquement explorées que ce n'a été le cas pour la géométrie. Il y a à cela des raisons culturelles évidentes comme l'ont bien montré Grenier et Payan (1998) dans leur travail concernant modélisation et preuve en mathématiques discrètes. C'est pourquoi il nous a semblé nécessaire d'articuler analyses épistémologique et didactique.

Dans le cadre de cette articulation, l'analyse épistémologique a pour fonction de nous aider à étudier les spécificités des modes de raisonnement qui mettent en jeu les notions d'arithmétique précisées par les textes officiels : divisibilité dans Z, division euclidienne (algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD), congruences dans Z, entiers premiers entre eux, nombres premiers (existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers), PPCM, théorèmes de Bézout et Gauss. Nous parlerons dans la suite, à propos de ces modes de raisonnement, de *raisonnement en arithmétique*, pour bien les distinguer du *raisonnement arithmétique* identifié dans les recherches sur l'algèbre et notamment sur la transition arithmétique-algèbre (Schmidt (2002)). Pour ces raisonnements en arithmétique, le symbolisme algébrique fonctionne comme un outil supposé suffisamment maîtrisé par ces élèves de terminale scientifique. Notre analyse épistémologique est basée sur l'étude de preuves arithmétiques, historiques et actuelles.

L'analyse didactique, quant à elle, a pour but d'étudier l'écologie des potentialités révélées par l'analyse épistémologique dans le contexte curriculaire envisagé ici. Elle est menée, dans notre recherche, suivant différents axes : analyse des sujets de baccalauréat, de ressources destinées aux enseignants, analyses de productions d'élèves, et effectuée en s'appuyant sur les résultats et outils issus de l'analyse épistémologique.

Analyse épistémologique

En travaillant tout particulièrement à partir d'une preuve de Frenicle du résultat « Il n'existe pas de triangle rectangle en nombres (c'est-à-dire dont les longueurs des côtés ont pour mesures des nombres entiers) dont l'aire soit un carré », nous avons éprouvé le besoin de distinguer deux dimensions dans le raisonnement en arithmétique, la *dimension organisatrice* et la *dimension opératoire.* La première est coextensive à la « visée » du mathématicien (c'est-à-dire son « programme », explicite ou non). La seconde est relative à l'ensemble des traitements développés pour permettre la mise en œuvre des différentes étapes de la mise en acte de la « visée ».

Du côté organisateur, nous avons étudié en détail différentes formes organisatrices : la descente infinie et la récurrence, la disjonction de cas, la recherche exhaustive[2] et une méthode propre aux anneaux factoriels que nous avons appelée « jeu d'extension-réduction ». Nous avons regroupé dans une même catégorie la descente infinie et la récurrence parce qu'elles constituent deux modes d'exploitation dans le raisonnement de la propriété de bon ordre de l'ensemble N, ce qui n'implique aucunement que nous les considérions comme équivalentes sur le plan didactique. Même si nous les avons distinguées en tant que formes organisatrices, la recherche exhaustive et la disjonction de cas ont été également rapprochées car elles illustrent toutes deux une même démarche globale : ramener la résolution d'un problème à l'étude d'un nombre fini de cas. La dernière catégorie retenue, quant à elle, fonctionne de façon plus implicite dans le travail arithmétique ; elle repose sur les propriétés des anneaux factoriels. Nous avons choisi l'appellation « jeu d'extension-réduction » afin de désigner le principe fondateur de cette méthode qui se retrouve dans d'autres champs des mathématiques, tels l'analyse ou l'algèbre linéaire.

Du côté opératoire, nous avons proposé une arborescence explicitant différents pôles au sein de cette composante qui ont servi à structurer l'analyse. Ceci a permis de prendre en compte conjointement dans l'analyse du travail opératoire, les formes de représentations des objets employées, la structure de Z privilégiée, l'utilisation de théorèmes-clefs et les différentes manipulations algébriques.

---

[2] Nous avons introduit la distinction entre *recherche exhaustive au sens large* et *recherche exhaustive au sens strict*, la première comprenant une phase de limitation de la recherche précédant celle de recherche exhaustive au sens strict..

Différents aspects des interactions susceptibles d'exister entre les deux dimensions distinguées dans le raisonnement en arithmétique ont été mis en évidence dans notre recherche. En comparant les preuves de Fermat et Frenicle du résultat mentionné précédemment, nous avons par exemple pointé un élément essentiel participant à ces interactions (les objets sur lesquels porte le travail opératoire ont une influence directe sur l'organisation des preuves) et, en analysant une preuve d'un résultat relatif aux sommes de deux carrés[3], nous avons montré que des sous-dimensions organisatrices sont susceptibles de naître dans le jeu opératoire qui règne au sein d'autres dimensions organisatrices, ceci conduisant à une imbrication de formes organisatrices faisant vivre chacune *a priori* plusieurs formes opératoires.

L'analyse épistémologique de notre recherche a montré qu'il y a, à propos d'un univers familier pour les élèves du secondaire, celui des nombres entiers où de nombreuses questions peuvent se formuler et se comprendre aisément, un univers du raisonnement, à la fois solidement structuré, qui peut être instrumenté par des outils opératoires efficaces, avec une marge énorme dans la complexité tant dans les deux dimensions distinguées que dans leurs interactions. Dans le même temps, on ne peut s'empêcher, à la lecture des nombreux exemples fournis, d'être impressionné par le caractère foisonnant de ce paysage, par la diversité des ressorts sur lesquels s'appuie le raisonnement, et de penser que la construction d'un cheminement cohérent et adapté aux élèves de terminale S, compatible avec les contraintes et notamment les contraintes horaires de l'enseignement, ne va pas forcément de soi. C'est ce qu'est venu confirmer et préciser l'analyse didactique.

Analyse didactique

La structure d'analyse introduite lors de l'étude épistémologique a été exploitée à la fois pour l'analyse du champ réellement exploité par l'institution scolaire et, en complément indispensable de cette analyse institutionnelle, pour étudier le rapport d'élèves à la rationalité mathématique lors de la résolution de problèmes arithmétiques. Pour chacune de ces deux

---

[3] Soit n un entier naturel non nul et n = $\prod_{p\in P} p^{v_p(n)}$ (P est l'ensemble des nombres premiers), sa décomposition en facteurs premiers. On pose $\Sigma = \{a^2 + b^2 ; a, b \in N\}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $n \in \Sigma$.
- $v_p(n)$ est pair pour tout $p \in P$ tel que $p \equiv 3[4]$.

parties de l'analyse didactique, nous avons choisi de considérer deux types de corpus extrêmes l'un par rapport à l'autre relativement aux contraintes institutionnelles auxquelles ils sont assujettis. Ainsi, pour l'analyse institutionnelle, nous avons considéré les sujets du baccalauréat (à partir de la mise en application des programmes réintroduisant l'arithmétique) et des ressources destinées aux enseignants et, en ce qui concerne les travaux d'élèves, nous avons choisi d'analyser des copies d'élèves issues d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat et la recherche d'élèves de terminale scientifique auxquels nous avons proposé de travailler sur une question de rationalité en les plaçant quelque peu aux limites de la culture d'enseignement.

Pour la recherche proposée aux élèves, les tâches en jeu étaient les suivantes : production d'une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, passage à l'étude de $\sqrt{3}$, comparaison de leur preuve de $\sqrt{2}$ à trois preuves fournies (par descente infinie, par l'absurde et minimalité, en utilisant la structuration autour des nombres premiers), production de preuves de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ et généralisation à partir des preuves fournies. Du fait que les élèves avaient déjà rencontré en classe la preuve euclidienne classique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, nous avons pensé avec l'enseignante, lors de la conception de l'expérimentation, que la réalisation de la tâche correspondante ne nécessiterait que peu de temps par rapport au reste.

Contrairement à l'image donnée par les productions écrites, l'étude de la recherche des élèves montre clairement que lorsque l'« écriture » de cette preuve passe sous leur responsabilité, les choses deviennent problématiques, du fait par exemple de l'absence d'une claire conscience du champ concerné par l'arithmétique. L'analyse de la recherche des élèves relative à l'étude de $\sqrt{2}$ et à celle de $\sqrt{3}$ a clairement mis en évidence l'émergence dans cette recherche de la diversité des résolutions possibles pointée par l'analyse mathématique. L'existence d'automatismes renvoyant à la culture d'enseignement concernée a pu contribuer à l'apparition de la preuve attendue (les rationnels sont par exemple envisagés automatiquement par les élèves à travers leur représentant irréductible) mais aussi à celle d'embryons de preuves autres (l'identification d'un produit relativement à l'idée préalable d'utiliser le théorème de Gauss a été à l'origine d'une lecture extra-ordinaire en termes de divisibilité, embryon d'une preuve originale ; cette association est apparue de façon d'autant plus forte que nous avons observé que ce sens de lecture extra-ordinaire est susceptible de faire obstacle au sens habituel alors que ce dernier est le plus pertinent à un moment donné du développement). Toutefois, nous avons pu en particulier observer la difficulté des élèves à se placer dans un raisonnement hypothético-déductif par l'absurde lorsque leur conviction de la fausseté de l'énoncé est forte, comme c'était le cas ici avec l'énoncé « $\sqrt{2}$ est rationnel ». Concernant les tâches de comparaison et production de preuves de l'irrationalité de $\sqrt{3}$[4], l'analyse des transcripts a en particulier montré que le lien entre considérer une fraction irréductible et prendre le plus petit entier a tel qu'il existe un entier b vérifiant $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ est spontanément fait par des élèves, et elle a mis en évidence la difficulté des élèves à traduire la dichotomie pair / impair en termes de divisibilité.

En conclusion, l'analyse épistémologique de notre recherche a clairement mis en évidence des potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique (ces potentialités ont été exprimées en termes de dimensions organisatrice et opératoire et d'interactions entre celles-ci). L'analyse didactique a montré, du côté institutionnel, l'existence de réductions et de verrouillages mais aussi de ressorts et ressources existant au sein même de l'institution scolaire. L'analyse de travaux d'élèves a, quant à elle, permis de mettre en évidence une certaine créativité des élèves que l'institution scolaire devrait selon moi prendre bien plus en compte pour aider à une exploitation plus riche des potentialités de l'arithmétique (par exemple en définissant davantage l'autonomie qui leur est dévolue au niveau organisateur) mais aussi un certain nombre de difficultés qui mettent bien en évidence les limites d'une analyse *a priori* des potentialités de l'arithmétique. Au-delà de ces résultats, l'exploitation de l'outil d'analyse que nous avons élaboré a montré la pertinence de ce dernier pour l'analyse didactique et en particulier pour avoir accès à la dynamique de recherche des élèves confrontés à la résolution d'un problème d'arithmétique.

BIBLIOGRAPHIE :

Battie, V. (2003) Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique. Thèse de doctorat ; Université Paris 7.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1/3), 85-109.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration : an overview, *Educational Studies in Mathematics,* 44(1), 5-23.

Grenier D., Payan Ch. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 18/1, 59-100.

[4] Par manque de temps la tâche de généralisation n'a été abordée, et que très partiellement, par un seul élève.

Schmidt, S. (2002). Arithmetical and algebraic types of reasoning used by pre-service teachers in a problem-solving context. *RCESMT* 2:1 Janvier 2002. Toronto : University of Toronto Press Journals Division.