EMF 2003

19-23 décembre 2003

Tozeur (Tunisie)

Thème : Histoire et épistémologie des mathématiques

Activité : Communication

Titre : Les équations canoniques dans *Sharh al-Urjūza al-yāsiminya* d'Ibn al-Hā'im

Résumé :

Dans cette communication nous nous intéressons à *Sharh al-Urjūza al-yāsiminya* d'**ibn al-Hā'im** (né au Caire en 1352 et mort à Jérusalem en 1412) qui n'avait pas été éditée jusqu'à présent et dont l'intérêt pédagogique nous a semblé indéniable. Ce commentaire développé de *al-Urjūza fil Jabr wal Muqābala* , poème didactique d'Ibn al-Yāsamin (mort à Marrakech en 1204), ne ressemble à aucun autre et les surpasse sans aucun doute, d'une part parce qu'il ne reste pas esclave du texte commenté et d'autre part parce qu'il l'enrichit par des ajouts mathématiques importants montrant une parfaite maîtrise de la littérature algébrique classique que ce soit les travaux d'al-Karāji ou les écrits d'Ibn al-Bannā.

Ibn al-Hā'im consacre à la résolution des six équations canoniques un important chapitre de l'introduction de *Sharh al-Urjuza*, adoptant, sans toutefois le citer directement, la démarche d'Ibn al-Bannā, mais offrant, de plus, au lecteur une présentation systématique, standardisée et exhaustive.

Les algorithmes, preuves et méthodes pour résoudre ces équations sont énoncés dans leur forme la plus générale, puis illustrés par des exemples numériques où les coefficients sont successivement des entiers, des fractions ou un entier augmenté d'une fraction.

Alors que l'inspiration d'Ibn al-Hā'im pour ces méthodes est multiple, deux méthodes particulières sont exposées d'une manière assez originale. Nous leur consacrerons l'essentiel de la communication :

la première énonce une technique pour obtenir une équation quadratique dont une racine est rationnelle.

La seconde, méthode dite de "la racine auxiliaire" (*Nadhir al-jidhr*), dont on trouve des traces chez al-Karāji, est formalisée dans la *Urjuza* d'Ibn al-Yāsamin. Elle est parfaitement expliquée et illustrée par Ibn al-Hā'im.

Les équations canoniques dans *Sharh al-Urjūza al-yāsiminya*

1. Introduction

Les premiers ouvrages explicites d'algèbre sont arabes: c'est vers la fin du IX$^{\text{ème}}$ siècle que Mohamed ibn Musa al-Khwārizmi (870-950) est le premier à exposer une théorie des équations, bien identifiée par le titre de son ouvrage, *Kitāb al-Jabr wal muqābala,* regroupant les méthodes générales pour résoudre les équations linéaires et les équations quadratiques. Il s'intéresse d'abord aux équations elles-mêmes, les caractérisant et les organisant en six formes canoniques, typologie qui survivra pendant des siècles, puis en résolvant les problèmes de la vie courante à l'aide de ces équations. L'ouvrage d'al-Khwārizmi fut immédiatement considéré par ses contemporains comme une oeuvre fondatrice objet par la suite d'explicitations et de commentaires visant à en clarifier les prémisses, à en consolider les bases théoriques et à en élargir les applications. Une communauté de savants et d'enseignants fut identifiée : *Ahl al-Jabr* et une nouvelle discipline était née : *Sinā^{c}at al-Jabr*, ^{c}*Ilm al-Jabr* ou tout simplement *al-Jabr*.

Bien avant la fin du neuvième siècle, les mathématiciens arabes ont cherché à présenter *al-Jabr* comme une discipline répondant aux normes classiques d'origine grecque, normes en train d'être découvertes, soit dans leur texte grec, soit dans une traduction arabe et considéraient les *Eléments* d'Euclide comme incontournables dans toute preuve impliquant des nombres. Or, ce qui distinguait al-Khwārizmi de ses prédécesseurs babyloniens, grecs ou indiens, c'est son soucis de justifier les algorithmes de résolution des équations quadratiques. "*J'ai décris,* écrit-il, *les algorithmes exacts de résolution [de ces équations] et j'ai établi, pour chacun un diagramme qui permet de déduire la justification [du résultat]*". Cette partie du traité d'al-Khwarizmi ne sert à rien au calculateur, mais elle permet de montrer que ce travail est scientifique, en ce sens que ses objets mathématiques ont été définis et les propriétés qui en découlent démontrés. Notons enfin qu'al-Khwārizmi justifie les algorithmes de résolution d'équations quadratiques dont les coefficients sont des entiers naturels particuliers. Ces équations sont considérées comme des exemples génériques et seront repris par la plupart de ses successeurs, même ceux qui adoptent de nouvelles preuves.

Cependant, les preuves pragmatiques présentées par al-Khwārizmi et basées sur une lecture directe des diagrammes n'ont satisfait ni la communauté des géomètres arabes, ni celle naissante des algébristes, les premiers considérant que tout raisonnement doit s'appuyer explicitement sur les *Eléments* d'Euclide et les seconds souhaitant se débarrasser de cette tutelle. Thābit ibn Qurra[1] (826-900) fait partie des premiers, ainsi qu'Abu Kāmil[2] (850-930), alors qu'al-Karāji (953-1028), bien qu'adoptant systématiquement leur démarche, crée les conditions pour que la tutelle euclidienne s'estompe. Al-Karāji peut être considéré comme le véritable inventeur de l'algèbre en tant que science établie, avec sa terminologie, ses définitions, ses propositions identifiées et ses preuves originales. Systématisant le travail de ses prédécesseurs et structurant sa présentation, il commence par plusieurs chapitres introductifs qui complètent la boite à outils algébrique en y plaçant toutes les propositions d'arithmétique des entiers naturels et des fractions et aussi celles des irrationnels quadratiques et en y ajoutant un maximum d'identités algébriques, toutes démontrées géométriquement à partir des Livres II, VII et X des *Eléments*. Une fois le concept d'inconnue précisé, il imagine le champ des 'nombres connus' en parallèle au champ des 'nombres inconnus'. "*Apprends*, dit-il, *qu'opérer dans le champ des connus les gardent dans ce champ quelque soit l'opération*" (Anbouba, p.47). Il ne s'agit donc plus de raisonner sur des figures géométriques mais directement sur les nombres, pouvant être eux-mêmes le résultat de plusieurs opérations successives. La boite à outils de l'algèbre intègre alors toutes les techniques simples, mais aussi extrêmement complexes, de l'arithmétique numérique, en particulier celle élaborée par Diophante et commence à se libérer de la tutelle de la géométrie. Désormais, tous les énoncés préalablement vérifiés géométriquement, peuvent être employés sans rappel de leur validité. L'usage des identités remarquables devient dominant.

Pour l'école maghrébine, l'algèbre devient totalement indépendante de la géométrie. Dans *Raf*^{c}*al-hijāb* , Ibn al-Bannā (1256-1321) montre sa maîtrise des méthodes de résolution des équations canoniques et la facilité avec laquelle il utilise les identités remarquables pour justifier chaque algorithme retenu. En moins de deux folios[3], l'auteur présente une synthèse fulgurante des algorithmes de résolution des six équations canoniques et leurs justifications; mais, contrairement à al-Khwarizmi et à ses successeurs, il n'a recours à aucune preuve géométrique, se contentant de faire appel à des identités remarquables; et même lorsqu'il consacre plus d'espace à l'algèbre, comme dans son « *Kitāb al-jabr wal muqabala*[4] », Ibn al-Bannā n'a pas recours à la géométrie : il aborde directement la définition des nombres irrationnels quadratiques et traite des diverses opérations sur ces nombres. Le paragraphe

[1] Berggren, p.106-8

[2] "*Ce besoin de justification more geometrico du raisonnement algébrique, regardé comme nécessaire pour une branche qui n'avait pas encore gagné son autonomie, fut poussé si loin que l'on trouve souvent dans les problèmes, en plus de la résolution algébrique, une déduction de la formule sur une figure*". (Sésiano, p.71)

[3] Aballagh, page 678-9

[4] édité par Ahmad Salim Saydan, Koweit, 1985. On donne aussi à ce manuel le nom de "*Kitāb al-Usùl" (*Le livre des fondements).

consacré à la multiplication débute par l'énoncé de dix-huit identités remarquables valables pour tous les nombres; puis à la suite de ces identités remarquables, simplement énoncées, mais considérées comme préliminaires fondamentales pour la suite du traité, Ibn al-Bannā accorde une attention particulière à la résolution des équations quadratiques. La double influence d' al-Karāji et d'Ibn al-Bannā se retrouve dans le traité d'algèbre d'ibn al-Hā'im**,** rédigé en 1370 : *Sharh al-Urjūza al-yāsimīnya*.

2. Présentation de l'auteur de *Sharh al-Urjūza al-yāsimīnya*

A la fin du XIVe siècle, pendant le long règne sur l'Egypte du sultan Barqūq (1382-1397), se déroule à Jérusalem la période la plus prestigieuse de la carrière de Abu'l Abbās Shihāb ad-Din Ahmed ibn Mūhammad ibn Imād ad-Din ibn Ali, connu sous le nom de **ibn al-Hā'im** (né au Caire en 1352 et mort à Jérusalem en 1412); elle coïncide avec l'installation au Caire d'ibn Khaldūn (mort en 1406).

Outre le *Sharh al-Urjūza al-yāsiminya,* écrit lors d'un pélérinage à la Mecque en 1387*,* ibn al-Hā'im est l'auteur de plusieurs traités d'arithmétique et d'algèbre: *al-Hāwi fi ^{c}ilm al-hisāb* (1380), *al-Maūna fil hisāb al-hawā'i* (1389)*, al-Wasila fi ^{c}ilm al-hisāb* (1390)*, al-Muqni^{c} fil jabr wal muqābala* (1410), etc. On retrouve encore aujourd'hui de nombreuses copies de toutes ces œuvres, en particulier à la Bibliothèque nationale de Tunis.

Nous nous sommes intéressé plus particulièrement à *Sharh al-Urjūza al-yāsimīnya* qui n'avait pas été éditée jusqu'à présent et dont l'intérêt pédagogique nous a semblé indéniable. Ce commentaire développé du poème didactique d'Ibn al-Yāsamīn[5]: *al-Urjūza fil Jabr wal Muqābala*, ne ressemble à aucun autre et les surpasse sans aucun doute, d'une part parce qu'il ne reste pas esclave du texte commenté et d'autre part parce qu'il l'enrichit par des ajouts mathématiques importants montrant une parfaite maîtrise de la littérature algébrique classique arabe. Il cite al-Khwārizmi, Abu Kāmil, ainsi que *Kitāb al-Fakhri* et *al-Badi^{c}* d'al-Karāji[6]. Il recommande la lecture du *Kitāb al-Usūl* d'ibn al-Bannā, ainsi que de son *Talkhis 'A^{c}māl al-*

[5] Abu Muhammad Abdallah ibn Hajjāj **ibn al-Yāsamīn** (mort à Marrakech en 1204) est l'un des rares mathématiciens d'Andalousie et du Maghreb du XIIème siècle dont quelques œuvres peuvent être encore analysées. Lui même berbère d'origine et né à Fès, ibn al-Yāsamin a longtemps vécu à Séville où il y a enseigné les mathématiques et où il fut renommé pour ses poèmes. Son intérêt pour l'arithmétique indienne et pour l'algèbre est attestée aujourd'hui par son *Kitāb Talqih al-afkār fil ^{c}amāl bi rushūm al-ghubār* et par le poème *al-Urjūza al-Yasmīniya* écrit en 1191 à Séville et largement diffusé, enseigné et commenté au Maghreb et en Egypte (cf. thèse de Magistère de l'ENS d'Alger de Touhami Zemmouli ,1993).

[6] *Kitāb al-Fakhri* (édité par Saydan) ainsi qu'*al-Badi^{c}* d'al-Karāji (édité par Anbouba).

hisāb[7], auxquels il se réfère parfois. Il illustre sa familiarité avec les mathématiciens andalous et maghrébins en signalant, par exemple, leur usage des symboles algébriques.

3. La résolution des équations canoniques

Ibn al-Hā'im consacre à la résolution des six équations canoniques un important chapitre de l'introduction de *Sharh al-Urjūza*, adoptant, sans toutefois le citer directement, la démarche d'Ibn al-Bannā, dans une présentation systématique, standardisée et exhaustive. Il commence par décrire les trois équations canoniques simples, c'est-à-dire celles qui se ramènent aux équations du premier degré, puis les équations canoniques composées, c'est-à-dire celles du second degré à coefficients positifs.

2.1 Les équations simples

Comme le veut la tradition instaurée par al-Khwārizmi, elles sont de trois types:

Type I : $ax^2 = bx$ Type II : $ax^2 = c$ Type III : $bx = c$

où les coefficients a , b et c sont toujours des rationnels positifs. Le cas des coefficients irrationnels sera - dit l'auteur - traité plus tard.
La théorie est illustrée par neuf exemples numériques d'équations simples, dans lesquelles le coefficient (toujours positif) est tantôt un entier, tantôt une fraction et tantôt la somme d'un entier et de fractions.

2.2 Les équations composées

Le reste du chapitre est consacré aux équations quadratiques :

Type IV : $ax^2 + bx = c$ Type V : $ax^2 + c = bx$ Type VI : $bx + c = ax^2$

où les coefficients a , b et c sont toujours des rationnels positifs.
Le chapitre sur la résolution des équations quadratiques est subdivisé en trois parties rigoureusement identiques, une par type d'équation. Chaque partie est subdivisée en deux chapitres, le premier s'intéresse à la résolution de l'équation unitaire (coefficient dominant égal à 1) , alors que le second traite de l'équation générale.

[7] *Talkhis 'A^cmāl al-hisāb* d'ibn al-Bannā (édité par Souissi). Ibn al-Bannā lui-même rédige un commentaire de son *Talkhis 'a^cmāl al-hisāb* qu'il intitule *Raf^c al-hijāb* (édité par Aballagh).

Les algorithmes, preuves et méthodes pour résoudre ces équations sont énoncés dans leur forme la plus générale, puis illustrés par des exemples numériques où les coefficients sont successivement des entiers, des fractions ou un entier augmenté d'une fraction.

L'inspiration pour ces algorithmes et pour ces méthodes est multiple : l'algorithme de base est d'al-Khwārizmi, repris presque à l'identique par ses successeurs arabes. Les autres méthodes se trouvent, pour certaines dans *al-Fakhri* d'al-Karāji, et pour d'autres dans l'œuvre d'ibn al-Bannā : *Rafᶜ al-hijāb* ou *Kitāb al-Jabr* .

Chaque partie comporte onze sections présentées exactement de la même manière :

D'abord, la résolution de l'équation unitaire

sections	Algorithme	source
IH1	Enoncé de l'algorithme classique de résolution de l'équation unitaire, permettant de calculer la racine x de l'équation, puis de son carré x^2.	Al-Khwārizmi
IH2	Preuve arithmétique de cet algorithme de résolution de l'équation quadratique unitaire.	*al-Fakhri* d'al-Karāji
IH3	Enoncé d'un 1^er^ algorithme permettant de calculer le carré de la racine x^2 avant de calculer x .	
IH4	Enoncé d'un 2^ème^ algorithme permettant de calculer x^2 avant x .	*Kitāb al-Jabr* d'ibn al-Bannā
IH5	Enoncé d'un nouvel algorithme permettant de calculer la racine x , puis son carré x^2 .	
IH6	Enoncé d'une technique pour obtenir une équation quadratique unitaire dont une racine est rationnelle.	
IH7	Une 1^ère^ méthode pour ramener l'équation à une équation de type I ou III.	*Rafᶜ al-hijāb* d'ibn al-Bannā
IH8	Une 2^ème^ méthode pour ramener l'équation à une équation de type I ou III.	

Puis, la résolution de l'équation quadratique générale :

IH9	Par réduction ou augmentation du monôme dominant	
IH10	La méthode dite de "la racine auxiliaire" (*Nadhīr al-jidhr*) pour calculer x.	Ibn al-Yāsamīn
IH11	La même méthode permettant de calculer le carré de l'inconnue x^2 , d'abord, puis x .	*al-Fakhri* d'al-Karāji

IH6 ne se trouve dans aucun des traités d'algèbre consultés qui ont précédé *Sharh al-Urjūza*. Par contre, **IH10** est inspirée d'une technique énoncée pour la première fois par al-Karāji et reprise par ses successeurs. Ibn al-Hā'im consacre, cependant, une place importante au concept de "racine auxiliaire", implicite dans *al-Fakhri*, mais, explicite dans le poème didactique d'Ibn al-Yāsamīn. Nous nous proposons de détailler le traitement de **IH6** et de **IH10** en raison de leur originalité, en prenant pour exemple le cas de l'équation de type IV.

IH6 : Technique pour obtenir une équation quadratique dont une racine est rationnelle.

Citons Ibn al-Hā'im :

> "Sur la manière de rendre exprimable l'équation composée de type IV
> Tu cherches deux nombres carrés rationnels tels que leur différence soit le nombre donné <dans l'équation>, tu l'égalises alors avec le *Māl* plus le double de la racine carrée du plus petit des deux nombres carrés <pris comme nombre de racines>. Ce qui en résulte est <l'équation> cherchée.
> Comme exemples, <prenons> : quatre et seize, leur différence est douze, ce sera le nombre. Quant au nombre de racines de quatre, c'est deux et son double est quatre. Dis alors : un *Māl* plus quatre racines égalent douze .
> De même, vingt-cinq et cent ont pour différence soixante-quinze : c'est donc le nombre. Quant au nombre de racines de vingt-cinq, c'est cinq et son double est dix. Dis alors : un *Māl* plus dix racines égalent soixante-quinze ." (folio 26v)

Il s'agit ici de construire un stock d'équations du type IV qui doivent avoir au-moins une solution rationnelle (positive). La méthode proposée consiste à prendre deux entiers carrés quelconques. Par exemple : u^2 et v^2 tels que $u^2 < v^2$. Alors, l'équation $x^2 + 2ux = v^2 - u^2$ admet au-moins une racine rationnelle positive $x = v - u$.

Ni la méthode elle-même, ni les deux exemples numériques choisis, ni d'ailleurs les développements similaires proposés pour les équations de type V et VI ne sont suffisants pour comprendre l'objet de la technique. L'explication, nous la trouverons un siècle plus tard, sous la plume d'Ibn al-Ghāzi (m.1513), qui explique que quiconque choisit au hasard des entiers (nécessairement positifs) et les utilise comme coefficients d'une équation quadratique "trouvera, la plupart du temps, une racine non exprimable[8]", c'est-à-dire une racine non rationnelle, d'où l'intérêt de cette technique.

Exemples :

- Prendre $u^2 = 4$ et $v^2 = 16 \Rightarrow v^2 - u^2 = 12$. Alors, l'équation cherchée est $x^2 + 4x = 12$.
- Prendre $u^2 = 25$ et $v^2 = 100 \Rightarrow v^2 - u^2 = 75$. L'équation cherchée est $x^2 + 10x = 75$.

IH10 : Résolution par la méthode de la racine auxiliaire (*Nadhīr al-jidhr*)

L'algorithme énoncé, dans les vers n°38 et 39 du poème d'Ibn al-Yāsamīn, vise à résoudre des équations du second degré non unitaires sans utiliser la division des coefficients de l'équation donnée par le coefficient dominant. Ibn al-Yāsamīn utilise abondamment cet algorithme dans *Kitāb Talqīh al-afkār*[9] sur plusieurs cas numériques. L'originalité d'Ibn al-Yāsamīn, dans *al-Urjūza al-Yāsimīnya*, est d'associer, par une formule lapidaire, à cet

[8] *Bughyat at-Tullāb* d'Ibn Ghāzi , édition de Mohamed Souissi, page 264.
[9] Manuscrit de Rabat, BG : K 222 et sa reproduction photographique D 3193, folios 152-158.

algorithme les concepts "d'équation auxiliaire" et de "racine(s) auxiliaire(s)". Les commentateurs[10] de la *Urjūza* en ont compris, plus ou moins, l'originalité.

Les prédécesseurs d'Ibn al-Yāsamīn, tel al-Karāji, avaient bien construit un algorithme aboutissant au même résultat, mais ils n'avaient pas utilisé le concept de racine auxiliaire. Dans *al-Fakhri*, al-Karāji recommande l'emploi de cette méthode chaque fois que les coefficients sont des fractions complexes et nombreuses (*kusūrun mokhtalifa kathīra*) et démontre géométriquement la validité de cet algorithme à partir de plusieurs cas numériques[11]. Bien après Ibn al-Yāsamīn, l'algorithme d'al-Karāji se retrouve dans *Kitāb al-Jabr wal muqābala*[12] et dans *Raf^c al-hijāb*[13] d'ibn al-Bannā, sans production d'exemples numériques, ni démonstration et surtout sans aucune allusion aux racines auxiliaires.

Commençons par un schéma illustrant l'algorithme d'al-Karāji et de ses successeurs, pour l'équation $\mathbf{ax^2 + bx = c}$:

$$b \longrightarrow \frac{b}{2} \longrightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 \longrightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac \longrightarrow \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} \longrightarrow \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2} \longrightarrow x = \frac{1}{a}\left[\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}\right.$$

On voit l'intérêt de cet algorithme dont le but premier est de n'utiliser qu'un seule fois la division par le coefficient a, car la division par un rationnel reste, à cette époque là, un exercice compliqué et long.

Dans ce qui suit, nous allons traduire le paragraphe relatif à l'inconnue auxiliaire; Ibn al-Hā'im y explique avec beaucoup de précision l'usage de l'équation et de la racine auxiliaires. Nous présenterons, par la suite, cette méthode en notations modernes.

> "Explicitons ce qu'il[14] dit <dans la *Urjūza*> : tu multiplies le nombre de *Māl* par le nombre donné dans l'équation, qu'il soit isolé ou ajouté à d'autres, et tu considères le produit obtenu comme étant le nombre donné dans cette équation. Puis, tu détermines la solution <de cette nouvelle équation> comme indiqué précédemment et comme le dit lui-même le poète (…). La racine trouvée est alors divisée par le coefficient des *Māl* , celui par lequel tu as multiplié le nombre. Le quotient obtenu est la racine cherchée.
> Lorsque <le poète> dit : "divise la racine auxiliaire (*Nadhīr al-jidhr)*", il veut dire par racine auxiliaire , la solution de l'équation dont le nombre est le produit du nombre initial par le nombre de *Māl* et par racine, la solution de l'équation initiale dans laquelle le nombre n'aurait pas été changé. Il a dénommé le premier racine auxiliaire et non pas racine parce que ce n'est pas la racine cherchée et parce que l'on ne le calcule pas pour lui-même. (…)

---

[10] Ibn Qunfudh al-Qusantini, dans *Hatt an-niqāb ^{c}an wujuh a^{c}māl al-hisāb*, consacre un paragraphe pour cet algorithme, qu'il considère "*général, ne nécessitant pas de réduction à l'unité*". Pour chaque type d'équation quadratique, il commence par énoncer l'algorithme dans sa généralité, puis il l'illustre par un exemple (cf. manuscrit page 199, puis pp. 201 et 204). (cf. thèse de Magistère de Youssef Guergour, 1990).
Ibn al-Ghāzi et al-Māridini énoncent l'algorithme dans sa généralité et l'illustrent sur plusieurs exemples numériques.

[11] Saydan, pages 149-150; Woepcke, page 64-65.

[12] Saydan, pages 549-554.

[13] Aballagh, texte arabe: page 460, texte français: page 683.

[14] C'est-à-dire Ibn al-Yasamīn

Premier exemple : Deux *Māl* plus la moitié d'un *Māl* plus dix *Shay* égalent cent-cinquante.
Multiplie le nombre de *Māl*, c'est-à-dire deux et demi, par le nombre donné. Tu obtiens trois cents soixante-quinze. Considère le nombre donné et résous l'équation de type IV comme tu as appris <à le faire> : tu ajoutes le carré du nombre de racines, c'est-à-dire vingt-cinq, aux trois cents soixante-quinze. Il en résulte quatre cents, dont la racine carrée est vingt. Tu en soustrais la moitié <du nombre de racines>, il reste quinze. Ce nombre est ce qui est dénommé par "racine auxiliaire"; tu le divises par deux et demi, qui est le nombre de *Māl*, tu obtiens six, c'est la solution cherchée." (folio 40r-10v)[15]

Analysons cette méthode avec les notations modernes, lorsqu'il s'agit, par exemple, de résoudre l'équation : $\mathbf{ax^2 + bx = c}$.

On commence par multiplier la constante c par le coefficient dominant a ;

Puis, on résout l'équation auxiliaire $\mathbf{x^2 + bx = ac}$. Sa solution est dénommée par Ibn al-Yāsamīn lui-même : نظير الجـذر (*Nadhīr al-jidhr* = la racine auxiliaire).

Sa valeur est donc $x_0 = -\frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + ac}$.

Enfin, on divise, par le coefficient a , la valeur auxiliaire x_0 obtenue.

La solution cherchée de l'équation initiale est donc : $x_1 = \frac{x_0}{a}$.

Exemples : (folio 10 r - 11r)

- $\frac{5}{6}x^2 + 10x = 90 \longrightarrow x^2 + 10x = 75$; racine auxiliaire $x_0 = 5$, d'où $x_1 = 6$.
- $(\frac{5}{6} + \frac{1}{12})x^2 + 15 = 8x \longrightarrow x^2 + (13 + \frac{3}{4}) = 8x$; racine auxiliaire $x_0 = 5\frac{1}{2}$ ou $2\frac{1}{2}$, d'où $x_1 = 6$ ou $2\frac{8}{11}$
- $(2 + \frac{2}{3})x^2 = 10x + 36 \longrightarrow x^2 = 10x + 96$; racine auxiliaire $x_0 = 16$, d'où $x_1 = 6$.

Bibliographie

Aballagh, Mohamed (1988), *Rafᶜ al-hijāb d'Ibn al-Bannā*, édition bilingue arabe et française, , thèse de doctorat de Paris V, Paris, 1984

Abdeljaouad Mahdi (2002), Le manuscrit de Jerba : Une pratique des symboles algébriques maghrébins en pleine maturité, in *Actes du 7ème Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes*, Marrakech.

Abdeljaouad Mahdi (2003), *Sharh al-Urjūza al-Yasmīniya d'ibn al-Hā'im*, édition arabe et commentaires en français, Publications de l'ATSM, Tunis.

Abu Kāmil, The Book of Algebra, reproduction du manuscrit de *al-Kitāb al-Kāmil,* Institute for the History of Arabic-Islamic Science, Frankfurt, 1986.

Ahmad, Salah et Rashed, Roshdi (1972), *Al-Bāhir fil Jabr* de As-Samaw'al al-Maghribi*, édition arabe et* commentaire en français, Université de Damas.

Anbouba Adel, (1964), *Kitab al-Badiᶜ fil hisāb d'abu Bakr ibn al-Husain al-Karāji,* édition arabe et commentaire en français, Université du Liban, Beyrouth.

[15] On notera que la suite du folio 40r se trouve dans le folio 10v.

Ben Taleb, Farès (1999), *Sharh Talkhis a'mal al-hisab de Abu al-Hasan al-Qalasadi*, édition bilingue arabe et française, Dar al-Gharb al-Islami, Beyrouth.

Berggren J.L., (1986) *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag, Berlin.

Diophante, *Les arithmétiques,* texte établi et traduit par R. Rashed, Paris, Les Belles Lettres,, 1984.

Djebbar, Ahmed (1986), Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'Occident musulman*,* in *Actes Premier Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes,* Alger. (pages 99-123).

Djebbar, Ahmed (2001), *Une histoire de la science arabe,* Points-Sciences, Paris.

Rashed, Roshdi (1997), (sous la direction de), *Histoire des Sciences Arabes*, Le Seuil, Paris.

Saydan Ahmad Sélim (1986), *Tarikh ^{c}Ilm al-Jabr fil ^{c}Alam al-^{c}Arabi,* Koweit.

Sésiano, Jacques (1999) : *Une introduction à l'histoire de l'algèbre*, P.P.U.R., Lausanne.

Souissi Mohamed (1969)*, Talkhis A^{c}mal al-hisab de Ibn al-Bannā*, édition bilingue arabe-français, Université de Tunis.

Woepcke François, *Kitāb al-Fakhri* , traduction en français d'extraits et commentaires, in *Extraits et traduction d'ouvrages arabes inédits,* réédition Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1982