



Calculatrice, fractions et critères de divisibilité : quelles connaissances mobilisables en situation ?

Laura Weiss, *IFMES Genève, Suisse*

Problématique

Une tâche de simplification de grandes¹ fractions, avec calculatrice,

- incite-t-elle les élèves à recourir au théorème de décomposition en facteurs premiers ou
- privilégient-ils l'attitude essai-erreur, allant «à la pêche»² aux diviseurs communs ?

La calculatrice encourage-t-elle les élèves à chercher des diviseurs communs (non immédiats) supérieurs à 10, alors que, sans outil, la fraction serait déclarée irréductible ?

Hypothèse

L'utilisation rare et peu instrumentée didactiquement de la calculatrice en mathématiques est responsable du :

- travail sans calculatrice : s'interroger avant l'action, y renoncer par économie

et du

- travail avec calculatrice négligeant le sens critique grâce à la facilité de l'action.

Expérimentation

119 élèves, 6 classes genevoises, entre 12 et 16 ans + 1 classe accueil (15-18 ans, élèves ne parlant pas français). Deux moments :

1) l'expérimentation :

- une tâche mathématique connue : simplifier entre 6 et 10 «grandes» fractions ;
- un questionnaire : fractions difficiles à simplifier, pourquoi ?
procédures pour les fractions «difficiles» ?
- une calculatrice à disposition.

2) l'enseignement du calcul des fractions avec la TI34II et ses limites.

1 «Grandes fractions» : numérateur et dénominateur à 3 chiffres au moins.

2 «À la pêche» : voir Floris (2000).

Contrat spécifique

L'élève

- attend une leçon d'utilisation de la calculatrice, avec une personne « experte »;
- apporte sa calculatrice³, empruntée, voire achetée⁴;
- reçoit en prêt une calculatrice TI34, à utiliser librement, sauf les touches fractions⁵, sans effacer les registres (respecté à 90 %).

Notion de milieu

Point de vue didactique

- environnement de l'élève : objets physiques, personnes (camarades, enseignant, expérimentateur), outils matériels (énoncés, papier, crayon, etc. et calculatrice);
- milieu de l'élève : tâche avec consigne, connaissances, tous les objets pertinents pour résoudre la tâche.

Dans cette tâche, la calculatrice appartient au milieu : son utilisation est proposée pour résoudre la tâche. Ce milieu permet aux élèves d'agir facilement sur les nombres (de faire des divisions).

Instrumentation versus instrumentalisation

Rabardel (1995) : l'outil a deux statuts : artefact (objet physique) ou instrument (construction psychologique).

Tâche, technique et théorie

Lagrange (2000) distingue trois composantes du travail de l'élève : technique, tâche et théorie.

Théorie : concepts mathématiques découverts ou développés dans la réalisation de la tâche.

Constitution de techniques en réponse à des tâches.

Élaboration théorique sur les problèmes posés par ces techniques.

Les techniques ne peuvent pas être séparées des tâches.

Observation des techniques employant la calculatrice en réponse à la tâche.

3 En 5^e année tous les élèves reçoivent une calculatrice TI34 à garder jusqu'en 9^e année.

4 Habituellement les élèves ont leur calculatrice en classe, mais ne s'en servent que sur autorisation expresse de l'enseignant. En réalité cette utilisation est très rare, les enseignants considérant que les élèves doivent d'abord exercer le calcul en mathématiques.

5 Les élèves ont joué le jeu : seule un élève de 9A et cinq élèves de 1C connaissaient les touches « fractions » de la calculatrice et la majorité ne les a pas utilisées. Les traces des élèves qui ont utilisé ces touches pour simplifier les fractions ont été écartées.

Deux processus dans la genèse instrumentale :

- instrumentalisation : l'utilisateur adapte l'artefact à ses besoins ;
- instrumentation : l'artefact conditionne l'action de l'utilisateur.

Connaissances préalables

Tous les élèves testés connaissent

- les critères de divisibilité par 2, 3 5 et 10 ;
- le théorème de la décomposition en facteurs premiers comme « propriété en acte » ou « propriété déclarative »⁶ ;
- le lien écriture fractionnaire – écriture décimale des rationnels.

Premiers constats

L'utilisation de l'artefact prend le pas sur les connaissances des élèves.

Les élèves

- simplifient sans calculatrice des fractions telles $\frac{2500}{7500}$
- simplifient par 2, 3 ou 5,
- vont « à la pêche » des diviseurs communs sans systématique apparente,
- ne convoquent pas les critères de divisibilité, ni la factorisation, sauf quelques élèves⁷.

Par défaut d'instrumentation judicieuse par les connaissances, la calculatrice instrumentalise les élèves. L'artefact n'acquiert pas le statut d'instrument.

Un cas d'école : $\frac{241}{150}$

Méthode experte

$\frac{241}{150}$ est irréductible, car :

$150 = 2 \times 3 \times 5^2$, donc la fraction se simplifie, si et seulement si 241 est divisible par 2, 3 ou 5.

Or

- 241 est impair (pas divisible par 2),
- son chiffre des unités est 1 (pas divisible par 5),
- $2+4+1 = 7$ ou $240 = 3 \times 80$ ou $241 : 3 = 80,333$ (pas divisible par 3)

6 Terminologie du Plan d'études de mathématiques du Cycle d'orientation de Genève :

- une propriété en acte est une propriété que l'élève applique sans nécessairement savoir l'énoncer ;
- une propriété déclarative peut être énoncée par l'élève, qui sait aussi quand elle s'applique.

7 1^{re} année du collège niveau fort, classe à exigences élevées en mathématiques, élèves se préparant à une maturité générale, à l'époque de l'expérimentation travaillant en mathématiques sur les fractions rationnelles.

Sans chercher les diviseurs de 241, la fraction est irréductible.

Procédures d'élèves

- considérée difficile ;
- pas de maîtrise de la méthode experte ;
- stratégie «à la pêche» en divisant 241 par beaucoup d'entiers, souvent 7 et 17 ;
- même les bons élèves, procédant généralement par décomposition, essaient la division $241 : 7$, pour déclarer la fraction irréductible.

Émergence de techniques

Comme 241 «résiste», on assiste à une émergence de techniques:

- a) division systématique de 241 par tous les entiers successifs jusqu'à 29 ;
- b) division systématique de 241 par tous les premiers successifs jusqu'à 23 ;
- c) division de 241 par 150 pour trouver une écriture décimale redonnant une fraction simplifiée.

La décomposition de 150 en facteurs premiers est rare.

Remarques d'élèves

- Valérie, a divisé $241 : 7$: «Avec la calculatrice on essaie des divisions, qu'on n'essaierait pas sinon.»
- Zoé, 9A désespérée: «J'ai tout essayé [...] à partir de 2... [...], peut-être que 241 est premier?»
- Question: «Est-ce nécessaire?»
- Zoé étonnée: «Il suffisait de chercher les diviseurs de 150!»
- Thomas, 9A, a divisé $150 : 7$: «241 n'est pas divisible par 2, ni 3 ni 5, alors c'est irréductible.»
- Question: «Pourquoi diviser 150 par 7?»
- Thomas: «Comme j'avais la calculatrice, c'était juste une vérification, on peut pas savoir quand un nombre est divisible par 7, j'ai contrôlé.»

Une classe particulière

Classe du SCAI: 10 élèves, à Genève depuis quelques mois, provenant du monde entier. Vision calculatoire des mathématiques. Utilisation de la calculatrice pour vérifier:

- l'égalité entre fraction initiale et fraction simplifiée par les quotients décimaux ;
- des divisions, comme $187 : 17$ et $340 : 17$, après calcul à la main.

Bien moins de divisions «inutiles»: $241 : 2$; $241 : 6$; $241 : 7$; $241 : 3$, que dans les autres classes.

Autres fractions, autres procédures

Pour $\frac{187}{340}$, un élève 9A : «j'ai fait $187 : 340 = 0,55 = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$, sinon je n'aurais pas trouvé»

Procédures observées

- Utilisation systématique de la décomposition par quelques élèves.
- La majorité ne décompose pas les nombres à l'aide des diviseurs apparents :
- Question : «[...] avec $165 : 5 = 33 = 3 \times 11$, [...] donc 165 se divise par 11 on essaye $176 : 11$ [...]»
- Olivier : «Je n'y aurais pas pensé !»
- Question : «[...] chercheras-tu les diviseurs ainsi ? [en décomposant à l'aide des diviseurs apparents]»
- Julie, 7A : «C'est plus long qu'un diviseur commun [...] en classe, les fractions, ça se simplifie par 2 ou 3 ou des trucs comme ça, sinon c'est irréductible !

Résumé

- La calculatrice permet des divisions, même inutiles.
- Le contrat didactique sur le type de fractions.
- Une recherche «à la pêche» du diviseur commun.
- Des essais systématiques : divisions par 1, des impairs par 2,...
- Les critères de divisibilité et la calculatrice ne sont pas combinés.

Interprétation : deux milieux partiellement en contradiction

Face à l'injonction implicite d'utiliser la calculatrice, il n'y a pas de convocation des connaissances mathématiques, sauf en cas de réponse immédiate ($2\,500/7\,500$).

Face à la «résistance» des nombres «à se laisser» réduire par un facteur apparent, une technique des divisions appliquée systématiquement apparaît : émergence d'une théorie primaire d'essais systématiques.

Les élèves sont donc instrumentalisés par l'outil, qui permet l'émergence

- d'une technique : division ;
- d'une théorie : divisions systématiques par les entiers, par les impairs, ou par les premiers successifs.

Avec la calculatrice, des stratégies mathématiquement moins complexes sont plus économiques que la mobilisation des connaissances.

Pour la majorité des élèves, le savoir «critères de divisibilité» et «théorème de décomposition» est inutile pour la tâche.

Avec les élèves de 1C⁸ (calculatrice toujours autorisée), une propriété de décomposition émerge, quand le calcul mental et les essais « à la pêche » ne sont pas fructueux.

Une hypothèse initiale affinée : la facilité d'emploi de la calculatrice fait obstacle à la mise en application de savoirs à cause de

- la tâche choisie,
- l'utilisation trop rare de cet artefact.

Autres expérimentations pour valider cette hypothèse :

- utilisation instrumentée dès le début de la scolarité⁹,
- consigne limitant l'utilisation de la calculatrice au strict minimum¹⁰.

Conclusion

- Une utilisation plus fréquente de la calculatrice pour des tâches spécifiques pour éviter que autorisation égale injonction ;
- Une utilisation didactiquement instrumentée pour favoriser l'intégration des savoirs et de l'outil ;
- Une proposition du plan d'études suisse romand¹¹ «calculatrices comme outil de calcul à l'égal des autres», ne prend pas en compte les difficultés mises en évidence ;
- Le curriculum de mathématiques du CO genevois prévoyant un enseignement spécifique semble plus adéquat.

Références

- Artigue, M. (1997) Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 33, No. 2.
- Brousseau G., (1998), Le contrat didactique : l'enseignant, l'élève et le milieu, In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield (Eds), *Théorie des situations didactiques*, (chap. 5) p. 299-327, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Floris, R. (2000) *Le rôle du contrat didactique*. Journées sur les environnements informatiques de calcul symbolique et d'apprentissage des mathématiques, IREM de Rennes.
- Lagrange J.B. (2000) L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : Une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 1-30.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

8 1^{re} année du collège niveau fort, classe à exigences élevées en mathématiques, élèves se préparant à une maturité générale, à l'époque de l'expérimentation travaillant en mathématiques sur les fractions rationnelles.

9 Voir ce même congrès, del Notaro L. et Floris R.

10 De nouvelles expérimentations ont été entreprises proposant aux élèves un concours d'utilisation minimale de la calculatrice, elles semblent donner les résultats escomptés.

11 Plan d'études romand de mathématiques degrés 1-6.

Rabardel, P. (1999) Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques in Bailleul M. (éd) *Actes de la X^e école d'été de didactique des mathématiques*, IUFM de Caen.

Trouche, L., (2002c), Genèses instrumentales, aspects individuels et collectifs. In D. Guin, L. Trouche, (Eds.), *Calculatrices Symboliques ; Transformer un outil en un instrument de travail mathématique : un problème didactique*. p. 243-275. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Pour joindre l'auteurice

Laura Weiss
IFMES Genève
1, route des Mangons
CH-1286 Soral
Suisse
Courriel: laura.weiss@edu.ge.ch