L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Erreurs commises en mathématiques et rapport aux programmes

Kirsi Jean-Pierre Douamba, *Université de Ouagoudou, Burkina Faso*

Introduction

Quelles sont les origines des erreurs commises par les étudiants de première année de cycle universitaire au Burkina Faso ? Quelle grosse question ! Et apporter une réponse univoque serait de la prétention. À partir d'une épreuve d'analyse administrée à des étudiants de première année d'un institut de formation de futurs enseignants de mathématiques, nous jetterons des éléments d'analyse des programmes de mathématiques du secondaire et de l'institut de formation. Nous considérons des erreurs que nous estimons qu'aucun étudiant (futur enseignant de surcroît) ne devrait commettre. Elles portent sur la connaissance d'un irrationnel, sur l'utilisation des quantificateurs et sur la notion d'ensemble/d'élément.

1. Erreurs de référence

Nous donnons les énoncés des questions qui ont donné lieu aux erreurs.

Énoncé 1 :

a) Définir les termes suivants : borne supérieure, borne inférieure, plus grand élément, plus petit élément d'une partie non vide I de $\mathbb{R}$.

b) Donner la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément de chacun des ensembles $[2 ; \sqrt{5} [$; $[0 ; 4] \cup \{-2 ; 5\}$.

Énoncé 2 :

Le nombre $X = \sqrt[3]{45 + \sqrt{242}}$ est-il rationnel ?

Sur cent trois (103) étudiants de la filière maths - physique - chimie (M/PC), neuf (9) étudiants ont noté : $\{2\}$, $\{\sqrt{5}\}$, $\{-2\}$, $\{5\}$ comme réponses à l'énoncé 1 au lieu de 2, $\sqrt{5}$, -2 et 5. Ayant composé sur la même épreuve, les résultats devraient être moins bons pour les étudiants de la filière maths – sciences de la vie et de la terre (M/SVT) parce que ceux de M/PC semblent meilleurs (23,33 % de moyennes contre 13,70 % pour M/SVT). Et pourtant, aucune des erreurs ci-dessus n'a été commise par ceux de M/SVT. Pourquoi, nous y reviendrons après analyse des programmes ?

En voulant traduire les définitions à l'aide des quantificateurs, quarante (40) étudiants ont donné les réponses suivantes :

– borne inférieure : tout nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathrm{I}, x \geq \alpha$;

– borne supérieure : tout nombre $\beta \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathrm{I}, x \leq \beta$.

Quant à l'énoncé 2, treize (13) étudiants ont posé de prime à bord soit $X = x + \sqrt{y}$, soit

$X = x + y \sqrt{2}$. Nous n'évoquons pas le nombre de réussites faibles à l'item.

Les étudiants ont-ils eu suffisamment à travailler sur les ensembles et éléments au cours de leur cursus scolaire ? Que disent les programmes du secondaire sur l'emploi des quantificateurs ? Quelle compréhension ont-ils de l'écriture d'un irrationnel ?

D'une lecture des contenus et des commentaires des programmes, nous livrerons quelques éléments de réflexion sur d'éventuelles origines des erreurs commises.

2. À propos d'ensemble et d'élément

2.1 Du programme de 6e du collège (juin 1992)

Ces notions sont, autant que possible, à traiter en liaison avec les différentes parties du programme.

À partir de situations concrètes et au fur et à mesure des besoins, est introduit le vocabulaire : ensemble, élément, sous-ensemble. Notations : $\varnothing$, $\in$, $\notin$, $\subset$, $\cap$, $\cup$.

Dans le document d'accompagnement du programme, il est écrit au chapitre 1 :

À l'issue de ce chapitre, les élèves doivent être capables de connaître et savoir utiliser les symboles : $\in$, $\subset$.

Dans le chapitre 2, il est écrit :

À l'issue de ce chapitre, les élèves doivent être capables de différencier les ensembles $\mathbb{N}$ *et D (décimaux positifs).*

Le professeur met enfin en évidence et fait distinguer aux élèves les deux ensembles de nombres $\mathbb{N}$ *et D et propose des exercices faisant intervenir l'utilisation des symboles* $\in$, $\notin$, $\subset$.

Dans le chapitre 15, il est écrit :

À l'issue de ce chapitre, les élèves doivent être capables de connaître le vocabulaire : ensemble de départ, ensemble d'arrivée, relation, fonction.

Il est donc ressorti explicitement la notation ensembliste $E = \{a, b, c, d\}$.

En commentaire dans le programme, il est stipulé « l'objectif est de familiariser les élèves avec un certain nombre de notions fondamentales (ensembles, sous-ensembles, éléments,) et de notations courantes. Ces notions sont introduites dès les premiers chapitres au fur et à mesure et réinvesties judicieusement dans les autres parties du programme. En aucun cas, elles ne doivent faire l'objet d'un exposé dogmatique ».

2.2 Des programmes de 5e du collège (juin 1992) et de 1re D (juin 1992)

En commentaires et instructions, nous notons : « l'étude de l'ensemble des multiples et des diviseurs d'un entier sera l'occasion, entre autre, d'utiliser le vocabulaire et les notations ensemblistes ($\in$; $\notin$; $\subset$; $\cap$; $\cup$) ».

Nous signalons que ces notions ensemblistes sont rappelées dans le chapitre dénombrement dans la classe de 1re D.

3. À propos de l'utilisation de quantificateurs

3.1. Du programme de 5e (juin 1992)

Le programme de 5e fait cas du vocabulaire logique et propose une sensibilisation à la démonstration. Il s'agit d'apprendre à l'élève l'utilisation correcte de chacun des mots suivants : un, chaque, tous, les, des. « La distinction du sens des mots « un », «tous», en particulier est fondamentale pour la compréhension de l'énoncé de certaines définitions ou propriétés (propriétés des opérations par exemple) et l'apprentissage de la démonstration. »

> *Cette étude ne doit pas faire l'objet d'un cours théorique mais sera faite en liaison avec les différentes parties du programme (arithmétique et géométrie en particulier).*

3.2 Du programme de 3e (juin 1994)

Il est écrit : « le professeur veillera à ce que les élèves prennent conscience du rôle joué par des notions telles que la négation, les connecteurs et les quantificateurs sans que ces notions soient formalisées. L'utilisation de leurs symboles n'est donc pas au programme. »

3.3 Du programme de 2e C/T (juin 1991)

> *Tout exposé a priori de logique mathématique est exclu.*
>
> […], *tout au long de l'année, chaque fois que cela peut faciliter la compréhension, il est bon d'apprendre aux élèves à utiliser :*
>
> – *les connecteurs : « et » ; « ou » ;*
>
> – *les quantificateurs : « quel que soit » ; « il existe ».*

Nous signalons qu'il n'est pas noté que l'utilisation des symboles est exclue.

4. Une analyse

4.1 Constats sur les programmes du secondaire

Pour les trois notions évoquées (notions ensemblistes, utilisation des quantificateurs, les irrationnels), les programmes du secondaire en font mention avec des niveaux d'insistance différents.

Les notions ensemblistes introduites en 6^e^ reviennent dans tout le cursus scolaire jusqu'en terminale avec le calcul des probabilités.

Introduite en 5^e^, l'utilisation non symbolisée des quantificateurs se poursuivra jusqu'en 3^e^. À partir de la seconde, on perçoit une ouverture pour l'utilisation du symbolisme.

La notion de nombre irrationnel a été introduite en 4^e^ à partir des SDIP. Elle a évolué avec les racines carrées à partir de la troisième. Mais ce n'est qu'en terminale D/C/E que la notion de racine n^ieme^ est ressortie dans l'étude des fonctions puissances.

Aucune de ces notions n'est donc nouvelle pour les étudiants. Pourquoi tant d'étudiants ont-ils commis en conséquence cette erreur ?

Peut-être :

- ces étudiants n'ont-ils pas eu de professeurs de mathématiques durant leurs premières années du secondaire ;
- les professeurs se contentent du document d'accompagnement ou du livre de l'élève pour préparer leur cours sans se référer aux programmes officiels ;
- les notions leur ont été légèrement enseignées car le manque d'enseignants fait qu'on a recours à des personnes non qualifiées (de formation non mathématique).

Nous insisterons sur l'emploi de personnel non qualifié. L'enseignant doit faire preuve de vigilance et d'ingéniosité pour revenir et insister chaque fois que l'opportunité est offerte sur une notion très importante pour les classes ultérieures ou pour laquelle ils commettent fréquemment des erreurs. L'utilisation des symboles logiques et des quantificateurs s'inscrit dans cette rubrique. Mais combien d'enseignants du secondaire connaissent les contenus des enseignements donnés au supérieur ?

Certains étudiants ont intériorisé que l'écriture d'un nombre irrationnel sous le radical ne peut être qu'une racine carrée. La notion de racine n^ieme^ introduite en terminale ne leur a pas permis de découvrir d'autre forme d'écriture d'irrationnels. Autre éventualité, soit ils n'ont pas compris le questionnement ou ont fait rapidement un lien avec un TD (travaux dirigés) dont l'énoncé est le suivant : « montrer que… peut s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$ ».

4.2 À propos du programme de maths de l'institut de formation

Le programme de formation en mathématiques de l'institut donne les titres de chapitres. Nous notons par exemple en analyse :

- L'ensemble des nombres réels
  - Nombres réels.
  - Suites numériques (suites récurrentes : suites arithmétiques, suites géométriques,…) ; convergence.
  - Propriétés topologiques et analytiques.
  - Calcul approché.
- Fonction d'une variable réelle

- Limites, continuité, dérivabilité.
- Fonctions élémentaires : puissances, rationnelles, trigonométriques, logarithmes, exponentielles, hyperboliques.

– Calcul intégral appliqué aux calculs d'aires et de volume.

Dans les programmes du secondaire, il est fait mention de commentaires et d'instructions sur les objectifs poursuivis et les méthodes. Des instructions qui donnent les limites du programme et orientent les pratiques pédagogiques. Par exemple, il est écrit dans les programmes des classes de 6^e et 5^e, « l'enseignement des mathématiques en 6e et en 5^e doit consolider et approfondir les acquis de la scolarité élémentaire… ».

Nous voyons que le programme d'analyse à l'institut ne donne pas suffisamment de détails sur les contenus mathématiques à enseigner. L'initiative d'enseigner tel ou tel contenu ou de revenir et insister sur telle ou telle notion supposée acquise est donc laissée à la discrétion de chaque enseignant.

Comment expliquer l'absence d'erreurs de notations des éléments sur les copies des étudiants de M/SVT ? Des informations que nous avons recueillies, il ressort que ces étudiants ont abordé le chapitre sur « la théorie élémentaire des ensembles » qui est au programme d'algèbre de l'institut et ont fait des TD avant le devoir d'analyse. Une hiérarchisation et un agencement de tous les contenus d'enseignement en maths au supérieur amoindriraient les non-réussites des étudiants. Les professeurs d'université se concertent-ils dans ce sens ?

Conclusion

Les propos ci-dessus s'appuient sur des réalités du Burkina Faso. Ils pourraient être des pistes de réflexion et de recherche entrant dans le cadre de la liaison secondaire/post secondaire. Si au secondaire, une seule personne enseigne les mathématiques dans un niveau donné, au supérieur, ce n'est pas le cas. Au regard des résultats des étudiants de notre institut, nous pensons qu'un échange permanent entre professeurs du supérieur qui enseignent une même classe s'avérerait nécessaire pour une harmonisation des progressions. Une organisation efficiente des contenus d'enseignement n'améliorerait-elle pas les acquisitions des étudiants ?

Faire une description détaillée des programmes n'éviterait-elle pas également que les contenus mathématiques dispensés soient fonction de l'enseignant ? Au secondaire, les commentaires et les instructions officielles sur les programmes balisent le terrain en donnant les limites des programmes, les contenus sur lesquels il faut approfondir ou insister et les approches pédagogiques/didactiques.

Au Burkina Faso, les programmes de mathématiques du secondaire ont été réécrits de 1991 à 1994. La baisse du niveau des étudiants constatée au supérieur relève-t-elle des programmes ? Une étude est à faire. Une concertation permanente entre les encadreurs pédagogiques de mathématiques (inspecteurs et conseillers pédagogiques), les enseignants de secondaire et ceux du supérieur pourrait permettre de dégager des pistes pour une recherche fondamentale permettant d'améliorer la liaison secondaire/post secondaire.

Pour joindre l'auteur

Kirsi Jean-Pierre Douamba
Institut Des Sciences/Université de Ouagadougou
01 BP 1757 Ouagadougou 01 Burkina Faso
Courriel : kjpdouamba@yahoo.fr