ANALYSE DES CONNAISSANCES ET DES SAVOIRS UTILISES PAR LES ELEVES LORS DE L'ELABORATION DE RAISONNEMENTS EN SITUATION A DIDACTIQUE A L'ECOLE PRIMAIRE

PATRICK GIBEL
LACES, équipe DAESL, Université Bordeaux 2
patrick.gibel@aquitaine.iufm

Résumé: Le but de cette présentation est de prendre comme objet d'étude les raisonnements élaborés par les élèves au cours d'une séquence, proposée dans une classe de CM2 Cette recherche, effectuée dans le cadre de la théorie des situations didactiques, vise à analyser d'une part les raisonnements produits en précisant les conditions de leurs élaborations, d'autre part à déterminer les connaissances et les savoirs mobilisés par les élèves en situation d'action, de formulation ou de validation.

Mots-clés. Raisonnement, répertoire didactique, répertoire d'actions, répertoire de formulations, répertoire de validations, argumentation, situation a-didactique, situation de validation, argumentation, méthode généralisable, domaine de validité.

Introduction

Nous avons choisi de prendre comme objet d'étude une séquence de classe dans laquelle, explicitement, l'enseignant par la dévolution d'une situation a-didactique cherche à développer les capacités de raisonnement des élèves. Le choix d'effectuer l'analyse de cette séquence en théorie des situations didactiques vise à apporter des éléments de réponses aux questions suivantes : En quoi, la théorie des situations, permet-elle une analyse approfondie d'une part des conditions qui définissent ces situations d'apprentissages et d'autre part des savoirs et des connaissances qui sont à la base de la production des raisonnements des élèves? Peut-on favoriser la pratique des raisonnements en faisant dévolution, aux élèves, de situations dans lesquelles ils produisent et utilisent leurs raisonnements pour répondre aux exigences de la situation

Nous expliciterons dans le paragraphe 1 la notion de « répertoire didactique », et nous définirons ensuite le terme « raisonnement », pris dans un sens plus large que celui de raisonnement mathématique formel, en nous référant au « répertoire didactique » du sujet qui en est l'auteur et aux conditions dans lesquelles le raisonnement a été produit. Dans le paragraphe 2 nous effectuerons l'analyse a priori de la séquence choisie, « Le nombre le plus grand », dont l'ingénierie didactique a été produite par G. Brousseau et qui a été mise en œuvre en classe de C.M.2 (lés élèves ont entre 10 et 11 ans) au C.O.R.E.M[1]. Cette séquence a été choisie car elle fait clairement apparaître de nombreux raisonnements chez les sujets, sous des formes très variées et dans des fonctions très diverses.

Cette étude, vise à mettre en lumière la richesse de cette situation, étudiée précédemment sous un angle différent cf. GIBEL (2008), du point de vue actuel de l'utilisation du répertoire didactique. Nous analyserons les possibilités pour les élèves d'utiliser leurs raisonnements dans des fonctions spécifiques (prise de décisions, formulation d'une assertion, explication, argumentation) selon que les conditions, qui définissent la situation, requièrent ou non leur usage.

[1] Centre Observation et de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques, école Jules Michelet, 33400 Talence.

1. Les raisonnements en classe de mathématiques

1.1. Notion de « répertoire didactique » de la classe

L'ensemble des moyens que le professeur pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement, constitue ce que nous appellerons le *répertoire didactique* de la classe*.* Par conséquent l'enseignant identifie un *répertoire* qu'il juge légitime d'utiliser dans la relation didactique compte tenu des institutionnalisations antérieures, afin de produire la solution ou la réponse attendue. Guy Brousseau, dans l'article « Les différents rôles du maître »[2], définit l'institutionnalisation de la façon suivante :

> « La prise « officielle » par l'élève de l'objet de la connaissance et par le maître de l'apprentissage de l'élève est un phénomène social très important et une phase essentielle du processus didactique : cette double reconnaissance est l'objet de l'INSTITUTIONNALISATION[3]. »
>
> « L'institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d'action - on reconnaît la valeur d'une procédure qui va devenir un moyen de référence - que sur la formulation. Il y a des formulations que l'on va conserver (« ça se dit comme ça », « celles-là valent la peine d'être retenues »). Et pour les preuves, de la même façon, il faut identifier ce qu'on retient des propriétés des objets qu'on a rencontrés. »

Le *répertoire didactique* de la classe, ce n'est pas seulement l'ensemble des connaissances et des savoirs, c'est aussi l'ensemble des moyens qui vont permettre à l'élève de générer de nouvelles connaissances, de nouvelles formules[4]. L'observateur, qui souhaite effectuer l'analyse didactique du fonctionnement des connaissances des différents protagonistes, doit avoir accès au *répertoire didactique* de la classe. Sachant, bien évidemment, que le *répertoire* effectif d'un élève, c'est-à-dire le *répertoire* dont dispose effectivement l'élève lorsqu'il est confronté à la situation, peut être différent du *répertoire didactique* de la classe*.*

Considérons à présent le *répertoire didactique* de l'enseignant. Il y a une partie de son *répertoire didactique* qu'il doit nécessairement expliciter avec les élèves au cours des phases d'institutionnalisations. Le *répertoire didactique* de la classe est identifiable au *répertoire* de l'enseignant[5] que ce dernier a choisi d'expliciter.

Le *répertoire didactique* de la classe doit être élaboré de manière à permettre à l'élève d'organiser la collection des formules dont il dispose. Ainsi il permet à l'élève de faire l'inventaire de l'ensemble des formules, en lui offrant ainsi la possibilité de retrouver des tâches, des actions, des méthodes, des formulations et des justifications.

Nous souhaitons prendre comme objet d'étude le comportement du sujet apprenant ; aussi allons-nous nous intéresser aux répertoires qu'il utilise ou qu'il est susceptible d'utiliser lorsqu'il est en situation d'apprentissage.

1.2 La détermination d'un raisonnement produit par un sujet : notion de « situation »

En classe de mathématiques, à l'école primaire, le terme « raisonnement » tend à couvrir un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels,

[2] Brousseau G. « Les différents rôles du maître », article publié par l'IREM Bordeaux, texte d'une conférence prononcée à l'UQAM en janvier 1988
[3] En majuscule dans le texte initial
[4] le terme « formule » est pris ici au sens d'énoncé.
[5] plus précisément à la partie du répertoire de l'enseignant que ce dernier a choisi de faire partager aux élèves.

logiques ou mathématiques. C'est pour cette raison que nous avons pris comme définition initiale celle proposée par P. Oléron (1977) :

« Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but ».

Pour affirmer que tel observable est l'indice d'un raisonnement dont les éléments sont en grande partie implicites, il est nécessaire de dépasser la définition formelle, pour examiner les conditions dans lesquelles le « raisonnement supposé » peut être considéré, par le chercheur, comme « raisonnement effectif ».

Dans le cadre d'une recherche sur l'usage et le traitement des raisonnements des élèves par les professeurs, cf. Brousseau et Gibel (2002), nous avons mis en évidence que, souvent, en situation didactique, le professeur relève, dans les formulations des élèves, des indices et les interprète davantage en fonction de leur utilité pour le déroulement de la leçon que du point de vue du projet initial de l'élève qui en est l'auteur. Par conséquent pou pouvoir déterminer et analyser objectivement les raisonnements produits pas les élèves, le chercheur doit donc suivre une autre voie. Il convient qu'il montre que tel raisonnement complet, dont il n'aperçoit qu'une partie ou que des indices, est bien celui qu'il faut attribuer à son auteur.

Pour cela il convient de montrer que le « supposé raisonnement»

- pourrait être énoncé par le sujet ou, qu'au moins, la connaissance, utilisée implicitement ou explicitement, est connue de lui en effet elle appartient au répertoire didactique de la classe.
- est utile (il réduit une incertitude, par exemple, s'il y a doute car une autre règle aurait pu être appliquée). Le lien ne doit pas être l'effet d'une cause, par un mécanisme qui échapperait au jugement et à la volonté du sujet.
- Est motivée par un avantage qu'elle procure au sujet. Elle est l'instrument d'une modification de son environnement qui lui parait favorable.
- Est motivée par des raisons « objectives », propres : arguments de pertinence, de cohérence, d'adéquation, d'adaptation, qui justifient ce raisonnement là (et pas un autre) par opposition à l'idonéité (la conformité aux attentes du professeur).

Le chercheur doit donc montrer que la production du raisonnement prêté à ce sujet est motivée par une intention de la part de ce dernier, qu'elle répond à un but, qu'elle lui apporte un avantage dans les conditions qu'il perçoit, et avec le répertoire dont il dispose.

Ainsi, comme Brousseau et Gibel (2005) l'ont explicité, parmi toutes les conditions qui accompagnent la production d'un supposé raisonnement, quelques unes seulement – le moins possibles - peuvent servir à le déterminer et à le justifier. Ces conditions ne sont pas quelconques. Elles forment un ensemble cohérent que nous appelons « situation » Cette dernière n'est réduite ni à l'action du sujet, ni à la connaissance qui la motive mais elle les met en relation rationnelle. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet.

La théorie des situations a pour objet l'étude et la modélisation des situations ainsi définies. Elle est un instrument pour rechercher les explications minimales des faits observés, qui sont compatibles avec les faits connus.

1.3. Les raisonnements effectifs

Les raisonnements que nous étudierons seront essentiellement modélisables par des inférences c'est-à-dire des relations de la forme « Si la condition A est réalisée alors la condition B l'est (ou le sera) aussi ». Mais cette définition doit être complétée car nous voulons pouvoir distinguer les raisonnements effectifs des citations et intégrer des raisonnements qui se manifestent par des activités aussi bien que par des déclarations, ce qui nous amène à formuler la définition suivante

Un *raisonnement* est donc une relation R entre deux éléments A et B telle que :

A désigne une condition ou un fait observé, contingent ;

B est une conséquence ou une décision ou un fait prévu ;

R est une relation, une règle, plus généralement une connaissance empruntée à un répertoire considéré comme connu, accepté. La relation R conduit l'actant, dans la circonstance A, à prendre la décision B ou à prévoir le fait B ou à énoncer que le fait B est vrai.

Un *raisonnement effectif* comprend de plus :

- un agent E (élève ou professeur) qui utilise la relation R.

- un projet déterminé par une situation S dont la réalisation exige l'usage de cette relation.

On peut dire que pour réaliser le projet déterminé par la situation S, le sujet utilise la relation R qui permet d'inférer B de la condition A. Ce projet peut être convenu et explicité par l'agent ou il peut lui être prêté par le chercheur à partir d'indices.

2. Présentation et analyse a priori de la situation a-didactique destinée à développer certaines pratiques du raisonnement

2.1. Origine et enjeux de cette séquence

Le problème de mathématiques a été initialement proposé par G. Glaeser (1999), l'énoncé est le suivant :

Soient cinq nombres naturels quelconques a, b, c, d, e.

Quel est le nombre le plus grand que l'on peut obtenir à partir des quatre opérations élémentaires {+ ; - ;x ; :} appliquées à ces nombres qui ne seront pris dans le calcul qu'une seule fois, une même opération pouvant être utilisée plusieurs fois.

La mise en œuvre de cette séquence est liée à la rencontre de G. Brousseau et de G. Glaeser qui a été à l'origine de ce projet didactique. Le problème proposé est un problème ouvert, G. Brousseau montre l'utilité de la théorie des situations didactiques pour élaborer une ingénierie permettant de mettre en place une situation a-didactique de validation.

L'idée de G. Brousseau est de faire débattre les élèves sur des déclarations mathématiques suivant des règles qui les conduisent à produire des preuves, plus précisément leur faire chercher des contre exemples.

La situation d'argumentation, telle qu'elle a été conçue par G. Brousseau, est une situation a-didactique ou du moins en grande partie a-didactique ; en effet il est possible et même probable que l'enseignant sera conduit à intervenir de manière à assurer le maintien du processus. Par conséquent l'analyse de cette séquence devrait nous permettre d'apporter des éléments de réponses aux questions que nous avons formulées dans l'introduction mais également aux questions suivantes :

Quelles sont les différentes formes de raisonnements, produits par les élèves, qui apparaissent lors des différentes phases de cette séquence ? Quelles fonctions recouvrent-ils ? Quelles sont les composantes du répertoire didactique utilisé par les élèves lors de l'élaboration des raisonnements ?

2.2. La mise en situation d'analyse a priori

2.2.1. Analyse de la nature de la réponse attendue au problème proposé

Pour déterminer la nature de la réponse attendue par l'enseignant il est nécessaire de distinguer les conditions dans lesquelles la réponse doit être produite :

- Si la suite de nombres est donnée par l'enseignant alors la réponse attendue est un nombre ainsi que le programme de calculs permettant de l'obtenir.

- Si les cinq nombres ne sont pas explicités, c'est-à-dire si l'on se place dans le cas général, alors la réponse idoine est une méthode de calculs. Cependant il est à noter que l'écriture d'une expression algébrique ne conviendra pas car il est nécessaire de distinguer différents cas selon la suite de nombres considérés.

Dans le second cas nous sommes amenés à considérer l'expression algébrique

où a, b c, d et e désignent cinq entiers naturels quelconques.

$$a \times b \times c \times d \times e$$

Or cette expression algébrique est valide, pour obtenir le nombre le plus grand, à partir d'un douplet donné, que **si les cinq nombres sont tous distincts de 0 et de 1.**

Le domaine de validité de cet algorithme «naturel» n'est pas immédiatement évident, il devrait conduire les élèves à s'interroger sur le statut des nombres 0 et 1. Ces derniers ne sont pas des nombres comme les autres, ils ont des caractères didactiques et culturels spécifiques.

Il est à noter que la présence d'un ou plusieurs 0 nécessite, pour obtenir le nombre le plus grand, de déterminer, à partir de la suite constituée par les entiers non nuls, le nombre le plus grand et d'ajouter, ensuite, le ou les entiers nul(s), ce qui nécessite de distinguer des cas particuliers lors de la formulation de la méthode.

2.2.3. Le déroulement de la séquence

La séquence est constituée de 3 séances; nous allons expliciter, pour chacune d'elles, les différentes phases ainsi que les différentes composantes du répertoire que les élèves vont devoir utiliser afin de répondre aux exigences des situations auxquelles ils sont confrontés.

<u>Les différentes phases de la séance 1</u>

Phase 1 : Dévolution du jeu. Suite proposée 3, 8, 7, 5,4 Phase 2 : Informations complémentaires. Phase 3 : Recherche individuelle.	**Répertoire d'action** utilisé en situation de jeu
Phase 4 : Mise en commun.	**Répertoire de formulation** : Formulation du

Etablissement des résultats et désignation des gagnants. Phase 5 : Comparaison de méthodes.	raisonnement
Phase 6 : Consigne du deuxième jeu 7, 3, 2, 5, 8 Phase 7 : Recherche individuelle.	**Répertoire d'action** utilisé en situation de jeu
Phase 8 : Mise en commun. Exposition des résultats et désignation des gagnants.	**Répertoire de formulation** : Formulation du raisonnement
Phase 9 : Consigne relative au concours de propositions. Phase 10 : Recherche Phase 11 : Regroupement. Formulation des propositions. Débat relatif aux propositions.	**Répertoire d'actions** **Répertoire de formulations :** Ecriture des méthodes permettant de gagner quelle que soit la suite des nombres proposée
Phase 12 : Phase de jeu 2, 5, 3, 2,4 Phase 13 : Présentation des résultats.	**Répertoire d'action** utilisé en situation de jeu **Répertoire de formulation :** Explicitation de la méthode utilisée

<u>Les différentes phases de la séance 2</u>

Phase 1 : Consigne relative au concours de propositions. Phase 2 : Recherche en groupe. Phase 3 : Mise en commun. Explicitation des méthodes. Phase 4 : Débat relatif aux méthodes.	**Répertoire d'action** permettant d'éprouver la validité des méthodes **Répertoire de formulation** Explicitation de la méthode utilisée **Répertoire de validation** : Analyse des domaines de validité des méthodes
Phase 5 : Phase de jeu. 5,2,4,0,3 Phase 6 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes.	**Répertoire d'action** en situation de jeu **Répertoire de formulation** : Formulation du raisonnement élaboré à partir de la méthode choisie
Phase 7 : Proposition de nouvelles méthodes.	**Répertoire d'action** permettant d'éprouver la validité des méthodes **Répertoire de formulation :** Rédaction d'une nouvelle méthode
Phase 8 : Phase de jeu 8, 1, 3, 0, 0 Phase 9 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes.	**Répertoire d'action** **Répertoire de formulation** : Formulation du raisonnement
Phase 10 : Proposition d'une nouvelle méthode	**Répertoire d'action :** la situation de jeu, produite par l'élève, permet d'éprouver la validité des méthodes **Répertoire de formulation :** Ecriture des méthodes
Phase 11 : Recherche d'un contre-exemple à une méthode.	**Répertoire d'action** **Répertoire de validation** : Recherche d'une suite de nombres pour laquelle la méthode proposée ne permet pas d'obtenir le nombre

	le plus grand.
Phase 12 : Propositions de contre-exemples. Débats relatifs à la validité des contre-exemples.	**Répertoire d'action** **Répertoire de validation :** débat sur la validité des contre-exemples produits par les élèves
Phase 13 : Proposition de nouvelles méthodes	**Répertoire de formulation**
Phase 14 : Phase de jeu 7, 0, 4, 3,1	**Répertoire d'action**
Phase 15 : Présentation des résultats	**Répertoire de formulation**
Phase 16 : Recherche de contre-exemples.	**Répertoire d'action**
Phase 17 : Proposition de contre-exemples	**Répertoire d'action** **Répertoire de formulation**

Les différentes phases de la séance 3

Phase 1 : Mise en commun des résultats suite à la série proposée par Hélène 8, 1, 1, 1,0 Phase 2 : Débat relatif au statut de la proposition d'Hélène.	**Répertoire de formulation** **Répertoire de validation**
Phase 3 : Présentation par la maîtresse d'une série de nombres 1, 1, 1, 1,1 Phase 4 : Recherche de la méthode correspondante.	**Répertoire d'action** **Répertoire de formulation**
Phase 5 : Présentation des méthodes. Explicitation du contre-exemple.	**Répertoire de formulation** **Répertoire de validation**
Phase 5 : Phase de jeu. 1, 1, 1, 1, 9 Phase 6 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes	**Répertoire d'action**
Phase 7 : Recherche de contre-exemples.	**Répertoire d'action** **Répertoire de validation**
Phase 8 : Phase de rédaction individuelle d'une méthode.	**Répertoire de formulation**

Conclusion

L'étude des situations, et plus précisément des conditions qui définissent chacune d'elles, nous a permis d'analyser les différentes actions et les différentes formulations des élèves et de définir, à quelles conditions certaines d'entre elles sont assimilables à des raisonnements

L'analyse détaillée de la séquence permet de mettre en évidence la possibilité pour les élèves de pratiquer le raisonnement c'est-à-dire de produire des raisonnements en utilisant leur répertoire didactique (répertoire d'action, répertoire de formulation, répertoire de validation), dans des conditions qui le justifient véritablement et non artificiellement. De plus les situations, dévolues aux élèves, leur ont permis de se rendre compte, par eux-mêmes, suite aux rétroactions du milieu ou aux interactions avec leurs pairs, de la validité ou de la non validité des raisonnements qu'ils ont produits. Ainsi les élèves ont pu progresser dans la pratique du raisonnement.

Cette analyse, en théorie des situations didactiques, a montré que les élèves ont produit de nombreux raisonnements dans des fonctions très diverses telles que:

- prendre des décisions afin de produire une réponse et justifier la validité de celle-ci;

- élaborer et écrire une méthode « générale » lors de la situation de formulation individuelle « le concours de propositions » ;

- argumenter et débattre de la validité et de la pertinence des méthodes de manière à formuler une méthode qui soit la plus complète possible c'est-à-dire qui intègre les cas particuliers.

Bibliographie

BROUSSEAU, G. (1988), Les différents rôles du maître, *IREM Bordeaux*, texte d'une conférence prononcée à l'UQAM.

BROUSSEAU, G. & CENTENO, J. (1991), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **11/2**, 167-210, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU, G. & GIBEL, P. (2002), Influence des conditions didactiques sur l'apparition, l'usage et l'apprentissage des raisonnements en classe, dans *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, ARDM et IREM Paris 7.

BROUSSEAU, G. & GIBEL, P. (2005), Didactical Handling of Students Reasoning Processes in Problem Solving Situations, *Educational Studies in Mathematics*, **59**, 13-58, Kluwer.

GIBEL, P. (2004), *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnements dans la relation didactique en classe de mathématiques à l'école primaire,* Thèse de Doctorat, soutenue à l'Université de Bordeaux 2.

GIBEL, P. (2008), Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques à l'école primaire, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **13**, 5-39, IREM Strasbourg.

MARGOLINAS, C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.

OLERON, P. (1977), *Le raisonnement*. Presses Universitaires de France.

PATRICK GIBEL
LACES, équipe DAESL, Université Bordeaux 2
patrick.gibel@aquitaine.iufm