L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Le contrôle sur l'activité mathématique comme constitutif de la rationalité en mathématiques : élaboration d'un cadre de référence

Mireille Saboya, Nadine Bednarz et Fernando Hitt, *Université du Québec à Montréal, Québec, Canada*

Résumé

Certaines composantes de l'activité mathématique de l'élève comme la vérification du résultat obtenu, la justification d'un énoncé, d'une proposition ou de la démarche adoptée dans un problème, un engagement réfléchi dans la tâche, la validation reflètent l'acquisition d'une certaine rationalité mathématique chez l'élève (Balacheff, 1987 ; Battie, 2003). Plusieurs études montrent l'importance de ces composantes dans l'activité mathématique chez l'élève (Butlen et al., 1989 ; Margolinas, 1989 ; Balacheff, 1987 ; Mary, 1999 ; Dib, 2000-2001), et chez les mathématiciens (Hadamard, 1975 ; Nimier, 1989 ; Smith et Hungwe, 1998). Néanmoins différentes recherches (Delorme, 1985 ; Richard, 1998 ; Coppé, 1993 ; Dib, 2000-2001 ; Margolinas, 1989 ; Bednarz et Janvier, 1992 ; Schmidt, 1994 ; Lee et Wheeler, 1989) soulignent l'absence de certaines de ces composantes chez les élèves et ce, à tous les niveaux et dans différents domaines des mathématiques. Cette absence traduit un manque de contrôle du sujet face à l'activité mathématique. C'est dans cette situation problématique que notre étude se situe. Nous avons élaboré des situations d'enseignement visant le développement du contrôle en mathématiques chez les élèves au secondaire. À cette fin, des analyses préalables ont été réalisées qui ont servi de fondement à la séquence élaborée. Ce sont ces fondements théoriques que nous reprenons dans ce texte.

Introduction

Devant une production mathématique, l'élève devrait être capable de vérifier son résultat, de juger de la cohérence, de la validité, de la rigueur de sa démarche et de s'engager de manière réfléchie dans une résolution, en faisant preuve de jugement. Ces actions traduisent un contrôle de l'élève sur l'activité mathématique et reflètent chez ce dernier l'acquisition, le développement d'une rationalité mathématique[1]. Dans le travail de découverte des mathématiciens (Hadamard, 1975 ; Nimier, 1989 ; Smith et Hungwe, 1998), cette rationalité mathématique est présente, entre autres, sous forme de vérifications constantes, dénotant l'importance d'un jugement sur l'activité mathématique.

1 La rationalité renvoie au rationnel, au raisonnement. Une rationalité propre aux mathématiques se manifeste en géométrie, à travers l'idée de preuve par exemple, en algèbre à travers un certain contrôle syntaxique et sémantique exercé sur le calcul algébrique, sur l'activité de généralisation, sur la modélisation, sur la résolution de problèmes. Le contrôle exercé sur l'activité mathématique peut donc être vu, en ce sens, comme l'acquisition d'une certaine rationalité mathématique (la capacité de l'élève à être rationnel, à faire appel à la raison). Il n'est pas limité à l'acquisition de la preuve.

L'importance d'un contrôle sur l'activité mathématique

Dans son livre, Hadamard (1975) s'intéresse à définir les conditions qui permettent les découvertes en mathématiques à travers les témoignages de plusieurs chercheurs. Après l'énonciation d'une hypothèse, d'une conjecture par le mathématicien, la phase de vérification sert à limiter le doute en procurant au chercheur un sentiment d'absolue certitude indispensable à la poursuite du travail d'invention. Les calculs qui suivent l'idée initiale demandent de la discipline, de l'attention et de la volonté. Le mathématicien n'accorde pas une confiance aveugle aux résultats des règles qu'il utilise, il sait que des fautes de calcul sont possibles et même fréquentes, la vérification du résultat passe alors par une perception des erreurs. Cette idée est reprise par Nimier (1989), la phase de vérification étant présente également dans les entretiens qu'il a effectués auprès de mathématiciens, la vérification y apparaît comme une activité qui n'est pas seulement rétrospective mais qui prend place tout au long de l'invention mathématique. D'autres chercheurs (Smith et Hungwe, 1988) nous éclairent sur cette phase de vérification. Les mathématiciens établissent des conjectures qu'ils réfutent ou valident avec des essais numériques « disciplinés », les essais ne sont pas le fruit du hasard, ils proviennent d'un choix éclairé.

L'activité de vérification apparaît donc centrale dans l'invention mathématique et a cours tout au long du processus, et pas seulement de manière rétrospective. Celle-ci devrait également être présente dans le travail de l'élève. Comme le fait remarquer Hadamard (1975), le travail de l'étudiant qui essaie de résoudre certains problèmes de géométrie ou d'algèbre et le travail d'invention du mathématicien sont de même nature, il n'y a entre eux qu'une différence de niveau. Dans son ouvrage pédagogique, Cipra (1985) fait ce même rapprochement entre le travail des mathématiciens et celui des élèves. Il propose des moyens destinés aux étudiants pour que ces derniers soient capables de s'auto-corriger comme le font les chercheurs en mathématiques. Il part du constat que les erreurs sont toujours possibles, des vérifications sont donc souhaitables, visant à s'assurer de l'exactitude du résultat ou du raisonnement. Butlen, Lagrange et Perrin (1989) précisent, à cet effet, que se donner les moyens de vérifier, de savoir si ce qu'on dit est vrai, si c'est juste ou non sans demander au professeur est à la base de la réussite des élèves.

Dans des recherches en didactique des mathématiques portant sur la résolution de problèmes géométriques ou la résolution d'équations (Margolinas, 1989 ; Balacheff, 1987 ; Mary, 1999 ; Dib, 2000-2001), les chercheurs mettent en évidence l'importance de la validation comme moyen de convaincre, d'assurer la cohérence. Cette cohérence passe par un jugement sur le vrai et le faux qui permet de démontrer la validité de ce qu'on vient de trouver, de nous assurer que le résultat est cohérent par rapport au problème posé. Dib (2000-2001) souligne que dans ce travail, la validation et la compréhension des notions sont liées, un travail sur l'un entraîne des modifications sur l'autre.

Ces recherches nous convainquent de l'importance de la validation, de la justification et d'un engagement réfléchi de l'élève sur l'activité mathématique, reflétant l'acquisition d'une certaine rationalité mathématique, d'un contrôle sur la tâche de la part de ce dernier. Cependant, différentes études (Delorme, 1985 ; Richard, 1998 ; Coppé, 1993 ; Dib, 2000-2001 ; Polya, 1962 ; Cipra, 1985 ; Margolinas, 1989 ; Bednarz et Janvier, 1992 ; Schmidt, 1994 ; Chevallard, 1989 ; Kahane, 2002 ; Hernandez, 1999 ; Schoënfeld, 1985 ; Dumas et Jaquet, 2001 ; Souvignet, 1993-1994 ; Balacheff, 1987 ; Berthelot et Salin, 2000-2001 ; Vadcard, 1998-1999 ; Harel et Martin, 1989 ; Lee et Wheeler, 1989) déplorent une absence de ces actions réfléchies, d'un contrôle sur l'activité mathématique chez l'élève.

Contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves : quelques données issues des recherches

Plusieurs recherches nous montrent que le contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves n'est pas toujours présent et ce, dans divers domaines mathématiques (algèbre, calcul, géométrie, calcul différentiel et intégral) et à tous les niveaux de scolarité. Ce manque de contrôle apparaît entre autres présent chez les élèves en difficulté d'apprentissage. D'après Delorme (1985), on retrouve ainsi chez ces élèves une absence de vérification, en résolution de problèmes, de la solution trouvée. Richard (1998) fait ce même constat. Dans la résolution du problème : « il y a 108 élèves dans l'école, il y a 57 filles, combien y a-t-il de garçons ? » (p. 306), certains élèves en difficultés d'apprentissage ne s'aperçoivent pas quand leur solution les conduit à une incompatibilité avec d'autres données. Ils ne voient pas, par exemple, qu'il ne peut y avoir plus de garçons que d'enfants. D'autres chercheurs (Coppé, 1993) ont détecté, dans certains cas, l'utilisation de vérifications chez ces élèves, qui ne dénotent pas cependant un engagement réfléchi et un contrôle sur la tâche. Les seules vérifications effectuées sont des vérifications techniques du type « refaire le calcul » qui sont souvent longues et fastidieuses, ou des vérifications basées sur le souvenir des exercices déjà faits, avec le risque que les critères d'appariement ne soient pas corrects.

Ce manque de vérifications ne caractérise pas seulement les élèves en difficulté. On le retrouve chez les élèves en général. Dans son travail de thèse portant sur les vérifications, Coppé (1993) fait le constat que les élèves en première scientifique (16-17 ans) se contentent de fournir le résultat sans pouvoir porter une appréciation sur celui-ci. Ils n'ont pas de critères de jugement sur le résultat. Dib (2000-2001) et Polya (1962) vont dans le même sens. Dès lors qu'il a une réponse, l'élève s'arrête de chercher. Sa réponse, parce qu'elle existe, devient la réponse au problème qui lui a été posé. L'élève instaure sa réponse comme la vérité, il ne s'engage pas dans un processus de vérification. Dans les cas où les élèves procèdent à des vérifications, ces dernières relèvent davantage du contrat didactique (Coppé, 1993). C'est le cas par exemple, quand les élèves vérifient en se reportant au professeur : « le prof a fait comme ça », « on fait toujours comme ça », ou « je suis sûr de moi car on avait fait le même exercice en classe. »

Ce manque de contrôle apparaît dans plusieurs tâches en algèbre : dans la résolution d'équations (Margolinas, 1989 ; Bednarz et Janvier, 1992 ; Schmidt, 1994), la résolution de problèmes (Schmidt, 1994), dans la factorisation (Chevallard, 1989), dans la généralisation ou la validation de certains énoncés (Lee et Wheeler, 1989).

Les recherches sur la résolution d'équations relèvent ainsi un manque de contrôle des élèves à différents niveaux scolaires : au secondaire (Bednarz et Janvier, 1992, Margolinas, 1989) et à l'université chez des futurs enseignants du secondaire (Schmidt, 1994). Bednarz et Janvier (1992) ont ainsi noté que des élèves de secondaire III (14-15 ans) prennent des décisions qui les amènent à tourner en rond, n'ayant pas de vue globale sur ce qu'ils devraient faire pour simplifier. Confrontés à la résolution de l'équation $x + x/4 = 6 + x/4$, les élèves s'engagent dans la résolution, en ayant recours à un calcul algébrique parfois complexe, et non sans erreurs, sans faire preuve de jugement[2]. Schmidt (1994) a fait ce même rapprochement pour les futurs enseignants du secondaire. Ces derniers ne procèdent pas à un choix éclairé, à un engagement réfléchi dans la tâche. La résolution algébrique semble guidée par la recherche d'un certain pattern de résolution : placer les « x » d'un côté du signe égal et les nombres de l'autre côté de ce signe, de façon à pouvoir isoler « x ». Toute cette démarche s'appuie sur des règles dont les étudiants avouent ne pas trop comprendre pourquoi elles fonctionnent. Margolinas (1989) constate également l'utilisation de pauvres décisions stratégiques des élèves en première scientifique. Confrontés à la tâche de se prononcer entre trois réponses proposées (une bonne, une fausse et une partielle), sur celle qui est solution de l'équation ou du système d'équations donné, les élèves utilisent toujours le remplacement de la réponse dans l'équation ou dans le système d'équations pour conclure. Cependant, dans le cas d'une infinité de solutions, ou dans le cas où il n'y a pas de solution, cette procédure n'est pas suffisante. Par exemple, pour la résolution du système suivant :

$$\frac{1}{2}x - 2y + \frac{5}{4} = 0$$
$$-\frac{1}{10}x + \frac{2}{5}y - \frac{1}{4} = 0$$

les réponses proposées sont : « il y a une infinité de solutions » (qui est la bonne réponse), la réponse {x = -5/2 ; y = 0} (qui est une réponse partielle, le couple (-5/2,0) étant une solution du système) et la réponse fausse « il n'y a pas de solution. » La réponse partielle proposée (-5/2,0) donne un remplacement exact. Cependant, après le remplacement, il faut s'assurer de l'unicité. Il faut alors utiliser une autre technique de validation, par exemple avoir recours au cadre géométrique pour pouvoir conclure. Margolinas a ainsi observé que les élèves n'ont pas recours à d'autres stratégies de validation que le remplacement. Elle a remarqué donc que les élèves sont dans l'incapacité de valider, ils restent bloqués, étant incapables d'utiliser d'autres stratégies. Dans ces cas de figure, dans la résolution d'équations qui ont une infinité de solutions ou pas de solutions, elle remarque de plus que les élèves appliquent une certaine procédure de résolution et arrivent à un certain énoncé qu'ils sont dans l'incapacité d'interpréter. Par exemple, dans le système précédent, certains élèves qui procèdent à la résolution algébrique, arrivent au résultat 0 = 0 et l'interprètent comme « il n'y a pas de solution. » Par ailleurs, elle remarque que lorsque les élèves résolvent, ils font de très nombreuses erreurs, et qu'ils rectifient très rarement ces erreurs.

Le même constat a été fait par d'autres chercheurs dans le cas des transformations algébriques. Chevallard (1989) observe ainsi qu'un élève à qui on demande de factoriser l'expression $(2x–3)^2 – 4(x+1)(4x-6)+(4x^2-9)$, parvient au résultat attendu, soit $–4(2x-3)(x+2)$, on pense alors que cet élève maîtrise fort bien ce type de problèmes de factorisation. Mais quand on veut qu'il vérifie son résultat en donnant à x des valeurs numériques simples « par exemple –2 qui annule la seconde expression et qui devrait donc annuler la première », (remplacement qui provient d'une réflexion sur l'expression), l'élève reste abasourdi, perdu. Il n'y a pour lui, aucun lien entre la transformation

2 Si on possède du contrôle, on peut voir, sans avoir à résoudre, que le résultat est x = 6.

qu'il a fait subir à l'expression algébrique proposée, et le fait de substituer des valeurs numériques à l'inconnue qu'il a si habilement manipulée.

D'autres difficultés apparaissent dans la résolution de problèmes. Une recherche menée auprès d'étudiants universitaires en formation des maîtres au Québec (Schmidt, 1994) dénote des difficultés au niveau du contrôle exercé par ces étudiants dans la résolution de certains types de problèmes. Ainsi, dans son étude, Schmidt a proposé à des futurs enseignants un problème qui possède des données contradictoires :

> *Au restaurant, un café et trois croissants coûtent 2,70$. Deux tasses de café et deux croissants coûtent 3$. Trois tasses de café et un croissant coûtent 3,50$. Trouve le prix d'une tasse de café et d'un croissant.*

Les étudiants qui résolvent le problème algébriquement, écrivent les trois équations relatives au problème, ils opèrent sur 2 des équations, arrivent à un résultat, remplacent dans l'autre, et constatent que ça ne marche pas, reviennent alors sur leurs calculs pensant qu'ils se sont trompés. Contrôlant mal la résolution algébrique, les étudiants ne perçoivent pas que les trois équations sont incompatibles, alors qu'un raisonnement sur les écarts permet de déceler vite la contradiction. Pour 1 café et 3 croissants, le prix est de 2,70$, pour 2 cafés et 2 croissants, le prix est de 3$, donc si on ajoute un café et qu'on enlève un croissant on a une différence de prix de 0,30$. Si pour 2 cafés et 2 croissants le prix est de 3$ et pour 3 cafés et un croissant, il est de 3,50$, le même écart c'est-à-dire, l'ajout d'un café et le retrait d'un croissant revient à une variation de prix différente, qui est de 0,50$!

Devant la tâche de se prononcer sur la validité de certains énoncés en algèbre, une difficulté peut être observée (Lee et Wheeler, 1989 ; Harel et Martin, 1989). Devant la question de savoir si l'égalité $(2x+1)/ (2x+1+7) = 1/8$ est toujours vraie, parfois vraie ou jamais vraie, Lee et Wheeler (1989) ont remarqué que certains élèves utilisent le remplacement $x = 0$ pour conclure que l'égalité est toujours vraie. Les moyens de justification ne relèvent pas, à ce stade, d'un engagement réfléchi. Harel et Martin (1989) ont, de plus, constaté que les futurs enseignants au primaire accordent autant de valeur à des arguments de type essais qu'à des arguments déductifs, pour valider un énoncé mathématiquement. Pour prouver que « si la somme des chiffres composant un nombre est divisible par 3 alors ce nombre est divisible par 3 », les étudiants essaient avec un petit nombre et avec un nombre plus gros pour convaincre de l'exactitude de l'énoncé.

Ce même phénomène est présent dans d'autres domaines, notamment en géométrie. Plusieurs chercheurs (Berthelot et Salin, 2001 ; Vadcard, 1999 ; Balacheff, 1987 ; Souvignet, 1993-1994 ; Mary, 1999) constatent que certains élèves utilisent des moyens pragmatiques de validation, tels la perception et la mesure, ou la vérification sur quelques cas.

Cet engagement non réfléchi de la part des élèves est présent également dans l'étude sur la proportionnalité (Coppé, 1996-1997 ; Dumas et Jaquet, 2001). Ainsi, les élèves se lancent tête baissée dans la résolution, ils n'exercent pas de contrôle préalable pour voir si la situation est proportionnelle. Cette absence de contrôle conduit à des procédures de résolution de problèmes vides de toute signification (Dumas et Jaquet, 2001).

Tout comme c'était le cas en algèbre, par exemple, dans la résolution de l'équation x + x/4 = 6 + x/4, ce manque d'engagement réfléchi se reflète également dans certaines stratégies de calcul mental. Dans le calcul suivant (7–5) (0,5), effectué par des élèves de lycée, au lieu de calculer directement 2 x 0,5, ces derniers procèdent à la distributivité (Hernandez, 1999). Dans le rapport déposé auprès du ministre de l'Éducation Nationale en France, portant sur l'enseignement du calcul (Kahane, 2002), les chercheurs ont remarqué que les élèves sont incapables de contrôler le résultat donné par la calculatrice.

À un tout autre niveau, celui du calcul différentiel et intégral, Schoënfeld (1985) note que les étudiants arrivent à résoudre mais ne peuvent éviter des approches difficiles ou coûteuses en temps, car ils ne prennent pas en compte de façon adéquate les caractéristiques du problème dans le choix fait pour déterminer la stratégie utilisée. Ils se lancent dès le début dans la réalisation d'une technique, sans tester s'il en existe d'autres plus simples et moins coûteuses en temps.

Ces données, issues de recherches menées dans différents domaines et à différents niveaux scolaires, convergent et pointent toutes le peu de contrôle exercé par l'élève sur son activité mathématique. L'objectif de notre recherche est d'élaborer une séquence d'enseignement au secondaire visant le développement du contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves. Elle vise aussi à cerner a posteriori le potentiel des situations élaborées. Pour fonder l'élaboration de cette séquence, une analyse préalable du concept de contrôle s'impose.

Le concept de contrôle

Une analyse plus fine du concept de contrôle à travers différentes sources en mathématiques, en pédagogie, en didactique, en psychologie nous a amené à considérer différentes dimensions du contrôle, et à identifier certaines caractéristiques de situations susceptibles de développer un tel contrôle.

L'activité de contrôle est présente chez les pédagogues (Cipra, 1985). Elle y est vue comme une vérification qui se met en place suite à une incertitude, c'est un travail purement rétrospectif qui est associé à la perception des erreurs. La vérification tient de plus à une interprétation du résultat obtenu (Margolinas, 1989). Elle apparaît comme la validation d'un résultat aboutissant à acquérir une certitude ou à engendrer un doute et une rectification. Des chercheurs en didactique des mathématiques (Margolinas, 1989 ; Coppé, 1993) ont enrichi cette définition en considérant le processus de contrôle comme un processus également d'anticipation du résultat dans lequel les élèves sont appelés à poser a priori une condition de validité du résultat avant de le connaître.

Dans certaines études menées en psychologie (Richard, 1998) et en didactique des mathématiques (Margolinas, 1989 ; Kargiotakis, 1996), le contrôle n'apparaît pas seulement au début, comme une anticipation du résultat, ou à la fin de la résolution comme une vérification de la solution, il est également présent dans toutes les phases de la résolution : dans la construction de la représentation de la situation, dans l'élaboration des décisions d'action et dans l'appréciation de l'adéquation aux objectifs de la tâche.

Pendant le processus de résolution, le contrôle intervient dans les décisions d'action, dans le choix de la méthode de résolution. Cette idée est reprise par Schoënfeld (1985) qui définit le contrôle comme une prise de recul, de distance sur la situation pour choisir la stratégie la plus pertinente, la plus efficace et la moins coûteuse en temps. Cette idée de recul, de prise de distance est également présente dans la recherche en mathématiques (Hadamard, 1975) ou chez d'autres chercheurs en didactique (Kargiotakis, 1996 ; Tenaud, 1991 ; Mary, 1999). Après un travail acharné du mathématicien, le contrôle passe par la sélection de toutes les idées pour ne retenir que les plus fécondes (le mathématicien perçoit plusieurs voies qu'il suppose avoir des chances de conduire à la solution). Le contrôle permet aussi de se questionner sur les arguments qui fondent le raisonnement.

Dans la résolution de problèmes, l'activité de contrôle intervient également dans des moments où l'élève est face à une impasse, à un obstacle. C'est dans ces moments d'hésitations que l'élève doit mobiliser ses connaissances, les contrôler pour dépasser cet obstacle. Richard (1998) définit ces moments comme des situations critiques, ce sont des situations propices pour exercer une activité de contrôle. Une situation critique est une situation qui ne devrait pas se produire dans le déroulement normal de la tâche. Ces situations peuvent être le point de départ d'une activité de réflexion sur l'action, puisqu'elles sont l'indice que quelque chose qu'on a fait n'aurait pas dû être fait. Elles peuvent également remettre en cause les représentations qui ont été à la base de ces actions. Les travaux en psychologie de Piaget et Bullinger (1974) et en didactique des mathématiques (Balacheff, 1987 ; Kargiotakis, 1996) vont dans le même sens. Le contrôle apparaît ici dans la confrontation à des contradictions. Il intervient dans la prise de conscience de ces contradictions et dans leur dépassement (Piaget et Bullinger, 1974). C'est à travers une attitude de réflexion sur l'action que l'activité de contrôle se définit. Le contrôle apparaît ici comme une activité méta.

En didactique des mathématiques, Artigue (1993) élargit ce cadre cognitif (Richard, 1998) du contrôle à des caractéristiques propres aux mathématiques. Elle distingue ainsi des connaissances de type méta, qu'elle nomme métaconnaissances, qui sont liées à la prise de décision, des connaissances qui correspondent à la définition de notions et à leurs propriétés. Par exemple, si on se place dans le domaine des nombres complexes, une connaissance renvoie au fait de savoir qu'un nombre complexe possède trois écritures différentes : algébrique, trigonométrique et cartésienne.

Une métaconnaissance renvoie à un questionnement sur l'écriture qui serait la plus efficace, qui conviendrait le mieux devant la situation où l'on se trouve confronté. Ainsi, si on doit effectuer des sommes de nombres complexes, une métaconnaissance correspondrait à la réflexion que l'écriture cartésienne est celle qui convient le mieux ; si on est face à des produits, des quotients ou des racines, les registres trigonométrique ou exponentiel sont les mieux adaptés. Artigue (1993) souligne, de plus, que les métaconnaissances peuvent également porter sur les erreurs habituellement commises, et donc sur les moments où il faut faire preuve d'une vigilance particulière.

Cette dimension méta est également présente dans l'invention mathématique. Hadamard (1975) met l'accent sur l'importance de garder constamment à l'esprit l'idée générale, le but à atteindre, c'est en agissant ainsi que le mathématicien contrôle son travail de découverte. En didactique des mathématiques, Margolinas (1989) et Balacheff (1987) vont dans ce même sens. Ils appuient le fait que c'est sur la finalité de la tâche que repose l'activité de contrôle exercée par l'élève. C'est la représentation qu'a l'élève de la finalité de la tâche qui le guide dans les étapes intermédiaires de résolution, lui permettant de garder le contrôle sur ce qu'il cherche. La finalité est le fil conducteur qui guide la pensée de l'élève.

Ces travaux rejoignent également le modèle de Perkins et Simmons (1988). L'analyse plus fine de ce modèle fait ressortir une composante centrale, qu'il nomme « epistemic frame », intervenant dans la non compréhension des élèves et qui est souvent oubliée dans l'enseignement. Le cadre épistémique réfère aux « normes générales », aux stratégies sur lesquelles se fonde la validation d'un énoncé, aux fondements sur lesquels on s'appuie pour dire que telle chose est valide.

Conclusion

Ces différentes études sur l'activité de contrôle nous ont permis de définir un cadre de référence qui a servi d'appui à l'élaboration de situations d'enseignement qui ont été mises en place dans une classe du secondaire au cours de l'année 2006. À cette fin, nous avons distingué 6 composantes du concept de contrôle que nous explicitons dans le tableau ci-dessous.

Anticipation (Margolinas, 1989 ; Cipra, 1985) Pouvoir poser a priori une condition de validité du résultat avant de le connaître.	**Vérification, validation** (Hadamard, 1975 ; Cipra, 1985, Coppé, 1993 ; Margolinas, 1989 ; Richard, 1998 ; Kargiotakis, 1996 ; Schoënfeld, 1985 ; Lee et Wheeler, 1989 ; Perkins et Simmons, 1988) S'engager dans des vérifications successives, périodiques tout au long de la tâche. Le résultat obtenu peut mener vers un retour sur la tâche, sur la méthode, ou sur les calculs entrepris. Mettre en place un processus de validation d'un raisonnement, se prononçant sur le caractère de vérité d'un énoncé, d'une démarche, d'un calcul…	**Engagement réfléchi** (Margolinas, 1989 ; Mary, 1999 ; Balacheff, 1987 ; Kargiotakis, 1996 ; Perkins et Simmons, 1988) Faire intervenir le sens, la compréhension des concepts en jeu. Prendre une distance par rapport à la tâche, un temps d'arrêt, de réflexion.
Discernement, choix éclairé (Schoënfeld, 1985) Entrevoir plusieurs engagements possibles. Faire un choix éclairé entre les stratégies possibles, en discernant celle qui est la plus efficace, celle qui mène vers la solution le plus rapidement, sans trop de risques d'erreurs.	**Idée de la métaconnaissance** (Artigue, 1993) Mobiliser des connaissances de type méta, nommées métaconnaissances. Elles sont liées à une prise de décision appropriée sur l'utilisation de connaissances dans une tâche donnée (et à leurs différentes significations, registres de représentations).	**Perception des erreurs, sensibilité à la contradiction. Capacité de dépasser l'obstacle.** (Balacheff, 1987 ; Piaget et Bullinger, 1974) Être conscient des contradictions, des résultats aberrants, qui n'ont pas de sens, pouvoir dépasser ces contradictions…

Références

Artigue, M. (1993). Connaissances et métaconnaissances – une perspective didactique, *Cahier DIDIREM*, numéro spécial 1, IREM, Paris VII, Paris.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et de validation. *Educational Studies in Matematics*, *18*, 147-176.

Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'Arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Thèse de doctorat inédite, Université Paris 7.

Bednarz N. et Dufour-Janvier, B. (1992). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves, *Actes du colloque international 1992 – Didactique des mathématiques, formation normale des enseignants*. École normale supérieure Marrakech.

Berthelot, R., et Salin., M. H. (2000-2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x*, *56*, 5-34.

Butlen, D., Lagrange, M. et Perrin, M.J. (1989). Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6e en difficulté. *Cahier de DIDIREM*, 5, IREM Paris VII, Paris.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège (2e partie). *Petit x*, *19*, 43-72, IREM de Grenoble.

Cipra, B. (1985). *Erreurs… et comment les trouver avant le prof…* InterEditions, Paris.

Coppé, S. (1993). *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé*. Thèse de doctorat inédite, Université de Lyon.

Coppé, S. (1996-1997). Regards sur la pratique : à propos du vrai ou du faux en séance de mathématiques. *Grand N*, *60*, 33-42.

Delorme, J. (1985). *Étude de la compréhension de problèmes additifs chez des enfants de difficulté en mathématiques*, Mémoire de DEA, Université de Paris VIII.

Dib, M. (2000-2001). Validation dans l'environnement papier crayon. *Grand N*, *68*, 41-60.

Dumas, J.P. et Jaquet, F. (2001). Les tentations de la proportionnalité. *Math-École*, *198*, 33-42.

Hadamard, J. (1975). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*. Gauthier-Villars. Paris.

Hernandez, V. (1999). *Los procesos de resolucion de problemas arithmetico-algebraicos, de enunciado, en alumnos de secundaria y de bachillerato : Un estudio cuantitativo y cualitativo*. Thèse inédite de doctorat. Universidad Autonoma del Estado de Morelos, México.

Kahane, J.P. (2002). Le calcul. In *L'enseignement des sciences mathématiques*. Rapport au ministre de l'Éducation nationale. Éditions Odile Jacob.

Kargiotakis, G. (1996). *Contribution à l'étude de processus de contrôle en environnement informatique : le cas des associations droites-équations*. Thèse de doctorat inédite. Université Paris VII.

Lee, L. et Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematic*, *20*, 41-54.

Margolinas, C. (1989). *Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques*. Thèse de doctorat inédite. Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Martin, W. G. et Harel, G. (1989). Proof Frames of Preservice Elementary *Teachers. Journal for Research in Mathematics Education 20*, 41-51.

Mary, C. (1999). *Place et fonctions de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au secondaire*. Thèse de doctorat inédite. Université de Montréal.

Nimier, J. (1989). *Entretiens avec des mathématiciens (L'heuristique mathématique)*. IREM de Lyon.

Perkins, D.N., et Simmons R. (1988). Patterns of Misunderstanding : An Integrative Model for Science, Math, and Programming. *Review of Educational Research*, *58*, 3, 303-326.

Piaget, J et Bullinger, A. (1974). Transitivité et additivité des différences infraliminaires. In *Recherches sur la contradiction, vol 1 : les différentes formes de la contradiction*, p. 15-31. Sous la dir. de J. Piaget. Presses Universitaires de France, Paris.

Polya G. (1965). *Comment poser et résoudre un problème*. Éditions Jacques Gabay.

Richard, J. F. (1998). *Les activités mentales : Comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Université de Paris VII.

Robert, A. (1993). Présentation du point de vue de la didactique des mathématiques sur les métaconnaissances. *Cahier de DIDIREM*, numéro spécial 1, IREM, Paris 7, Paris.

Schmidt, S. (1994). *Passage de l'arithmétique à l'algèbre et inversement de l'algèbre à l'arithmétique, chez les futurs enseignants dans un contexte de résolution de problèmes*. Thèse de doctorat inédite. Université du Québec à Montréal.

Schoënfeld A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Smith, J.P et Hungwe K. (1998). Conjecture and verification in research and teaching : conversations with young mathematicians. *For the learning of mathematics*, *19*(3), 40-46.

Souvignet, C. (1993-1994). L'influence du dessin sur la rédaction d'une démonstration. *Petit x*, *34*, 31-52.

Tenaud, I. (1991). *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthodes de travail et travail en petits groupes*. Thèse de doctorat inédite. Université Paris 7.

Vadcard, L. (1998-1999). La validation en géométrie au collège avec Cabri-Géomètre. Mesures exploratoires et mesures probatoires. *Petit x*, *50*, 5-21.

Pour joindre les auteurs

Mireille Saboya, Nadine Bednarz et Fernando Hitt
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
CP 8888, succursale Centre-ville
Montréal, Canada H3C 3P8
saboya_mandico.mireille@uqam.ca
descamps-bednarz.nadine@uqam.ca
hitt.fernando@uqam.ca