L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Développer une conduite rationnelle sur la proportionnalité : analyse d'une pratique d'enseignement au secondaire en regard du jugement porté sur la reconnaissance de situations proportionnelles

Izabella Oliveira, Nadine Bednarz et Caroline Lajoie, *Université du Québec à Montréal, Canada*

Résumé

Notre étude s'intéresse à l'analyse des pratiques d'enseignement de la proportionnalité au secondaire en lien avec le développement d'une conduite rationnelle chez les élèves. Nous reviendrons dans cet article sur une étude de cas conduite à cette fin dans une classe de secondaire 2 (13-14 ans), suivie pendant toute une séquence d'enseignement portant sur l'introduction de la proportionnalité. Un questionnaire écrit, portant sur la résolution de différents types de problèmes proportionnels et non proportionnels, a été passé aux 33 élèves de la classe[1] au début et à la fin de l'enseignement. La pratique d'enseignement en classe a fait par ailleurs l'objet d'une observation systématique, complétée par l'analyse des notes de cours et d'une entrevue menée avec l'enseignant. Nous ciblons plus spécifiquement ici le travail mené en classe autour de la reconnaissance de situations proportionnelles. L'analyse nous montre que trois types de situations non proportionnelles sont présentées : des situations « absurdes », des situations faisant appel à des tables de valeurs pour lesquelles un coefficient de proportionnalité ne peut être établi entre les données, et des situations faisant appel à des représentations graphiques pour lesquelles la droite ne passe pas par zéro. Des techniques de contrôle de la proportionnalité sont par ailleurs enseignées comme moyen d'aborder cette reconnaissance. La construction d'une conduite rationnelle passe dès lors par un certain format, dont le sens, nous le verrons dans les résultats au test écrit, échappe aux élèves.

Introduction

Les recherches en didactique des mathématiques portant sur les pratiques d'enseignement se sont beaucoup développées au cours des dix dernières années (Bednarz et Perrin-Glorian, 2004 ; Roditi, 2005 ; Robert, 2001 ; Hache, 2001 ; Rogalski, 2003). Notre projet s'inscrit dans ce courant de recherche et porte sur la caractérisation des moyens utilisés par l'enseignant pour gérer un certain projet d'enseignement. Nous cherchons à mieux comprendre la pratique de l'enseignant et la manière dont cette dernière contribue au développement du raisonnement proportionnel[2], plus spécifiquement à la construction d'une conduite rationnelle dans ce domaine par les élèves.

Plusieurs didacticiens sont d'avis que le développement de la rationalité chez les élèves doit prendre une place importante dans l'enseignement des mathématiques (Balacheff, 1987 ; Mary, 1999 ; Margolinas, 1989 ; Krummheur, 1998). Artigue (1993) parle dans ce cas d'un recours nécessaire chez l'élève à des métaconnaissances, le contrôle sur l'activité mathématique faisant appel non

1 Cette étude s'insère dans une recherche doctorale plus globale portant sur l'exploration des pratiques d'enseignement de la proportionnalité au secondaire en lien avec le développement du raisonnement proportionnel chez les élèves.

2 Il s'agit ici de la recherche doctorale plus globale, dans laquelle s'inscrit la communication proposée.

seulement à des connaissances (construction d'un sens aux concepts, élaboration de raisonnements, construction d'un sens au symbolisme) mais également à un choix réfléchi de ces connaissances dans une situation donnée (stratégie la plus efficace par exemple, choix d'écriture appropriée pour traiter du problème parmi un ensemble d'écritures possibles.) (Saboya *et al.*, 2007). Balacheff (1987) considère quant à lui que la rationalité et la construction des savoirs devraient être travaillées en même temps, et qu'un même statut dans l'enseignement devrait leur être accordé.

Dans notre étude, nous nous sommes intéressées aux moyens mis en place par l'enseignant en classe ordinaire pour développer une conduite rationnelle chez ses élèves dans un domaine spécifique, celui de la proportionnalité. Nous reviendrons dans un premier temps sur les connaissances que nous considérons nécessaires pour développer une telle conduite rationnelle sur la proportionnalité. Nous aborderons par la suite l'analyse d'une pratique d'enseignement de la proportionnalité, sous l'angle du travail fait en classe portant sur la reconnaissance de situations proportionnelles.

1. Connaissances sur la proportionnalité nécessaires pour développer une conduite rationnelle sur la proportionnalité ?

Le raisonnement proportionnel est un raisonnement clé utilisé non seulement en mathématiques, mais également dans la vie courante, en sciences et en sciences humaines. Les orientations du programme de formation de l'école québécoise confirment son importance (MEQ, 1994 ; MELS, 2003). L'accent y est mis, au-delà de l'acquisition de certains savoirs, sur le développement d'un certain contrôle exercé sur la résolution de problèmes, à travers notamment la validation.

Nous avons cherché à clarifier sur un plan théorique ce que recouvre ce contrôle exercé sur la résolution de problèmes, afin de dégager ce que voudrait dire dans ce cas construire une conduite rationnelle sur la proportionnalité.

1.1 Le raisonnement qualitatif, un élément central

Post, Behr et Lesh (1988) mettent en évidence que le raisonnement proportionnel demande des inférences et des prédictions qui sollicitent une pensée qualitative. Selon ces auteurs, le raisonnement qualitatif est un important moyen non seulement de vérifier la réponse, mais surtout de mieux contrôler la situation avant de s'engager dans les calculs.

À titre d'exemple, considérons le problème suivant : « 4 machines prennent 300 jours pour fabriquer toutes les briques qui vont être utilisées dans la construction d'une maison. En combien de jours 8 machines identiques fabriqueront-elles la même quantité de briques ? ». Il est possible d'aborder le problème en se posant des questions telles que « Est-ce que cela me prend plus ou moins de jours ? Combien de fois plus, ou combien de fois moins, de jours ? ». Un tel raisonnement qualitatif permet au sujet de porter un jugement avant de s'engager dans la résolution du problème, il lui permet d'anticiper quelque peu l'ordre de grandeur de sa réponse, et lui assure ainsi un certain contrôle sur le processus de résolution.

1.2 Capacité de reconnaître si une situation est proportionnelle ou non

Le regard critique que les élèves exercent sur les situations est un élément clé dans cette construction d'une rationalité. Plusieurs travaux de recherche (Vergnaud, 1991 ; De Cotret, 1991) nous montrent la difficulté des élèves à porter un tel regard critique sur les situations proposées, notamment lorsque certaines variables didactiques sont introduites dans le problème (par exemple la présence de plusieurs couples versus deux couples).

1.3. Flexibilité dans la résolution de différents types de problèmes

Développer une conduite rationnelle sur la proportionnalité renvoie également au contrôle que l'élève exerce sur la résolution de différents types de problèmes. Celui-ci va s'exercer à travers le recours possible à différentes procédures de résolution et un choix éclairé en regard du problème posé (en fonction des nombres en jeu notamment et des rapports plus ou moins évidents entre ces nombres)

Développer une conduite rationnelle sur la proportionnalité renvoie ainsi à une certaine flexibilité qui élargit les possibilités d'aborder le problème : variété de procédures de résolution, flexibilité dans le passage d'une procédure à l'autre, capacité à changer de cadre (numérique, graphique, géométrique) pour entrer dans le problème par différents angles (Perrin-Glorian, 1993).

1.4. Dépassement de l'erreur et co-variation

Un tel contrôle suppose enfin le dépassement de l'erreur additive dans le cas de problèmes mettant en jeu un choix de nombres pour lesquels la relation multiplicative n'est pas évidente, et la mise en place d'une idée de co-variation, au cœur de la résolution de problèmes proportionnels (tel le problème suivant où la relation entre les variables est de moitié : « Une voiture roule toujours à la même vitesse. Elle fait 24 kilomètres en 12 minutes, ou encore 36 kilomètres en 18 minutes. À ce rythme, la voiture aura parcouru 40 kilomètres en combien de minutes ? »).

2. Une pratique d'enseignement qui favorise le développement d'une rationalité mathématique chez l'élève

Le développement d'une certaine rationalité renvoie entre autres à un engagement réfléchi de l'élève, c'est-à-dire à la capacité d'avoir un jugement critique face à la tâche proposée, au développement d'un contrôle sur la tâche, d'une justification, à la capacité de juger du caractère véridique ou non d'un énoncé et d'une proposition sur la base d'arguments fondés (Balacheff, 1987 ; Margolinas, 1989 ; Mary, 1999). En ce sens, lorsqu'on parle d'un enseignement qui favorise le développement de la rationalité mathématique, on pense à un enseignement, dans le sens de Dumas *et al*. (2001), où l'élève est amené à réfléchir, à entrer dans la situation d'une manière contrôlée, en donnant du sens à ses actions et en ayant conscience de ses prises de décision :

> *C'est une des fonctions de l'enseignement que de replacer le sens avant les techniques opératoires de résolution. Les élèves doivent apprendre qu'il ne faut pas s'engager tête baissée dans les procédures avant de se demander si elles sont adéquates et à revenir à la réalité si, toutefois, ils avaient oublié le contrôle de la situation.* (p. 33)

Balacheff (1987) mentionne que pour que l'élève soit capable d'anticiper, de s'engager d'une façon critique dans une situation donnée, « il est nécessaire que ses connaissances constituent un modèle de la réalité afin de lui permettre un contrôle a priori de la situation-problème dans laquelle il se trouve » (p. 151).

L'analyse précédente (voir la section 1) nous a permis de définir a priori de manière plus fine les connaissances sur la proportionnalité qui sont nécessaires pour développer une conduite rationnelle dans ce domaine. De telles connaissances sont-elles développées par l'enseignant ? Quels sont les moyens mis en place par celui-ci ? Comment l'enseignant aborde t-il la reconnaissance de situations proportionnelles et non-proportionnelles ? Quelle justification, argumentation tente t-il de mettre en place ? Quelle activité mathématique est induite chez l'élève, à travers plus spécifiquement le contrôle qu'il exerce sur ces situations ? Quelles connaissances les élèves construisent-ils en classe ordinaire sur la proportionnalité ? Les pratiques mises en place en classe les aident-ils à construire une conduite rationnelle sur ce sujet ?

Nous avons cherché à répondre à ces questions à travers une étude de cas centrée sur la compréhension d'une pratique d'enseignement de la proportionnalité en classe ordinaire. Les données qui suivent s'attarderont plus spécifiquement au travail mené sur la reconnaissance de situations proportionnelles.[3]

3. Méthodologie

Le besoin de comprendre les pratiques d'enseignement élaborées à propos de la proportionnalité au secondaire, en lien avec le développement de la rationalité mathématique chez l'élève, nous a conduit vers le choix d'une méthodologie, l'étude de cas, qui permet de capter cette dynamique de la classe de mathématiques (Bauersfeld, 1980 ; Confrey, 1994 ; Robert, 2001 ; Hache, 2001 ; Vergnes, 2001).

Pour comprendre, dans une perspective didactique, comment des pratiques favorisent le développement de la rationalité mathématique chez les élèves, nous avons centré nos observations sur différents aspects : la planification de l'enseignant et les situations proposées, les séances en classe et les apprentissages des élèves. Pour cela, nous avons eu recours à différents modes de collecte de données : entrevue réalisée avec l'enseignant sur sa planification ; analyse des notes de cours et de la banque de problèmes donnés aux élèves, observation systématique en classe, test écrit expérimenté auprès des élèves[4]. L'étude a porté sur une classe de secondaire 2 (34 élèves âgés de 13-14 ans). Nous reviendrons plus spécifiquement sur l'analyse des données relatives à la partie du cours portant sur la reconnaissance de situations de proportionnalité.

3 La place dont nous disposons dans ce texte nous oblige à restreindre l'analyse à un aspect.

4 L'entrevue visait à mieux comprendre la planification de l'enseignant, les principes qui le guident, ses choix didactiques. L'observation en classe permet de cerner comment se concrétise cette planification, appuyée par les notes de cours. Le test écrit, avec l'observation en classe, permet de cerner l'activité mathématique induite chez les élèves vis à vis la résolution de différents types de problèmes proportionnels et non-proportionnels.

4. Analyse sous l'angle de la caractérisation de la pratique d'enseignement mise en place

4.1 Analyse de l'entrevue

L'entrevue avait pour but de faire expliciter par Maurice[5] sa planification sur la proportionnalité, les principes sous-jacents qui le guident, la manière dont il conçoit a priori le travail avec les élèves sur la reconnaissance de situations proportionnelles dans l'ensemble des séances.

4.1.1. Place des situations proportionnelles et non-proportionnelles dans la séquence

Une première remarque porte sur la progression pensée par l'enseignant. La reconnaissance de situations proportionnelles et non-proportionnelles vient à la fin de la séquence[6]. Il y a là un choix didactique sous-jacent en ce sens que d'autres agencements auraient été possibles[7].

L'enseignant fait référence en entrevue, pour justifier ce choix, à des connaissances préalables des élèves, selon lui nécessaires, qui vont être réutilisées dans la partie dédiée aux situations proportionnelles, suggérant par là que cette reconnaissance ne peut être abordée qui si les élèves ont des outils pour le faire.

Une première référence à cette reconnaissance de situations proportionnelles et aux connaissances préalables vient lorsque Maurice parle de connaissances antérieures des élèves qui seront réinvesties :

> *Ils ont vu : tables de valeurs et graphiques. On va arriver dans les situations de proportionnalité. Ils vont déjà savoir comment faire les tables de valeurs et les graphiques, c'est juste qu'on va les appliquer aux situations de proportionnalité.* […] [J'aimerai] *qu'ils soient capables de reconnaître*[8] *si une situation est proportionnelle par rapport à une table de valeur et un graphique.*

Ainsi, ces supports sont vus par l'enseignant comme étant des outils pour reconnaître s'il y a proportionnalité ou non. Ils sont donc aussi un moyen qu'il favorise pour aborder cette reconnaissance.

Une autre justification donnée par Maurice pour appuyer le moment où il va travailler la reconnaissance des situations proportionnelles est basée sur le fait qu'il veut amener les élèves à réfléchir,

5 Nom fictif donné à l'enseignant.

6 Les notes de cours de l'enseignant sont présentées en trois parties : dans la 1re partie sont présentées les notions de rapport, de taux et la comparaison des rapports et des taux. On trouve surtout dans cette section des définitions et quelques exemples. On trouve en plus deux méthodes pour comparer des rapports et des taux, ainsi qu'une section sur l'effet de la modification d'un des termes d'un rapport ou taux sur l'autre. Dans la 2e partie on trouve la notion de proportion et la définition de trois propriétés des proportions. Une autre section porte sur la recherche d'un terme inconnu dans une proportion et la présentation de deux techniques pour trouver ce terme manquant. Dans la 3e et dernière partie, l'enseignant présente les situations proportionnelles et non-proportionnelles.

7 On peut par exemple commencer un enseignement de la proportionnalité par l'introduction de telles situations pour forcer un engagement réfléchi… ou encore introduire de telles situations à tout moment de la séquence.

8 Il est important de mentionner que le terme reconnaissance donné par l'enseignant prend le sens de vérification. À travers ces supports les élèves peuvent vérifier si une situation est proportionnelle.

à se rendre compte que toutes les situations ne sont pas proportionnelles. Cette réflexion ne peut venir selon lui qu'en fin de parcours[9].

> *Et ensuite partir de ça pour les mélanger, vu qu'ils pensent que tout dans la vie est proportionnel* […] *pour qu'ils se rendent compte que dans le fond, non, puisqu'il y a une question qu'on aurait dû se poser à chacun des problèmes qu'on a fait avant : est-ce que ça a de l'allure ou pas ? Est-ce que cette situation est proportionnelle ou pas ?*

4.1.2. Le travail en classe : sur quoi sont basés les choix didactiques ?

Au cours de l'entrevue, Maurice parle de partir d'un problème et du travail des élèves sur ce problème. Ce qu'il compte faire de ce travail des élèves dans le retour n'est cependant pas explicité.

Il explicite par contre certaines difficultés qu'il a pu observer dans sa pratique antérieure auprès d'autres groupes d'élèves du même niveau scolaire. La reconnaissance d'une situation non proportionnelle apparaît comme une de ces difficultés :

On trouve aussi explicité le fait que parfois les élèves ont de la difficulté à rester en contrôle jusqu'à la fin du processus de résolution, c'est-à-dire qu'ils ne vérifient pas jusqu'à la fin si la situation est toujours proportionnelle[10].

La dernière difficulté nommée par Maurice porte sur les graphiques. Cette difficulté, qui va intervenir dans le jugement porté sur une situation proportionnelle ou non, n'est toutefois pas propre à la proportionnalité :

> *À part ça, c'est toutes les difficultés reliées aux graphiques.* […] *avec les graphiques cela a toujours l'air proportionnel parce que ça a l'air de passer à zéro, mais en fait c'est parce qu'ils ont fait une erreur dans le graphique.*

Ces difficultés vont d'une certaine manière guider sa façon d'intervenir en classe, comme nous le verrons par la suite.

4.2. Analyse des notes de cours[11]

Les notes de cours forment un document, élaboré au préalable par l'enseignant, destiné aux élèves. Elles seront données aux élèves au début de sa séquence sur la proportionnalité. Elles constituent en quelque sorte pour l'élève une mémoire du travail qui sera fait dans la séquence. Celui-ci reprend

9 Il explique que si elle était abordée avant, elle risquerait de mêler les élèves : « C'est plus gradué, très gradué comme ça, je ne mélange pas trop, je vais mélanger à la fin proche des examens, pas avant. »

10 Dans cet exemple, si l'élève ne vérifie que les 2 premières données il pourrait croire que la masse est proportionnelle à la grandeur, mais cela n'est pas vrai pour les deux dernières données.

Masse d'André				
Grandeur (m)	1,25	1,50	1,60	1,80
Masse (kg)	55	66	72	81

11 Les citations en italique sont extraites des notes de cours de l'enseignant.

les différentes parties de la séquence dans ses grandes lignes. Elles comprennent également un répertoire de problèmes et d'exercices qui serviront de base au travail des élèves en classe.

4.2.1. Explicitation d'une intention liée à la reconnaissance de situations proportionnelles par l'élève

Dans un préambule de départ, on trouve une explicitation des intentions de l'enseignant « Il existe plusieurs types de situations. En secondaire 2, on va analyser plus profondément les situations de proportionnalité afin d'être capables de reconnaître les situations de proportionnalité ». L'explicitation aux élèves de son objectif est suivie d'une clarification de ses attentes par rapport à des outils utiles dans ce cas (tables de valeurs, graphiques) confirmant en cela le statut qu'il accorde à ces supports. « On peut représenter les situations de proportionnalité par une table de valeurs et un graphique. »

L'analyse des notes de cours permet toutefois d'aller plus loin.

4.2.2. Introduction de techniques de contrôle de la proportionnalité

À certains moments, Maurice présente des « marches à suivre » qui devront être employées par les élèves pour vérifier si une situation est proportionnelle ou non.

Dans le premier cas, le recours aux tables de valeurs est utilisé et l'emphase est mise sur les calculs « Pour vérifier si on a une situation de proportionnalité, on calcule tous les rapports ou taux qui doivent être équivalents pour que la situation soit proportionnelle ».

Dans le cas des graphiques, une autre « marche à suivre » est fournie aux élèves pour vérifier si le graphique représente une situation proportionnelle « Pour qu'une situation soit proportionnelle, 2 conditions doivent être respectées : on a une droite ; La droite passe par le point d'intersection des 2 axes ».

Maurice donne ainsi à voir, à travers ces directives, des techniques de contrôle de la proportionnalité fortement suggérées aux élèves, attachées à une certaine conception de la proportionnalité (présence d'un coefficient de proportionnalité dans les tables de valeurs, fonction linéaire particulière dans le cas des graphiques).

On a pu observer à cette occasion que Maurice fait des mises en garde, nous renseignant sur une certaine réflexion didactique sous-jacente.

Le zéro dans les tables de valeurs et dans les graphiques

Au moment où il présente une situation proportionnelle dans le cas des graphiques, la droite, dit-il, doit passer par zéro. Dans une table de valeurs, il met l'accent sur le fait que si le zéro n'est pas représenté dans la table de valeurs, il n'est pas possible pour autant de se prononcer sur la situation : (la non présence du point (0,0) dans la table de valeurs ne veut pas dire non proportionnalité) « Le fait que le point qui représente 0 kg pour 0 $ ne soit pas écrit dans la table de valeurs ne signifie pas que ce n'est pas une situation proportionnelle. »

Ces mises en garde (dans ce cas sur le zéro) nous confirment une certaine réflexion didactique sous-jacente de la part de l'enseignant face à une erreur possible des élèves (ils peuvent en effet conclure car ils ne voient pas de zéro). Le repérage d'une situation proportionnelle, plus précisément en regard de la représentation graphique, est une difficulté qu'il avait explicitée dans l'entrevue, comme on l'a mis en évidence auparavant.

Cette référence à la difficulté liée aux graphiques dans l'entrevue, et la mise en garde [12] des élèves en lien avec cette difficulté dans les notes de cours, nous amène à penser que l'enseignant cherche à prendre en compte ce problème de représentation graphique chez les élèves (le graphique et la table de valeurs étant pour lui des outils pour conclure ou non sur la proportionnalité)

Maurice introduit donc des outils de contrôle de la proportionnalité sous deux formes, en utilisant les tables de valeurs et les graphiques. Dans le cas des tables de valeurs, l'élève est obligé de passer par un calcul (de tous les rapports ou taux[13]) pour vérifier si la situation est proportionnelle[14].

Dans le cas des graphiques, il doit regarder si les points sont alignés et si la droite passe par zéro ou non.

4.2.3. Types de situations proposées pour travailler la reconnaissance de situations proportionnelles

L'analyse des situations proposées par Maurice dans les notes de cours, à titre de situations non-proportionnelles, nous montre que trois types de situations sont présentées : des situations absurdes[15], des situations faisant appel à des tables de valeurs dans lesquelles il n'existe pas de coefficient de proportionnalité et des graphiques où la droite ne passe pas par l'origine.

L'identification d'une situation non-proportionnelle, à partir de situations assez typées comme celles-ci, risque d'induire chez les élèves une certaine manière de voir les situations non-proportionnelles. La reconnaissance de situations proportionnelles par les élèves ne risque t-elle pas en effet de passer obligatoirement par le calcul de tous les rapports ou taux dans un tableau de valeurs, ou par le tracé systématique du graphique, bloquant toute anticipation de la présence ou non d'une co-variation entre les grandeurs ? Par ailleurs le choix de situations absurdes ne risque t-elle pas d'induire chez l'élève une certaine conception de situations non proportionnelles, associées avant tout à un contexte qui n'a pas de sens, faisant fi alors de tout examen approfondi de la relation entre les grandeurs ?

12 Les mises en garde, pour lui, apparaissent, nous le verrons dans l'analyse plus globale de la pratique de cet enseignant, comme des façons de prendre en compte les erreurs des élèves, d'essayer de les contrer (une certaine intention didactique sous-jacente). On peut toutefois se demander si cette façon de contrer l'erreur favorise un engagement réfléchi de la part de l'élève.

13 La définition donnée par l'enseignant d'un rapport est : « Un rapport est une comparaison entre 2 quantités de même nature. » et d'un taux : « Un taux est une comparaison entre 2 quantités de nature différente. »

14 « Pour vérifier si on a une situation de proportionnalité, on calcule tous les rapports ou taux qui doivent être équivalents pour que la situation soit proportionnelle.
Exemple 1 :

Prix du bœuf à l'épicerie			
Bœuf (kg)	0,25	0,75	1,5
Prix ($)	2	6	12

1er taux : 2$ ÷ 0,25kg = 8$/kg
2e taux : 6$ ÷ 0,75kg = 8$/kg
3e taux : 12$ ÷ 1,5kg = 8$/kg
Tous les taux sont équivalents, alors on a une situation de proportionnalité ! » (l'extrait est tiré des notes de cours).

15 À 4 ans, Maxime avait 10 doigts. Combien de doigts aura-t-il à 12 ans ?

4.3. Analyse d'une séance en classe portant sur la reconnaissance de situations proportionnelles

Lorsqu'on analyse la séance en classe, on observe que Maurice présente la reconnaissance des situations de proportionnalité à partir de quelques exemples, en explicitant une démarche à suivre par l'élève.

Dans les séances en classe, deux types de situations sont présentées :

- Des situations proportionnelles[16], où l'élève doit obligatoirement passer par l'écriture de la proportion dans sa démarche.

  Démarche : proportion, calcul, ultimement réponse avec les unités pour qu'on sache de quoi on parle.

- Des situations non proportionnelles à partir de deux exemples reprenant l'idée, présente dans les notes de cours, de situations absurdes[17].

Ainsi dans l'exemple des pourcentages, l'enseignant, après avoir fait le calcul, met en évidence que la réponse dépasse le 100 %, donc que ce n'est pas une situation proportionnelle.

> *On pourrait faire fois 2, fois 2. Ce que donnerait comme réponse 120 %. Est-ce qu'e ça a de l'allure ?* […]. *le maximum c'est 100 %. Ça c'est un point. Donc, celle-ci c'est une situation qui serait NON proportionnelle, pas proportionnelle. C'est ça qu'on vous avait demandé de vérifier.*

Pour la situation des doigts, Maurice suggère aussi, comme dans le cas précédent, que la vérification passe par le calcul.

> *Si j'ai 10 doigts à 4 ans, on peut se demander, maintenant combien on va avoir de doigts. Évidemment tout le monde se pose la question. Ici encore une fois je peux faire ici fois 3, ça va faire ça en tout. Réponse 30 doigts.*

Ainsi pour Maurice, dans ces deux exemples, le raisonnement proposé explicitement est le suivant : faisons comme si c'était proportionnel, et faisons alors le calcul ad hoc, puis regardons si le résultat est vraisemblable ou non. En faisant ceci, le moyen de contrôle proposé aux élèves nie toute analyse a priori possible de la situation.

Pourtant à un certain moment de la leçon, Maurice semble donner une place possible au jugement sur la situation, sans passer nécessairement par les calculs :

> *Ok, une proportion, le calcul on pourrait faire le produit croisé, ici, c'est assez évident mais ce qu'il faudrait remarquer c'est que dans le fond, on n'a pas besoin d'être entre guillemets innocent au point de toujours faire des proportions pour vérifier après eh, ça avais tu de l'allure ?*

16 Dans la recette de vinaigre de Paul, le rapport entre le volume de vinaigre et le volume d'huile est de 2 à 5. Paul a mesuré 100 ml de vinaigre, combien doit-il ajouter d'huile ?

17 Louis a étudié 2 heures et il a obtenu 60 %. Quelle sera sa note s'il étudie 4 heures ?
À 4 ans, Maxime a 10 doigts. Combien de doigts aura-t-il à 12 ans ?

Cependant tout de suite après il précise que la façon la plus facile de vérifier qu'une situation est proportionnelle est de partir des propriétés des proportions,[18] ce qui amène les élèves à faire des calculs pour vérifier si une situation est proportionnelle ou non.

> *Souvent, on peut y réfléchir avant de faire la question, mais là pour réfléchir j'aimerais qu'on se base peut-être, une des façons les plus faciles c'est de se baser sur les caractéristiques des proportions. On en connaît, on a vu des propriétés.*

Les analyses de l'entrevue, des notes de cours, et de la pratique effective en classe mettent en évidence l'introduction de moyens de contrôle par l'enseignant sur la proportionnalité[19]. Un tel contrôle passe nécessairement par la construction de tables de valeur et le calcul systématique, la vérification dans ce cas des propriétés des proportions. Il passe encore par la construction du graphique, ou dans le cas de problèmes par le calcul ad hoc et la réflexion a posteriori sur le caractère vraisemblable ou non de la réponse. Quelle conduite rationnelle construit l'élève dans ce contexte ? En particulier, y a t-il place pour un engagement réfléchi dans le problème, et ce sans passer par une résolution systématiques ? Y a t-il place pour une anticipation de la réponse, pour un raisonnement qualitatif, pour une reconnaissance d'une présence ou non de co-variation ? Comment est amené l'élève à se représenter une situation non-proportionnelle ?

4.4. Analyse des productions des élèves

Deux problèmes portant sur des situations non-proportionnelles ont été présentés aux élèves après l'enseignement[20]. L'analyse des productions des élèves nous montre que ces derniers s'engagent de manière non-réfléchie dans ces situations, n'y reconnaissant nullement une situation non proportionnelle, en ayant recours dans ce cas à l'écriture d'une proportion et à l'utilisation du produit croisé comme stratégie privilégiée[21].

Nos observations semblent indiquer, dans ce cas, un réinvestissement partiel des outils de contrôle développés par l'enseignant sur la proportionnalité puisque les élèves s'engagent dans la résolution en faisant comme s'il y avait proportionnalité. Toutefois ceux-ci ne les aident guère à voir le caractère non vraisemblable de ce qui est avancé. On voit donc bien dans ce cas les limites des techniques introduites. Les élèves ne sont pas en mesure de reconnaître dans ces problèmes (qui ne collent pas aux modèles types de situations introduites par l'enseignant) des problèmes non proportionnels. Le recours à des outils systématiques de vérification, à travers le calcul de tous

18 Trois propriétés ont été présentées précédemment dans les notes de cours et les séances en classe, il s'agit de la propriété des rapports équivalents, la propriété fondamentale des proportions (dans une proportion, le produit des extrêmes est toujours égal au produit des moyens) et la propriété additive (dans une proportion, la somme des numérateurs et la somme des dénominateurs donnent un rapport équivalent aux deux autres).

19 Pour l'enseignant, il s'agit dans ce cas d'aider l'élève à pouvoir aborder ces situations, à contrer l'erreur,…, comme nous l'avons vu dans l'entrevue.

20 Problème 1 : La taille d'Ophélie était de 83 cm à 2 ans et de 1, 66 m à 16 ans. Peut-tu dire quelle est la taille d'Ophélie aujourd'hui, alors qu'elle vient d'avoir 32 ans ? Et quelle était sa taille à 1 an, 4 ans, 8 ans ?
Problème 2 : Dans une recette de confitures, il est dit que si l'on a 4 kg de fraises, il faut mettre 2 kg de sucre, ou encore, pour 8 kg de fraises, il faut mettre 6 kg de sucre. Si on veut faire la recette avec 10 kg de fraises, combien faudra-t-il mettre de sucre ?

21 Cette stratégie est introduite par Maurice dans la 2[e] partie des notes de cours portant sur les proportions.

les rapports ou taux (dans le tableau de valeurs), la construction de graphiques, ou le recours au produit croisé, apparaissent peu propices au développement d'un contrôle sur les situations non-proportionnelles.

Conclusion

Les analyses précédentes permettent de mettre en évidence les moyens mis en place par l'enseignant en classe ordinaire pour développer une conduite rationnelle chez les élèves à l'égard de la proportionnalité. Dans sa planification, ses notes de cours et la séance en classe, l'acquisition de savoirs sur la proportionnalité et la préoccupation de développer un certain contrôle sur les situations non proportionnelles sont présentes chez cet enseignant. Les savoirs apparaissent dans ce cas pour lui des outils importants qu'il veut que les élèves réinvestissent dans le contrôle exercé sur la proportionnalité (ainsi les techniques permettant de reconnaître des situations non proportionnelles passent par une connaissance des tables de valeurs, des graphiques, de la notion de proportion, des propriétés des proportions et de procédures de calcul introduites au préalable telles le produit croisé). Les connaissances nécessaires au développement d'une conduite rationnelle sur la proportionnalité telles que mises en évidence dans notre cadre de référence (voir la section 1) ne s'y retrouvent guère.

La construction d'une conduite rationnelle passe dès lors par un certain modèle. Ce modèle fait en sorte que le sens, nous venons de le voir dans les résultats au test écrit, échappe aux élèves.

Références

ARTIGUE, M. (1993). Connaissances et métaconnaissances – une perspective didactique, *Cahier DIDIREM*, numéro spécial 1, IREM, Paris VII, Paris.

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et de validation. Dans : *Educational Studies in Mathematics*, *18*.

BAUERSFELD, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. Dans : *Educational Studies in Mathematics*, *11*, p. 23-41.

BEDNARZ, N. et PERRIN-GLORIAN, M-J. (2004). Formation à l'enseignement des mathématiques et développement de compétences professionnelles : articulation entre formation mathématique, didactique et pratique. Dans : *Actes de Espace Mathématique Francophone*. Tozeur (Tunisie).

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.

CONFREY, J. (1994). Splitting, similarity, and rate of change : A new approach to multiplication and exponential functions. Dans : G. Harel et J. Confrey (dir.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (p. 293-330). Albany, NY : SUNY Press.

DE COTRET, S. (1991). *Étude de l'influence des variables indice de proportionnalité du thème et nombre de couples de données sur la reconnaissance, le traitement et la compréhension de problèmes de proportionnalité chez des élèves de 13-14 ans*. Thèse de doctorat inédit, Université Joseph Fourier : Grenoble.

DUMAS, J-P et JAQUET, F. (2001). Les tentations de la proportionnalité. Dans : *Math-école*. *198*. 33-42.

HACHE (2001). L'univers mathématique proposé par le professeur en classe : observation, description, organisation. Dans : *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *21*, (1.2), 81-98 : La Pensée Sauvage.

KRUMMHEUER G. (1998). Formats of argumentation in the mathematics classroom. Dans : Steinbring, H., Bartolini-Bussi, M. et Sierpinska, A. (Dir.), *Language and communication in the mathematics classroom*. p. 223-234, Reston, VA : NCTM.

MARGOLINAS, C. (1989). *Le point de vue de la validation : essaie de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

MARY, C. (1999). *Place et fonctions de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au secondaire*. Thèse de doctorat inédite. Université de Montréal.

PERRIN, M.J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles. *Recherche en didactique des mathématiques*, *13* (12), 5-118.

POST, T., BEHR, M. et LESH, R. (1988). Proportionality and the development of prealgebra understandings. Dans : A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12, yearbook*. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

ROBERT, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherche en didactique des mathématiques*. *21* (1.2), 57-80 : La Pensée Sauvage.

RODITI, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques : entre contraintes et liberté pédagogique*. L'Harmattan, Paris.

ROGALSKY, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherche en didactique des mathématiques*. *23* (3), 343-388 : La Pensée Sauvage.

SABOYA, M., BEDNARZ, N., HITT, F. (2007). Le contrôle sur l'activité mathématique comme constitutif de la rationalité en mathématiques : élaboration d'un cadre de référence. Dans N. Bednarz, C. Mary (dir.) *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*. *Actes du colloque EMF 2006*. Sherbrooke : Éditions du CRP (Cédérom).

VERGNAUD, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad : problemas de la enseñanza de las matemáticas*. México : Trillas.

VERGNES, D. (2001). Effet d'un stage de formation en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *21*, (1.2), 99-122 : La Pensée Sauvage.

Pour joindre les autrices

Izabella Oliveira, Nadine Bednarz et Caroline Lajoie
Département de Mathématiques
Université du Québec à Montréal
CP 8888, succursale Centre Ville
Montréal - H3C 3P8
Izabella Oliveira : izabella_oliveira@yahoo.com.br
Nadine Bednarz : descamps-bednarz.nadine@uqam.ca
Caroline Lajoie : lajoie.caroline@uqam.ca