L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

L'articulation syntaxe/sémantique au cœur des analyses didactiques au niveau de l'algèbre élémentaire ?

Rahim Kouki, *Université de Tunis El Manar, Tunis, Tunisie*

Résumé

Dans l'enseignement secondaire tunisien, comme dans l'enseignement secondaire français, le point de vue dominant, concernant la résolution des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue réelle, est celui de la conception « résultat ». En fait, une appropriation correcte du concept d'équation pour son usage mathématique nécessite que l'on soit capable d'articuler deux points de vue. Le premier correspond au point de vue sémantique, tel qu'on le définit en logique dans la suite des travaux de Tarski ; le second consistant à gérer les règles de fonctionnement des expressions numériques, correspond au point de vue syntaxique. Nous faisons en effet l'hypothèse que la capacité de l'articulation des deux registres sémantique et syntaxique et la flexibilité cognitive qui permet à l'élève de choisir le type de procédure le plus adapté afin de résoudre un problème algébrique donné contribue de manière significative au développement de la rationalité mathématique.

Introduction

Dans l'enseignement secondaire tunisien, comme dans l'enseignement secondaire français, le point de vue dominant, concernant la résolution des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue réelle, est celui de la conception « résultat ». En effet, résoudre une équation ou une inéquation revient, pour la majorité des élèves, à trouver l'inconnue qui représente pour eux l'unique résultat. De plus, de nombreux élèves sont peu familiarisés avec l'outil algébrique. D'une part, les écritures algébriques peuvent leur sembler ennuyeuses en raison d'une exigence mécaniste de ces écritures et d'une ignorance de leurs aspects fonctionnels, d'autre part, la seule finalité des calculs est le plus souvent de donner un résultat numérique et une réponse au problème posé sans pour autant assigner une valeur de vérité aux égalités et aux inégalités qui font intervenir le point de vue : « assignation de valeur à la variable ». Vergnaud *et al.* (1987) souligne que :

> *L'algèbre représente à l'évidence une rupture par rapport à l'arithmétique, en particulier parce que le contrôle du sens des opérations faites ne se fait plus avec les mêmes moyens.* (Vergnaud, cité In Coppé *et al.*, 2002, p. 28)

De ce fait, progressivement, les équations et les inéquations ne sont plus perçues par les élèves comme des relations binaires satisfaites par certains nombres et non satisfaites par d'autres dans un domaine numérique donné, mais seulement comme des expressions sur lesquelles certaines manipulations d'écritures permettent d'aboutir à un résultat numérique. Or, une appropriation correcte du concept d'équation pour son usage mathématique nécessite que l'on soit capable d'articuler les deux points de vue. Le premier correspond au point de vue sémantique, tel qu'on le définit en logique dans la suite des travaux de Tarski ; tandis que le second consistant à gérer les règles de transformation des expressions numériques, correspond au point de vue syntaxique.

Cette capacité d'articulation des deux points de vue représente pour Duval (1993) un paradoxe cognitif de la pensée mathématique :

> *d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible.*

Dans notre travail de recherche, nous faisons l'hypothèse que la capacité de l'articulation des deux registres sémantique et syntaxique et la flexibilité cognitive qui permet à l'élève de choisir le type de procédure le plus adapté afin de résoudre un problème algébrique donné contribuent de manière significative au développement de la rationalité mathématique.

Dans la première partie de cette communication, nous donnerons quelques indices historiques de cette articulation entre syntaxe et sémantique, avant de présenter rapidement le point de vue logique. Dans la deuxième partie, nous essayerons de montrer, à partir de quelques exemples tirés de notre travail, que la prise en compte de cette articulation entre syntaxe et sémantique est prometteuse pour les analyses didactiques.

I. Aperçus historique et épistémologique

I.1 Motivations pour une étude historique

De nombreux travaux[1] montrent l'importance d'une étude historique et épistémologique sur la genèse des différents concepts mathématiques comme prélude à une étude didactique dans la mesure où une telle étude permet au chercheur de prendre en compte des variables didactiques qui peuvent jouer un rôle fondamental dans la partie de son travail que Dorier nomme « le travail « de terrain» (observations, expérimentations, analyses de productions d'élèves, etc. » (Dorier, 2000, p. 9)

Dans le cadre des recherches en didactique des mathématiques que nous conduisons[2], nous avons donc commencé une étude historique circonscrite des relations entre les concepts d'équation, inéquation et fonction. Nous espérons que ceci nous permettra d'avoir une idée plus claire et plus précise sur la formation de ces objets mathématiques, et nous permettra de retenir des éléments pertinents pour notre cadre d'analyse, à savoir ceux qui nous permettent de repérer la dialectique sémantique/syntaxe au moment de la formation de ces concepts. Nous suivons en cela Artigue (1990) qui écrit :

> *Certes les contraintes qui gouvernent ces genèses ne sont pas identiques à celles qui ont gouverné la genèse historique, mais cette dernière reste néanmoins, pour le didacticien, un point d'ancrage de l'analyse didactique, sorte de promontoire d'observation, quand il s'agit d'analyser un processus d'enseignement donné ou une base de travail, s'il s'agit d'élaborer une telle genèse.* (Artigue, 1990, p. 246)

1 Voir par exemple : Artigue, 1990 ; Dorier, 2000 ; Battie, 2003 ; Durand-Guerrier, 2005.

2 Dans le cadre d'une thèse en cotutelle en cours sous la codirection de Mélika Ouelbani et Viviane Durand-Guerrier.

I.2. L'émergence d'un point de vue syntaxique au IXe siècle

Il est bien connu que dans l'Antiquité et jusqu'à la fin du premier millénaire, les résolutions des équations et des inéquations se font par des méthodes arithmétiques et/ou des méthodes géométriques (Diophante…). Nous disons que ceci correspond à un point de vue sémantique, dans la mesure où on ne se détache pas de la signification et/ou de l'interprétation des grandeurs qu'on manipule. Au début du IXe siècle, on voit apparaître chez certains mathématiciens arabes (Al-Khawarizmi, Al Kharaji, Ibn Al Yassamin…), des algorithmes comme méthodes de résolution des équations de degré supérieur ou égal à deux sans recours explicite aux interprétations géométriques. Abdeljaouad (2003) explique que, par exemple, dans la résolution des équations quadratiques

> *Ibn al-Haim commence par prévenir qu'il n'aura pas recours aux justifications géométriques de la tradition euclidienne, mais qu'il utilisera des identités remarquables, plus commodes à comprendre par l'étudiant, même si – en définitive – la justification ultime de ces identités se trouve chez Euclide.* (Abdeljaouad, 2003, p. 19)

Il nous semble que l'on peut reconnaître ici une première apparition de ce que l'on appellera à la suite des logiciens du XXe siècle un point de vue syntaxique, où l'on travaille sur les expressions en appliquant des règles fonctionnant plus ou moins comme des axiomes. On sait que ce point de vue va se développer à partir du XVIe siècle avec des algorithmes de plus en plus élaborés. La puissance des techniques algorithmiques et le fait qu'elles permettent de conduire de façon certaine à un résultat pour les types d'équations auxquelles elles s'appliquent peuvent expliquer pour partie qu'elles supplantent peu à peu le point de vue sémantique, plus aléatoire, quoique parfois plus économique.

I.3. Le point de vue sémantique en logique

C'est au vingtième siècle, et en particulier dans les travaux de Tarski, que se trouve explicitée la distinction logique entre syntaxe et sémantique telle que nous l'utilisons dans notre travail.

Nous faisons référence à la notion de conception sémantique de la vérité de Tarski, qui renvoie principalement aux notions de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément, de désignation, et d'interprétation d'un énoncé dans un domaine de vérité… etc.

Au moment où on applique un prédicat à un terme général, ou à plusieurs termes dont l'un au moins est un terme général, nous obtenons une phrase ouverte qui n'est pas une proposition. La phrase ouverte :

> *correspond à une propriété ou une relation qui peut être satisfaite par certaines assignations d'objets aux termes généraux, non satisfaite par d'autres.* (Durand-Guerrier *et al.*, 2000, p. 9)

Ainsi d'un point de vue logique, une équation ou une inéquation est une phrase ouverte et résoudre une équation dans un domaine d'objet donné (appelé en logique univers du discours), revient à déterminer tous les objets de ce domaine qui satisfont cette phrase ouverte. Remarquons que parmi les phrases ouvertes qui peuvent se présenter, il y a celles qui sont vraies de tous les objets de l'univers du discours[3], par exemple : un nombre est divisible par lui-même ; d'autres sont fausses

3 C'est le domaine qui contient tous les objets susceptibles de saturer une fonction propositionnelle.

de tous les objets de l'univers du discours : $x > x + 1$ pour tout $x \in IR$. Alors que les autres sont pour quelque(s) objet(s) vraies et fausses pour d'autre(s) e. g. « un multiple de 5 est divisible par 3 ».

Comme nous l'avons dit plus haut, notre travail est centré sur l'étude didactique des concepts, équations, inéquations dont nous faisons l'hypothèse qu'elle peut être enrichie par les théories de la logique des prédicats et en particulier « la définition sémantique de la vérité » (Tarski, 1936, 1944), avec la notion de satisfaction de phrases ouvertes par un élément. Tarski (1936) propose une définition de la vérité « formellement correcte et matériellement adéquate », d'où se dégage une méthodologie des sciences déductives qui deviendra la théorie des modèles.

Nous nous appuyons sur les travaux didactiques de Durand-Guerrier (1996, 1999, 2005), Chellougui (2003, 2004) et Ben Kilani (2005) qui ont montré la pertinence du calcul des prédicats pour l'analyse des raisonnements mathématiques dans une perspective didactique, et sur ceux de Sackur *et al.* (2005) qui ont travaillé sur la question de la nécessité « logique » dans les classes de mathématiques. De plus nous faisons référence aux travaux de Duval (1988, 1993, 1995) sur l'articulation des différents registres de représentation sémiotiques qui semble fondamentale pour la compréhension des objets équations et inéquations.

Ainsi, nous faisons l'hypothèse que l'analyse logique de ces objets mathématiques, qui se situent dans le champ de l'algèbre élémentaire, peut enrichir les études didactiques, nombreuses, conduites depuis un peu plus de trente ans.

Nous nous proposons dans ce qui suit d'étudier les relations entre l'aspect sémantique de la vérité et les aspects syntaxiques des procédures de résolution et de traitement concernant nos objets d'étude qui sont les équations, les inéquations.

II. L'articulation sémantique/syntaxe d'un point de vue logique et didactique

II.1. Aspects logiques

Les expressions algébriques sont des termes généraux obtenus en appliquant les opérations usuelles du corps des réels à des termes : lettres de variables et, éventuellement à des constantes. Une expression algébrique ne désigne aucun élément de l'univers du discours (elle contient au moins une lettre de variable). Par assignation d'un élément (ou d'une suite d'éléments) de l'univers du discours[4] à la variable (aux variables), afin de n'avoir plus aucune lettre de variables, on obtient un élément de l'univers du discours. Rappelons qu'un terme n'est pas susceptible de recevoir une valeur de vérité.

Les équations et les inéquations sont des formules atomiques : elles sont obtenues en saturant par deux termes une relation binaire (égalité ou relation d'ordre), autrement dit un prédicat à deux places. Elles sont interprétées, d'un point de vue logique, par des phrases ouvertes, dépourvues de vérité, qui peuvent être satisfaites par certains éléments de l'univers du discours et pas par d'autres.

4 Ici, une partie de l'ensemble des nombres réels.

L'aspect sémantique de la vérité intervient donc de manière essentielle dans la définition des équations ou des inéquations puisque leur résolution revient à chercher tous les éléments d'un domaine donné qui satisfont la relation. Cet aspect est particulièrement mis en relief lorsque l'on travaille dans le registre graphique. En effet, l'articulation entre syntaxe et sémantique est au cœur de l'articulation entre les registres algébrique et graphique. D'une part, dans le plan muni d'un repère cartésien, le lieu des points dont les coordonnées satisfont une équation à deux variables est une courbe[5]. D'autre part, les solutions d'une équation à une variable de la forme $A(x) = B(x)$ peuvent être interprétées comme étant les abscisses des points d'intersection de deux courbes planes d'équations respectives $y = A(x)$et $y = B(x)$. Par exemple pour résoudre l'équation $2x + 1 = x^2$ nous pouvons faire appel au registre graphique et déterminer les abscisses des points d'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = 2x + 1$.

Du point de vue de la sémantique logique, la signification d'une expression algébrique, d'une équation ou une inéquation, réside à la fois dans son aspect syntaxique et dans son aspect sémantique.

La syntaxe fournit des règles de transformations des équations qui préservent le plus souvent la satisfaction. Deux équations sont équivalentes si et seulement si elles sont satisfaites exactement par les mêmes éléments. De telles transformations permettent de travailler essentiellement au niveau de la syntaxe, ce qui revient à employer des procédures de manipulation reposant sur les propriétés du corps des nombres réels. Cependant, au moment de conclure sur les solutions de l'équation, il faut bien revenir, en toute rigueur, aux objets et à l'univers du discours. En outre, certaines transformations ne préservent pas la satisfaction, ce qui nécessite un contrôle sémantique qui peut être effectué par assignation de valeurs à la variable (ou aux variables) afin de pouvoir conclure. Dans les cas où l'équivalence n'est pas préservée, en l'absence d'un contrôle sémantique, l'ensemble des solutions de l'équation ou de l'inéquation finale peut contenir des éléments qui ne satisfont pas les équations ou les inéquations de départ. Ce qui nécessite alors de mettre en œuvre des procédures de vérification

Ceci montre l'importance, dans les procédures syntaxiques de résolution, de la vérification, l'interprétation, l'assignation… Qui correspondent à l'aspect sémantique de la vérité relatif à un domaine donné. Ce qui correspond à la capacité d'articuler les deux points de vue sémantique et syntaxique et plus particulièrement à la flexibilité cognitive qui fait partie de la rationalité et la capacité de coordination, des registres de représentation, au cours de la résolution.

On peut le voir sur l'exemple suivant : $\frac{2x+1}{x-3} = \frac{x-3}{2x+1}$ qui peut être résolu par des techniques de résolution syntaxiques utilisant des implications et les propriétés du corps des nombres réels. Il faudra alors examiner si les valeurs obtenues sont effectivement solutions ou non. Si l'on veut travailler par équivalence, il faudra préalablement modifier le domaine de résolution. Dans les deux cas, il est nécessaire de mobiliser les deux points de vue.

5 On peut naturellement faire le même type d'analyse pour les surfaces, caractérisée par une équation à trois variables.

II.2 Aspects didactiques

L'articulation sémantique/syntaxe concernant l'égalité d'une part, le statut des lettres d'autre part, mériteraient, selon nous, d'être mieux explicité dans la classe des mathématiques en référence aux catégories logiques. En effet, c'est au niveau du point de vue relation d'équivalence ou binaire que :

- Dans une équation, il est nécessaire de faire une extension de l'égalité entre deux expressions par exemple $2x + 5 = x + 8$ qui pourrait être vérifiée ou pas suivant les valeurs associées aux lettres. Ceci pourrait être traduit en termes de phrases ouvertes sans valeurs de vérité c'est-à-dire des phrases insaturées. Une telle phrase donne lieu à une proposition par attribution d'un objet (ici un nombre) à la variable x qui produirait un couple :

  1. Le réel 3 donne le couple (11,11) qui satisfait la relation $2x + 5 = x + 8$.

  2. Le réel 5 donne le couple (15,13) qui ne satisfait pas la relation.

- Une identité de la forme $x + 2x = 3x$ qui permet de substituer $3x$ à $2x + x$ sans rien connaître de x. Ce qui donnera à x soit un statut d'élément générique pour exprimer le fait que n'importe quelle valeur attribuée à x est solution de l'équation soit un statut de variable liée par un quantificateur universel. Autrement dit : x est une variable muette et on a : $\forall x \in I\!R$, $\left(x+2x=3x\right)$. Nous pouvons rajouter qu'une identité peut également être établie par des transformations syntaxiques. Ainsi l'identité : pour tout $x \in I\!R$, $\left(x+2x=3x\right)$ s'établit syntaxiquement en utilisant les propriétés de l'addition et de la multiplication et signifie que les deux programmes de calcul associés donnent le même résultat quelque soit le nombre de départ auquel ils s'appliquent.

De notre point de vue Kouki (2006), l'inconnue se situe à l'interface entre arithmétique *et al*gèbre. En effet, l'inconnue en arithmétique, est en général un nom d'objet, donnant lieu à des énoncés singuliers, tandis qu'en algèbre, l'inconnue est interprétée le plus souvent comme une variable dans des phrases ouvertes selon le point de vue de Tarski.

Par exemple : « Peut-on trouver un cube dont le volume mesuré en cm^3 est égal à l'aire latérale mesurée en cm^2 diminuée de 25 cm^2 et dont l'arrête soit mesurée en cm par un entier ? »

Supposons qu'un tel cube existe. Notons c la mesure en cm de chacune de ses arêtes.

c vérifie l'égalité $c^3 = 6c^2 - 25$. Il y a plusieurs manières de résoudre en restant dans l'arithmétique. On peut faire des essais sachant qu'au-delà de c^3 est plus grand que $6c^2$.

On peut remarquer que $c^2\ (6 - c) = 25$, donc c^2 divise 25, donc soit $c^2 = 1$ soit $c^2 = 25$ puisque c^2 est un carré… etc.

On peut aussi passer à l'algèbre :

c est solution de l'équation de degré 3 : $x^3 - 6x^2 + 25 = 0$.

Comme on n'a pas actuellement de procédure syntaxique au niveau du collège, ni même au lycée, il faut chercher une première solution entière, ce qui nous renvoie aux procédures arithmétiques et au point de vue sémantique, une fois qu'on a trouvé que 5 est solution, on peut factoriser par $(x - 5)$, on obtient $(x - 5)(x^2 - x - 5)$. Il faut encore prouver qu'il n y a pas d'autre solution entière ; mais bien sûr, on peut aussi résoudre sur $I\!R$ tout entier.

Conclusion

Nous pensons avoir montré dans ce qui précède que l'explicitation de l'articulation entre les points de vue sémantique et syntaxique permet de mettre en lumière ce qui se joue dans les nécessaires allers et retours entre registres algébrique, numérique et graphique. Elle permet en particulier de favoriser ce va-et-vient entre techniques opératoires se développant indépendamment des objets, auxquels elles s'appliquent, et contrôle de la signification et de la validité des résultats obtenus pour les objets dont on traite, et par là même contribue au développement de la rationalité mathématique.

Les recherches que nous conduisons actuellement devraient nous permettre de mettre, notre hypothèse de travail, à l'épreuve.

Références

Abdeljaouad, M. (2003). *Sharh al-Urjuza al-Yasminiya*. Tunis : ATSM.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, n° 2.3, 241-285.

Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Thèse, Université Denis Diderot-Paris 7.

Ben Kilani, I. (2005). *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique*. Thèse en cotutelle, Universités Claude Bernard Lyon 1 et Tunis.

Chellougui, F. (2003). Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématique dans l'enseignement tunisien. *Petit x*, *61*, 11-34.

Chellougui, F. (2004). *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*. Thèse en cotutelle, Universités Claude Bernard Lyon 1 et Tunis.

Coppé, S., Chalancon, F. et Pascal, N. (2002). Les vérifications dans les équations, les inéquations et en calcul littéral. *Petit x*, *58*, 23-41.

Dorier, J-L. (2000). Recherche en histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire – Perspectives théorique sur leurs interactions. *Les Cahiers du laboratoire Leibniz*. http://www-leibniz.imag.fr/Les Cahiers /Cahiers2000.html

Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse, Université Claude Bernard Lyon1.

Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x*, 50, 57-79.

Durand-Guerrier, V., Leberre, M., Pontille, M.C. et Reynaud – Feurly, J. (2000). *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques : éléments d'analyse pour les enseignants*. IREM de Lyon.

Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique ans une perspective didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse* *didactique du raisonnement mathématique*. Note de synthèse pour l'Habilitation à diriger des recherches en didactique des mathématiques, Université Claude Bernard Lyon 1, IREM de Lyon.

Duval, R. (1988). Graphiques et Équations : l'articulation des deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 1, 235-279 : IREM de Strasbourg.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 5, 37-65 : IREM de Strasbourg.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pesée humaine : Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Peter Lang, Suisse.

Kouki, R. (2006). Équations et inéquations au secondaire entre syntaxe et sémantique. *Petit x*, *71*, 7-28.

Sackur, C. Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J-P. et Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 25, n° 1, 57-90.

Tarski, A. (1971). *Introduction à la logique*. Paris : Gauthier-Villars.

Tarski, A. (1936). Le concept de vérité dans les langages formalisés. In *Logique, sémantique et métamathématique*, volume 1, (p. 157-269). Armand Colin, 1972.

Tarski, A. (1944). La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique. In *Logique, sémantique et métamathématique*, volume 2, (p. 265-305). Armand Colin, 1974.

Vergnaud, G., Cortes, A. et Fauvres-Artigue, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles problèmes épistémologiques et didactiques, *In Actes du colloque de didactique et acquisition des connaissances* (p. 259-279), Sèvres (France), 25, 26 et 27 Mai 1987 : CIEP.

Pour joindre l'auteur

Rahim Kouki
Dép. de mathématiques et informatique
Université Tunis el Manar
Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs
el Manar 2092 B.P.244 el Manar
kouki_ra@yahoo.fr