L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Rationalité en géométrie, une affaire de paradigme ?

Catherine Houdement, IUFM de l'Académie de Rouen, DIDIREM Paris 7, France

Résumé

Dans l'enseignement français, les professeurs reconnaissent une rupture entre la géométrie d'école et de début de collège (10-11 ans) et celle de fin de collège (plus de 12 ans) sans toujours pouvoir nommer cette différence autrement que par des injonctions : « on ne mesure plus sur la figure » « la figure n'est pas une preuve ». Pourtant à d'autres moments, le dessin suffit pour conclure : par exemple quand il sert de contre exemple. Comment concilier ces rationalités différentes ? Comment les organiser dans l'enseignement sans en écraser une ou la nier ? Ce texte propose un cadre théorique pour réconcilier différentes pratiques géométriques, toutes traversées par des îlots de raisonnement.

Dans l'enseignement français, les professeurs reconnaissent une rupture entre la géométrie d'école et de début de collège (10-11 ans) et celle de fin de collège (plus de 12 ans) sans toujours pouvoir donner un statut à cette différence. En effet dans les manuels scolaires, cette différence se résume souvent à des injonctions : par exemple, dans le manuel Cinq sur Cinq 5^{e} (Hachette, 2000), on peut lire page 135 « L'utilisation des instruments permet seulement de se faire une idée, plus ou moins juste, de certaines propriétés de la figure. » ou encore dans Triangle 4^{e} (Hatier 2002, page 94) « Une constatation ou des mesures sur un dessin ne suffisent pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai ». Certes ces affirmations ont un sens dans un certain domaine de rationalité, celui que promeuvent les mathématiques théoriques. Mais comment insérer ce domaine dans celui de la réalité ou des pratiques professionnelles par exemple des métiers du bâtiment ?

Si on leur permet de l'exprimer, les élèves restent souvent perplexes, malgré l'enseignement, sur cette différence de point de vue sur le dessin comme le montrent les résultats obtenus dans l'exercice suivant passé en classe de 3^{e} (14-15 ans, fin du collège).

1. Un exercice paradoxal ?

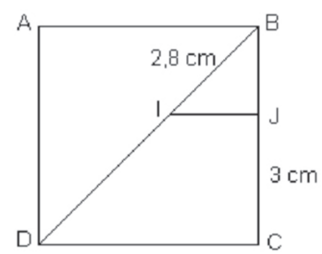
Considérons le texte suivant, extrait d'un article de petit x (Jacquier, 1995). Il s'agit des deux premières questions d'un exercice de Brevet des collèges donné dans l'académie de Nice en 1991.

Construire un carré ABCD de côté 5 cm.

1) Calculer BD.

2) Placer le point I de [BD] tel que BI=2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC=3 cm.

La droite (IJ) est-elle parallèle à la droite (DC) ?



Ce problème a été posé en 2002 dans une classe de troisième (réputée moyenne, avec 22 élèves de 14-15 ans), une semaine après l'introduction de l'existence de $\sqrt{2}$ comme mesure d'une longueur dont on ne peut pas connaître que des valeurs décimales approchées.

Les réponses des élèves

Tous écrivent d'abord $\sqrt{50}$ à la question 1, un grand nombre d'entre eux (19) juxtaposent à cette réponse exacte une valeur approchée.

Pour la question 2, la plupart des élèves comparent les rapports $\frac{BI}{BD}$ et $\frac{BJ}{BC}$ soit $\frac{2{,}8}{BD}$ et 0,4 ; tous utilisent leur calculatrice.

Après trente minutes de résolution individuelle, lors de la première mise en commun, la moitié de la classe conclut que les droites étaient parallèles, l'autre que non. Un questionnement du professeur sur la différence de réponses fait rebondir la recherche du côté numérique : « parce que les nombres ne sont pas justes » ; « c'est pas des nombres qui tombent bien », « c'est des valeurs approchées », « mais il faut des valeurs exactes pour être sûr ».

Un deuxième temps de recherche leur permet de revenir avec un crayon de couleur sur leurs premières réponses.

Après ce deuxième temps, 12 élèves annoncent le non parallélisme, 8 ne concluent pas et 2 hésitent…

Analyse des résultats

Pour la question 1), tous les élèves fournissent la réponse $\sqrt{50}$. Ils se sont donc délibérément situés en dehors de la réalité du dessin propice à un mesurage, se plaçant dans une rationalité mathématique et réalisant un changement de cadre (Douady, 1984, du géométrique au numérique, sollicité par la question « Calculer »). Cependant, ils ont, pour dix-neuf d'entre eux, associé une valeur annoncée approchée par le symbole ≈ : quel statut accordent-ils à ce symbole, quel statut donnent-ils à la valeur décimale fournie pour BD ? Voient-ils le symbole $\sqrt{50}$ comme un moyen d'obtention du nombre (prendre la racine carrée de 50), le considèrent-ils comme un « nombre inachevé » puisqu'ils le complètent par un nombre décimal plus conforme à l'idée physique d'une mesure ? Témoignent-ils ainsi qu'ils ne renoncent pas à leur rationalité « personnelle » ?

Cette première étude peut nous inciter à émettre l'hypothèse que, pour l'élève, deux cadres de rationalité, au sens de Lerouge (2000), sont présents : rationalité personnelle où l'écriture (approchée, reconnue comme telle par l'utilisation du symbole ≈) du nombre donne à voir immédiatement un ordre de grandeur (7,1 ou 7,07) et rationalité mathématique où l'écriture peut justement cacher cet ordre de grandeur.

Mais l'étude qui suit nous montre que, pour la question géométrique, ces deux cadres se livrent une concurrence sévère : la rationalité personnelle se heurte à la rationalité mathématique où définitions et productions de nouveaux résultats sont conditionnées par le respect des enchaînements hypothético-déductifs appuyés sur des résultats avérés, en l'occurrence ici le théorème de Thalès,

L'existence de ces deux cadres de rationalité suppose en jeu trois types d'objets (Bunge, 1983) : l'objet matériel, ici le dessin (qui a une existence propre), l'objet mental (qui a une existence psychique et un premier degré de généralité), l'objet conceptuel (inséré dans un réseau culturel disciplinaire, ici la théorie mathématique).

Pour la question 2), la plupart des élèves réalisent de nouveau un changement de cadre, parce qu'ils mobilisent le théorème de Thalès : ils transforment la question géométrique, l'étude du parallélisme, en l'étude d'un rapport numérique.

Seul, un élève, Dany reste dans un cadre géométrique : « Oui les droites (IJ) et (DC) sont parallèles parce que si on prolongeait le segment [IJ] il serait perpendiculaire au segment [AD] et que quand 2 droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles ». Dany regarde l'objet matériel, mais il met en œuvre une expérience mentale supportée par un résultat théorique.

Les autres élèves semblent, au moins dans un premier temps, se détacher nettement de la figure ; ils concluent sur une relation entre les deux droites sans s'appuyer sur le dessin. Là sans doute intervient aussi un effet de contrat, que le professeur de la classe nous confirme en effet après la séance en déclarant « il est pratiquement acquis qu'à ce stade de l'année en troisième, la figure n'est pas une preuve ».

Mais au moment de la conclusion, les élèves restent perplexes : les droites sont-elles parallèles ou non parallèles ? Et ceci même après le deuxième temps de recherche où le nombre d'absences de conclusion reste grand. Voyons quelques exemples

Elsa reprend le rapport $\frac{2{,}8}{\sqrt{50}}$ et annonce $\approx 0{,}39595 \approx 0{,}4$: elle conclut d'abord à l'égalité des rapports, puis au parallélisme ; dans le deuxième temps, elle barre la valeur 0,4, l'égalité des rapports et écrit : « Je ne sais pas si elles sont parallèles car si on arrondit $\frac{BI}{BD}$, c'est égal à $\frac{BJ}{BC}$, mais comme la valeur exacte justifie si deux droites sont parallèles, alors je ne peux pas dire si elles sont parallèles ».

Elle exprime bien là toute sa perplexité devant la fluctuation de la réponse.

L'élève Cathy, qui utilise BD ≈ 7,1 cm, calcule $\frac{2{,}8}{7{,}1}$ et trouve $\frac{2{,}8}{7{,}1} \approx 0{,}394$ pour le rapport $\frac{BI}{BD}$, elle barre alors le 1 du 7,1 et trouve 0,4 ; elle conclut au parallélisme. L'approximation numérique semble ici guidée par la vision de la figure.

François calcule $\frac{2{,}8}{7}$ et annonce $\frac{2{,}8}{7} \approx 0{,}4$ pour le rapport $\frac{BI}{BD}$: il conclut au parallélisme (comme deux de ses camarades). Après l'intervention du professeur, il écrit : « Les droites (IJ) et (DC) sont parallèles si on prend l'arrondi, mais elles ne sont pas parallèles si on prend la valeur exacte ».

Les libres expressions des élèves posent bien le problème : comment concilier ce que renvoie la réalité du dessin (et un calcul approché) et les conclusions obtenues par le calcul exact ?

Peut-on décider ainsi que seul un cadre est légitime pour la géométrie de l'école ? Que tout objet géométrique doit être vu d'un point de vue conceptuel, même s'il émane d'une abstraction d'objets matériels réels ? Dans la théorie mathématique, certaines définitions premières, quand elles existent (la droite n'a pas de définition) sont très souvent issues du sensible ou même sensibles : par exemple les droites perpendiculaires.

Comment donc concilier ces points de vue géométriques ?

Nos recherches nous ont amenés à proposer, à la suite de F.Gonseth, un cadre théorique basé sur la présence pour la géométrie élémentaire, de trois paradigmes géométriques (dont deux sont concernés dans l'exemple précédent) que nous avons nommés Géométrie I, Géométrie II et Géométrie III.

2. Une proposition de cadre théorique

Les travaux de Gonseth [1945-1952] nous ont fourni une base essentielle pour la recherche d'une épistémologie sous-tendue par les paradigmes pour la géométrie élémentaire. Ces travaux tentent également d'analyser la pensée inhérente à chaque paradigme suivant trois modes : l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif, sur lesquels nous ne reviendrons pas ici.

La Géométrie I ou « géométrie naturelle »

La Géométrie I a pour source de validation la réalité, le sensible. Le qualificatif de « naturelle », peut-être mal choisi, mais que nous avons conservé à la suite de Gonseth, veut refléter le fait que les objets restent matériels ou matérialisés, même s'ils correspondent déjà à un effort d'abstraction du réel, dans la mesure où la pensée sélectionne pour s'exercer certains aspects des objets réels comme par exemple les figures simples (cercles, carrés…). L'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif s'exercent sur des objets matériels grâce à la perception ou la mise en œuvre d'expériences mécaniques réelles comme le pliage, le découpage ou leur pendant virtuel. En ce sens la géométrie d'Euclide n'est pas de la Géométrie I ; il s'agit plutôt de celle de la première partie du traité de Clairaut (ou dans certains cas de Legendre) où la déduction peut être liée à une expérience mécanique et où l'esprit doit se libérer de la démonstration de choses évidentes.

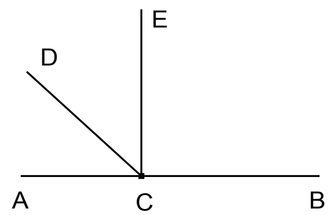
Dans ce paradigme, le dessin est objet d'étude et de validation, les traitements moins théoriques (liés à la perception, au contrôle par les instruments) retrouvent un statut géométrique. Ils ne sont ni péjorés ni rejetés.

Un exemple de raisonnement valide en Géométrie I est la démonstration du Théorème 1 des Éléments de Géométrie d'un Maître de Conférence à l'École Normale Supérieure[1] :

> *Par un point C pris sur une droite AB, on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on ne peut en élever qu'une.*

Ce qui suit illustre bien notre propos.

1 Briot Ch. (1863) Éléments de géométrie. Paris : Librairie de L.Hachette, page 4.

	Imaginons que la droite CD, coïncidant d'abord avec CA, tourne dans le plan autour du point C ; l'angle ACD ira en augmentant d'une manière continue, tandis que l'angle DCB ira en diminuant ; mais le premier angle, d'abord plus petit que le second, finit par devenir grand ; donc il y a une position CE de la droite pour laquelle les deux angles adjacents sont égaux, et il n'y en a qu'une. Dans cette position, la droite CE est perpendiculaire à AB. Ainsi, par le point C on peut élever une perpendiculaire CE à la droite AB, et on n'en peut en élever qu'une.

La Géométrie II ou « géométrie axiomatique naturelle »

Dans cette Géométrie, la validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible. Comment choisir les axiomes ? La relation avec la réalité subsiste dans cette Géométrie, qui s'est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux : les axiomes ont été choisis pour « coller à la réalité », d'où la conservation du qualificatif de « naturelle », comme pour la Géométrie I.

Dans ce paradigme, le dessin n'est plus qu'une interprétation particulière de l'objet géométrique. Tout ce qui se dit à partir du dessin nécessite d'être contrôlé, soit comme déjà avéré (définitions, théorèmes), soit comme déduit par les lois hypothético-déductives de faits déjà avérés. La Géométrie II s'exerce moyennant une axiomatisation partielle, voire des îlots d'axiomatisation.

Ce paradigme est celui dans lequel sont attendues les réponses des élèves de collège français en particulier à partir de la 4^{e} (13-14 ans). Il précise le cadre de rationalité mathématique qui s'exerce sur des objets conceptuels.

La Géométrie III ou « géométrie axiomatique formaliste »

Dans cette Géométrie, qui naît à la suite de l'apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique l'emporte.

L'approche axiomatique formaliste est bien explicitée par l'affirmation de Wittgenstein (1918) qui clôt le débat entre géométrie et réalité : « Les axiomes d'une géométrie peuvent ne contenir aucune vérité ». Une différence essentielle avec la Géométrie II porte sur la complétude du système d'axiomes : en Géométrie III, l'axiomatisation n'est plus partielle.

En Géométrie III, le dessin est l'interprétation imagée d'une relation entre des objets conceptuels. Par exemple l'objet vecteur en dimension 2 a comme interprétation une certaine « flèche » ; la manipulation adéquate (suivant les règles de fonctionnement : somme, produit, égalité) des « flèches » permet des conjectures qui seront validées par les règles algébriques liées aux vecteurs.

3. Retour sur l'exercice

Si nous revenons sur les réponses des élèves à l'exercice de départ, nous pouvons dire que Dany se situe délibérément dans une Géométrie I, validée par la perception, l'expérience au besoin instrumentée (par la règle graduée, l'équerre, etc.). Cette géométrie ne se réduit pas à des constats ;

elle s'enrichit de déductions, mais elle est toujours finalement confortée par le recours au sensible, ici le dessin support. On notera cependant que Dany ne se contente pas de constater expérimentalement que les droites sont parallèles, il injecte des connaissances géométriques (deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles).

Les autres élèves choisissent de travailler en Géométrie II, qui, d'une certaine façon, « exclut » le dessin, s'appuyant sur les informations textuelles données sur la figure. Mais au moment de conclure leur hésitation est grande : quel statut donner à l'approximation sans ce cadre de rationalité mathématique, surtout quand elle renforce le dessin ?

Il nous semble bien que deux réponses sont acceptables : dans la Géométrie I, où les objets sont matériels ou mentaux, où sont acceptées les valeurs approchées, les droites sont (presque) parallèles, comme le nombre 1,4 est presque $\sqrt{2}$. C'est aussi dans cette Géométrie que se situait le maçon quand il contrôlait la perpendicularité de ces murs avec une corde à treize nœuds. En Géométrie II, où les objets sont autant que faire se peut conceptuels, les droites ne sont pas parallèles, de même que $\sqrt{2}$ n'est pas 1,4. Accepter qu'il existe deux réponses différentes, chacune étant valide dans un paradigme déterminé, permet, à notre avis de faire comprendre aux élèves l'enjeu des mathématiques théoriques.

En réalité cette dialectique entre Géométrie I et Géométrie II n'est pas si simple et il nous a donc fallu définir un concept qui tienne compte de ce fragile équilibre entre Géométrie I et Géométrie II, que nous avons nommé l'Espace de Travail Géométrique, en abrégé ETG. L'ETG est défini par ses composantes : l'horizon de rationalité auquel il se réfère, l'espace local sur lequel l'acteur agit la géométrie, les artefacts sollicités ou utilisés. Nous en rendons compte dans Houdement, Kuzniak (2006).

Une autre question surgit sur les curricula : si la Géométrie I est reconnue comme nécessaire à la construction de la Géométrie II (dans l'histoire et dans l'enseignement[2]), s'il existe des réponses en Géométrie I pour un grand nombre de problèmes géométriques, quel est l'enjeu de la Géométrie II dans l'enseignement en général ? Nous en dirons peu. Un premier enjeu est, pour certains problèmes, celui de la généralisation. Mais il est vrai que souvent cette généralisation peut être atteinte en Géométrie I, par répétition d'une expérience, à la manière des physiciens, moyennant un intervalle de confiance. Un second enjeu, pour certains autres problèmes, est sans doute celui d'explication : pourquoi en est-il toujours ainsi ? Cet enjeu recoupe celui du raisonnement : plausible ou nécessaire ?[3] C'est un enjeu auquel, nous semble-il, il faut donner du corps, pour intéresser nos élèves aux apports d'une rationalité théorique. Reste (et la tâche est immense) à choisir à quel moment de la scolarité, avec quels prérequis et quels problèmes.

Conclusion

Il nous semble que notre approche de la géométrie élémentaire en trois paradigmes contribue à définir les domaines de rationalité propres à chaque tâche géométrique, à préciser celui dans lequel on accepte de résoudre le problème et lequel on retient pour le valider. Il est en effet important de

2 Nous ne développerons pas ici ces deux arguments : pour des éléments historiques, voir texte Bebbouchi dans le thème 8.

3 Voir texte de Richard Cabassut, EMF 2006, thème 8.

ne pas nier l'efficacité de chacune des résolutions étudiées, leur validité étant liée à un paradigme de référence. Il serait opportun que les élèves réussissent à résoudre une tâche au minimum dans un paradigme, plutôt que de décider qu'ils sont incompétents, sous prétexte qu'ils ne s'adaptent pas à l'exigence théorique qui parait pour certains gratuite et sans fondement. Laisser croire qu'il n'existe qu'une seule rationalité en mathématiques serait d'une part nier l'histoire, d'autre part abandonner sur le bord du chemin des élèves, mais aussi des générations de peintres, artisans, ingénieurs qui ont contribué à nourrir les mathématiques par la richesse des questions qu'ils se posaient et l'ingéniosité qu'ils mettaient à les résoudre.

Références

Douady R. (1984) *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse soutenue à l'Université Paris 7. Paris : IREM de Paris 7.

Bunge M. (1983) *Epistémologie*. Paris : Éditions Maloine. Collection Recherches Interdisciplinaires

Gonseth F. *La géométrie et le problème de l'espace*. Lausanne : Editions du Griffon 1945-1955.

Houdement C. et Kuzniak A. (1999) Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x 51*. 5-21. IREM de Grenoble.

Houdement C., Kuzniak A. (1999) Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*. 40/3. 283-312

Houdement C., Kuzniak A. (2003) Quand deux droites sont « à peu près » parallèles ou le versant géométrique du « presque » égal. *Petit X 61*. 61-74

Houdement C., Kuzniak A. (2006) *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie*. Strasbourg : Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.

Jacquier I. (1995) Quelles conceptions des nombres chez des élèves de troisième ? *Petit x 41*. IREM de Grenoble.

Kuzniak A. (2003) *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Notes d'habilitation IREM Université de Paris V7. Paris

Lerouge A. (2000) La notion de cadre de rationalité à propos de la droite au collège. *Recherches en Didactique des mathématiques* 20.2. 171-208.

Pour joindre l'autrice

Catherine Houdement
IUFM de l'Académie de Rouen, BP 18, 76131 Mont Saint Aignan Cedex, France
catherine.houdement@rouen.iufm.fr