L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Rationalité argumentative comme prélude à la démonstration en mathématiques

Fernando Hitt, *Université du Québec à Montréal, Canada*

Résumé

Depuis quelques années, plusieurs auteurs nous ont mis en garde sur l'argumentation basée sur une logique quotidienne plutôt que sur une logique rigoureuse comme l'est celle de la démonstration en mathématique (Grize et Piérault, 1983 ; Tutescu, 2003). En didactique des mathématiques, d'autres auteurs ont signalé l'existence d'une distance cognitive entre argumentation et démonstration, ce qui nous oblige à faire un traitement explicite de la démonstration dans la classe de mathématique (Duval, 1992-1993 ; Tanguay, 2005). D'autres auteurs, qui admettent cette distance cognitive, suggèrent un traitement différent basé sur la notion d'obstacle épistémologique (Balacheff, 1999). De ce point de vue, et en suivant le travail de Bachelard (1935) et Brousseau (1997) sur la notion d'obstacle épistémologique, que peut-on faire dans la classe de mathématiques pour dépasser l'obstacle ? Si la rationalité quotidienne promeut une logique quotidienne et la rationalité mathématique une logique rigoureuse, comment les mettre en conflit chez les étudiants pour faire évoluer la première vers la seconde ? Notre position est que la rationalité quotidienne, qui s'exprime par l'argumentation, et la rationalité mathématique qui s'exprime par la démonstration, doivent êtres traitées dans la classe de mathématiques dans une atmosphère de débat scientifique pour promouvoir une action réciproque entre ces deux conceptions (Legrand, 1989). Pouvons nous parler d'une rationalité argumentative comme prélude à la démonstration en mathématiques ? Pour appuyer notre thèse, nous analyserons la correspondance entre Leibniz et John Bernoulli (1712-1713), John Bernoulli et Euler (1727-1729), Euler et D'Alembert (1747-1763), sur un même sujet, la controverse portant sur l'existence des logarithmes de nombres négatifs (Cajori, 1913).

Introduction

Les recherches portant sur les composantes du discours argumentatif ont mis en évidence deux types de composantes :

a) Une composante qui vise à expliquer, composée de raisonnements ;

b) Une composante qui cherche à convaincre, à emporter l'adhésion de l'autre (nommée composante séduisante pour quelques auteurs).

Dans la construction d'une logique quotidienne, les deux composantes ci-dessus doivent être présentes. Cependant, dans la construction d'une logique mathématique, la deuxième composante doit être minimisée. Dans leurs travaux sur l'argumentation et la démonstration en mathématiques, Grize et Piérault (1983), traitant de l'argumentation et de la démonstration, ont souligné le point suivant :

> *La mathématique et le discours quotidien, par exemple, sont des domaines d'activité rationnelle qui ont chacun leur cohérence propre. Si la pensée logico-mathématique procède en dernière analyse par enchaînement de valeurs de vérité, il en va tout autrement de la pensée naïve et quotidienne. On ne peut pas dire d'ailleurs qu'elle manque de rationalité. Elle use aussi de règles de cohérence et d'enchaînement, mais elle se soucie moins d'atteindre la vérité que l'efficacité… Si l'on connaît depuis longtemps ce qui fait une démonstration correcte, on ne sait pas encore ce qui fait une « bonne » argumentation.* (p. 7)

Les études de Grize (1974) et Grize et Piérault (1983) ont fait réagir le milieu des didacticiens des mathématiques qui ont alors cherché à comprendre le développement de la logique mathématique en se posant les questions suivantes :

1) Comment construire une logique mathématique chez les élèves en laissant de côté la logique quotidienne ?
2) Comment construire une logique mathématique en prenant en considération la logique quotidienne de l'élève ?

Dans les deux cas, les chercheurs ont pris en considération l'existence d'une distance cognitive, c'est-à-dire d'une distinction claire entre une logique mathématique (liée a une rationalité mathématique) et une logique quotidienne (liée a une rationalité quotidienne) ; ils s'entendent pour dire que la démonstration cherche la vérité d'une proposition, alors que l'argumentation vise plutôt à convaincre l'autre. C'est en différenciant les actions entreprises dans la classe que l'on répondra aux questions ci-dessus. Par exemple, dans le premier cas, Duval (1992-1993) affirme : « Le développement de l'argumentation même dans ses formes les plus élaborées n'ouvre pas une voie vers la démonstration. Un apprentissage spécifique et indépendant est nécessaire en ce qui concerne le raisonnement déductif. » (p. 60)

Pour nous positionner face à la deuxième option, nous voulons illustrer par un exemple ce que nous entendons par « rationalité quotidienne ». Une rationalité quotidienne peut se construire par la perception de phénomènes liés à la vie courante. Par exemple, dans le langage naturel, on dit que le soleil se « lève » à l'est et se « couche » à l'ouest ; C'est-à-dire qu'on perçoit le mouvement du soleil et on ne perçoit pas le mouvement de la Terre. Cette rationalité quotidienne pourrait amener la construction d'une logique « quotidienne » en construisant un modèle qui prendrait la Terre comme point fixe, le soleil tournant alors autour de la Terre. Nous savons qu'un tel modèle entraîne des contradictions et que celles-ci entraînent de nouvelles recherches, etc. jusqu'à ce que ces contradictions soient dépassées et qu'un nouveau modèle soit construit. Au cours de ce processus, la rationalité quotidienne se transforme en une rationalité scientifique.

En prenant appui sur cette idée que la rationalité quotidienne peut évoluer vers la rationalité scientifique, les recherches ayant trait à la deuxième question présument qu'en prenant l'argumentation comme point de départ, celle-ci peut évoluer vers une rationalité mathématique en utilisant, par exemple, la méthodologie du débat scientifique (Legrand, 1989), qui propose la confrontation d'idées pendant les cours de mathématiques afin de faire apparaître des difficultés, des conjectures et des paradoxes qui, éventuellement, vont amener une évolution de la rationalité quotidienne vers une rationalité mathématique. Legrand (1989) affirme, à propos du débat scientifique comme méthodologie d'apprentissage : « Dans la mesure où la communauté scientifique idéalisée que nous introduisons et la forme de débat proposée en classe semblent permettre à l'élève de comprendre les termes de cette rationalité scientifique, on peut considérer que leur construction en tant qu'outil didactique est épistémologiquement fondée. ».(p. 18) D'un autre côté, Legrand (1989) ainsi que d'autres chercheurs (voir par exemple Balacheff (1999)), considèrent que le passage d'une rationalité quotidienne à une rationalité mathématique doit être traité comme un obstacle épistémologique (au sens de Bachelard (1935) en sciences, et de Brousseau (1997) en didactique des mathématiques).

Tout comme Legrand (1989), nous pensons que l'utilisation du débat scientifique dans les cours de mathématiques semble être le chemin approprié pour le dépassement de cet obstacle épistémologique chez l'élève. Mais que se passe-t-il dans un environnement différent ? Comment se construit la rationalité mathématique ? Par exemple, que se passe-t-il entre deux mathématiciens qui discutent d'un problème mathématique alors que la mathématique qu'ils manipulent n'est pas encore tout a fait « finie » ? Nous pouvons supposer que leur discours argumentatif comporte les deux composantes décrites au début de ce texte et qu'ils doivent se débarrasser, au cours de leurs échanges, de la composante « séduisante » du discours argumentatif pour arriver à une rationalité mathématique.

Dans l'histoire des mathématiques, nous pouvons trouver des exemples où la construction d'une rationalité mathématique n'a pas toujours été immédiate, elle a même, parfois, mis beaucoup de temps à se développer.

Pour illustrer ceci, nous allons analyser la correspondance entre Leibniz et John Bernoulli I (1712-1713), John Bernoulli I et Euler (1727-1729), Euler et D'Alembert (1747-1763), telle que rapportée par Cajori (1913) dans son histoire des mathématiques. Cette correspondance avait pour sujet l'existence ou non des logarithmes de nombres négatifs. Notre analyse portera surtout sur l'évolution, la transformation, du discours argumentatif afin de voir comment celui-ci devient peu à peu un discours mathématique.

Pour aider à la compréhension de cette correspondance entre les différents mathématiciens du passé que nous allons traiter ici, nous voulons préciser qu'à l'époque, le concept de fonction n'avait pas été formellement développé et, par conséquent, le concept de fonction inverse non plus. La fonction logarithmique avait été conçue par Napier (1614) sous forme de tables répondant à une nécessitée pratique pour les calculs en astronomie. Par la suite, Fermat (1636) et Wallis (1650) ont trouvé une relation entre l'aire au-dessous de la courbe donnée par 1/x et les valeurs trouvées par Napier.

Leibniz, à qui John Bernoulli I avait expliqué les propriétés de la fonction logarithmique, utilisait cette fonction, et ses propriétés, dans un contexte spécifiquement relié aux calculs de dérivées. Bernoulli, pour sa part, cherchait à « élargir » le domaine de la fonction logarithmique pour l'étendre aux nombres négatifs. Pour réaliser ce projet, il avait construit une fonction qui de nos jours pourrait s'écrire sous la forme : $\log\left(\sqrt{x^2}\right)$ ou $\log\left(\left|x\right|\right)$ (voir figure 2).

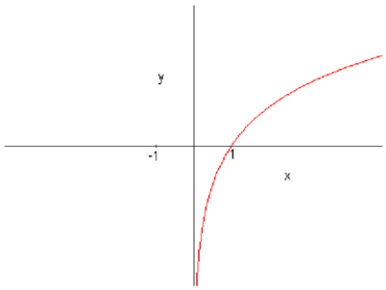


Figure 1. Fonction utilisée par Leibniz
et après par Euler

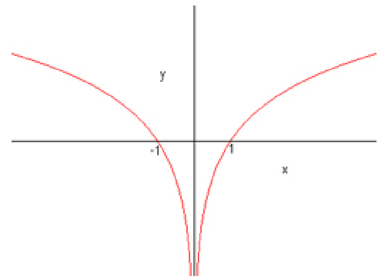


Figure 2. Fonction utilisée par John Bernoulli I
et après par D'Alembert

Malheureusement, la fonction avec laquelle souhaitait travailler Bernoulli n'avait pas d'inverse et, par conséquent, ses propriétés ne pouvaient être les mêmes que celles de la fonction logarithmique[1].

En résumé nous pouvons dire que lorsque commence l'échange entre Leibniz et Bernoulli, et plus tard entre Euler et D'Alembert, au sujet d'une fonction logarithme à une branche et une « fonction logarithme à deux branches ayant les mêmes propriétés », les concepts de fonction et de fonction inverse n'ont pas encore été développés. Nous allons suivre ci-dessous les échanges épistolaires où l'un et l'autre veulent prouver le bien fondé de leur construction, aucun n'ayant de termes bien définis, ni de concept bien établi pour structurer son discours et c'est cette lente construction de la rationalité mathématique que nous voulons dégager.

Commençons par la lettre que Leibniz a écrite à Bernoulli à propos des logarithmes de nombres négatifs.

Le 16 mars 1712, Leibniz écrit à Bernoulli et, dans sa lettre, fait un commentaire sur les logarithmes : « $-1 \div 1$ est imaginaire, puisqu'il n'a pas de logarithme. » Cajori (p. 40)

Après une analyse du travail de Leibniz de 1712, Cajori (p. 39) trouve que les arguments de Leibniz sont basés sur : « La raison $-1 \div 1$ n'a pas de logarithme. » En lisant Cajori, on comprend que Leibniz disait que –1 n'a pas de logarithme réel, un tel logarithme ne pouvant être positif puisqu'à un logarithme positif correspond un nombre plus grand que 1 ; et le logarithme $log(-1)$ ne pourrait être négatif puisqu'à un logarithme négatif correspond un nombre plus petit que zéro. Les arguments de Leibniz sont liés a l'interprétation de la courbe logarithmique. C'est-à-dire, Leibniz disait que $log(-1)$ n'existe pas parce que la fonction logarithmique n'est pas définie pour -1. Ici il n'y a rien qui puisse aller à l'encontre de Bernoulli puisque pour lui, la fonction qu'il proposait était définie pour -1. Leibniz utilise le nom « imaginaire » pour signaler que le logarithme de ce nombre n'existe pas.

Bernoulli à Leibniz (25 mai 1712). Cajori (p. 40) écrit : « Bernoulli rejette la démonstration de Leibniz… et il ajoute : si $dx \div x = -dx \div -x$, alors, par intégration, $log\, x = log(-x)$. La courbe logarithmique $y = log\, x$ a donc deux branches symétriques par rapport à l'axe y, tout comme l'hyperbole a deux branches opposées. »

1 La définition actuelle de la fonction logarithme est Spivak (1967, p. 285) : Si x > 0, alors $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$.

Nous pouvons constater que Leibniz garde sa position initiale, n'ajoutant rien, et Bernoulli essaie alors de trouver d'autres arguments pour convaincre Leibniz.

L'argument de Bernoulli « si $dx \div x = -dx \div -x$, alors, par intégration, $log\,x = log(-x)\ldots$ » est très intéressant. Comment réfuter l'argument de Bernoulli si la fonction logarithmique n'a pas été définie à l'époque de façon précise ?

Leibniz à Bernoulli (30 juin 1712). Cajori (p. 40) écrit : « Leibniz continue son argumentation en disant $log(-2)$ n'existe pas, puisque, s'il existait, sa moitié serait égale à $log\sqrt{-2}$, ce qui est impossible. La règle de différentiation, $d\ log\ x = dx \div x$, ne s'applique pas à –x. Dans la courbe logarithmique $y = log\,x$, x ne peut pas décroître vers zéro et alors passer au côté opposé, puisque la courbe ne peut pas couper l'axe y, qui est asymptotique à la courbe. »

En résumé, pour Leibniz, la construction de la courbe de Bernoulli ne peut pas être prise en considération parce que la fonction logarithmique a une seule branche. Leibniz reste toujours sur sa position, et c'est Bernoulli qui essaie de trouver des arguments différents pour le convaincre.

La discussion a continué pendant quelques mois, avec plus au moins les mêmes arguments de part et d'autre. Nous allons analyser le moment où les arguments ont changé.

Leibniz à Bernoulli (janvier 1713). Cajori (p. 41) écrit : « Si l'on suppose que $2^e = x$, si $x = 1$ alors $e = 0$, si $x = 2$ alors $e = 1$. Quand $x = -1$, e ne peut pas être déterminé. »

Ici il est intéressant de constater que Leibniz est passé à une argumentation prenant en compte la fonction inverse. Nous pouvons constater ici que Leibniz a utilisé implicitement le fait que la fonction logarithme en base 2 a une fonction inverse.

Bernoulli à Leibniz (28 février 1713). Cajori (p. 42) écrit : « Si en $v^e = x$ supposons $x = 2$ et $e = 1$, aussi pour x = 1 et e = 0, alors, quand x = −1 vraiment on ne peut pas donner aucune valeur à *e*. Puisque ces suppositions sont arbitraires, nous pouvons les changer de telle façon que quand e = 0, $x = -1$, alors *e* peut être déterminé pour n'importe quel $-x$. »

Ici il y a un problème avec l'argument de Bernoulli, puisqu'il a suivi une construction arbitraire pour la branche portant sur les nombres négatifs ; pour appliquer l'inverse, il ne peut pas les choisir de manière arbitraire. C'est vrai que la définition de fonction n'a pas été donnée auparavant, et c'est probablement à cause de la correspondance Bernoulli-Leibniz que Bernoulli a ressenti le besoin de donner plus tard une définition (Bernoulli, 1718, p. 241).

Définition

On appelle fonction d'une variable une quantité composée de n'importe quelle forme par cette variable et par constantes. (Citée par Youschkevitch, 1976, p. 60)

Leibniz à Bernoulli (26 avril 1713). Cajori (p. 42) écrit : « Vous dites que mes valeurs pour *e* et *x* en $2^e = x$ sont arbitraires. Vous avez établi que $x = -1$ pour $e = 0$. Ma supposition est plus naturelle [c'est moi qui souligne]. Premièrement, si l'on considère que nous ne pouvons pas avoir simultanément, log *x* et *log* (–*x*), puisque si *log* (–*1*) = 0, alors $log(-1)^2 = log(1) = 2\times 0 = 0$ et $\log\sqrt{-1} = 0/2 = 0$; C'est-à-dire que le même logarithme est obtenu par +1, −1, et *i*. Deuxièmement, en prenant en compte vos suppositions, 2^0 a un nombre infini de significations, à savoir : -1, $+1$, $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[8]{-1}$, etc. À moins que 2^0 recouvre plusieurs valeurs, auquel cas elle aura ces valeurs. Si $2^0 = +1$, alors 2^0 a une valeur unique et nous n'avons pas une telle difficulté. Troisièmement, si $x^e = -2$, $x^{2e} = +4$, mais cette transition de $-n$ à $+n$ vous même la rejetez. Quatrièmement, si $log(-n)$ est réel, alors $log\sqrt{-n}$ est réel ; ainsi, des nombres impossibles auront des logarithmes possibles. La supposition que seulement $+n$ a un logarithme annule ce problème. Cinquièmement, dès le début, vous avez admis que nous pouvons avoir $2^e = 1$ et $2^e = -1$ en même temps. Mais si vous prenez $2^0 = -1$, alors $\left(2^0\right)^2 = 2^0 = +1$. Alors, $2^e = 1$ et $2^e = -1$, pour $e = 0$. Ce qui est contraire à votre supposition. Tout ce que je viens de dire montre que votre hypothèse concernant $log\ (-x)$ est antinaturelle, sans utilité et inadmissible [c'est mois qui souligne]. J'ai prouvé dans une publication, que les proportions ne peuvent être formées en prenant $-n$. Si l'égalité entre les fractions $+1/-1$ et $-1/+1$ est vraie, j'ai dit que les fractions ne sont pas la même chose que les raisons. Il est évident à partir de tout ceci que chaque fondement du côté analytique a été mal traité. »

Si nous analysons cette lettre de Leibniz à Bernoulli du 26 avril 1713, nous pouvons constater que le premier argument utilisé par Leibniz : « Vous dites que mes valeurs pour e et x en $2^e = x$ sont arbitraires. Vous avez établi que $x = -1$ pour $e = 0$. Ma supposition est plus naturelle. » va provoquer une fausse sortie qui ressemble plus à la rationalité quotidienne qu'à une rationalité mathématique. La réponse de Bernoulli prend ce chemin et va minimiser les arguments de Leibniz avec sa position sur la construction d'une fonction de façon « arbitraire » avec les contradictions qui apparaissent. Bernoulli au lieu de se placer dans une discussion sur les contradictions et avancer sur une rationalité mathématique, va reprendre la discussion en se plaçant du côté de la rationalité quotidienne.

Bernoulli à Leibniz (7 juin 1713). Cajori (p. 42) écrit : « Que comprenez-vous par naturelle ? Si le naturel est en accord avec l'usuel, alors $log\ (-n)$ est moins naturel que $log\ (+n)$. La première de vos cinq objections à $log\ (-n)$ est que certains $+n$, $-n$, $i\ n$ peuvent avoir le même logarithme. J'admets que seulement $log\ (+n) = log\ (-n)$… »

Leibniz à Bernoulli (28 juin 1713). Cajori (p. 42) écrit : « Je n'ai pas le temps de réfuter vos objections à ma thèse qui est d'admettre que si log i est impossible, le double d'impossibles est impossible ($log\ n$ est le double de $log\sqrt{n}$). Si vous supposez des logarithmes qui ne sont pas comme ça, ces logarithmes n'ont pas de signification pour moi. J'appelle plus naturel, pas celui qui est plus usuel mais celui qui est plus près de la nature et le plus simple [c'est mois qui souligne]. »

La position de Leibniz « … Ma supposition est plus naturelle » a donné lieu à une réaction de Bernoulli sur la signification de ce qui est naturel en mathématiques. La réponse de Bernoulli même si elle est intéressante : « Qu'est-ce que vous comprenez par naturel ? Si le naturel est en accord avec l'usuel, alors $log\ (-n)$ est moins naturel que $log\ (+n)$ ». Bernoulli est revenu à sa position initiale sans vraiment discuter les arguments de Leibniz. En fait, on peut dire que Bernoulli n'a pas voulu « écouter » les autres arguments avancés et qu'il a fini par « couper le contact ». Leibniz n'a plus dès lors poursuivi la correspondance.

On peut se demander comment les deux mathématiciens sont passés d'une discussion en termes scientifiques à une discussion avec des arguments quotidiens. Rester dans une rationalité mathématique impliquait de résoudre les contradictions en précisant :

a) Les propriétés des nombres négatifs

b) La définition de la fonction logarithme et par conséquent la définition de fonction.

c) La définition de fonction inverse

Mais l'histoire ne finit pas là. On sait qu'Euler était l'élève de John Bernoulli I quand Euler avait 20 ans et Bernoulli 60 ; et ils ont eu une correspondance du même ordre. Euler voyait des contradictions (correspondance 1727-1729). La même discussion est revenue entre D'Alembert et Euler (correspondance 1747-1763).

Bernoulli a donné les mêmes arguments à Euler que ceux de sa correspondance avec Leibniz. Bernoulli n'a pas mentionné la position de Leibniz. Euler a utilisé dans sa communication le mot : « contradictions », mais cela n'a rien ajouté à la position de Bernoulli.

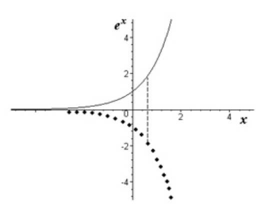
D'Alembert a écrit à Euler sans savoir que le problème sur les logarithmes des nombres négatifs avait été discuté par Euler et Bernoulli. Voici la réponse d'Euler.

Euler à D'Alembert, 15 avril 1747. Cajori (p. 76) écrit : « Je dois m'opposer à votre argument à l'effet que e^1 peut prendre une valeur positive et une autre négative. J'admets que la valeur soit arbitraire, disons 10 ou 2,718…, mais dès que l'on attribue à e en $y = e^x$, une valeur précise, le système de tous les nombres est fixe, tout comme l'est la courbe $y = e^x$. On ne peut pas assigner à e, simultanément, deux valeurs différentes sans faire en sorte que la courbe résultante soit composée par deux courbes différentes. Si $e = 1 + 1 + 1/(1 \cdot 2) + 1/(1 \cdot 2 \cdot 3) + \ldots$, alors il est clair que les logarithmes de nombres négatifs doivent être « impossibles », aucune valeur de x ne peut être trouvée pour rendre e^x ou $1 + x/1 + xx/1 \cdot 2 + \ldots$ négative… »

On voit que l'histoire se répète. Même si Euler avait publié son livre « Introduction à l'Analyse Infinitésimale » (1745) dans lequel le pivot central est le concept de fonction, dont l'influence a perduré jusqu'à maintenant, la discussion avec D'Alembert présente des situations contradictoires que ne permettent pas de finir la discussion.

Euler à D'Alembert, 15 février 1748. Cajori (p. 77) écrit : « L'équation $y = 2^x$ nous donne une courbe continue au-dessus de l'axe des x, mais si $x = 1/2$, alors $y = +\sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{2}$, et j'accepte qu'il puisse exister un point conjugué au-dessous de l'axe des x. En prenant $x = n/2$, il existe une infinité de tels points au-dessous de l'axe des x, qui sont isolés les uns les autres. L'équation $y = (2^x)$ donne une infinité de points isolés et non une courbe continue. $y = e^x$ représente une courbe continue sur l'axe des x et des points isolés au-dessous de l'axe. »

Notre interprétation de cette lettre du 15 février laisse penser qu'Euler a imaginé la courbe suivante.



Entre les deux lettres, on perçoit un changement total chez Euler ; il va changer sa définition de fonction exponentielle, sans donner d'explications sur ce sujet. De plus, en suivant Cajori, Euler, le 28 septembre 1748, affirme que ces arguments ne sont pas suffisamment rigoureux pour effacer les remarques de D'Alembert.

Discussion

Nous avons voulu montré que la construction d'une rationalité mathématique prend beaucoup de temps chez les mathématiciens, et que par conséquent nous devons laisser de côté la position naïve à l'effet qu'une rationalité mathématique puisse être développée de façon naturelle chez les élèves. Il semble que nous ayons besoin de mécanismes que puissent promouvoir ce type de rationalité chez l'élève. Nous ne voulons pas dire qu'il faille répéter l'histoire dans la classe de mathématique. Plutôt, à partir de cet historique, nous avons voulu montré que la rationalité scientifique et la rationalité quotidienne entrent en conflit de façon naturelle dans la réaffirmation d'une rationalité mathématique. De ce point de vue, il semble important de mettre en conflit deux types de rationalités qui peuvent, éventuellement, promouvoir la réflexion et la construction d'une rationalité mathématique. La méthodologie du débat scientifique dans la classe de mathématique (Legrand, 2001) semble être un des mécanismes pour provoquer ce type de réflexion.

Références

Bachelard, G. (1938). *La Formation de L'Esprit Scientifique*. France : Librairie Philosophique J. Vrin. 10e édition (1975).

Balacheff N. (1999). Is it the argumentation an obstacle ? Invitation to a debate. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. May-June.

Cajori F. (1913). History of the exponential and logarithmic concepts. *American Mathematical Montly*, Vol. XX, Nº 1 p. 5-14, Nº 2 p. 38-79, Nº 3 p. 75-84, Nº 4 p. 107-117, Nº 5 p. 148-151, Nº 6 p. 173-182, Nº 7 p. 205-210.

Duval R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? « Petit x » nº 31, p. 37-61.

Grize J. B. (1974). Recherches sur le discours et l'argumentation. *Revue des Sciences sociales*, *XII*, 32.

Grize J. B. et Piérault-le-Bonniec. (1983). *La contradiction : essai sur les opérations de la pensée*. PUF.

Legrand M. (1988). Rationalité et demonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 9, nº 3, p. 365-406.

Legrand M. (1989). *Rationalité scientifique et rationalité quotidienne face au problème de la prevue en mathématiques*. Annales de la cinquième école d'été de didactique des mathématiques.

Legrand M. (2001). Scientifique debate in mathematics courses. *In* Derek Holton (dir.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level : An ICMI Study*, p. 127-135.

Spivak, M., 1967, *Calculus*. W.A. Benjamin Inc, New York, Amsterdam, p. 415-19.

Tanguay D. (2005). Apprentissage de la démonstration et graphes orientés. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 10, p. 55-93

Tutescu M. (2003). *L'Argumentation : Introduction à l'étude du discours*. http://www.unibuc.ro/eBooks/lls/MarianaTutescu-Argumentation, © Universitatea din Bucuresti 2003. Premier édition : Editura Universitãţii din Bucureşti under ISBN 973-575-248-4.

Pour joindre l'auteur

Fernando Hitt
Département de Mathématiques
Université du Québec à Montréal
Case Postale 8888, Succursale Centre Ville
Montréal, P.Q. H3C 3P8
Courriel : hitt.fernando@uqam.ca