L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Quelle rationalité dans une figure géométrique ?

Rachid Bebbouchi, *Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B., Alger, Algérie*

Résumé

Si la Géométrie est l'étude des situations spatiales, c'est à travers les figures, représentations de ces situations, que se forge le raisonnement géométrique. Des « monstrations » chinoises (découpage, recollage) à la géométrie euclidienne, de la science géométrique arabe aux géométries non euclidiennes, de la géométrie du « visuel » (projective, descriptive) à la géométrie « infinitésimale » et différentielle, en passant par la géométrie fractale, chaque étape de l'histoire de la Géométrie nous permet de comprendre l'évolution du rapport entre la figure et le raisonnement, entre la figure et l'intuition. La perception de la figure dans la rationalité du langage mathématique n'est pas (ou plus) d'actualité dans l'enseignement, du moins en Algérie. Cette distance entre l'élève et la figure en cours d'apprentissage se creuse de plus en plus et une présentation de situations concrètes à différents niveaux nous fera réfléchir sur le discours géométrique. En conséquence, après un bref historique sur la géométrie des figures à travers les âges, je présenterai quelques tests effectués à des niveaux d'enseignement différents en Algérie, de façon à mettre en exergue la pauvreté du langage géométrique dans notre système éducatif.

Si la géométrie est l'étude des situations spatiales, c'est à travers les figures, représentations de ces situations, que se forge le raisonnement géométrique. Mais les figures ont-elles évolué de la même façon que la géométrie ? Ce qui est sûr, c'est que l'histoire des mathématiques est intimement liée à celle de la Géométrie.

1. Petite histoire de la géométrie et des figures

Au début, la géométrie était une science d'observation.

1.1. Les mathématiques chinoises (voir [12])

Au XIII^{e} siècle, les mathématiques chinoises étaient des mathématiques « sans Euclide », privées d'axiomes, de définitions, de théorèmes, de raisonnement hypothético-déductifs, mais tout de même des mathématiques logiquement justifiées. On a plutôt des « monstrations » que des démonstrations. On utilise des techniques de dissection, comme pour un puzzle.

Et la figure joue un rôle primordial : on fait tout le travail dessus. Par exemple, on peut citer le problème de la porte : on a une porte dont la hauteur dépasse la largeur de 2 pieds 8 pouces et dont les coins opposés sont distants de 10 pieds ; combien font la hauteur et la largeur de la porte ? (Yang Hui, 1275).

1.2. Les mathématiques égyptiennes (voir [7])

Le papyrus Rhind du British Museum (vers 1650 av. J.-C.) comporte des exercices d'arithmétique et commence par des

règles pour scruter la nature et connaître tout ce qui est obscur ainsi que tous les secrets.

Toutefois, le problème R48 contient une figure non commentée. Chace et Peet pensaient que le scribe voulait comparer le carré et le cercle inscrit. Mais ce scribe savait tracer des cercles ronds et la figure inscrite était plutôt un octogone. Ainsi, la figure apparaît comme une « justification géométrique » mais le scribe ne dit pas tout. Les Grecs sauront transformer cette « géométrie arithmétique » en science.

1.3. Les mathématiques grecques (voir ([4])

Les Grecs érigèrent la géométrie en science et l'enseignèrent au même titre que la philosophie.

« Nul n'entre ici s'il n'est géomètre », a bien écrit Platon au-dessus de l'entrée de sa maison.

La Géométrie Euclidienne (IVe siècle av. J.-C.) est une « géométrie élaborée par Euclide à partir d'un petit nombre d'axiomes fondamentaux qui rendraient possibles la démonstration de certaines propriétés de l'espace physique apparaissant jusque-là comme intuitives, les notions élémentaires étant la droite (le fil tendu), le plan (la surface libre d'un liquide) et le point (la trace d'une pointe sur une feuille de papier) » (encyclopédie Quillet, 1983).

Les Éléments d'Euclide (voir [6]) vont s'installer durablement dans l'Univers Mathématicien. Ils vont même être comparés à une bible. Face à cela, le discours mathématique a subi une mutation chez les Grecs, à cause de la nécessité des libres débats, des discours argumentés, qui caractérisent la civilisation grecque.

Désormais, on démontre pour convaincre, même sans faire comprendre, comme le montre l'exemple de la démonstration de la proposition 117 du livre X des Éléments d'Euclide, proposition dite par le pair et l'impair. (voir [1])

Dans un carré ABCD, la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté, c'est-à-dire que leur rapport n'est pas une fraction.

Si AB et BD sont commensurables, alors $AB/BD = n/m$ avec m et n premiers entre eux et $m \neq 1$. Le théorème de Pythagore entraîne que $BD^2= 2AB^2$ et donc $n^2/m^2 = 1/2$, d'où $m^2 =2n^2$.

Si m^2 est pair, m sera pair et n impair.

Mais si $m=2k$, alors $n^2 = 2k^2$ et n^2 est pair, donc n pair : il y a contradiction et AB et BD sont incommensurables.

Cette démonstration par l'absurde, opérée sur la figure, ne nous fait toujours pas comprendre que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

De plus, Hitt [8] affirme, à juste titre, qu'une démonstration par l'absurde suppose le principe du tiers exclu, ce qui nous fait remonter à Zénon (vers 485 av. J.-C.), le premier à avoir utilisé ce type de raisonnement quand il énonça ses 160 paradoxes pour défendre les idées de son maître Parménide contre ses détracteurs.

1.4. mathématiques arabes (voir [4])

Les mathématiciens arabes ont eu une double influence : grecque et indienne. Des Grecs, ils ont retenu la nécessité de critiquer, discuter, argumenter tout résultat mathématique. D'ailleurs, ils osent critiquer les Éléments d'Euclide, du moins dans leur maillon le plus faible, le V^{e} postulat, c'est-à-dire la définition de droites parallèles, et cela a donné lieu à plusieurs écrits allant d'Al-Nairizi à At-Tusi. (voir [10])

Là aussi, la figure ne suffit pas à clarifier la (ou les) définition (s) du parallélisme de deux droites.

Les mathématiques indiennes ont permis aux Arabes de développer une nouvelle branche, l'Algèbre, à partir des travaux d'Al-Khawarizmi. La géométrie conserve une place importante dans la civilisation arabe, ce qui a fait dire au chroniqueur Ibn Khaldoun :

> *Nos maîtres comparent l'effet de la géométrie sur l'intelligence à l'action du savon sur les vêtements : elle en enlève les souillures et nettoie les tâches.*

Mais, de plus en plus, les raisonnements algébriques s'éloignent des figures sous-jacentes, comme par exemple dans l'œuvre d'Ibn El Banna (il serait intéressant de savoir quand x^2 ne représentait plus aux yeux des apprenants un carré de côté x).

1.5. Les mathématiques européennes

L'Algèbre s'est détachée de la Géométrie. L'avènement de l'Analyse Infinitésimale de Leibniz va permettre un nouvel éclairage de la Géométrie, notamment grâce aux travaux de Gauss. La Géométrie Différentielle est née et on parle de géométrie locale et géométrie globale. Les travaux de Lobatchevski, Gauss et Bolyai vont permettre de croire à des géométries non euclidiennes où des parallèles peuvent se couper et où le bel édifice euclidien s'effrite dès qu'on introduit une autre notion de distance, de mesure.

En résumé, deux positions se dégagent de ce bref historique :

- La figure est utilisée comme un véritable élément de preuve (le puzzle chez les Chinois, la figure non commentée sur le papyrus Rhind, les raisonnements « euclidiens », plus tard en géométrie descriptive à partir des travaux de Désargues) où l'intuition joue un rôle prépondérant.
- La figure n'est qu'un support du discours de la preuve (et l'avènement de démonstrations purement algébriques en est peut-être un premier facteur de rupture).

Cette deuxième position va nous forcer à distinguer plusieurs types de géométrie (voir [9]), selon que l'on favorise l'intuition ou la déduction :

- La géométrie I ou géométrie naturelle qui repose essentiellement sur la réalité, le sensible, l'intuition.
- La géométrie II ou géométrie axiomatique naturelle où l'on se repose sur un système axiomatique, mais pas trop (la géométrie euclidienne par exemple).
- La géométrie III ou géométrie axiomatique formaliste, où tout est axiomatique (géométrie de Hilbert).

On ne peut pour conclure cette partie ne pas citer une métaphore de R. Thom (dans Largeault, intuition et intuitionnisme, Vrin, 1993).

La déduction est à l'aveugle ce que l'intuition est au paralytique, l'un avance et ne voit pas, l'autre voit mais n'avance pas. (R. Thom)

En dehors des deux positions citées plus haut, une mathématique non-illustrative s'est développée au fil des ans (l'algèbre d'Ibn El Banna et des auteurs maghrébins, l'analyse infinitésimale de Leibniz,…) à tel point que les mathématiques du XX^{e} siècle font rarement appel à une quelconque illustration. C'est même mal vu quand on publie dans certaines revues spécialisées.

Et sur le terrain de l'enseignement, que se passe-t-il ?

2. L'enseignement de la géométrie par la figure

Du collège au lycée, l'enseignement de la Géométrie (voir [3]) passe par :

- L'observation de la figure.
- Un véritable travail de recherche.
- L'élaboration de conjectures.
- Un examen critique permettant une validation définitivement convaincante par la démonstration, le tout en maintenant un dialogue permanent entre intuition et rigueur. Et c'est ce va-et-vient intuition – rigueur qui va conditionner le rapport rationalité – figure.

Le traitement graphique comme le dit Ourahay (voir [13]) n'est pas un objet explicité d'enseignement. Il a un statut ambigu dans l'enseignement.

On n'apprend pas (ou plus) aux élèves du secondaire, ni aux étudiants de l'université, comment réussir une figure dans l'espace, avec une perspective cavalière. Au secondaire, le traitement géométrique s'appuie sur « les règles d'incidences, l'orthogonalité et le parallélisme » et le raisonnement géométrique est fondé sur les propriétés géométriques et leurs organisations sous formes de définitions et de théorèmes. À ce niveau la figure n'a pour rôle que de supporter le raisonnement et d'illustrer les propriétés.

Au supérieur, la figure va illustrer le discours mathématique. Dessinée dans l'espace, elle va symboliser des situations à plusieurs dimensions. Dans certains cas, elle peut servir pour présenter un contre-exemple à une situation donnée. Mais, la plupart du temps, elle ne peut jouer le rôle de preuve.

3. Rapport figure – géométrie en Algérie

Avant l'Université, la géométrie euclidienne traditionnelle règne en maître : science d'observation à l'École Fondamentale, elle prend des contours axiomatiques et analytiques, surtout pour la filière Sciences Exactes.

a) Au collège

Un pré-test en géométrie, effectué au collège en 1997 par les chercheurs du groupe EMATHA que je dirigeais, a révélé que les élèves maîtrisaient mal les notions élémentaires de point, droite, triangle. (voir [2])

En général, les sujets de BEF (Brevet d'Enseignement Fondamental intervenant à la dernière année de collège) portent sur la géométrie analytique.

Une analyse de 588 copies du BEF 98 a révélé des anomalies du rapport figure – élève sur l'exercice de géométrie et le problème de géométrie suivants.

Exercice : L'unité de longueur est le centimètre.

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 5/2 et AC = 6.

a). Calculer la longueur BC

b). La bissectrice de l'angle [BA, BC] coupe le côté AC en H. Calculer AH et HC.

25 % n'ont pas déchiffré la figure. Plus de 14 % n'ont pas tracé le triangle et plus de 40 % se trompent sur la bissectrice en la confondant avec la hauteur ou en la faisant partir de l'angle droit A puisque la seule figure habituellement utilisée est un triangle rectangle avec une bissectrice partant de l'angle droit (et donc confondue avec la hauteur) et dans laquelle l'angle droit est habituellement représenté par la lettre B et non la lettre A.

On voit ici que la figure paraît ne jouer aucun rôle pour certains : soit ils n'en ont pas besoin, soit c'est un support visuel habituel que l'on exhibe sans tenir compte de son adéquation avec l'énoncé.

Problème :

1/ Placer dans un repère orthonormé les points A(3,7), B(3, -3) , C (-1, -1).

2/ Calculer les composantes des vecteurs AB, AC, BC.

3/ Calculer les longueurs AB, AC, BC.

4/ Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.

5/ Soit (D) le cercle circonscrit au triangle ABC.

Calculer les coordonnées de son centre et la longueur du rayon.

6/ Est-ce que le point E(-1, 5) appartient au cercle (D) ? Expliquer.

7/ Soit (Δ) la tangente au cercle (C) au point C. Déterminer son équation.

Savoir répondre à la première question (enfin une question purement géométrique !) est vital pour la suite du problème. Plus de 22 % des élèves n'ont pas su : soit ne répondent pas, soit intervertissent abscisse et ordonnée, soit (mais très peu) alignent les points comme s'ils travaillaient sur R, se trompent dans les chiffres, ne prennent pas un repère orthonormé, orientent autrement les axes.

Ces erreurs d'orientation vont se retrouver à la question 2 où certains ont interverti origine et extrémité d'un vecteur (peut être un problème de latéralité en lisant un couple de points ?).

À la quatrième question, on remarque que le triangle est rectangle en C et non en B, ce qui a encore une fois induit en erreur certains candidats.

À la sixième question, des élèves (plus de 10 %) utilisent le fait que E n'est sur aucun côté pour affirmer qu'il n'appartient pas au cercle, certains le justifient par le fait que E n'est pas le centre et d'autres utilisent la figure pour affirmer que E n'est pas sur le cercle.

Encore une fois, la figure reste une illustration qu'on colle au problème sans en vérifier l'adéquation (0 est le centre de cercle (C), le triangle est rectangle en B).

À la sixième question, tout de même, on fait appel à la figure parce qu'on est peut-être désarçonné par la nature interrogative de la question : faut-il répondre par oui ou par non ? Et on demande d'argumenter sa réponse !

Cette expérience nous montre que le rapport figure-élève n'est pas si clair que cela au niveau du collège, peut-être parce que la figure apparaît comme accessoire dans un monde analytique.

D'ailleurs, les figures ne sont exécutées ni avec soin, ni avec précision. Le compas semble n'être utilisé que pour tracer des cercles et jamais pour reporter des longueurs (observation confirmée par des tests en classe).

b) Au lycée

Cette distanciation entre l'élève et la figure avec perte de sens, se retrouve au lycée, où une analyse de 720 copies de baccalauréat a révélé que :

– plus de 49 % des candidats ayant une formule reliant des vecteurs du plan

$NA^2 + 2NB^2 + NC^2 = 6$ n'ont rien trouvé de mieux que mettre N en facteur : le passage du nombre au point du plan pose problème, d'autant plus qu'en arabe, la majuscule n'existe pas,

– plus de 26 % n'arrivent pas à tracer correctement le graphe d'une fonction à partir de son tableau de variations : cette erreur est compréhensible puisque le tableau est construit en allant de droite à gauche, alors que, pour la figure, l'axe des abscisses est orienté de gauche à droite. Toutefois, accepter qu'une asymptote traverse la courbe peut paraître étrange pour des habitués des figures géométriques.

c) À l'université

On s'attendrait à une réconciliation entre l'étudiant et la figure, puisque l'étude des fonctions vectorielles et des fonctions à plusieurs variables en première année devrait avoir comme corollaire l'étude des courbes et surfaces, l'étude des sous-variétés de R^n en 3e année et des variétés en 4e année devrait permettre à l'étudiant de travailler sur les courbes et surfaces d'une manière plus précise.

Malheureusement, au fil des ans, les choses ont pris une autre tournure : on n'enseigne plus les courbes et surfaces en 1re année (manque de temps, semble-t-il), on n'enseigne plus les sous variétés de R^n et les variétés (manque d'enseignants qualifiés, semble-t-il) et si on l'enseigne, on passe très vite aux variétés riemanniennes et tous les exercices sont réduits à des calculs numériques, très souvent inextricables.

Qui manipule des figures alors ? Pratiquement personne.

Un test proposé à des étudiants de Mathématiques de 4e année (susceptibles de devenir des enseignants) consistait à tracer la partie de R^3 définie par :

$A = \{(x, y, z) ; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 , z \geq 0\} \cup \{ (x, y, z), x^2+y^2+z^2 \leq 3 ; z \leq 0\}$

Certains ont montré une vision déformée de R^3 (confinée à une vision plane des choses), d'autres ont des problèmes d'échelle de grandeur, d'autres enfin n'arrivent pas à bien placer les pointillés (mauvaise représentation ou mauvaise conception ?).

L'enfant devenu adulte ne s'adapte toujours pas à la perspective cavalière (qui ne lui est en fait jamais enseignée [13]) et son imagination dans l'espace reste limitée.

Comment alors lui introduire des géométries non euclidiennes ? des géométries fractales ? Comment lui faire comprendre ce qu'est un fibré vectoriel s'il n'a pas une vision parfaite de ce que c'est qu'un cylindre ?

Je me rappelle d'un de mes enseignants en D.E.A. qui, en parlant de fibré vectoriel, utilisait ses mains pour figurer un cylindre dans l'espace, mais nous, les apprenants, on avait cru à un tic de sa part et ce n'était que beaucoup plus tard qu'on a pu faire le lien. Quelle raison avait-il pour refuser d'illustrer son discours par une figure explicative ?

Dessiner la sphère unité devient une chose impossible pour le « jeune mathématicien ».

Alors imaginez que vous avez à leur apprendre la théorie qualitative des équations différentielles. Comment, à partir de la classification de Poincaré et l'étude de la nature des points singuliers d'un champ de vecteurs dans le plan, faire comprendre à un étudiant le tracé global en absence d'une intégrale première explicite ?

Votre démonstration, reposant sur les symétries et d'autres considérations géométriques, ne le convaincra pas, tant la distance entre la figure et lui est énorme.

4. Conclusion

L'enseignement actuel des mathématiques ne favorise pas le développement de l'intuition par la figure, du moins en Algérie. L'enfant, dès son jeune âge, doit s'accoutumer aux représentations planes de ce qui l'entoure ou le préoccupe. Il doit apprendre à respecter la figure : la tracer avec soin et précision (ce qui suppose un apprentissage plus poussé et plus continu des instruments de traçage, sans oublier les moyens modernes que l'informatique nous offre), l'orienter, lui donner un sens lié à la situation étudiée.

Un soin particulier doit être utilisé pour représenter des figures de l'espace : où mettre les pointillés, ne pas faire croiser des segments de droite non coplanaires,…Ce n'est qu'à ce prix que l'on peut ouvrir à l'étudiant les portes de la géométrie différentielle, de la géométrie fractale, de la géométrie des systèmes dynamiques.

L'outil informatique peut réconcilier l'apprenant avec la figure en y ajoutant une dimension supplémentaire et essentielle : l'animation du mouvement (voir [5]).

Il est encore trop tôt, du moins en Algérie, pour parler d'expériences informatiques au niveau de l'école, du collège et du lycée. Mais, au niveau de l'Université, l'outil informatique a déjà interpellé les chercheurs en systèmes dynamiques. Pouvoir visualiser les trajectoires d'un champ de vecteurs en 2D ou 3D a effectivement fait avancer leur intuition, mais parfois dans le mauvais sens (surtout si les simulations sont entachées de grosses erreurs d'estimation).

Renouer avec la figure, c'est donc renouer avec l'intuition.

Se servir d'une figure pour contredire une théorie est déjà une prouesse.

De plus, la différence entre dessiner et construire une figure (voir [5]) prend un autre sens. Mais cela nécessite une autre réflexion.

Références

[1] BARBIN E. : *La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques, actes de l'université d'été sur l'histoire des mathématiques*, La Rochelle (1988) p 5-29.

[2] BEBBOUCHI R. : *Erreurs répétées et erreurs persistantes, Journées Pédagogiques et Didactiques de Mathématiques 2001,* USTHB (Alger), 29-30 Avril 2001.

[3] BELHADJ F-Z. – CLAROU P. : *La géométrie du collège au lycée*, Séminaire de Ghardaia, Algérie (2003).

[4] DHOMBRES J. and al. : *Mathématiques au fil des âges*, Ed. Gauthiers-Villars (1987).

[5] DUVAL R. : *« Voir » en mathématiques, Matematica Educativa, aspecto de la Investigacion actual*, Fondo de Cultura Economica, Mexico, p 41-76.

[6] EUCLIDE : *Les Éléments*, Traduction de Peyrard (1819).

[7] GUILLEMOT M. : À propos de la « géométrie égyptienne des figures », *Sciences et Techniques en Perspective Vol. 21* (1990), colloque d'Oran sur la géométrie des figures à travers les âges, p 125-145.

[8] HITT F. : *L'aube de la preuve en mathématiques et le principe du tiers exclu*, actes du colloque du groupe des didacticiens des mathématiques du Québec GDM 2004, Un. de Montréal, p 61-71.

[9] HOUDEMENT C. – KUZNIAK A. : *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, sous presse.

[10] JAOUICHE K. : *La théorie des parallèles en terre d'Islam*, Ed. Vrin, Paris (1986).

[11] IBN KHALDOUN : *La Muqaddima*, Traduction Vincent Monteil, Sindbad, Paris (1978).

[12] MARTZLOFF J-C : *Histoire des mathématiques chinoises*, Ed. Masson (1988).

[13] OURAHAY M. : – *Une réflexion sur l'enseignement de la géométrie au Maroc*, 1998-99.

– *Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement*, commission de réflexion sur l'enseignement des Mathématiques, Janvier 2000(Maroc).

Pour joindre l'auteur

Rachid Bebbouchi
Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B.
BP 32 El-Alia, Alger (ALGÉRIE)
rbebbouchi@usthb.dz