L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Carences et régulations des milieux en situation de validation

Gustavo Barallobres et Jacinthe Giroux, *département d'éducation et formation spécialisées, Université de Québec à Montréal, Canada*

Résumé

Nous analysons différents scénarios d'une phase de validation collective, organisée autour d'une situation didactique dont le but était de produire une formule de calcul. La complexité didactique de ces phases a été partiellement abordée par la recherche en didactique des mathématiques (Margolinas, 1993 ; Grenier, 1988 ; Balacheff, 1987 ; Legrand, 1988 ; Arsac, 1997). Nous essayerons de préciser certains éléments de cette complexité en nous appuyant sur le concept de milieu (Brousseau, 1998) et d'interprétants sémiotiques (Peirce, 1978).

Dans cette communication, nous analyserons différents scénarios d'une phase de validation collective, organisée autour d'une situation didactique dont le but était de produire une formule de calcul. Plusieurs situations construites dans le cadre de la théorie de situations contiennent des phases de validation collectives, au cours desquelles l'élève accède à une information sur la validité de son travail personnel (Brousseau, N. et Brousseau, G, 1987 ; Orus, 1992). La complexité didactique de ces phases a été partiellement abordée par la recherche en didactique des mathématiques (Margolinas, 1993 ; Grenier, 1988 ; Balacheff, 1987 ; Legrand, 1988 ; Arsac, 1997). Nous essayerons de préciser certains éléments de cette complexité en nous appuyant sur le concept de milieu (Brousseau, 1998) et d'interprétants sémiotiques (Peirce, 1978).

Dans une situation didactique de validation (ainsi que, selon nous, dans une phase de validation), l'enjeu est un savoir dont il s'agit de prouver qu'il apporte bien une réponse satisfaisante au problème posé. Les situations d'action, dans lesquelles ce savoir a été utile, prennent alors le rang de situation objective. En revanche, les actions propres à la situation de validation sont des déclarations à propos des effets des actions qui se rapportent à la situation objective (Perrin-Glorian, 1999).

Les déclarations en situation de validation sont donc déterminées par le savoir mis en œuvre en situation d'action. En l'absence de garanties sur l'efficacité de son fonctionnement (fonctionnement adidactique), la phase de validation est habituellement renvoyée à un débat collectif qui permet d'ailleurs au professeur de se tenir prêt à organiser une phase d'évaluation (Margolinas, 1993).

La complexité didactique des phases de validation à laquelle nous référons tient justement à la forme que peut prendre le débat considérant la nature des validations produites :

- le débat collectif se réduit à un bilan de résultats : les milieux objectifs de la phase de validation ne sont pas partagés par tous les élèves
- le débat collectif se réduit à un bilan de résultats : les milieux objectifs de la phase de validation ne sont pas partagés par tous les élèves mais des interactions entre ces milieux enrichissent le milieu de référence des phases de validation.

Cette deuxième alternative permet aux élèves de se reconstruire une phase adidactique dans laquelle une validation peut être produite, phase pour laquelle les interactions originales de ces élèves avec le milieu objectif étaient insuffisantes. Ceci marque une complexité temporelle de l'activité de l'élève dans ce type de situations, complexité qui a été soulignée par Margolinas (2005) par rapport au travail du professeur, mais qui est peu discutée lorsqu'il s'agit d'analyser le travail des élèves.

Analysons un exemple.

La situation

La situation que nous avons présentée aux élèves de deuxième année secondaire (13 ans) comporte trois étapes :

Première étape

La première étape comporte deux jeux. Le professeur invite d'abord les élèves à former des équipes de 4 ou 5 élèves puis il informe les élèves que l'équipe gagnante sera celle qui parvient à trouver la somme des 10 nombres consécutifs qu'il écrit au tableau. Pour le premier jeu, le professeur propose les nombres : 19, 20, 21, 22, 23, 24,25,26,27,28 ; pour le second jeu, il propose les nombres : 783, 784, 785, 786,787,788,789,790,791,792.

Deuxième étape

Le professeur propose aux élèves un temps de réflexion avant de continuer le jeu. Les élèves doivent penser à un moyen pour trouver la réponse le plus vite possible, quels que soient les nombres proposés par le professeur.

Ensuite, le jeu recommence avec des séries de nombres plus grands qu'à la première étape, par exemple, des séries commençant par 287563 ou 6432987.

Troisième étape

Le professeur demande aux élèves de chercher les raisons qui permettent d'expliquer pourquoi la méthode trouvée fonctionne pour toutes séries de 10 nombres naturels consécutifs. Un bilan des méthodes est réalisé et chaque équipe est invitée à présenter le résultat de son travail.

Milieux et validation

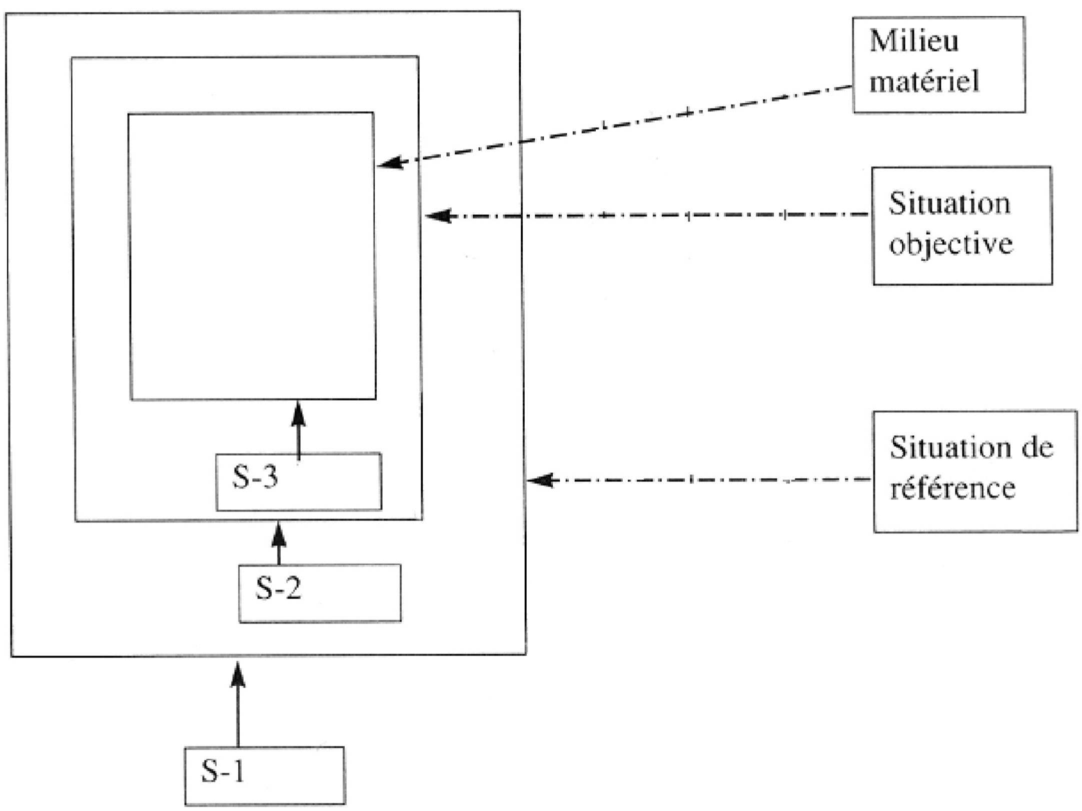
Deux méthodes de calcul ont été reconnues comme étant les plus efficaces : celle qui a donné origine à la formule (10n+45, « n » étant le premier nombre de la liste) et une autre stratégie qui consiste à « mettre un 5 à la fin du cinquième nombre de la série » (par exemple, pour la série 19, 20, 21, 22, 23, 24,25,26,27,28, les élèves prennent 23 et proposent 235 comme résultat). Diverses stratégies conduisent la majorité des équipes à la formule 10n+45. C'est cette expression qui est « acceptée » d'emblée par la classe selon l'argument que chaque nombre y est exprimé en fonction du premier de la série (20=19+1 ; 21=19+2 ; etc.). Cette acceptation ne se produit pas sans difficultés ; l'origine du nombre « 45 » est source de plusieurs discussions en particulier du fait de la coïncidence entre la somme des différences entre le premier nombre et chaque nombre de la série et la somme des unités des nombres de la série. Ce nœud se manifeste également pendant le déroulement d'une autre situation qui reprend le même jeu, mais avec des séries de 8 nombres consécutifs.

Nous nous intéressons spécifiquement à la deuxième méthode. Le groupe qui l'a produite déclare avoir « observé » les différentes séries proposées par le professeur et les résultats des sommes :

> « Tous ces résultats finissaient par 5 et la première partie du résultat coïncidait toujours avec le cinquième nombre de la série. »

Par exemple, dans la série 519, 520,521, 522, 523,524… 528, la somme est 5235. Le résultat finit par le chiffre 5 et si on enlève ce chiffre, on obtient le cinquième nombre de la série proposée (523).

Les milieux objectifs de la situation de validation de ces deux groupes d'élèves sont donc différents. Le milieu objectif de ceux qui ont produit la formule 10n+45 est assez riche pour la validation : les relations à identifier pour prouver la vérité et le caractère général de la formule sont déjà partiellement impliquées dans leur production. Pendant le débat public, les interactions (demandes d'explications additionnelles, demandes ponctuelles de justification, etc.) enrichissent le rapport de l'élève à son milieu objectif (S-1) : le milieu de référence est bien celui décrit par le modèle de structuration du milieu (schéma emboîté).



Légende : S-3 : acteur objectif S-2 : sujet agissant S-1 : sujet de l'apprentissage.

À notre avis, le travail des élèves qui produisent l'autre méthode est singulièrement différent : les relations établies par les élèves dans la phase exploratoire - dans le cadre des interactions des élèves avec le milieu objectif de la situation d'action - permettent effectivement de produire une formule générale mais elles ne se prêtent pas à une validation intellectuelle. La production de la formule à partir de l'analyse de régularités et sa généralisation par induction ne permet pas de constituer un milieu favorable à l'entrée des élèves dans un processus de validation intellectuelle. Ce milieu doit s'enrichir pour la phase de validation, mais comment ?

Dans les extraits suivants du protocole, on relève que cet enrichissement se fait par les interactions avec le milieu objectif et le milieu de référence de l'autre solution (10n + 45).

E1, E2 et E3 sont des élèves du groupe qui a proposé la deuxième stratégie. La validation publique se fait après la validation de 10n + 45.

E1 : *On travaille avec 15.*

Professeur (écrit au tableau) : 15+16+17+18+19+20+21+22+23+24.

E1 : *On ajoute « 4 » au premier nombre et après on met 5 en arrière,…au lieu d'ajouter le 4 à la fin, on a monté dans la série 4 nombres et on ajoute un 5.*

Plusieurs élèves : *On ne comprend rien.*

E2 : *Oui, parce que le cinquième nombre a déjà le « 4 » ajouté, parce que la première méthode est « fois 10 » et après plus 45…*

Professeur : *J'écris l'autre méthode pour vous faire rappeler : le premier nombre x 10 plus 45, dans notre exemple, 15×10+45.*

E2 : *Le 19 est le cinquième nombre et il a déjà le « 4 » ajouté (19=15+4), le « 4 » du 45. Alors, il reste juste le 5 mais comme on multiplie par 10, on met juste le 5 en arrière et c'est fini.*

Professeur (à la classe) : *Qu'est-ce que vous dites ?*

E1' : *Non, c'est pas comme ça… je comprends rien… pourquoi on met un 5 ?*

E2 : *C'est comme… le premier, on multiplie par 10 avec un 4 de plus… Si on multiplie le premier nombre par 10, on ajoute 40… C'est pareil d'aller du premier au cinquième et là on l'additionne 5 mais parce que 40+5 fait 45… En ajoutant 40, on tombe sur le cinquième avec un zéro en arrière…*

Professeur : *Comprenez-vous ce qu'il explique ?*

(silence)

Professeur : *Beh… il faut mieux expliquer parce qu'ils ne comprennent pas…*

E3 : *C'est la même chose que multiplier par 10, parce qu'on laisse un espace et après on ajoute un 5…*

Professeur : *E3 dit que lorsqu'on multiplie par 10, on laisse un espace… en réalité on met un zéro, n'est-ce pas ?*

(silence)

E3 : *C'est la même chose… on laisse un espace… donc « plus 45 » va te donner toujours un « 5 » en arrière et après on additionne le 4…*

Professeur : *E3 dit que lorsqu'on multiplie par 10, on a 150. Comme on aura toujours un zéro en arrière du nombre, on aura aussi un « 5 » en arrière du résultat, parce qu'on ajoute 45. Comment continuez-vous l'explication ?*

E3 : *Après, tu additionnes le 40, 4 dizaines du 45…*

Professeur : *E3 dit que lorsqu'on multiplie le premier nombre par 10, on a, à la fin, un 0…*

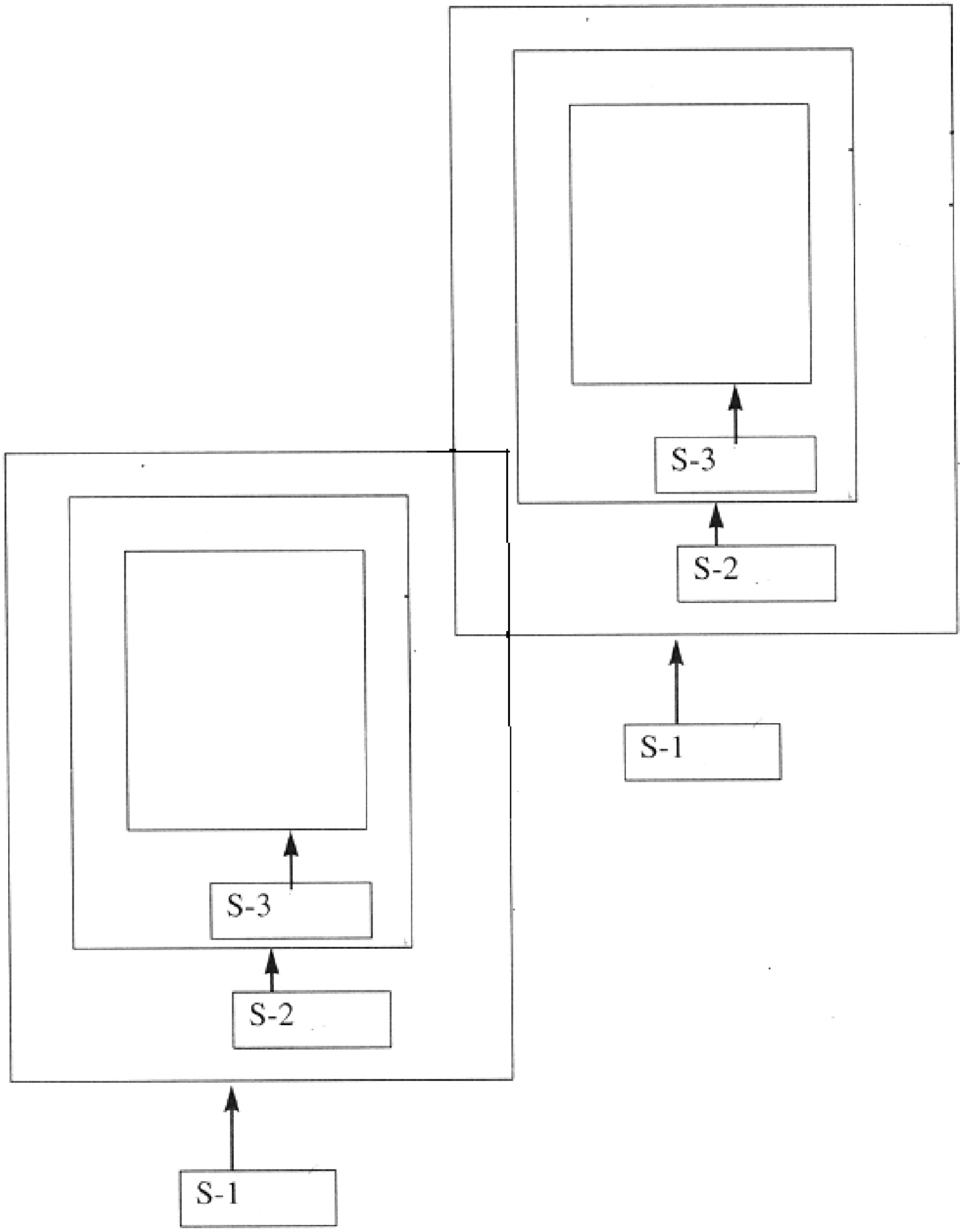
E3 : *Et lorsque tu additionnes 45, toujours il y aura un « 5 » en arrière. Lorsqu'on additionne 40, le 4 est toujours à la place des dizaines ; alors, on obtient la même valeur en additionnant « 4 » aux unités du premier nombre de la série, obtenant toujours le cinquième nombre de la série. Alors, c'est pour cela que d'abord on additionne 4, on arrive au cinquième nombre de la série. Mais en réalité on additionne 40.*

Professeur : *Pourquoi tu prends le cinquième nombre de la série et non pas le quatrième ou le sixième ?*

E2 : *Parce que dans le sixième tu as additionné 5 au premier, et il faut additionner 45 et pas 55 ! Pour le quatrième, tu as additionné 3 et non pas 4. Si on doit additionner 45, on doit avancer toujours 4 nombres dans la série.*

Comme nous l'avons précisé, ce sont les interactions avec les connaissances que les autres élèves ont injecté dans le milieu pendant le débat public qui permettant l'avancée. Ces connaissances émergent des interactions avec les milieux objectifs et de référence de l'autre équipe. Cette injection de connaissances sur le milieu permet l'évolution des élèves : ils valident leur stratégie en établissant une équivalence entre la stratégie 10x15+45, validée déjà par la classe. Les relations identifiées pendant la production des méthodes (milieux objectif et de référence de la situation d'action), basées sur des raisonnements inductifs, ne leur fournissent pas assez d'informations pour la validation. La carence de leur milieu en termes d'informations collatérales pour la validation oblige les élèves à se déplacer vers le milieu objectif de l'autre solution apportée en classe.

La structuration emboîtée du milieu ne nous semble pas rendre compte de ces interactions entre « milieux objectifs ». Nous voyons davantage un schéma comme celui qui suit.



Nous nous proposons de recourir à la sémiotique peircéenne pour tenter de rendre compte de la dynamique par laquelle cet épisode marque une certaine évolution du savoir. Nous considérons, partant de ce cadre, la classe comme un lieu particulier de production de significations nouvelles, lesquelles permettent l'avancée du savoir. La sémiotique de Peirce aborde simultanément le signe et son contexte d'utilisation, au point de définir la signification comme l'action du signe sur l'interprète. De plus, pour Peirce, la connaissance est ce qui rend les relations efficientes : « … est un signe quelque chose par la connaissance duquel nous connaissons quelque chose de plus » (p. 30, 1978). Nous estimons donc raisonnable de recourir à cette sémiotique, et en particulier aux concepts d'interprétants et de sémiose pour compléter l'analyse des interactions et des significations nouvelles auxquelles donnent lieu cet épisode didactique. La sémiose est le processus par lequel la signification se produit, pour un interprète, dans un contexte donné (Everaert-Desdmedt, 1990). L'interprétant dynamise la relation de signification en opérant une médiation à l'intérieur du signe. Un signe est triadique du fait qu'il est constitué d'un représentanem (signe matériel) qui dénote un objet (entité mentale ou physique) grâce à un interprétant (une représentation mentale de la relation entre le representanem et l'objet). L'interprétant qui est également un signe, est susceptible d'être à son tour interprété, alimentant ainsi la sémiose et l'accès à nouvelles significations.

Considérons d'abord que les solutions : « 10n + 45» et « xx5 » (« xx » corresponde au cinquième nombre de la série) comme les signes respectifs des deux milieux objectifs de la situation de validation. Dans les deux cas, ces signes renvoient à un objet de type : somme d'une suite de 10 naturels consécutifs. Ils sont tous les deux issus d'un processus sémiotique différent mais dont le « ground » de départ était le même, c'est-à-dire le problème posé par la situation d'action. Ces deux expressions ou solutions marquent l'aboutissement de deux parcours sémiotiques différents et sont donc deux interprétants finaux (bien que provisoires) distincts qui renvoient à un même objet. Selon l'extrait de protocole, les élèves qui ont produit 10n+45 ne reconnaissent pas l'autre solution comme renvoyant au même objet.

Cependant, l'élève qui produit « xx5 » ne se contente pas de déclarer que cette proposition est juste du fait qu'elle fonctionne dans tous les cas particuliers donnés. En l'extrayant de son milieu objectif pour l'amener ailleurs (en relation avec l'autre milieu objectif) il prolonge sa signification. En effet, par la voix de l'élève, le signe 10n+45 se fait l'interprétant de l'expression « xx5 » et du coup, réciproquement pourrions-nous dire, puisque cela conduit à l'équivalence des deux expressions. L'élève E3 ne peut référer bien sûr, dans ses déclarations, à tout le contenu de la sémiose dont « 10n+45 » est l'aboutissement. Il ne peut donc faire appel aux actions et décisions qui ont conduit à 10n+45. Cependant, il enrichit la signification de chacun des signes en référant aux propriétés des opérations pour la mise en relation. Son raisonnement pourrait être ainsi schématisé : $15 \times 10 + 45 = 10 \times (15 + 4) + 5 = 19 \times 10 + 5 = 195$, lequel nombre est le 4^{e} terme suivant le 1er de la série ($15 + 4 = 19$) auquel on a juxtaposé un 5. Nous pourrions dire que c'est la traduction d'une expression par l'autre ; ce qui est le propre d'une semiose qui est la traduction de signes en d'autre signes et donc de leurs production et reproduction (Tiercelin, 1993). Au terme de ce processus interprétatif, chacune des expressions est enrichie de la lecture, de l'interprétation de l'autre et ces deux signes peuvent alors renvoyer, publiquement, au même objet. L'objet s'en trouve donc également bonifié de significations nouvelles.

Remarques finales

La parole d'un élève qui se fait entendre, pendant une phase de validation collective, plonge dans un milieu constitué d'actions, de réflexions sur ces actions et d'interactions qui se produisent autour de ces actions et réflexions au sein de l'équipe de travail. Au fur et à mesure du déroulement de cette phase, un nouveau milieu pour la validation se constitue. Il se forme des assertions, déclarations qui sont faites mais également des interactions à propos de ces énoncés. Trois grands cas de figures se dessinent sur les interactions possibles.

Dans le cas où ces interactions renvoient explicitement au même objet de savoir, la phase collective peut prendre la forme d'un débat public parce que les acteurs partagent un même milieu objectif et de référence. Ce n'est, cependant, pas toujours le cas. Un élève peut ne pas reconnaître dans la parole d'un autre, ses propres actions, réflexions. Lorsque les interactions ne sont pas identifiées à un même mouvement sémiotique (puisque les signes sont différents), la phase publique peut être un simple bilan où sont recensées sans discussion, confrontation ou échange, les solutions. Il n'y a pas véritablement de rencontres entre les parcours différents des élèves d'une situation à l'autre, d'un milieu à l'autre.

Un autre cas de figure est toutefois possible comme nous avons cherché à le montrer. Le bilan peut prendre la forme d'une rétroaction qui provient du milieu enrichi, rétroaction qui profite à certains élèves en les renvoyant à une phase adidactique de production de preuve. L'élève bien qu'il ne reconnaisse pas, dans la parole de l'autre, le milieu dans lequel s'est construit sa solution, cherchera à intégrer les deux solutions de manière à pouvoir générer sa solution à l'aide de l'autre solution.

La modélisation de la situation adidactique considère un sujet générique en interaction avec un milieu et la théorie des situations nous permet de décrire un état des interactions possibles d'un sujet mathématique avec un milieu mathématique (Margolinas, 1993). Une modélisation de la relation didactique, en particulier des phases collectives de validation, exigerait, à notre avis, d'étudier plus précisément (et théoriquement) les interactions entre « ces possibles », les sujets associés à chacun de ces possibles (on a maintenant plusieurs sujets génériques) et le savoir en question.

La situation didactique qui contient une phase collective de validation ne peut donc pas être modélisée par les interactions autour de la situation adidactique d'un seul sujet générique : la modélisation doit incorporer les possibles interactions autour des situations adidactiques d'autres sujets génériques présents dans la classe. Un sujet générique peut évoluer dans le cadre strict des interactions autour de sa propre situation adidactique (ce qui ne signifie pas que l'on ignore les interactions avec les autres), mais il peut avoir besoin d'interagir avec le milieu adidactique d'autres sujets génériques dans le cadre de la même situation en élargissant ainsi son propre milieu. Les élèves interagissent autour d'un objet qui est le même pour un observateur externe mais pour lequel les actions associées sont possiblement différentes : les répertoires des élèves ne sont pas toujours suffisamment proches pour identifier leur parenté au regard de l'objet de savoir.

Comme Brousseau l'explicite (1998), une des fonctions des savoirs mathématiques est celle d'accepter ou de rejeter une proposition, une stratégie, un modèle, ce qui exige, du côté des élèves, une attitude de preuve. Les situations de validation occupent une place importante dans le développement de cette « attitude de preuve » qui n'est pas innée, dans le développement de la rationalité mathématique des élèves au fil de la scolarité. Cette rationalité qui implique, entre autres, le passage de la pensée naturelle à l'usage d'une pensée logique régissant les raisonnements mathématiques, se constitue au sein d'une activité sociale et individuelle. Notre travail essaie de comprendre la place de cette activité individuelle au sein de l'activité collective de la communauté « classe de mathématiques ».

Du point de vue des connaissances algébriques, Radford (2003) montre que deux expressions symboliques pour un même pattern (« (n+1)+ n » et « (n+n)+1 ») sont jugées différentes par les élèves, parce que ces expressions objectivent un ensemble d'actions différentes. Dans chaque expression, les symboles n, 1, +, (,), ne sont pas liés de manière arbitraire. Le signifié sémiotique de l'objectivation des actions «évoquées» dans les expressions algébriques reste lié à l'ordre de la séquence des actions numériques. Pour l'auteur, le signe «n» apparaît comme une abréviation du terme linguistique générique «la figure» engagé dans un niveau de discours antérieur, comme marquant un terme spécifique de l'activité discursive de l'élève, comme un index dans le sens de Peirce. Ces expressions symboliques héritent de la dimension spatio-temporelle du discours contextuel qui empêche la réalisation de calculs formels.

Mais l'exemple de Radford s'arrête à la production d'une formule. Par contre, dans notre exemple, l'exigence de validation (et l'impossibilité de s'appuyer sur le milieu objectif) limite la référence à cette dimension spatio-temporelle du discours contextuel.

Une des problématiques didactiques fondamentales en algèbre est la possibilité de faire entrer les élèves dans un jeu détaché du contexte de référence, de les faire travailler dans un espace où les objets perdent leur référence extra-mathématique et leurs traces procédurales. Un espace dans lequel les objets doivent être rendus par des expressions symboliques, très synthétiques, idéographiques et relationnelles (Arzarello, 1993). Mais pour cela, les signes produits en situation d'action doivent être considérés pour eux-mêmes, c'est-à-dire détachés de leur contexte de référence non seulement extra-mathématique, comme le suggère Arzarello, mais également intra-mathématique. Il nous semble que notre exemple montre bien les limites du rapport entre les élèves et leur milieu objectif pour la validation, le besoin d'aller puiser un signe extérieur à son milieu pour redémarrer le processus interprétatif et résoudre le problème en question.

Références

Arsac G., Mantes M. (1997), Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics 33*, 21-43.

Arzarello, F. (1993). *Analysing Algebric Thinking. In : Algebraic Processes and the Role of Symbolism*, Proceedings of the ESRC Working Conference, R. Sutherland (ed). Institute of Education, University of London.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics 18*, p. 147-176.

Brousseau, N. et Brousseau, G. (1987). *Rationaux et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM de Grenoble.

Brousseau, Guy (1998). *Théorie des situations didactique*s. La pensée sauvage éditions.

Everaert-Desmedt, N. (1990). *Le processus interprétatif*. Pierre Mardada. Éditeur. Liège.

Grenier, D. (1989). *Construction et etude d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. La Pensée Sauvage Éditions.

Margolinas (2005). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. Habilitation à diriger les recherches en Sciences de l'Éducation.

Orus, P. (1992). *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique ; effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*. Thèse presentee à l'Universitè Bordeaux I.

Peirce, C.S. (1978). *Écrits sur le signe rassemblés*. Traduits et commentés par G. Deladalle. Éditions du Seuil. Paris.

Perrin, Glorian, M.J (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 19/3. Num. 57. p. 279-321.

Radford, L. (2003). *Narratives, expressions algébriques et calcul formel : de la constitution à la transformation du sens*. http://laurentian.ca/educ/lradford

Tiercelin, C. (1993). La pensée-signe. Éditions Jacqueline Chambon. Nîmes.

Pour joindre les auteurs

Gustavo Barallobres
Département d'éducation et formation spécialisées
Université du Québec à Montréal
1205, rue Saint-Denis, local : N-5100, Montréal (Québec) Canada, H2X 3R9
Courriel : barallobres.gustavo@uqam.ca

Jacinthe Giroux
Département d'éducation et formation spécialisées
Université du Québec à Montréal
1205, rue Saint-Denis, local : N-5100, Montréal (Québec) Canada, H2X 3R9
Courriel : giroux.jacinthe@uqam.ca