L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Sens de la preuve chez les élèves provenant de classes faibles du secondaire

Julie Vaillancourt, *École Eulalie-Durocher, Canada*
Nadine Bednarz, *Université du Québec à Montréal, Canada*

Résumé

Notre intérêt [1]pour les questions liées à l'apprentissage et à l'enseignement de la preuve dans des classes faibles du secondaire part de notre expérience comme enseignante dans ces classes, et d'un constat d'impuissance face à l'incompréhension des élèves : difficulté à voir la pertinence d'une preuve, difficultés à comprendre une preuve sous l'angle du raisonnement déductif qui lui est sous-jacent, sentiment de tourner en rond et de ne pas saisir l'idée générale de la preuve à produire, difficultés dans l'écriture de preuves par les élèves. Ces difficultés présentes aussi en contexte régulier, deviennent ici, dans le cas d'élèves faibles, quasi insurmontables à franchir dans les contraintes imposées par le programme d'études (la preuve est introduite au Québec très tard) et en regard du contexte particulier d'intervention dans lequel nous étions (séquence prenant place dans un étalement de temps restreint). En partant de ce constat, nous avons voulu comprendre davantage les difficultés des élèves provenant de ces classes faibles à l'égard de la preuve. Un questionnaire tiré de Hoyles (1997) a été expérimenté auprès d'élèves faibles provenant de deux écoles différentes. Les résultats mettent en évidence le sens que les élèves accordent à la preuve en algèbre et en géométrie, pointent leurs difficultés à voir le caractère général d'une preuve et les implications qui en découlent. Ils mettent aussi en évidence les influences du contrat didactique qui conduit les élèves à reconnaître une preuve valide sur la base de la forme qu'elle prend davantage que sur son contenu.

1. Introduction

Notre intérêt pour les élèves en difficultés d'apprentissage remonte à loin. Les premières expériences en stage,[2] lors de ma formation initiale, ont souvent été réalisées dans des classes faibles, et mes expériences d'enseignement à ce jour ont toujours pris place auprès de ces élèves. Il y a environ deux ans, nous nous sommes heurtées à l'enseignement des preuves géométriques en quatrième secondaire (15-16 ans) auprès d'élèves raccrocheurs[3]. Nous avons trouvé particulièrement difficile de communiquer le sens de la preuve à nos élèves et avons vite ressenti un sentiment

1 C'est ici le premier auteur de l'article qui parle.

2 *Ibid.*

3 Les élèves raccrocheurs sont des élèves qui ont quitté l'école pendant une certaine période de temps et qui désirent faire un retour aux études. Ces élèves accusent donc un retard scolaire d'une ou plusieurs années par rapport aux élèves du même âge qu'eux. Ce sont des élèves ayant déjà vu la matière une ou plusieurs fois, mais qui n'ont toujours pas réussi les cours associés.

d'impuissance face à l'incompréhension générale des élèves dans l'appréhension et rédaction des preuves (exigées par le programme[4]).

Ce questionnement nous a amenées à vouloir aller plus loin et à nous pencher davantage sur la notion de preuve et les difficultés de ces élèves, et ce afin, à plus long terme, de pouvoir construire des stratégies d'intervention plus adaptées.[5]

Avant de présenter le questionnaire élaboré à cette fin et les résultats de cette recherche, nous reviendrons dans un premier temps sur la notion de preuve et ce qu'on sait des conceptions de la preuve chez les élèves.

2. La notion de preuve, différentes conceptions de la preuve

Une analyse épistémologique de la démonstration (Barbin, 1988) nous aide à y voir plus clair sur le sens de la preuve en mathématiques : celle-ci a-t-elle été toujours été la même ? Quelle est la signification de la preuve pour les mathématiciens eux-mêmes ?

La naissance de la pensée rationnelle en géométrie provient de la Grèce antique. Avec l'apparition de la cité grecque et de la démocratie au VI^e^ siècle av. J-C, toutes les affaires de la cité devaient faire l'objet de débats libres sous forme de discours argumentés. Chez les Grecs, la démonstration apparaît ainsi comme un acte social dans lequel le but est de convaincre l'autre. Pour ce faire, il faut que les interlocuteurs admettent un certain nombre d'énoncés, appelés postulats, comme étant vrais (voir les postulats d'Euclide). En utilisant alors un raisonnement déductif, l'un d'entre eux cherche alors à convaincre les autres de la véracité des propositions débattues.

À la Renaissance, on assiste à une rupture dans la conception de la démonstration. Après la redécouverte de textes anciens qu'on veut imiter le plus parfaitement possible, on sent la nécessité d'analyser leur structure. Les critiques commencent alors à apparaître. Certains disent que les théorèmes se suivent sans ordre, que les démonstrations ne dépendent d'aucune méthode générale, que les démonstrations par l'absurde pullulent et que les Anciens n'ont laissé aucune trace de leur moyen d'établir leurs preuves. Les Anciens veulent plus convaincre qu'éclairer.

Le souci de développer des méthodes est grand puisque l'on veut comprendre ces textes anciens qui eux n'ont laissé aucune trace de découverte. Arnauld et Descartes veulent ainsi organiser la pensée pour que les théorèmes arrivent dans l'ordre naturel des choses, ce qui amène un éloignement de la méthode déductive. Pour eux éclairer est plus important que de constater la vérité. Au XVII^e^ siècle, la signification de la démonstration change donc, elle ne sert plus à convaincre, mais à éclairer (Barbin, 1988). Les critères de validité de la démonstration changent aussi, ce ne sera plus le raisonnement déductif (pour convaincre) qui prévaudra, mais les méthodes heuristiques (pour éclairer).

4 Dans le programme d'Études québécois (MEQ, 1994), l'enseignement de la preuve débute très tard soit en secondaire 4 (15-16 ans). Il s'agit donc d'un saut important pour les élèves, pas du tout préparé antérieurement.

5 Ce travail, en cours, fait l'objet d'un mémoire de maîtrise en enseignement des mathématiques, à l'Université du Québec à Montréal.

Au XIX^e siècle, Bolzano s'oppose à la conception de la démonstration comme fabrication d'évidences. Cette opposition va s'amplifier avec l'apparition des géométries non euclidiennes et du mouvement formaliste. Pour lui, une démonstration doit être un fondement. Ce qui fonde une proposition est sa capacité d'établir des relations entre cette proposition et d'autres propositions (Barbin, 1988). Avec les géométries utilisant des axiomes différents de ceux d'Euclide, comme celle de Hilbert en 1899, les axiomes changent de statut, ce ne sont plus des vérités évidentes à chacune, ce sont de libres hypothèses. Le mouvement formaliste apporte la conception qu'une proposition est vraie si elle est non contradictoire avec un système d'axiomes. La base de la démonstration du XIX^e siècle est donc la non contradiction. Démontrer c'est prouver la non-contradiction (Barbin, 1988).

De ce survol historique, des conclusions d'ordre didactique peuvent être tirées. Premièrement, associer d'emblée l'idée de démonstration à un raisonnement déductif ne va pas de soi. Cette analyse épistémologique nous montre en effet que la démonstration n'a pas toujours eu comme rôle de convaincre l'autre en mathématiques, sa fonction d'explication pour soi est aussi importante, et les méthodes heuristiques centrales. Quelle fonction a la preuve pour un élève : convaincre l'autre, éclairer, voir la non contradiction des énoncés, de l'enchaînement ? Le programme d'études québécois (MEQ, 1884) met l'accent sur le développement du raisonnement déductif en lien avec la preuve. Ne se heurte-t-on pas là à une tension entre cette attente du programme et de l'enseignant et les attentes des élèves qui cherchent eux à être éclairés (convaincre l'autre ne veut pas dire comprendre).

Que sait-on par ailleurs des conceptions des élèves à l'égard de la preuve en mathématiques ?

Cyr (2004) relève plusieurs conceptions de la preuve chez les étudiants[6]. Ces derniers attribuent une importance égale à la forme d'une preuve (forme stéréotypée : modèle en deux colonnes avec énoncé, justification) et à son contenu (la preuve est vue en quelque sorte comme un rituel). Ils ne perçoivent pas la pertinence de la preuve ainsi que l'importance que les mathématiciens accordent à celle-ci. Ils montrent une préférence pour les justifications empiriques (il suffit de quelques cas pour montrer que cela est vrai, d'une justification basée sur l'expérience), ne comprennent pas le rôle du contre-exemple ou le principe du tiers exclu et, finalement, éprouvent de grandes difficultés dans l'élaboration et la rédaction d'une preuve.

Ces données sur le plan théorique viendront éclairer l'analyse des réponses des élèves. Avant de revenir sur ces résultats, nous situerons les objectifs de l'étude et la méthodologie retenue.

3. Objectifs de l'étude

Les questions suivantes guident la recherche qui a été conduite auprès de classes faibles sur une base exploratoire.

- Quelles sont les preuves que les élèves de secondaire quatre, provenant de classes faibles, considèrent comme valides/convaincantes ?
    - Preuves qui les convainquent pour eux-mêmes (on retrouve ici l'idée d'éclairer).
    - Preuves qu'ils utiliseraient pour présenter à d'autres afin de leur faire comprendre que l'énoncé est vrai (on retrouve ici l'idée de convaincre l'autre).

6 L'étude a été réalisée au Québec chez des étudiants universitaires, futurs enseignants.

· Preuves qu'ils utiliseraient pour présenter à l'enseignant (on cherche ici à cerner l'effet du contrat didactique).

- Quelles conceptions de la preuve se dégagent des résultats ?
- Observe-t-on des conceptions différentes face à une preuve en géométrie et en algèbre ?

4. Méthodologie

Nous avons passé un questionnaire adapté de Célia Hoyles (1997) à 21 élèves provenant de classes faibles de deux écoles du même secteur de l'île de Montréal, soit Hochelaga-Maisonneuve et Eulalie Durcoher. Parmi ces 21 élèves, 9 provenaient de l'école Eulalie-Durocher et 12 provenaient de l'école Chomedey-de-Maisonneuve. Eulalie-Durocher est une école à vocation particulière, elle s'adresse aux raccrocheurs, aux élèves qui ont du retard à l'école et ont décroché du système scolaire régulier. Ce sont des élèves qui ne réussissaient pas dans leurs écoles respectives et qui ont décidé de venir terminer leur secondaire à cette école. Les élèves provenant de l'école Eulalie-Durocher font partie d'un programme intensif qui vise à compléter la totalité d'une année en 5 mois, ce qui a pour effet de concentrer et minimiser le temps alloué à la matière.

Les élèves provenant de la deuxième école, Chomedey-de-Maisonneuve, font partie d'un programme régulier. Ces derniers proviennent toutefois d'une école de milieu défavorisé située dans un des quartiers très pauvres de Montréal, Hochelaga-Maisonneuve. À Chomedey-de-Maisonneuve toutes les classes régulières sont en fait formées de doubleurs et de tripleurs. Quelques-uns seulement proviennent de la troisième secondaire. Ce sont donc des élèves qui n'ont jamais quitté le chemin de l'école, mais qui ne réussissent pas ou difficilement dans leur milieu scolaire.

Les 21 élèves retenus pour l'expérimentation ont déjà vu le module d'enseignement sur les preuves géométriques et ont donc déjà abordé les preuves en géométrie.

Le questionnaire passé aux élèves par écrit comprend sept questions.

– Q1. Preuve algébrique :
  - Un énoncé est donné aux élèves (tu prends deux nombres pairs, n'importe lesquels, tu les additionnes, tu obtiens toujours un nombre pair, est-ce que c'est toujours vrai ou faux ?) avec six preuves différentes proposées (venant d'élèves fictifs) ;
  - L'élève doit choisir celle qui serait le plus prêt de ce que lui-même aurait fait (celle qui fait sens en quelque sorte pour lui) ;
  - et celle à laquelle, selon lui, l'enseignant attribuerait la meilleure note (on cherche ici à mettre en évidence les attentes qu'il perçoit par rapport à la preuve).

– Q2. Pour chacune des preuves, on lui demande de plus dans un deuxième temps de dire :
  - Si la preuve contient une erreur (perçoit-il les preuves erronées, les contradictions ?)
  - Si elle montre que l'énoncé est toujours vrai, parfois vrai (cette preuve convainc-t-elle de la validité de l'énoncé ?)
  - Si elle montre pourquoi l'énoncé est vrai (permet-elle de convaincre mais aussi d'éclairer ?)

- Si elle est un moyen simple de faire comprendre à quelqu'un de la classe qui n'a pas bien compris (éclairer l'autre).

– Q3 et Q4 : La même structure est reprise pour les questions 3 et 4 avec cette fois une preuve géométrique (lorsque tu additionnes les mesures des angles intérieurs de n'importe quel triangle, le résultat est toujours 180 degrés).

– Q5 : On cherche à voir si l'élève peut ici réinvestir ce qui vient d'être prouvé dans un nouvel énoncé (somme des angles intérieurs d'un triangle rectangle) : perçoit-il le caractère général de la preuve ?

– Q6 : L'élève doit lui-même produire une preuve (somme des angles intérieurs de n'importe quel quadrilatère).

– Q7 : Un autre énoncé géométrique est proposé (cette fois faux) avec cinq solutions différentes proposées, on lui demande de dire laquelle serait le plus près de ce qu'il ferait ? Laquelle il choisirait pour l'enseignant s'il voulait avoir la meilleure note.

Les différentes preuves proposées dans chacune des questions (Q1, Q3 et Q7) sont choisies, sur la base d'une analyse préalable, pour permettre de mettre en évidence chez les élèves les conceptions qu'ils ont de la preuve (les exemples plus précis seront repris dans l'analyse).

5. Analyse des résultats

5.1. Les caractéristiques des preuves que les élèves de classes faibles considèrent comme faisant sens pour eux

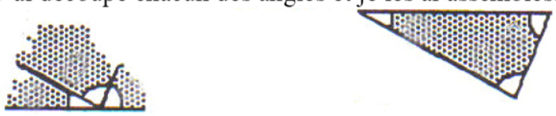
En premier lieu, nous allons étudier la preuve que les élèves ont choisie comme étant celle qu'ils auraient faite eux-mêmes. Trois questions du questionnaire portaient sur ce sujet. (Q1, Q3, Q7). Les élèves, à la question 1, ont répondu en grande majorité que la solution de Martin, qui mettait de l'avant quelques essais numériques pour conclure, était celle qu'ils auraient choisie.

La réponse de Martin	
2 + 2 = 4	4 + 2 = 6
2 + 4 = 6	4 + 4 = 8
2 + 6 = 8	4 + 6 = 10

À la question 3, le choix des élèves était partagé entre deux preuves qui toutes deux optaient pour un raisonnement empirique, la solution de Zara et la solution de Marie.

La réponse de Marie

J'ai découpé chacun des angles et je les ai assemblés.



Cela a donné une ligne droite qui vaut 180º. J'ai ensuite essayé avec un triangle équilatéral et un triangle isocèle et j'ai obtenu la même chose.

Donc Marie dit que c'est vrai

La réponse de Zara

J'ai mesuré les angles intérieurs de différentes sortes de triangle et j'ai fait une table des valeurs.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Dans tous les cas j'ai obtenu un total de 180º.

Donc Zara dit que c'est vrai.

Déjà, avec ces deux seules questions nous pouvons voir un penchant pour un raisonnement empirique. Pour les élèves, quelques cas suffisent à prouver une généralité, ou l'expérimentation est un bon appui pour vérifier que quelque chose est toujours vrai.

Quant à la question 7 (la plus courte distance entre n'importe quel point P et un segment AB est la ligne qui rejoint P à A, où C est le point milieu de AB), il n'y avait pas de différence marquée entre les choix des élèves à l'exception peut-être d'une solution qui a été préférée aux autres par 6 élèves.

La réponse de François

Supposons E un point quelconque sur le segment CB et D est un point quelconque sur le segment AC.

Affirmations	Justifications
AC = BC	C est le point milieu de AB
$CE^2 + PC^2 = PE^2$	Par Pythagore
$CD^2 + PC^2 = PD^2$	Par Pythagore
$PC \leq PE$	Car CE est plus grand que 0
$PC \leq PD$	Car CD est plus grand que 0

Donc PC est la plus petite distance.

Donc François dit que c'est vrai.

Il faut noter que les solutions proposées à la question 7 ne référaient à aucun exemple numérique. N'ayant pu se raccrocher à des nombres, les élèves ont donc dû opter dans ce cas pour un autre type de preuve. Le choix de la réponse de François peut hypothétiquement être expliqué par l'utilisation du théorème de Pythagore à l'intérieur de cette solution. Ce théorème représente un refuge pour les élèves faibles puisqu'ils y reconnaissent une règle formelle à laquelle ils peuvent se raccrocher. Ce recours à des règles comme économie de pensée a été observé dans les travaux de Perrin-Glorian menés sur des classes faibles (Perrin-Glorian, 1993).

L'analyse de ces différentes questions fait donc ressortir une conception empiriste de la preuve, qui fait sens pour eux, associée à l'expérimentation sur un cas (exemple du découpage des angles du triangle et de leur juxtaposition) ou au passage à quelques mesures précises (quelques exemples suffisent pour généraliser un énoncé à tous les cas).

5.2. L'analyse des preuves par les élèves

Deux questions (Q2 et Q4) nous permettent de revenir sur le regard que les élèves portent sur chacune des preuves proposées : perçoivent-ils une erreur ? Validité de la preuve ? La preuve permet-elle de voir pourquoi c'est vrai ? Permet-elle d'expliquer à quelqu'un d'autre que c'est vrai ? Pour des raisons d'espace, nous ne reprendrons que les résultats à l'une d'entre elles, celle de la preuve algébrique (Q2).

Voici la réponse d'Audrey.

La réponse d'Audrey
a est n'importe quel nombre entier.
b est n'importe quel nombre entier.
2a et 2b sont deux nombres pairs quelconques.
$2a + 2b = 2\ (a + b)$
Donc Audrey dit que c'est vrai.

Un grand nombre d'élèves ont dit qu'il y avait une erreur dans cette solution (difficulté à comprendre les notations symboliques par les élèves ?), alors que la preuve était correctement articulée et mathématiquement vraie. De plus, un plus grand nombre d'élèves ont répondu que la solution d'Audrey ne montrait pas que l'énoncé était vrai pour tous les cas. Ce qui voudrait dire que les élèves ne voient pas la pertinence de l'algèbre comme outil de généralisation à des fins de preuve. Finalement 16 élèves contre 5 ont dit que non seulement cette solution ne montrait pas pourquoi l'énoncé était vrai, mais qu'elle ne serait pas un moyen simple pour expliquer à quelqu'un d'autre pourquoi c'était le cas. Bref, les élèves ne reconnaissent pas à cette preuve sa validité, son caractère général et ne la jugent nullement éclairante.

Voici la réponse de Martin (voir la solution présentée précédemment).

La majorité des élèves (17 contre 4) ont répondu que cette solution, comprenant plusieurs exemples numériques, montrait que l'énoncé était vrai. Pour eux quelques exemples suffisent donc bien à montrer qu'un énoncé est toujours vrai. De même, les élèves trouvent cette preuve convaincante, puisque 15 élèves ont dit qu'elle montrait bien pourquoi l'énoncé est vrai. Finalement, 19 élèves sur 21 ont compris cette preuve et trouvent que ce serait un excellent moyen à utiliser pour expliquer à un autre élève. Le caractère explicatif de cette preuve est donc indéniable pour les élèves. Cette conception empirique de la preuve est donc bien ancrée chez les élèves, et l'on peut dire qu'ils s'y accrochent peut-être pour le caractère éclairant qu'elle leur procure (elle leur permet de comprendre).

Voici la réponse d'Alex.

La réponse d'Alex
Quand tu prends deux nombres qui se divisent chacun par deux et que tu les additionnes, la réponse se divise aussi par deux.
Donc Alex dit que c'est vrai.

La formulation d'une preuve sous forme de texte en mots semble être assez bien reçue par les élèves, bien que moins populaire que la solution empirique. 13 élèves ont été convaincus par cette solution et le même nombre d'élèves ont trouvé que ce serait un bon moyen d'expliquer à quelqu'un d'autre. La formulation en texte est donc assez bien comprise, les élèves retiennent plus une preuve de ce type (qui non seulement les convainc que c'est vrai mais leur permet de comprendre) qu'une preuve formelle utilisant l'algèbre telle celle d'Audrey. Il y a là, nous semble-t-il, une piste intéressante.

Voici la réponse de Rosemarie.

La réponse de Rosemarie
Les nombres pairs terminent par 0, 2, 4, 6 ou 8. Lorsque tu additionnes n'importe quels deux nombres qui terminent par ces chiffres, le résultat se termine aussi par 0, 2, 4, 6 ou 8.
Donc Rosemarie dit que c'est vrai.

Les résultats pour la solution de Rosemarie sont sensiblement les mêmes que pour la solution d'Alex à l'exception qu'encore plus d'élèves, 17, sont convaincus et 16 comprennent bien cette solution puisqu'ils l'utiliseraient pour expliquer à un autre élève. Or la solution de Rosemarie est un mélange de texte écrit et d'exemples numériques. Elle confirme donc les résultats précédents.

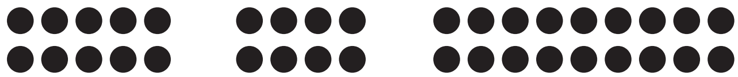
Voici la réponse de Tom.

La réponse de Tom
Soit : x = n'importe quel nombre entier y = n'importe quel nombre entier
$x + y = z$
$z - x = y$
$z - y = x$

L'analyse des résultats confirme ici ce que l'on avait observé à propos de la réponse d'Audrey, elle n'est nullement convaincante pour les élèves (ils ne la retiendraient pas pour expliquer à quelqu'un d'autre). Cette solution, celle de Tom, a l'apparence formelle de celle d'Audrey, mais est fausse. Pourtant moins d'élèves ont répondu qu'il y avait une erreur mathématique dans cette solution comparativement à la solution d'Audrey. On voit ici l'influence qu'exerce l'apparence de formalisme pour les élèves (qui est la forme bien souvent reprise par l'école).

Voici la réponse d'Yvonne.

La réponse d'Yvonne



Donc Yvonne dit que c'est vrai.

La solution d'Yvonne était visuelle. Nous nous serions attendus à ce que les élèves la choisissent plus que les autres, puisque les élèves de classes faibles comprennent habituellement mieux avec un support visuel. En fait, les élèves ont effectivement, en majorité (17 contre 4) répondu qu'ils comprenaient bien ce qui avait été fait. Par contre, il y avait autant d'élèves qui disaient que la preuve montrait bien pourquoi l'énoncé était vrai que d'élèves qui disaient le contraire. Donc, pour les élèves le dessin était moins éclairant sur la validité de la preuve que les exemples numériques. Un autre point intéressant est que, malgré que le dessin soit habituellement plus simple à comprendre que les explications écrites, l'algèbre ou les exemples numériques, les élèves ont majoritairement été en désaccord pour choisir cette preuve comme un moyen simple d'explication à un autre élève. Le support visuel fait référence, lorsqu'on l'examine de plus près, à beaucoup d'implicites que l'élève doit décoder pour comprendre la signification de cette preuve.

5.3. *Reconnaissance du caractère général de la preuve*

Les résultats des élèves à la question 5 ont permis de voir qu'un seul élève sur les 21 a repéré l'implication du deuxième énoncé dans le premier.

> *Q.5 Si tu sais que l'énoncé suivant est maintenant prouvé.*
>
> > *Lorsqu'on additionne les angles intérieurs de n'importe quel triangle, le résultat est toujours 180º.*
>
> *Zoé demande ce qu'il faut faire pour prouver que :*
>
> > *lorsqu'on additionne les angles intérieurs d'un triangle rectangle, le résultat est toujours 180º.*
>
> *Qu'est-ce que tu lui conseillerais de faire ?*

Tous les autres élèves ont suggéré, de différentes manières, de refaire une preuve. Pour les élèves, le caractère général d'une preuve n'est donc pas vu. Prouver de façon générale ne veut rien dire pour eux (puisqu'ils ne peuvent en déduire un cas singulier), ce qui rejoint leur choix d'un raisonnement empirique dans les questions précédentes.

5.4. *Preuve pour eux versus pour l'enseignant*

Trois des sept questions du questionnaire ont pu venir éclairer le choix des élèves quant à la preuve qu'ils choisiraient pour leur enseignant (Q1, Q3 et Q7). Nous voulions faire le parallèle entre ce que les élèves auraient choisi d'une part comme la preuve qu'ils auraient faite et la preuve d'autre part que leur enseignant, selon eux, aurait valorisée. Dans tous les cas, les élèves n'ont pas choisi les mêmes preuves.

Ceci fait bien ressortir les effets du contrat didactique dans les attentes vis-à-vis de la preuve, et la distance qui sépare leur propre conception de la preuve (celle qui fait sens pour eux) de ces attentes. Les preuves qu'ils choisiraient pour l'enseignant (s'ils voulaient avoir une bonne note) sont partagées, mais le recours aux nombres, à l'expérimentation, au support visuel, ne sont nullement retenus. Le fait que les élèves refusent un tel type de preuve dans ce cas veut peut-être dire qu'ils perçoivent que les enseignants n'accordent aucune valeur à ce type de raisonnement.

Pour les questions 3 et 7 (preuve géométrique), il est intéressant de noter que les élèves ont, en majorité, répondu que leur enseignant attribuerait une meilleure note aux réponses ayant utilisé le format en deux colonnes (affirmations et justifications) utilisé dans les manuels du secondaire. À la question 3, une partie des élèves ont aussi accordé une reconnaissance dans ce cas à la solution qui avait un caractère très formel. Pour les élèves, les enseignants attendent donc un certain format de preuve, une solution formelle, disposée sous forme de deux colonnes. C'est donc un certain rituel davantage que le sens de la preuve qu'on a ici retenu comme étant primordial.

5.5. Preuve algébrique et preuve géométrique

On se souvient que le premier énoncé du questionnaire était algébrique et que les énoncés suivants étaient de nature géométrique. Nous voulions voir s'il existait des différences dans la façon de percevoir ces deux types de preuves chez les élèves. Les élèves choisissent dans les deux cas des preuves empiriques, rejettent le support visuel comme forme d'explication, ont de la difficulté à comprendre la preuve formelle (qu'ils jugent non convaincante et éclairante pour eux) et ne voient pas l'implication du statut de généralité de la preuve.

Par contre, les élèves n'ont pas choisi clairement, dans le cas de l'énoncé algébrique, une solution comme étant celle à laquelle leur enseignante attribuerait une meilleure note, alors qu'ils tentent davantage de se raccrocher à un rituel lorsque l'énoncé est géométrique. Cela découle de l'inexistence des preuves algébriques dans le programme québécois du secondaire. Les élèves, n'ayant jamais fait ce type de preuves, ne savent pas à quoi leur enseignant s'attend, alors que pour les preuves géométriques le choix est toujours très clair, les élèves semblent bien savoir ce que veut l'enseignant.

5.6. Élaboration de leur propre preuve

Nous voulions voir quelles difficultés les élèves rencontraient lorsqu'il leur fallait rédiger eux-mêmes une preuve. Est-ce qu'ils allaient se servir d'un modèle développé auparavant ? (Q6)

- 10 élèves ont répondu par une preuve empirique avec un ou plusieurs exemples.
- Un seul élève a repris la preuve précédente et l'a réinvesti.
- Donc, dans leur rédaction de preuve, les élèves reflètent bien leurs choix préalables.

5.7. Sensibilité à la contradiction

Dans tous les énoncés proposés, un seul énoncé était faux (question 7).

> *La plus courte distance entre n'importe quel point P et un segment AB est la ligne qui rejoint P à C, où C est le point milieu de AB.*
>
> *François, Laure, Amanda, Edwin et Paul ont essayé de prouver si l'énoncé ci-dessus était vrai ou faux. Regarde ce qu'ils ont fait.*

Nous voulions voir si les élèves étaient aptes à repérer un tel type d'énoncé. Parmi les solutions fictives trois confirmaient que l'énoncé était faux et deux confirmaient que l'énoncé était vrai.

Onze élèves ont choisi une des solutions concluant que l'énoncé était faux comparativement à neuf qui ont choisi une preuve concluant que l'énoncé était vrai. Nous pouvons en fait dire que les élèves n'ont pas vraiment vérifié si l'énoncé était vrai ou faux au départ, ils se sont fiés au raisonnement ou à la forme de preuve suggérée dans les différentes solutions des élèves pour conclure sur ce qu'ils feraient ou ce qu'ils proposeraient à leur enseignant (pour avoir la meilleure note). Les élèves ne sont donc pas sensibles au fait que dans certains cas l'énoncé pourrait être faux, auquel cas la preuve n'a pas le même rôle (un contre exemple suffit).

6. Conclusion

Cette mini-recherche nous a permis de mettre en évidence certaines conceptions des élèves à l'égard des preuves. Ainsi, notre étude a clairement montré que les élèves de classes faibles s'appuyaient beaucoup sur les raisonnements empiriques qui sont beaucoup plus parlants pour eux. Les élèves les choisissent parce qu'ils voient dans ces ceux-ci une fonction heuristique (ces preuves éclairent, ils les comprennent). Les élèves pourraient donc bien rechercher davantage une preuve pour éclairer qu'une preuve pour convaincre (Barbin, 1988).

On voit aussi ressortir de cette étude une certaine perception des attentes des enseignants par ces élèves à l'égard de la preuve. Les élèves de classes faibles du secondaire choisissent (pour leur enseignant) des preuves contenant des erreurs mathématiques, mais qui ont le format attendu (preuve formelle, preuve en deux colonnes comme dans les manuels scolaires).

Nous avons pu voir l'importance du rôle que joue l'enseignant pour les élèves de classes faibles (Perrin-Glorian, 1993). L'élève de classes faibles n'est pas sûr de lui. Il tentera donc de se raccrocher à un certain modèle fourni par son enseignant. L'approche de l'enseignant dans l'enseignement de la preuve, on le voit bien à travers ce qui précède, apparaît centrale. Elle risque fort d'induire une certaine conception de la preuve associée davantage à un rituel qu'à un contenu.

Plusieurs difficultés rencontrées par les élèves de quatrième secondaire de classes faibles, à la lumière de notre analyse, ressortent également.

- Difficulté à voir le caractère général d'une preuve et les implications qui en découlent
- Non sensibilité à la contradiction
- Rupture entre le sens que l'élève accorde à la preuve et ce que l'enseignant (sur un plan institutionnel) reconnaît comme une preuve

Finalement, certains formats de preuves (preuves en mots par exemple) semblent appréciés et compris des élèves, et pourraient s'avérer une piste intéressante à explorer dans l'enseignement de la preuve auprès de ces élèves.

Références

Perrin-Glorian, M.J. (1993.) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes « faibles ». *Recherche en didactique des Mathématiques*, vol 13, no 12 p. 5-118

Cyr, S.(2004). *Les conceptions de la preuve chez les futurs maîtres de mathématiques au secondaire*. Thèse de doctorat en éducation. Ste-Foy : Université Laval.

Barbin, E. (1988). La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques. *Bulletin de l'APMEP*, no 366, décembre p. 591-620

Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the learning of mathematics*, vol 17, no 1 p. 7-16, février.

Pour joindre les autrices

Julie Vaillancourt, École Eulalie Durocher
4 Devault
Repentigny (Québec)
Canada J6A 4L3
juliervaillancourt@hotmail.com

Nadine Bednarz, Université du Québec à Montréal
CP 8888, succ. Centre-ville
Montréal (Québec)
Canada H3C 3P8
Descamps-bednarz.nadine@uqam.ca