



**« Maths à Modeler » : situations-recherche pour
l'enseignement des mathématiques auprès d'enfants
présentant des troubles psychopathologiques**

Frédérique Coffin, Centre Hospitalier Spécialisé de Saint Egrève, France
Mireille Dupraz, Sylvain Gravier, Laboratoire Leibnitz, Grenoble, France
Serge Manin, Centre Hospitalier Spécialisé de Saint Egrève, France
Charles Payan, Laboratoire Leibnitz, Grenoble, France

Résumé

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un partenariat entre une équipe de psychiatrie de l'enfant et de l'adolescent et une unité du Centre National de la Recherche Scientifique composée de mathématiciens. L'objectif de cette collaboration est de développer un projet de recherche portant sur l'enseignement des mathématiques auprès d'un public spécifique composé d'enfants présentant des troubles psychopathologiques et relevant de la psychiatrie publique. Au cours de ces deux dernières années, c'est dans le cadre de cet objectif général que s'est élaboré, au fil du temps, un dispositif comprenant dix enfants répartis en petits groupes de trois ou quatre sujets impliqués dans des situations-recherches. Ces situations sont proposées par l'équipe « Maths à modeler » (CNRS) et les séances font l'objet d'un enregistrement vidéo dont le contenu est soumis secondairement à une grille d'analyse. Les observations conduites à partir de ce dispositif devraient permettre, à terme, de compléter les connaissances actuelles concernant les troubles cognitifs spécifiques de ces enfants et de développer une réflexion à propos de l'adaptation des contextes d'apprentissage dans le champ des mathématiques. Enfin et subsidiairement, étant donné la part d'uniformité des processus généraux engagés dans le développement de l'enfant, les observations menées à partir d'une population clinique pourraient également enrichir les connaissances théoriques concernant les processus mis en jeu dans ce domaine chez l'enfant « ordinaire ».

Dans un premier temps, il convient d'aborder les aspects descriptifs pour présenter le contexte général de ce travail. Dans un second temps, nous situerons son cadre théorique à l'intérieur du constructivisme social pour éclairer les liens mis en jeu entre les notions d'apprentissage et de développement chez l'enfant et justifier le choix du dispositif de recherche. Enfin, et avant de conclure, nous exposerons à titre d'illustration quelques situations-recherche pour engager la discussion.

Contexte général et aspects descriptifs

Grafiti (Groupe de recherche sur les apprentissages favorisant l'individuation à travers l'intégration) est une unité de soins chargée de l'accompagnement thérapeutique, éducatif et pédagogique d'enfants bénéficiant d'une intégration scolaire en milieu ordinaire. Ce dispositif s'adresse à des enfants pris en charge dans un service de psychiatrie infanto-juvénile. Ces enfants présentent des troubles graves de la personnalité et du comportement, associés ou non à une pathologie neuro-développementale. On note, pour la plupart d'entre eux, un retard du développement cognitivo-intellectuel qui invalide la possibilité d'une scolarisation dans une classe ordinaire.

Du côté des indications

D'un point de vue nosographique et à partir de la Classification Française des Troubles Mentaux de l'Enfant et de l'Adolescent¹ (CFTMEA, 2002), deux grandes catégories diagnostiques représentent l'essentiel des organisations psychopathologiques rencontrées dans le cadre des indications portées vers ce dispositif d'intégration scolaire : les dysharmonies psychotiques et les troubles de la personnalité pris dans une dysharmonie de développement. Notons que ces deux catégories de troubles mentaux correspondent à l'intitulé «Autres troubles envahissants du développement» de la Classification Internationale des Maladies (CIM 10). Elles s'apparentent également à ce que les cliniciens du Yale Child Study Center ont identifié sous la forme des Multiplex Developmental Disorder² (MDD).

Nous allons développer rapidement chacune de ces organisations psychopathologiques.

Tant du point de vue clinique que psychopathologique, le diagnostic de dysharmonie psychotique consiste à associer la notion de dysharmonie développementale à celle des traits et mécanismes psychotiques. On évoque la dysharmonie car les résultats obtenus à partir des outils classiques d'évaluation du rythme de développement psychologique, mesurés à partir du quotient intellectuel, sont le plus souvent bas, dispersés et hétérogènes. Mais ces résultats s'inscrivent dans un tableau plus général de psychose marqué par une rupture de contacts avec la réalité et, de fait, l'enfant échoue la plupart du temps à élaborer une bonne distance à l'égard de ses apprentissages scolaires. On retrouve souvent un collage excessif qui brouille la mise en jeu des processus de pensée, plus rarement des refus intentionnels mais jamais des retraits de type enfermement tels que l'on peut les rencontrer dans l'autisme. Ainsi, on observe le plus souvent des capacités préservées chez l'enfant à trouver les voies d'une adaptation, certes précaire, aux conditions imposées par la vie collective dans le cadre scolaire. Mais, les troubles cognitifs sont toujours importants et entravent fortement les capacités d'acquisition. C'est ainsi que l'on note chez ces enfants des risques majeurs d'évolution vers des organisations de type déficitaires s'ils ne sont pas pris en charge dans le cadre d'un dispositif capable de prendre en compte le caractère multipolaire de ces pathologies et de proposer des contextes pédagogiques adaptés.

Les dysharmonies de développement constituent le second groupe diagnostique. Il s'agit d'enfants qui ne présentent pas de traits et mécanismes de la série psychotique (il n'y a donc pas de rupture du lien avec la réalité), et dont le premier contact avec la structure de soins s'est établi dès l'école maternelle qui repère généralement les difficultés profondes d'adaptation et les troubles importants des apprentissages. L'enfant présente un déficit dysharmonique, hétérogène car n'affectant pas de la même façon le développement psychomoteur, le langage et les fonctions cognitives. Les troubles instrumentaux sont fréquents (dyslexie, dyscalculies, dyspraxie, etc.) mais, par rapport au groupe précédent, les aspects cognitifs, évalués à partir du quotient intellectuel, sont généralement mieux préservés, même s'ils restent inférieurs à la norme. Du point de vue de l'étude psychopathologique, on constate souvent dans l'histoire infantile précoce des situations de carences affectives, sociales ou éducatives, des événements de ruptures ou des distorsions traduisant une discontinuité des processus

1 CFTMA. *Classification française des troubles mentaux de l'enfant et de l'adolescent* – R 2000 – sous la direction de R. Mises et du Dr Quemada. 4ème édition du CTNERHI. 2002.

2 S. Tordjman *et al.* Dysharmonies psychotiques et Multiplex Developmental Disorder, *Psychiatrie de l'enfant*, XL, 2, 1997, p. 473-504.

de soins maternels et parfois, plus simplement, un passé médical chargé, marqué par des hospitalisations itératives. Dans ce dernier contexte, les séquelles neuro-développementales ne sont pas rares et les retards d'acquisitions scolaires sont tels, qu'une scolarisation adaptée est indispensable.

Du côté du cadre

Il s'agit d'une démarche menée conjointement par deux institutions, impliquant un service de psychiatrie de l'enfant et l'Éducation Nationale. Ce partenariat a permis l'ouverture à l'école élémentaire d'une première classe spécialisée en 1991, puis d'une seconde en 1995. Chacune de ces classes accueille douze enfants d'âge scolaire dont les troubles graves de la personnalité et du comportement impliquent des altérations importantes des processus d'apprentissage et de la socialisation. Une troisième classe en collège fonctionne depuis la rentrée 2003, elle accueille dix enfants âgés de douze à quinze ans. (C'est dans le cadre de cette Unité Pédagogique d'Intégration [UPI] que nous avons choisi de développer ce projet de recherche portant sur l'enseignement des mathématiques.)

La convention signée entre l'éducation nationale et le service de santé prévoit les aspects suivants.

Du côté de l'éducation nationale : l'affectation d'un enseignant spécialisé par classe (3 enseignants) et de deux postes à temps plein d'assistante d'éducation à répartir sur l'ensemble des trois niveaux (un temps plein à l'école élémentaire et un temps plein au collège).

Du côté du service de santé : le détachement d'une équipe pluridisciplinaire (Graffiti) et l'équipement de locaux adaptés situés à proximité des groupes scolaires concernés. Cette équipe est composée d'une psychomotricienne, d'une orthophoniste, de deux éducateurs spécialisés et d'un psychologue. Elle est particulièrement chargée de la mise en place et du suivi du projet d'intégration de l'enfant. Elle développe son intervention à partir d'actions se déroulant dans ou hors l'établissement scolaire, à partir de prises en charge individuelles ou en groupes. Dans ce contexte d'intervention, les troubles de la représentation et de l'organisation de la pensée de l'enfant, leur implication dans la réalisation des apprentissages, constituent l'orientation essentielle de son travail.

En pratique, cette équipe soignante (Graffiti) propose deux grands axes d'intervention :

- Les activités thérapeutiques proprement dites où l'on distingue plusieurs supports possibles :
 - Des groupes thérapeutiques organisés dans le cadre de Graffiti.
 - Des groupes à contenu périscolaire organisés au sein de l'école.
 - Parfois un soutien individuel temporaire de l'enfant que ce soit dans le cadre même de la classe ou en dehors du contexte scolaire.
 - Un accueil séquentiel dans ses locaux, trois après midi par semaine, pour les enfants en plus grande difficulté. Cet accueil permet l'allègement des temps de scolarisation tout en renforçant l'axe thérapeutique.
- Les activités et démarches visant l'intégration psychosociale de l'enfant :
 - L'intégration individuelle de l'enfant dans les classes ordinaires du groupe scolaire.
 - L'organisation conjointe enseignants/soignants d'actions à thème de dimensions culturelle, artistique ou sportive.

- La participation de certains membres de l'équipe aux séjours classe de neige/classe verte.
- Enfin, l'implication des soignants dans des activités transversales au sein du groupe scolaire sous la forme d'ateliers décloisonnés et organisés entre plusieurs classes.

Notons, pour finir cette présentation succincte, que ce projet présente une double caractéristique. D'une part, l'absence de clivage entre pédagogues et soignants puisque les enseignants et Graffiti s'organisent en une seule équipe. D'autre part, les troubles de l'apprentissage constituent la pré-occupation commune entre les enseignants et les soignants. Les troubles de l'apprentissage sont placés au cœur du dispositif et repris par les soignants comme un matériel clinique, véritable enjeu développemental pour l'enfant.

À cette étape de notre présentation, il est maintenant nécessaire de développer les notions d'apprentissage et de développement pour exposer les supports théoriques à partir desquels les interventions de Maths à modéliser peuvent prendre corps et s'installer au cœur de ce que nous convenons d'appeler une démarche de recherche en didactique.

Apprentissage et développement

Depuis plus d'un siècle, les psychologues d'enfants considèrent que le développement humain s'édifie sur des fondations biologiques. C'est cette hypothèse que l'on retrouve aussi bien dans le béhaviorisme, dans le cognitivisme comme dans la linguistique. De même, l'ensemble des concepts du constructivisme piagetien s'origine en dernier ressort de la biologie, de l'auto-régulation organique, puisque pour comprendre le développement des structures logico-mathématiques par exemple, il faut remonter à leurs origines dans la période sensori-motrice de l'enfance qui, elle-même, se construit sur des bases biologiques.

Bref, les présupposés qui caractérisent ces théories invoquent la conception d'un développement qui se veut à la fois universel, univoque, unidirectionnel et progressif. Un développement qui tend vers un point idéal de stabilisation, passant par une série d'étapes essentielles que l'enfant franchit seul sous l'effet de la maturation et des apprentissages désormais possibles à chacune de ces étapes. Dans le cadre de cette perspective solipsiste, c'est le niveau de développement qui précède et contraint le niveau d'apprentissage.

En s'écartant de cette approche, les travaux réalisés dans le cadre du constructivisme social ont conduit à mettre en évidence l'importance dans le développement cognitif de l'interaction entre le sujet et ses pairs. Alors que pour Piaget, l'apprentissage consiste essentiellement à confronter l'élève à des situations toujours plus riches et diversifiées, le constructivisme social est venu préciser que l'enfant est d'abord et avant tout guidé dans cet apprentissage par un autre sujet sans lequel l'apprentissage resterait impossible.

Pour illustrer cette caractéristique nous reprendrons l'exemple des recherches effectuées à partir du dispositif proposé par Piaget concernant les conservations. Ces recherches ont montré que, si l'on place un enfant conservant et un enfant non conservant devant la même situation, après négociations et discussions, l'enfant non conservant s'approprie plus facilement le point de vue de l'autre enfant en produisant une transformation de son raisonnement dans le cadre d'une rééquilibration majorante. Toutes les études montrent que les enfants initialement non conservant progressent dans

la maîtrise de la conservation lorsqu'ils ont l'occasion de discuter avec des pairs de l'expérience qui leur est proposée alors que les enfants non conservant qui n'ont pas eu l'occasion de travailler avec des pairs ne progressent guère.

Alors que pour Piaget, le développement cognitif procédait de mécanismes internes placés sous l'effet de la maturation, ces travaux ont montré, par la méthode des pairs et des interactions sociales, qu'il était possible d'obtenir plus rapidement des progrès substantiels en matière de développement cognitif. Le cognitivisme social appréhende ainsi l'apprentissage comme le résultat d'un processus à la fois cognitif, comme Piaget l'avait montré, mais aussi où le social interagit pour construire une organisation mentale plus évoluée. En d'autres termes et dans ce cadre, l'apprentissage précède le développement.

Ces travaux qui redonnent une place à la dimension sociale de l'apprentissage remettent d'ailleurs au goût du jour le modèle de Lev Vygotski³ (1896-1934), chercheur russe, décédé prématurément dans les années 30 et redécouvert récemment dans le monde de la psychologie des apprentissages et des recherches en didactique.

Vygotski⁴ s'est intéressé au développement des fonctions psychiques supérieures (attention, logique, formation des concepts) par opposition aux processus élémentaires qui sont, d'après lui, partagés avec les animaux. L'origine sociale de l'apprentissage est très clairement affirmée dans la mesure où chaque fonction psychique apparaît d'abord comme une fonction sociale interpersonnelle, inter-psychique, avant d'être intégrée par le sujet comme une fonction intra-psychique à partir d'une appropriation active. Pour cela, Vygotski introduit la notion de Zone Proximale de Développement pour désigner la différence qui existe entre la capacité d'un sujet à résoudre seul une tâche donnée et sa capacité lorsqu'il réalise cette même tâche sous la guidance d'un pair plus avancé que lui. En d'autres termes, tout sujet est caractérisé par son niveau de développement actuel et par son niveau de développement potentiel. La zone proximale de développement correspond à la surface comprise entre les deux types de développement. Elle détermine ainsi les possibilités de développement à court terme d'un sujet dans le cadre d'une action éducative faisant intervenir une interaction sociale conduite sous la direction d'un sujet plus avancé.

D'un point de vue pédagogique, ces travaux ont mis en évidence le rôle important du soutien social au cours des apprentissages. Depuis une vingtaine d'années de nombreux auteurs se sont engagés dans cette voie en replaçant au premier plan les interactions sociales, comme moteur du développement chez l'enfant. C'est le cas de J. Bruner dont les théories ont de fortes répercussions dans les champs éducatif et pédagogique.

Dans un de ses ouvrages récents⁵, Bruner développe l'idée que c'est bien la culture qui façonne l'esprit des individus. Le sens donné aux choses est toujours lié à une communauté culturelle de référence. Dans le même ordre d'idée, apprendre et penser sont des activités toujours situées dans

3 Vygotski L. S. (1985), *Pensée et langage*, Paris, Messidor Editions Sociales.

4 Vygotski L. S. (1930-1997), *The history of the development of higher mental function*, in the collected works of L.S. Vygotski, vol.4, edited by R.W. Rieber. New-york : Plenum press.

5 Bruner J. S. (1996), *L'éducation, entrée dans la culture. Les problèmes de l'école à la lumière de la psychologie culturelle*, Paris, Retz.

un cadre social. Or, contrairement aux autres espèces, les êtres humains s'enseignent les uns les autres dans des cadres extérieurs à ceux dans lesquels le savoir enseigné sera utilisé.

En réaction aux pratiques de l'école qu'il juge également trop centrées sur la transmission directe par instruction de connaissances formelles, Bruner propose une approche alternative basée sur la découverte active par l'élève des principes et des concepts à maîtriser.

Ainsi, pour se rapprocher des conditions écologiques qui président aux apprentissages et pour encourager la mobilisation active des enfants, Bruner propose que l'école soit un endroit où les élèves s'aident les uns les autres à apprendre selon leurs aptitudes. L'entraide qui s'installe ainsi au sein d'une communauté d'apprenants présente alors un certain nombre d'avantages :

- Elle suscite l'émulation.
- Elle donne l'occasion de commenter le travail au fur et à mesure de sa progression.
- Elle permet d'apporter un soutien aux plus novices.
- Elle autorise au sein du groupe une répartition du travail à l'image de ce qui se pratique dans la réalité.

Cette manière de concevoir l'apprentissage conduit à une modification de la place et de la fonction de l'adulte. Il s'agit pour lui d'être un facilitateur. Bruner propose d'ailleurs d'utiliser le terme d'étayage pour caractériser les interactions pédagogiques qui prennent place entre l'adulte et la communauté d'élèves.

Ce terme d'étayage s'est maintenant imposé parmi les chercheurs néo-cognitivistes pour désigner les interactions de soutien mises en œuvre par un adulte (ou par un pair) afin d'épauler un sujet dans la résolution d'un problème qu'il ne pourrait pas résoudre seul. C'est aussi le type d'intervention pédagogique mise en œuvre au sein de la zone proximale de développement.

Bruner⁶ associe six fonctions principales à l'étayage :

- L'enrôlement qui correspond au fait que l'adulte s'efforce de soutenir l'intérêt des enfants par rapport à la tâche.
- L'orientation qui consiste à s'assurer que les enfants ne s'écartent pas du but assigné par la tâche.
- La réduction des degrés de liberté qui désigne le procédé par lequel le sujet le plus expérimenté simplifie la tâche pour aider les autres à résoudre le problème qui leur est posé.
- La mise en évidence des caractéristiques critiques de la tâche qui consiste à attirer l'attention sur les éléments pertinents de la tâche tout au long de son traitement.
- Le contrôle de la frustration qui permet d'éviter que les difficultés rencontrées ne se transforment en échec.
- La présentation de modèles qui aide parfois à démontrer la tâche ou à en détailler les étapes.

6 Bruner J. S. (1983), *Le développement chez l'enfant. Savoir faire, savoir dire*, Paris, PUF.

Maths à modeler

Compte tenu des expériences des années précédentes, le dispositif que nous proposerons dans le cadre des Maths à modeler reprendra l'ensemble des caractéristiques qui découlent des éléments théoriques ci-dessus. Comme nous l'avons indiqué au début de cette présentation, ce travail concernera, pour la troisième année consécutive, une dizaine d'enfants, âgés de douze à quinze ans, scolarisés dans une Unité Pédagogique d'Intégration (UPI). L'intervention se déroulera sur un trimestre, à raison d'une séance hebdomadaire. Les enfants seront répartis en trois groupes de pairs et chacun des groupes sera accompagné d'un adulte en situation d'étayage. Toutes les séances feront l'objet d'un enregistrement vidéo dont le contenu sera secondairement soumis à une grille d'analyse.

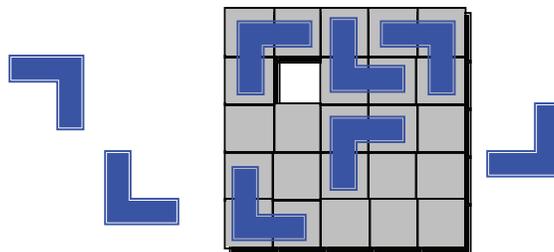
Pour que les interactions soient efficaces, les systèmes cognitifs en contact doivent disposer d'une surface de recouvrement suffisante et ces interactions doivent également prendre place dans le cadre d'un échange centré sur la coopération à l'occasion d'une activité commune dans laquelle s'engagent tous les partenaires. Les groupes devront ainsi respecter une certaine asymétrie entre les enfants sans pour autant que les distances cognitives s'avèrent trop importantes.

Du point de vue du contenu, nous nous rapprocherons d'une situation écologique en proposant aux groupes d'enfant un matériel ludique afin de donner une large place à la spontanéité et éveiller leur curiosité. L'objectif de ces situations-recherche sera de permettre à l'enfant de découvrir des concepts mathématiques liés à la preuve et plus généralement la démarche scientifique. Pour chacune des situations les élèves expérimentent à l'aide du support matériel, émettent des conjectures et accèdent à des premières preuves. Ils mettent en œuvre des heuristiques proches de celles du chercheur. Les situations-recherche sont inspirées de recherches récentes en mathématiques discrètes. En particulier, les élèves peuvent être amenés à formuler des conjectures qui sont des problèmes non résolus.

À titre d'illustration, nous donnons une brève description d'une situation expérimentée dans ce cadre et détaillons trois autres.

Pavage par des triminos en L

Il s'agit de paver des rectangles, privés éventuellement d'une case, avec des triminos en L.



Cette situation a des caractéristiques similaires à celle sur le pavage par des dominos, de rectangles tronqués (voir l'analyse décrite dans Grenier et Payan, 1998⁷). Ces problèmes de pavage font

7 Grenier D., Payan Ch. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 18.2, p. 59 -100, Éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

émerger les concepts de contre-exemple, preuve par induction, conservation de l'aire, divisibilité, implication, etc.

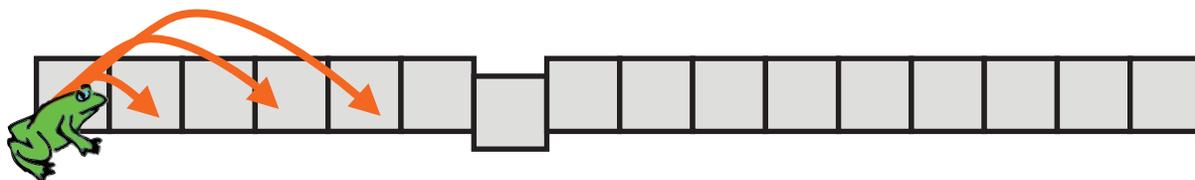
Les problèmes de pavage par des polyminos (morceau de grille) sont très difficiles et font l'objet de nombreuses conjectures. Par exemple, le problème de caractérisation des polyminos pavables par des dominos n'est pas complètement résolu. On peut trouver des éléments de réponse dans Thurston (1990)⁸.

Jeu de la grenouille

Ce jeu à deux joueurs est une généralisation de «la course à 20». On dispose d'un tas de cailloux, et les joueurs doivent ôter, à tour de rôle, certains nombres fixés de cailloux (par exemple, 1 et 2, comme pour la «course à 20», ou 1, 3 et 4,...). Le joueur ne pouvant plus jouer a perdu.

Une autre formulation de ce jeu peut être proposée :

On place une grenouille sur une bande de longueur fixée. Les joueurs jouent alternativement en déplaçant la grenouille toujours dans le même sens. La grenouille peut faire des sauts de longueurs données (par exemple, des sauts de longueurs 1 ou 2, ou encore 1, 3 ou 4,...). Le joueur qui fait le premier sortir la grenouille de la bande a gagné.



Comme la plupart des jeux à deux joueurs, la principale difficulté réside dans la compréhension de ce qu'est une stratégie gagnante. Les autres concepts en jeu sont essentiellement l'induction, la périodicité qui est une généralisation de la divisibilité.

De plus, malgré des contraintes de taille du jeu, liées à l'utilisation d'un support matériel, les élèves peuvent prendre l'initiative de modifier la donnée du problème en changeant la longueur des sauts. Ceci permet l'étude d'un nouveau jeu qui peut «mathématiquement» être assez différent. Cette liberté prise sur la formulation du problème est une des caractéristiques de la recherche scientifique.

Nous pouvons étendre l'étude de ces jeux en jouant avec plusieurs grenouilles et/ou bandes. La formalisation de ce type de jeux peut se trouver dans Berlekamp, Conway et Guy⁹.

Cette expérimentation s'est déroulée en 4 séances d'environ une heure :

- séance de familiarisation et d'appropriation du jeu des cailloux en enlevant 1 ou 2 cailloux.

On débute avec des tas grands afin que les élèves se familiarisent avec les règles du jeu. Ensuite, on commence à analyser le jeu en étudiant des petits tas 1,..., 7. Par une approche exhaustive on peut

8 Thurston W. (1990), Conway's tiling groups, *American Math Monthly* 95 – Special Geometry Issue.

9 Berlekamp E.R., Conway J.H. et Guy R.K. (2000), *Winning ways for your mathematical plays* I, A.K. Peters, Ltd.

voir que le premier joueur peut gagner pour les tas de taille 1, 2, 4, 5 et 7 alors qu'il perd pour 3 et 6. Une règle générale sur les multiples de 3 peut alors apparaître.

Cette première version simple permet d'aborder les notions de situation gagnante (il existe une façon de jouer qui amène le joueur suivant dans une situation perdante) et de situation perdante (quelle que soit la façon de jouer on donne une situation gagnante à son adversaire).

- On fait travailler les élèves avec d'autres nombres, notamment 1, 3 et 4 et un tas de taille variée.

Dès la première séance, il était apparu que le jeu pouvait être gagnant (G) ou perdant (P), pour le premier joueur, en fonction de la taille du tas. Une méthode d'analyse consiste à marquer G ou P une taille de tas gagnante ou perdante respectivement. Ce marquage se déduit récursivement des marquages précédant en utilisant les nombres autorisés de cailloux à enlever.

Cette méthode est assez générale et permet de résoudre pour des tailles de tas raisonnable la plupart de ces jeux.

- On propose aux élèves d'étudier le jeu de la grenouille.

L'objectif de cette séance est de repérer si les élèves font le rapprochement entre ce nouveau jeu et le jeu des cailloux.

Ils mettent rapidement en jeu les mêmes outils de résolution (comme la procédure précédemment décrite) mais le rapprochement avec le jeu des cailloux est plus difficile à faire émerger.

- Étude du jeu de la grenouille sur deux bandes en parallèle, dans cette version la grenouille fait les sauts qu'elle veut.

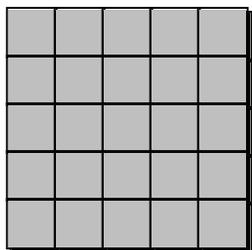
La difficulté de marquer deux bandes en parallèle constitue un obstacle à la mise en œuvre de la même stratégie que précédemment.

Malgré cela, certains élèves repèrent les situations perdantes.

- La dernière séance a été consacrée à la réalisation d'un poster pour chaque groupe et d'une présentation au reste de la classe.

Chasse à la bête

Sur un territoire donné (ici un rectangle quadrillé), on dispose de «pièges». Aucune bête ne doit pouvoir pénétrer sur le territoire sans toucher un piège. Une bête est un polymino donné formé de quelques cases.



Piège : 

Bêtes :



ou



L'enjeu est de disposer le plus petit nombre de pièges sur le territoire.

Ce problème est caractéristique des problèmes d'optimisation. En effet, pour montrer la valeur optimale, il convient d'une part d'exhiber une solution de cette valeur (il suffit) et d'autre part, faire une preuve montrant que l'on ne peut pas faire mieux (il faut).

Le problème de recherche qui nous¹⁰ a inspiré cette situation est dû à Golomb (1994)¹¹.

Cette expérimentation s'est déroulée en 5 séances d'environ une heure :

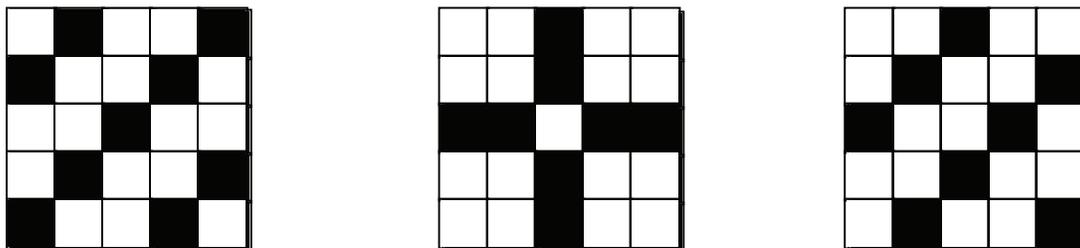
- séance de familiarisation et d'appropriation du problème où les élèves ont choisi une bête (d'au plus 5 carrés) à chasser sur un carré 8 par 8.

Rapidement les groupes proposent des solutions, pour faire apparaître l'enjeu de l'optimalité, on retire un piège dans leur solution afin de faire apparaître une bête. Cet aller-retour aboutit à un moment critique où les élèves pensent ne pas pouvoir faire mieux. À ce stade, les échecs dans l'amélioration de leur solution suffisent à les convaincre d'avoir atteint l'optimum sauf si un groupe a fait mieux.

Pour avancer dans le problème, on leur propose de traiter des cas plus simples :

- la séance suivante était consacrée à la chasse à la bête  sur un carré 5 par 5.

Après des solutions de 11, 10 ou 9 pièges, les élèves exhibent des solutions n'utilisant que 8 pièges :



Après plusieurs tentatives infructueuses avec 7 pièges, les élèves sont convaincus que l'optimum est 8. On leur demande alors de nous montrer que l'on ne peut pas avec 7 pièges (même des chercheurs !).

À ce stade de la situation, il apparaît une des difficultés majeures dans l'enseignement des mathématiques : la nécessité de preuve. Pour les élèves, les échecs successifs suffisent et l'argumentation n'apparaît pas nécessaire surtout pour ceux qui ont des difficultés à se dissocier de l'objet.

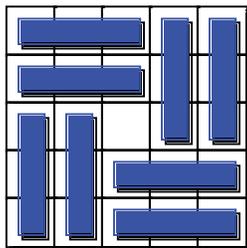
On tente de les amener vers une démarche plus rationnelle en leur proposant de montrer des propriétés plus simples telles que : « Peut-on y arriver avec 1 piège, 2, 3... ? »

Un argument de « pavage » apparaît alors : si on peut mettre 5 bêtes disjointes sur le territoire alors il faudra 5 pièges pour les piéger donc au moins 5 pièges pour piéger toutes les bêtes.

¹⁰ Gravier S. et Payan Ch. (2001), On the pentomino exclusion problem, *Discrete and Computational Geometry*, 26 : 375-386.

¹¹ Golomb S.W. (1994), *Polyominoes – Puzzles, Patterns, Problems and Packings*. Princeton Science Library, Princeton, NJ.

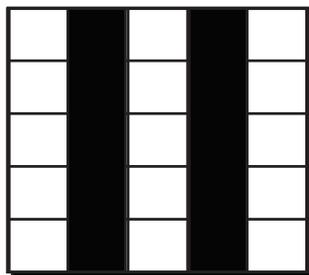
On peut ainsi montrer que 8 pièges sont nécessaires dans notre cas.



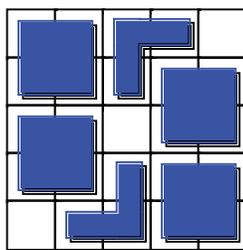
À la suite de cette preuve, des élèves ont cherché, de leur propre initiative, à placer le plus petit nombre de bête de manière à ne plus pouvoir placer de bête dans l'espace restant. Ceci revient à chasser la bête avec des pièges identiques à la bête :

- la séance suivante était consacrée à la chasse à la bête  sur un carré 5 par 5.

Son déroulement est similaire à la séance précédente et les élèves ont réinvesti la démarche de preuve abordée. Cependant, l'argument de pavage par des bêtes ne suffit plus car on ne peut mettre que 8 bêtes dans un carré 5 par 5 alors que la meilleure solution obtenue utilise 10 pièges.



On obtient alors, seulement, un encadrement sur la valeur de l'optimum. De tels résultats sont courants dans les problèmes de recherche. Toutefois, on peut dans ce cas précis raffiner la preuve par pavage afin de montrer que 10 sont nécessaires. Nous avons pu aborder cette nouvelle preuve avec certains élèves. La voici résumée en deux dessins :

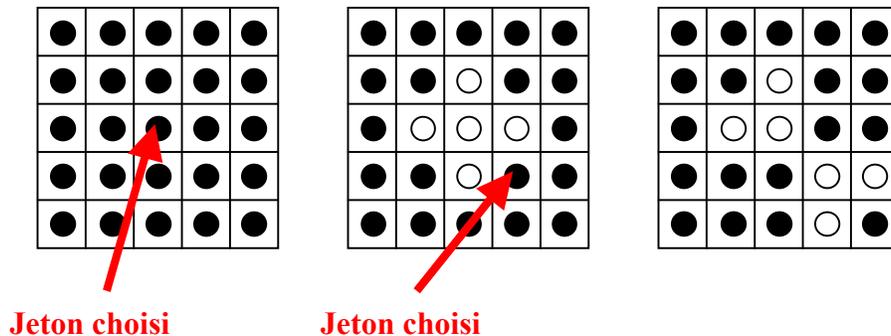


- On consacre cette séance à réinvestir ces idées et/ou méthode en proposant aux élèves d'étudier les mêmes bêtes sur des territoires plus grand (carré 7 par 7, par exemple) ou de revenir à leur premier problème.
- La dernière séance était consacrée à la réalisation d'un poster pour chaque groupe et d'une présentation au reste de la classe.

Ce type de séance permet d'institutionnaliser à la fois l'ensemble des résultats obtenus mais aussi de répertorier les conjectures et les méthodes employées. Cette séance a nécessité un plus grand effort d'encadrement notamment lié aux difficultés de transcription.

Tout noir/Tout blanc

Sur une grille rectangulaire, des jetons à double face (noire et blanche) sont disposés face noire visible. Le but du jeu est de les mettre tous sur la face noire en appliquant la règle suivante : lorsque l'on choisit un jeton alors lui-même et ses voisins (nord, sud, est, ouest) sont retournés.



C'est un problème caractéristique des problèmes d'existence. L'enjeu est de déterminer si cela est possible et de mettre en œuvre des stratégies de résolution.

Les problèmes de recherches concernent des questions d'existence et d'énumération sur la grille ainsi que dans des structures plus générales¹². Des généralisations de ce problème ont aussi été étudiées¹³.

L'expérimentation s'est déroulée en 5 séances d'une heure environ où nous avons orienté la situation en vue de faire émerger la problématique d'impossibilité :

- séance de familiarisation et d'appropriation du problème où les élèves ont cherché à résoudre le problème pour un carré 5x5.

Ce domaine suffisamment grand pour que le problème soit attirant et tel qu'il est très difficile de trouver une solution par tâtonnement.

Après avoir joué un certain temps on ne sait pas s'il est possible de tout retourner. Par ailleurs, on n'est pas sûr de ne pas avoir fait d'erreur de manipulation.

On peut se fixer comme objectif de retourner le maximum de jetons. Les élèves arrivent à tout retourner sauf 1 ou 2 jetons.

Ils n'envisagent pas à ce niveau-là l'éventualité de l'impossibilité de tout retourner, mais testent leur « habileté » et « se mesurent » aux autres élèves.

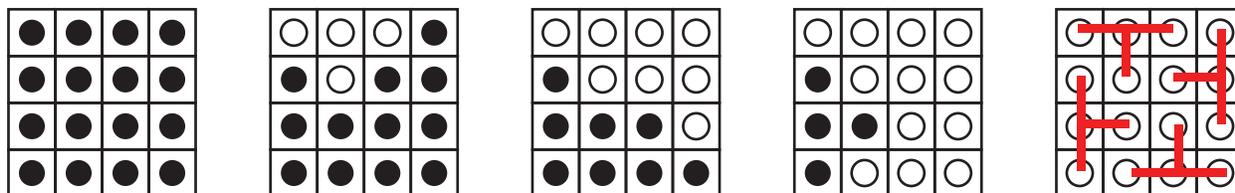
Pour avancer dans le problème, on leur propose de traiter des cas plus simples :

12 K. Sutner «Linear cellular automata and the garden-of-Eden», Math. Intelligencer 11 (1989), p. 49-53.

13 M. Mhalla, S. Gravier, E. Tanier «on modular domination game», Theoretical Computer Science 306 (2003), p. 291-303.

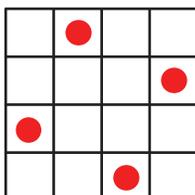
- on étudie la situation pour des carrés plus petits : 2x2, 3x3 et 4x4.

La solution pour le carré de côté 4 émerge assez rapidement :

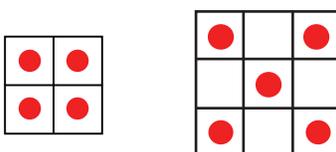


En effet, on peut voir que dans cette solution tous les jetons sont retournés une seule fois. Cette stratégie d'« économie » est largement utilisée mais elle échoue souvent. Par exemple, pour le carré de côté 2, il faut choisir tous les jetons et ils seront tous retournés 3 fois.

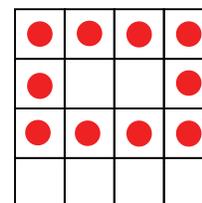
Pour éviter les erreurs de manipulation et se rappeler des solutions trouvées, les élèves sont amenés à noter leurs actions. Il se pose alors le problème de représentation d'une séquence de jeu. Ils conviennent souvent de noter uniquement les jetons choisis dans l'ordre où ils ont été joués. Il est plus difficile de voir que l'ordre n'a pas d'importance. L'ensemble des jetons choisis pour la solution du carré 4x4 illustrée plus haut est :



Des solutions pour le 2x2 et 3x3 :



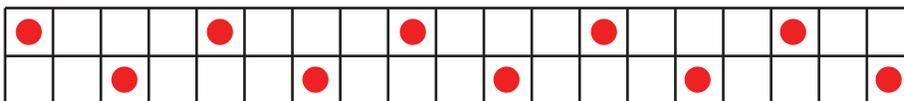
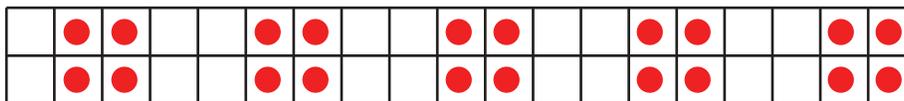
En fait, ces solutions sont uniques et on pourrait se demander si c'est toujours le cas. Cette autre solution du 4x4 montre le contraire.



Afin de mettre en œuvre des méthodes plus générales que le tâtonnement nous proposons :

- la séance suivante est consacrée à l'étude des bandes 1xn et 2xn.

Lorsque n est « grand », les élèves ont tendance à commencer sur la première colonne et à propager leur solution. Il est intéressant de noter que cette approche peut donner lieu à un algorithme même pour des bandes plus larges. Il apparaît que des motifs se répètent et forment une solution. Par exemple :



Afin de faire travailler les élèves sur l'impossibilité nous avons proposé dans la séance suivante :

- au lieu de débiter par la configuration où tous les jetons sont sur la face noire, on débute par une configuration quelconque et on essaie d'atteindre tout blanc.

Il est connu que de tout noir on peut toujours passer à tout blanc (la preuve de ce résultat n'est pas accessible à de si jeunes élèves). Cependant, il existe des configurations pour lesquels on ne peut pas atteindre tout blanc.

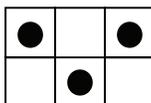
Les élèves ont étudié ce problème pour des petites grilles: 1x2, 1x3 et 2x3. Pour 1x3, toutes les configurations permettent d'atteindre tout blanc. Pour 1x2, la configuration

●	□
---	---

 ne permet pas d'atteindre tout blanc, ce qui constitue le premier résultat d'impossibilité.

Cependant, le cas est petit et simple et est considéré comme un cas particulier et n'est pas significatif.

Au cours de cette séance un élève a étudié le cas de la configuration suivante :



- nous avons décidé de proposer la résolution de cette configuration à l'ensemble de la classe.

On peut montrer (par énumération par exemple) que, partant de cette configuration, on ne peut pas atteindre tout blanc.

Certains élèves ont mis en œuvre une énumération plus ou moins exhaustive qui a pu les convaincre de l'impossibilité (impossibilité objective, indépendante d'eux).

Conclusion

À partir de ce dispositif nous nous intéressons aux caractéristiques spécifiques des troubles cognitifs présents dans une population clinique composée d'enfant souffrant d'une pathologie mentale et suivis par le service de psychiatrie infanto-juvénile.

Nous faisons l'hypothèse qu'une étude pour un public en très grande difficulté donne des éléments de gestion et d'analyse didactique des situations-recherche dans un cadre scolaire «classique».

Des premières analyses du contenu des séances, à partir de séquences vidéo, sont basées sur la grille d'observation de l'élève : Expérimentation, Transcription, Argumentation, Présence passive,

Agitation. Ces analyses sont comparées aux valeurs des fonctions d'étayage du facilitateur (un par groupe).

Les observations déjà effectuées nous ont permis, pour l'instant, de développer un certain nombre d'observations à partir de deux types de constats :

Un petit nombre d'enfants qui échouent dans la mise en route du processus d'apprentissage et qui ne s'approprient pas les outils proposés par les chercheurs. Ces observations nous permettent de préciser la nature des aspects déficitaires qui participent aux tableaux psychopathologiques. Il s'agit d'enfants qui présentent une « viscosité génétique » qui freine considérablement le déroulement des apprentissages et donc du développement. Ils se montrent relativement insensibles à la variation, tant des supports que des contenus.

Un plus grand nombre d'enfants qui s'approprient, chacun à son niveau, le dispositif et les outils proposés par les chercheurs et qui mettent en œuvre des processus d'apprentissage dans le domaine des mathématiques, parfois de façon surprenante compte tenu des possibilités cognitives pressenties. Ces capacités révèlent des potentialités préservées chez ces enfants, capacités qui restaient certainement masquées dans le contexte d'un enseignement construit sur un mode traditionnel.

La mise en évidence d'obstacles liés, par exemple, au rapport à l'objet chez ces enfants permet de donner des clés d'analyse des difficultés rencontrées dans l'apprentissage de la preuve et du raisonnement en général dans le cadre d'un enseignement classique. Ce travail permet un retour sur les analyses épistémologique et didactique des situations-recherche.

Il semble que l'un des principaux obstacles à l'entrée dans une problématique de preuve réside essentiellement dans la difficulté à percevoir l'objectivité d'une question et à dissocier la réponse à cette question (par exemple en terme de vrai/faux) de la capacité du sujet à y répondre.

Par exemple, dans la situation « Tout noir/Tout blanc », on a voulu observer chez un élève présentant un syndrome d'Asperger si l'impossibilité d'une situation pouvait être envisagée et prise en compte. Le passage, chez cet élève, de « je crois que je peux pas y arriver » à « je pense que c'est impossible » puis à « c'est impossible », après la mise en œuvre d'un raisonnement, témoigne de l'entrée dans une réelle problématique mathématique. Parallèlement, les autres élèves du groupe n'ont pas distingué nettement l'impossibilité objective de la situation de leur incapacité de résolution.

Cette dernière attitude nous semble assez répandue dans l'institution scolaire où la résolution d'exercices et de problèmes consiste plus à tester les capacités et les connaissances des élèves qu'à trouver la réponse à une question.

Références

Bruner J. S. (1983), *Le développement chez l'enfant*. Savoir faire, savoir dire, Paris, PUF.

Bruner J. S. (1996), *L'éducation, entrée dans la culture. Les problèmes de l'école à la lumière de la psychologie culturelle*, Paris, Retz.

CFTMA. *Classification française des troubles mentaux de l'enfant et de l'adolescent – R 2000* – sous la direction de R. Mises et du Dr Quemada. 4^e édition du CTNERHI. 2002.

Tordjman, S. *et al.* (1997). Dysharmonies psychotiques et Multiplex Developmental Disorder, *Psychiatrie de l'enfant*, XL, 2, p. 473-504.

Vygotski L. S. (1985), *Pensée et langage*, Paris, Messidor Éditions Sociales.

Vygotski L. S. (1930-1997), *The history of the development of higher mental function*, in the collected works of L.S. Vygotski, vol. 4, edited by R.W. Rieber. New York: Plenum press.

Pour joindre les auteurs

Frédérique Coffin et Serge Manin

GRAFITI: Unité Fonctionnelle n° 4423.

1 rue d'Auvergne, 38130 Echirolles.

Service I03 de psychiatrie de l'enfant et de l'adolescent.

Centre Hospitalier Spécialisée de Saint Egrève (Isère), France.

Mireille Dupraz, Sylvain Gravier et Charles Payan

CNRS, ERTé Maths à Modeler, Laboratoire Leibniz,

46 avenue Félix-Viallet, 38031 Grenoble Cedex (France)

Courriel: charles.payan@imag.fr