

Quelques aspects culturels-historiques du développement des mathématiques en Afrique ¹

Paulus Gerdes ²

Avant-propos

Je voudrais commencer ma conférence avec quelques questions, ou, peut-être, provocations pour stimuler notre réflexion.

(1) Vous connaissez bien Pythagore, Fibonacci, et Pascal. Étaient-ils des Africains ou des Européens?

(2) Utilisez-vous des idées, conceptions, ou notations mathématiques développées en Afrique?

Par exemple, vous utilisez, tous les jours, des abréviations (+, -, x, :) pour les opérations arithmétiques? D'où vient cette idée?

À partir du XII^e siècle, on peut observer au Maghreb, l'élaboration d'un nouvel outil, d'un symbolisme arithmétique et algébrique. L'un des mathématiciens principaux qui a contribué à cette élaboration est Ibn al-Yasamin (m. 1204), poète et enseignant, fils d'une esclave noire et d'un père berbère. La Figure 1 montre un fragment d'un texte de ce temps.

Symbolisme des fractions
(D'après Djebbar, 2005, p. 93)
Figure 1

Je présenterai les thèmes suivants : L'histoire des mathématiques en Afrique ; Reconstruction de l'histoire et sa valorisation dans la recherche et dans l'enseignement ; Idées, pratiques et recherches mathématiques dans le contexte des traditions africaines ; et Culture comme source d'inspiration pour l'enseignement des mathématiques.

1. L'histoire des mathématiques en Afrique

Tout au long de l'histoire, l'Afrique a été au premier plan du développement des mathématiques. Mais cette histoire était et est méconnue. Elle devait être recherchée, étudiée et divulguée. Avec cette

¹ Version abrégée de la conférence plénière invitée au Congrès 'Espace Mathématique Francophone Enseignement des mathématiques et développement : Enjeux de société et de formation', Dakar (Sénégal), 6 – 10/04/2009.

² Centre d'études mozambicains et ethnosciences, Université pédagogique, Maputo, Mozambique (Paulus.gerdes@gmail.com)

objectif, L'Union Mathématique Africaine a créé, en 1986, la Commission pour l'Histoire des Mathématiques en Afrique (AMUCHMA)³. L'un des projets de l'AMUCHMA a été la production d'une bibliographie annotée sur les mathématiques dans l'histoire et les cultures africaines (Gerdes & Djebbar, 2004, 2007).

Parmi les manifestations les plus anciennes au monde de l'intérêt humain à concevoir des figures géométriques et compter, il y a des carrés et rectangles dessinés en Afrique du Sud il y a plus de 50 mille ans. On a pu observer des quantités marquées sur des pierres ou des os, trouvés dans des grottes des montagnes Libombo (zone de frontière entre l'Afrique du Sud, Swaziland et Mozambique ; il y a 35 mille ans) et en de Ishango (Congo) (il y a 28 mille ans) (cf. Huylebrouck, 2008).

Le premier président de l'Union Mathématique Africaine, Henri Hogbe-Nlend (1976-1986) a présenté à l'Université des Nations Unies, en 1985 à Nairobi, le thème « Afrique, berceau de la mathématique mondiale? ». Dans ce contexte, il souligne que les mathématiques en Afrique pharaonique étaient intuitives, démonstratives et rationnelles, et que l'Afrique est la mère de la Géométrie. La définition ou description la plus ancienne de la mathématique, que l'on connaît, est contenue dans le titre du texte mathématique copié par le scribe Ahmès (Ahmose) (environ 1650 a.C.): "Méthode correcte d'investigation dans la nature pour connaître tout ce qui existe, chaque mystère, tous les secrets" (cf. Obenga, 1995).

On peut citer beaucoup d'exemples historiques des mathématiciens et professeurs de mathématique africains et d'autres mathématiciens qui ont vécu en Afrique depuis l'Antiquité. On rencontre, au Maghreb, Theodorus (465-398 a.C.), Eratosthenes (276-194 a.C.) et Nicotelese (e. 250 a.C.) à Cyrène, et Theodoses à Tripoli (2^e siècle a.C.) et Apuleius à Madaura (124-170). En Egypte ont travaillé pendant Euclide (365-300 a.C.), Héron (100), Diophante (250), et Hypatie (370-415, la première mathématicienne dont on connaît le nom dans l'histoire.

L'Afrique du Nord a joué un rôle important dans la genèse d'algèbre dans la culture islamique (voir Djebbar 2005). Mathématiciens de l'Egypte au Maghreb ont fait des contributions, comme Abu Kamil (850-930), Abu Bakr al-Hassar (12^{ème} siècle), Samaw'al (m. 1175), Ibn al-Yasamin (m. 1204), Ibn Rashiq (e. 1275), Ibn al-Banna (1256-1321), Uqbani (1320-1408), Ibn Qunfudh (1339-1407), Ibn al-Ha'im (1352-1412), Ibn Haydur (m. 1413), Ibn al-Majdi (1365-1447), Qatrawani (15^{ème} siècle), Sibte al-Maradini (1423-1506), et Ibn Ghazi (1437-1513). Des mathématiciens importants nés au dehors du continent africain ont travaillé pendant beaucoup d'années en Afrique du Nord, comme Ibn al-Haitham (965-1041), Al-Qurashi (m. 1184), et Al-Qalasadi (1412-1485). Ibn Mun'im (m. 1228) d'origine d'Andalousie a résidé à Marrakech où il a créé les fondations de l'analyse combinatoire, en incluant la présentation du 'triangle de Pascal', plus de quatre siècles avant Blaise Pascal (1623-1662) (Voir Figure 2).

³ Page de l'AMUCHMA:
www.math.buffalo.edu/mad/AMU/amuchma_online.html

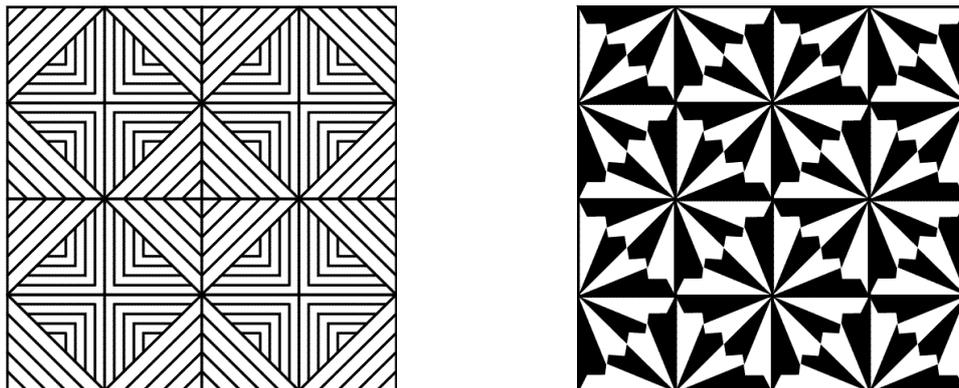
٢٢	٢٤	١٧	٢١	١٠	٢٥	٢
٥	٢٣	٢٨	١٤	٢٢	١١	٢٩
٣٠	٦	٢٢	٢٩	١٨	٢٦	١٣
١٣	٣١	٧	٢٥	٢٣	١٩	٢٧
٢٨	١٢	٢٢	١	٢٦	٢٤	٢٠
٤١	٢٩	٨	٢٣	٢	٢٧	٢٥
٢٦	٢٥	٢٠	٢٢	٢٢	٢٢	٢٤

Carré magique dans un manuscrit de Muhammed al Katsinawi
(D'après Gerdes & Djebbar, 2007, p. 260)
Figure 3

Êtes-vous bons en calcul mental ? Savez-vous calculer rapidement $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = ?$ Ou, combien de secondes a vécu un homme de 70 ans, 17 jours et 12 heures?

Ce sont des questions posées, en Virginie, à Thomas Fuller (1710-1790) en 1788 et il avait répondu correctement en quelques instants. Fuller était un Africain, emmené comme esclave en Amérique en 1724. Il avait des capacités remarquables en calcul mental, et tard dans sa vie, il a été découvert par des militants anti-esclavage, qui l'utilisaient pour démontrer que "l'homme noir n'était pas mentalement inférieur par rapport à l'homme blanc" (Fauvel & Gerdes, 1990). L'exemple de Fuller révèle l'existence, au 18^e siècle, de traditions de calcul mental dans la région dont il était originaire, probablement du Golfe du Bénin.

Notre collègue camerounais Georges Njock souligne que la géométrie est omniprésente dans les cultures africaines : "La Mathématique pure est l'art de la création et de l'imagination. En ce sens, l'art noir est mathématique" (Njock, 1985). Comme illustration, nous donnerons la décoration 'litema' des murs par des femmes au Lesotho (cf. Gerdes 1996). La Figure 4 présente des patrons à une et deux couleurs.



Exemples de 'litema'
(Après Gerdes, 1996)
Figure 4

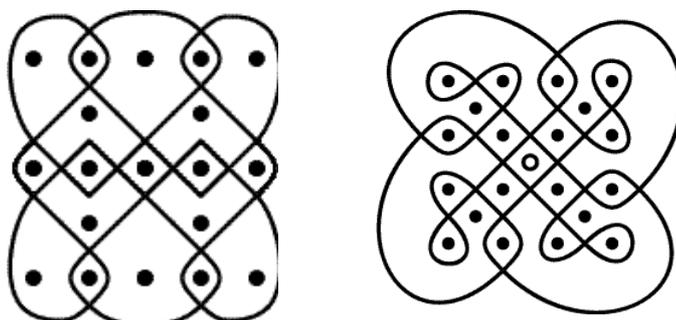
Pour une vision panoramique d'idées géométriques et mathématiques dans les cultures d'Afrique au Sud de Sahara, il est possible de consulter

l'étude classique de Zaslavsky (1973), et celles de Gerdes (1999, 1996) et Eglash (1999) pour les fractals.

2. Reconstruction de l'histoire et valorisation dans la recherche et dans l'enseignement : L'exemple des 'sona'

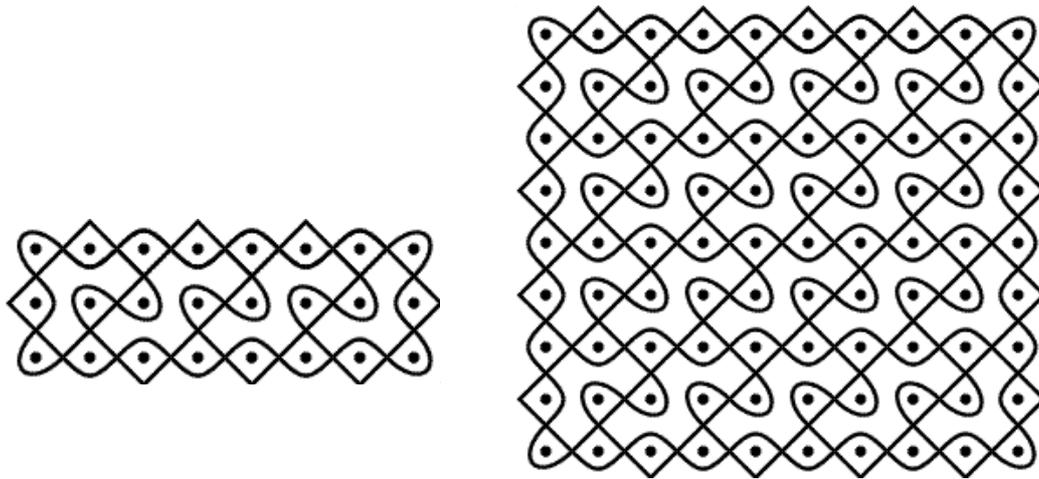
Un exemple très intéressant de créativité et imagination est la géométrie des 'sona' développée parmi les *Cokwe* (*Tshokwe*) de l'Angola (Gerdes, 1995). Les 'sona' (singulier : 'lusona') sont des dessins faits dans le sable pour illustrer des histoires, proverbes, légendes, Chaque garçon apprenait la signification et l'exécution des 'sona' les plus faciles. Par contre, les 'sona' plus compliquées n'étaient connus que par d'experts. Les dessins étaient exécutés de la manière suivante : après avoir nettoyé et lissé le sol, les experts en dessin fixaient d'abord avec les bouts de leurs doigts un réseau de points équidistants (comme un système de coordonnées) et traçaient ensuite une ligne qui entoure les points du réseau.

Comme le suggèrent les deux exemples de 'sona' sur la Figure 5, la symétrie et la monolinéarité ont joué un rôle important en tant que valeurs culturelles : la plupart des dessins sont symétriques et/ou monolinéaire. Monolinéaire veut dire être composé d'une seule ligne (lisse) ; une partie de la ligne peut croiser une autre partie de la ligne, mais une partie de la ligne ne peut jamais toucher une autre partie de la ligne.



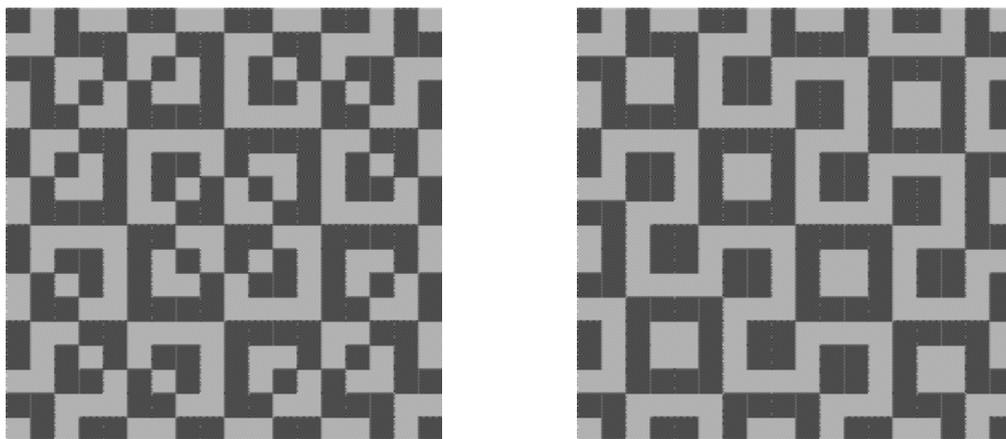
Deux 'sona' symétriques et monolinéaires
(D'après Gerdes, 1995)
Figure 5

Le commerce des esclaves, la pénétration et l'occupation coloniales ont provoqué la perte d'une grande partie des connaissances sur les 'sona'. Sur la base de l'analyse des *sona* rapportés par les missionnaires, les administrateurs coloniaux et les ethnographes, il est possible de reconstruire des éléments mathématiques dans la tradition des 'sona' (Gerdes, 1995, T.1). Les experts en dessin avaient développé toute une série d'algorithmes géométriques pour la construction de motifs symétriques monolinéaires. La Figure 6 montre deux 'sona' monolinéaires appartenant à la même classe, dessinés en appliquant le même algorithme géométrique. Les experts *Cokwe* des 'sona' avaient développé des connaissances d'algorithmes, de règles de construction et de théorèmes.

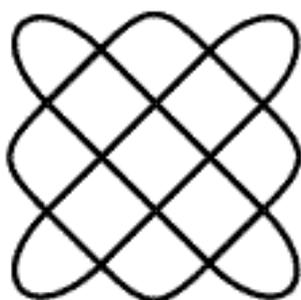


Deux 'sona' monolinéaires dessinés avec le même algorithme géométrique
Figure 6

Après avoir reconstruit certains éléments de la tradition 'sona', il m'était devenu possible d'essayer d'explorer son potentiel géométrique, à la fois dans l'éducation mathématique (voir Gerdes: 1995 T.2, 1997, 1999, 2007a) et dans la construction de la théorie mathématique. Mon expérience personnelle de recherche m'a appris que les 'sona' représentent un champ très fertile pour des explorations mathématiques. J'ai été conduit successivement à l'invention ou à la découverte et à l'analyse des courbes en miroir, des 'Lunda-designs' (voir l'exemple sur la Figure 7), de la symétrie 'Lunda' (Gerdes, 1999, 2007b), des 'Liki-designs' et des nouveaux types de structures algébriques comme les matrices cycliques périodiques (Gerdes, 2008 ; voir l'exemple sur la Figure 8), les matrices de cylindre, et les matrices d'hélice.



Deux exemples de Lunda-designs carrés
Figure 7



a	b	c	d	e	f
b	d	a	f	c	e
c	a	e	b	f	d
d	f	b	e	a	c
e	c	f	a	d	b
f	e	d	c	b	a

Structure

Forme générale

Structure et forme générale d'une matrice cyclique négative de dimensions 6x6 et de période 2 : Les nombres a et b alternent le long de la première ligne ; c et d le long de la deuxième courbe et e et f le long la troisième.

Figure 8

L'exemple des 'sona' montre la possibilité de la reconstruction des aspects mathématiques d'une tradition africaine 'oubliée' et éliminée, et comment cette tradition une fois partiellement reconstruite peut mener à des idées nouvelles pour l'enseignement mathématique (expérimentation avec l'incorporation des 'sona' dans la formation des professeurs des mathématiques et dans l'enseignement des mathématiques dans plusieurs niveaux) et mener aussi à la découverte d'idées mathématiques nouvelles. De cette façon, les 'sona' constituent une source d'inspiration pour la recherche mathématique et pour l'éducation mathématique.

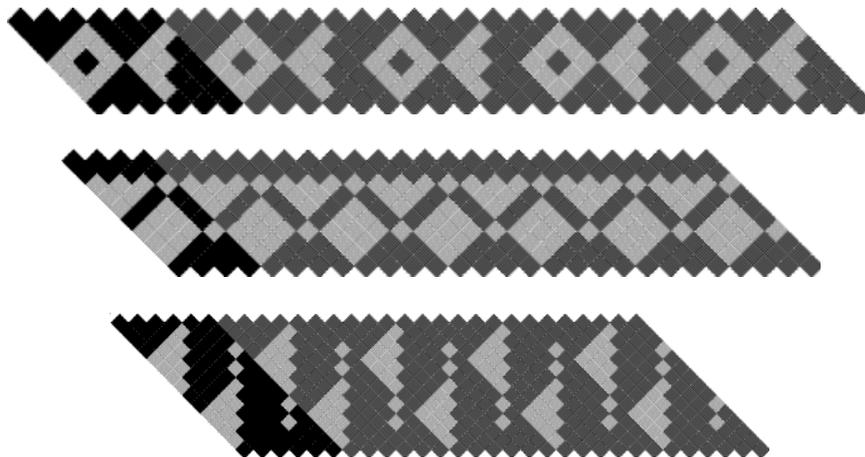
3. Idées, pratiques et recherches mathématiques dans le contexte des traditions africaines: l'exemple des 'sipatsi'

Les 'sona' étaient un exemple d'une tradition du passé et sa reconstruction, sa récupération et sa valorisation dans le présent s'effectuaient aussi bien dans l'enseignement que dans la recherche mathématique. Maintenant je voudrais présenter une pratique culturelle très vivante que j'avais eu l'opportunité d'accompagner et d'analyser pendant plus de trente ans : la pratique de tresser des sacs à main dans la culture Tonga du littoral de la province d'Inhambane au sud-est du Mozambique (Gerdes / Bulafo, 1994 ; Gerdes, 2003, 2009b). À cause de leur beauté et de leur caractère pratique, les sacs à main et les paniers faits par les vanniers Tonga (pour la plupart des femmes) sont parmi les produits les plus appréciés de l'artisanat mozambicain. Les sacs à main sont appelés 'sipatsi' (singulier: 'gipatsi'). La Figure 9 présente un exemple d'un 'gipatsi'.



Exemple d'un 'gipatsi'
Figure 9

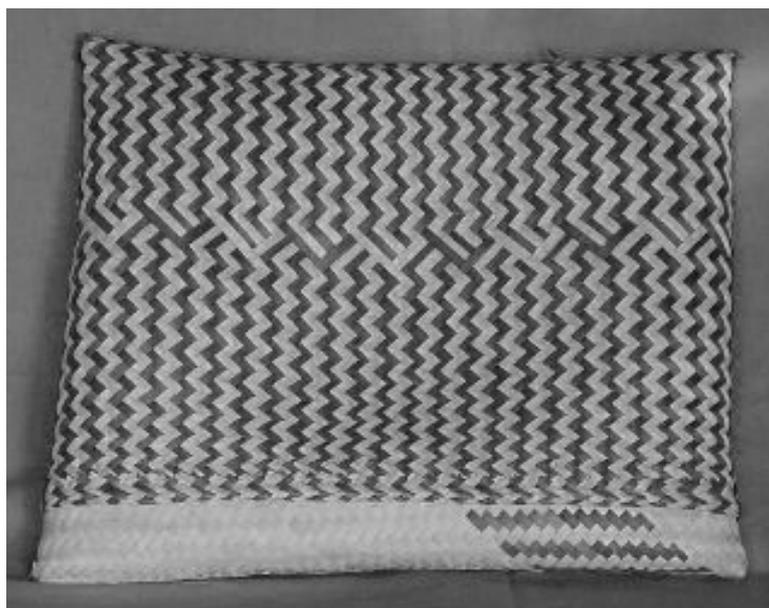
Pour produire ces sacs à main les artisans utilisent comme tressage de base le serge 'deux par-dessus, deux par-dessous' (notation : 2/2). En introduisant le long des bandes de la texture certains changements systématiques dans le tressage, ils créent des motifs à bandes attirants. Dans une des directions du tressage tous les brins sont colorés, tandis que dans la direction opposée tous les brins gardent leur couleur naturelle (voir la Figure 9). Depuis les années 1990, les motifs à bandes sont utilisés aussi dans le tressage des chapeaux et autres paniers. Les vannières Tonga démontrent beaucoup d'esprit de création en inventant de nouveaux motifs à bandes. Un catalogue de 362 motifs à bandes différents est compris dans (Gerdes 2003) et un mis à jour avec plus de 700 motifs uni-dimensionnels dans (Gerdes 2009b). Toutes les sept classes de symétrie des frises peuvent être observées. La Figure 10 donne quelques exemples de motif à bande.



Trois exemples de patrons uni-dimensionnel de symétries différentes
Figure 10

Depuis 2000, des vannières Tonga ont expérimenté une transformation de motifs à bande en alternant des brins colorés et naturels dans les deux directions du tressage. La Figure 11 présente un 'gipatsi' et la Figure 12 montre la transformation d'un motif bien connu

dans le motif du 'gipatsi' présenté.



Un 'gipatsi' avec un motif résultant d'une transformation de la colorisation
Figure 11



Structure du tissage du motif originel
a



Structure du tissage du motif transformé
Figure 12

Depuis 2002, des vannières Tonga ont créé une série intéressante de motifs bi-dimensionnel. Contrairement aux motifs à bandes, ces motifs ne sont pas le résultat de changements dans le tissage. À travers (de grandes portions de) la texture le serge reste le même. Le serge 'trois au-dessus, trois au-dessous' (3/3) est le plus courant. Les motifs, par contre, sont produits en répétant dans les deux sens du tissage des ensembles d'un certain nombre de brins (disons n brins), de sorte que le premier brin de l'ensemble est coloré et que les autres brins gardent leur couleur naturelle. Dans les deux sens de tissage, les motifs dans le plan ont la même périodicité (période = n). Nous allons utiliser la notation $[m/m, n]$ pour indiquer la classe de motifs dans le plan, pour lesquels le serge m/m est utilisé et qui ont une période n . La Figure 13 en est un exemple. Elle montre un panier décoré avec le motif $[3/3, 4]$.



Panier décoré avec le motif $[3/3, 4]$

Figure 13

L'exemple du développement continué de la vannerie dans la culture Tonga montre l'existence et la création d'idées mathématiques au-dehors du contexte académique. J'ai expérimenté l'incorporation d'idées provenant de la production de 'sipatsi' et d'autres paniers Tonga dans la formation de professeurs de mathématiques au Mozambique (Gerdes, 2003, 2009b).

4. La culture comme source d'inspiration pour l'enseignement des mathématiques

Mon livre sur la culture Makhuwa du nord-est du Mozambique (Gerdes, 2007c) présente des divers exemples de l'exploration des idées enchâssées dans des contextes du tressage dans l'enseignement des mathématiques. Dans d'autres livres comme la monographie sur le théorème de Pythagore (Gerdes, 1994 ; reproduite partiellement dans Gerdes, 1999), je montre comment plusieurs contextes culturels africains peuvent être utilisés pour donner aux élèves la possibilité de découvrir ou réinventer ce théorème et de rencontrer des démonstrations.

Dans les pays francophones de l'Afrique, on peut voir des initiatives intéressantes et importantes de la valorisation du contexte culturel des élèves et des étudiants dans l'étude scolaire des mathématiques, par exemple, en Côte d'Ivoire, la recherche sur les jeux mathématiques (Doumbia, 1984, 1992), au Burkina Faso, Mali, Niger et Sénégal la recherche sur les systèmes de numération endogènes (voir, par exemple, Kane, Traoré, et Vellard. Draisma pour le cas du Mozambique).

Références

Djebbar, Ahmed (2001), *Une histoire de la science arabe*. Editions du Seuil, Paris.

- Djebbar, Ahmed (2005), *L'algèbre arabe : Genèse d'un art*, Vuibert, Paris
- Doumbia, Salimata (org.) (1984), *Mathématiques dans l'environnement socio-culturel Africain*, Institut de Recherches Mathématiques, Abidjan
- Doumbia, Salimata & Pil, J. C. (1992), *Les jeux de cauris*, Institut de Recherches Mathématiques, Abidjan
- Draisma, Jan (2005), *Teaching gesture and oral computation in Mozambique: four case studies*, Monash University, Clayton,
- Eglash, Ron (1999), *African Fractals: Modern Computing and Indigenous Design*, Rutgers University Press, New Brunswick NJ.
- Fauvel, John & Gerdes, Paulus (1990), African Slave and Calculating Prodigy: Bicentenary of the Death of Thomas Fuller, *Historia Mathematica*, New York, Vol. 17, p. 141-151.
- Gerdes, Paulus & Bulafo, Gildo (1994), *Sipatsi: Technologie, Art et Géométrie à Inhambane*, Université pédagogique, Maputo
- Gerdes, Paulus & Djebbar, Ahmed (2007), *Les Mathématiques dans l'histoire et les cultures africaines. Une bibliographie annotée*, Union mathématique africaine & Université des sciences et de technologie, Lille, 332 p.
- Gerdes, Paulus & Djebbar, Ahmed (2004 & 2007), *Mathematics in African history and cultures. An annotated bibliography*, African Mathematical Union, Cape Town, 2004 et version actualisée : Lulu.com, Morrisville NC & Londres, 2007, 430 p. (<http://stores.lulu.com/pgerdes>).
- Gerdes, Paulus (1994), *African Pythagoras: A study in Culture and Mathematics Education*, UP, Maputo
- Gerdes, Paulus (1995), *Une tradition géométrique en Afrique. — Les dessins sur le sable*, L'Harmattan, Paris (Tome 1: Analyse et reconstruction ; Tome 2 : Exploration éducative et mathématique ; Tome 3 : Analyse comparative)
- Gerdes, Paulus (1996), *Femmes et Géométrie en Afrique Australe*, L'Harmattan, Paris
- Gerdes, Paulus (1997), *Lusona : Recréations géométriques d'Afrique*, L'Harmattan, Paris
- Gerdes, Paulus (1999), *Geometry from Africa: Mathematical and Educational Explorations*, The Mathematical Association of America, Washington DC
- Gerdes, Paulus (2000), *Le cercle et le carré: Créativité géométrique, artistique, et symbolique de vannières et vanniers d'Afrique, d'Amérique, d'Asie et d'Océanie*, L'Harmattan, Paris
- Gerdes, Paulus (2003), *Awakening of Geometrical Thought in Early Culture*, MEP Press, Minneapolis MN
- Gerdes, Paulus (2007a), *Drawings from Angola: Living Mathematics*, Lulu.com, Morrisville NC
- Gerdes, Paulus (2007b), *Lunda Geometry: Mirror Curves, Designs, Knots, Polyominoes, Patterns, Symmetries*, Lulu.com, Morrisville NC
- Gerdes, Paulus (2007c), *Othava: Fazer Cestos e Geometria na Cultura Makhuwa do Nordeste de Moçambique*, Lulu.com, Morrisville NC,
- Gerdes, Paulus (2008), *Adventures in the World of Matrices*, Nova Science Publishers, New York
- Gerdes, Paulus (2009a), *L'EthnoMathématique en Afrique*, Lulu.com, Morrisville NC & Londres

- Gerdes, Paulus (2009b), *Sipatsi: Basketry and Geometry in the Tonga Culture of Inhambane (Mozambique, Africa)*, 422 p. & *Sipatsi Images in Colour: A Supplement*, Lulu.com, Morrisville NC, 56 p.
- Huylebrouk, Dirk (Org.) (2008), *Proceedings of the Conference "Ishango, 22000 and 50 years later: The cradle of mathematics?"*, Royal Flemish Academy of Sciences and Arts of Belgium, Bruxelles
- Kane, Elimane Abdoulaye (1987), *Les systèmes de numération parlée des groupes ouest-atlantiques et Mandé. Contribution à la recherche sur les fondements et l'histoire de la pensée logique et mathématique en Afrique de l'Ouest*, Thèse d'Etat', Université de Lille III
- Njock, Georges E. (1985), *Mathématiques et environnement socio-culturel en Afrique Noire*, *Présence Africaine*, Paris, No. 135, p. 3-21.
- Obenga, Théophile (1995), *La géométrie égyptienne: Contribution de l'Afrique antique à la Mathématique mondiale*, L'Harmattan, Paris
- Sica, Giandomenico (org.) (2005), *What mathematics from Africa?*, Polimetrica, Monza
- Traoré, Kalifa (2006), *Étude des pratiques mathématiques développées en contexte par les Siamous au Burkina Faso*, Université de Québec, Montréal (thèse de doctorat)
- Vellard, Dominique (1982), *Pratiques de calcul et opérations logiques en milieu traditionnel africain (exemples maliens et rwandais)*, Université de Paris VII (thèse de doctorat)
- Zaslavsky, Claudia (1999), *Africa Counts: Number and Pattern in African Cultures*, Lawrence Hill, Westport [Première édition: 1973].