L'enseignement des mathématiques
face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Instrumentation du déplacement dans l'initiation au raisonnement déductif avec Cabri-géomètre

Sophie Soury-Lavergne, *Equipe IAM-MAGI, Université Joseph Fourier Grenoble, France*

Résumé

Nous nous intéressons à l'utilisation du logiciel de géométrie dynamique, Cabri-géomètre, pour l'initiation au raisonnement déductif des élèves de sixième (première année du collège en France). Le passage de l'école primaire au collège s'accompagne d'un changement d'attente vis-à-vis des élèves. Les propriétés géométriques de la figure ne doivent plus être seulement perceptivement lues sur un dessin particulier mais également établies comme hypothèses (les données de la figure) ou déduites des hypothèses. La question traitée est de savoir comment Cabri-géomètre peut être utilisé pour amener les élèves à faire ce changement de lecture de la figure géométrique. En fait, c'est le déplacement des objets dans Cabri-géomètre qui permet de distinguer les propriétés géométriques de la figure de celles d'un dessin particulier. Les premières sont conservées au cours du déplacement et pas les secondes. Mais l'utilisation du déplacement dans ce but n'est pas immédiate pour les élèves de début de collège. Ainsi, nous avons identifié un processus de genèse instrumentale du déplacement qui le transforme en instrument de validation des propriétés géométriques d'une figure. Nous présentons les différents aspects de ce processus ainsi que les activités proposées aux élèves qui ont été élaborées dans le cadre du projet MAGI (ERTe MAGI « Mieux Apprendre la Géométrie avec l'Informatique) et le rôle de l'enseignant dans l'accompagnement de ce processus.

Introduction

Nous travaillons sur l'articulation école primaire collège. À l'école primaire, le travail en géométrie demandé aux élèves est un travail sur le dessin : identification des propriétés géométriques présentées par un dessin, construction de figures au sens de réalisation d'un tracé particulier, description de figures. Les élèves doivent apprendre, à propos d'un dessin, à différencier les propriétés géométriques d'autres propriétés non pertinentes (telles que certaines propriétés spatiales liées à l'orientation du dessin sur une feuille par exemple). Le passage au collège s'accompagne d'un changement d'attente vis-à-vis des élèves. Les propriétés géométriques de la figure ne doivent plus être seulement perceptivement lues ou vérifiées expérimentalement sur un dessin particulier mais elles doivent être également établies comme hypothèses (les données de la figure) ou déduites des hypothèses. Cela permet la mise en place progressive du raisonnement déductif qui est traité explicitement à travers la démonstration en quatrième. Houdement et Kuzniak ont identifié ce changement de paradigme géométrique ainsi que certains objets et fonctionnements les caractérisant, notamment le statut du dessin et de la déduction. Ils ont également noté à propos du passage d'un paradigme à l'autre que « ce passage […] n'est ni automatique ni facile. La construction de situations didactiques de "passage" constitue un sujet de recherche » (Houdement et Kuzniak, 1999, p. 296).

Nous sommes posés la question de savoir comment Cabri-géomètre pouvait être utilisé pour amener les élèves à faire ce changement de lecture du dessin géométrique.

En fait, pour les élèves, le déplacement dans Cabri-géomètre doit permettre de visualiser de façon différente les propriétés géométriques qui sont celles de la figure (les hypothèses et les propriétés qui s'en déduisent) de celles qui sont propres à un dessin particulier : « les cas particuliers ». Les premières sont conservées au cours du déplacement et pas les secondes. Cabri-géomètre semble donc être un outil tout à fait pertinent pour être utilisé par les élèves dès le début de l'apprentissage du raisonnement déductif.

Nous avons élaboré une séquence d'enseignement avec pour objectif que les élèves statuent sur la validité d'une propriété géométrique dans une figure en ne s'appuyant plus uniquement sur la lecture perceptive d'un dessin particulier mais en faisant référence soit à sa conservation au cours des modifications de la figure soit à son statut d'hypothèse ou de propriété déductible des hypothèses. Par ce travail sur la figure géométrique, nous mettons en place chez les élèves les bases du raisonnement déductif. En effet, on peut considérer la figure géométrique comme une déduction dans le sens où les propriétés qui sont des conséquences des données y sont représentées. Ainsi pour les élèves, la capacité à analyser un dessin en termes de propriétés géométriques va constituer une base pour le raisonnement déductif.

Au cours du processus de conception des activités et de leur expérimentation en classe, nous avons pris conscience du rôle crucial joué par le déplacement des objets de base dans la réussite des activités par les élèves. Cependant, une utilisation mathématique du déplacement n'est pas spontanée chez les élèves. Ceci nous a amenés à prendre en compte plus finement le rôle du déplacement dans les situations proposées et l'utilisation effective qu'en font les élèves. Nous le considérons alors comme un instrument du travail dont l'utilisation - ni simple, ni automatique - résulte d'un apprentissage.

Dans cette communication, nous expliquons pourquoi il est intéressant de considérer le déplacement dans un environnement de géométrie dynamique comme un instrument au sens de Rabardel (1995) et Trouche (2000) spécifiquement en mathématique. En revenant à la définition d'un instrument dans la théorie de l'instrumentation, nous précisons d'abord quel est l'instrument qui nous concerne, à savoir le « déplacement pour statuer sur la validité d'une propriété d'une figure géométrique » et également certains éléments du processus de genèse instrumentale de cet instrument chez des élèves de sixième. Nous terminons pas une présentation des activités que nous avons élaborées le cadre du projet MAGI en mettant en évidence le rôle du déplacement dans la situation et en quoi la situation soutient le processus de genèse instrumentale.

1. L'instrument « déplacement »

Les logiciels de géométrie dynamique sont présentés classiquement comme des environnements de construction de figures géométriques dans lesquels les objets de bases (points essentiellement) peuvent être déplacés et pour lesquels, au cours des déplacements, les propriétés géométriques de la figure sont conservées.

Tous les travaux sur l'utilisation didactique de ce type de logiciels mettent en avant le rôle et l'intérêt du déplacement pour l'apprentissage (Laborde et Capponi, 1994). Le déplacement permet

d'une part l'exploration des figures et d'autre part l'obtention de rétroactions, deux fonctions qui font des environnements de géométrie dynamique des espaces d'expérimentation mathématique. Le déplacement apparaît comme une fonctionnalité centrale de ces logiciels et pour bénéficier des potentialités de ces logiciels, il faut « faire bouger » les figures.

Or, nous avons pu constater au cours de notre expérimentation de façon cohérente avec d'autres observations (Restrepo, 2005), que le déplacement n'est pas d'emblée mobilisé par les élèves. En effet, les premiers travaux sur l'utilisation de Cabri-géomètre avec des élèves faisaient mention d'un contrat Cabri qui consiste à faire bouger les figures quand on travaille avec le logiciel. Mais bien que cette règle du jeu soit rendue explicite, Capponi souligne qu'elle n'est pas systématiquement mise en œuvre par les élèves : « Seulement certains aspects qui peuvent sembler immédiats pour un professeur, comme le rôle du déplacement dans la validation, ne sont pris en compte que très progressivement par les élèves. » (Capponi *et al*., 1994, p. 12). Ainsi, cette règle du jeu s'instaure plus ou moins vite et l'enseignant doit rappeler régulièrement aux élèves « qu'il faut bouger ».

Ensuite, même lorsqu'ils déplacent, il y a encore de nombreuses difficultés.

Premièrement, les déplacements sont fortement limités. Les élèves bougent les points en les maintenant à proximité de leur position initiale et les replacent immédiatement dans cette position. Par ailleurs, ils ne déplacent pas tous les points possibles. Ils peuvent ainsi « bouger » la figure sans produire d'effet significatif.

Deuxièmement, lorsque le déplacement produit un effet, les élèves n'analysent pas forcément les phénomènes observés d'un point de vue géométrique. Ils peuvent en rester à la simple constatation du fait que « ça bouge » ou alors avoir une interprétation spatio-graphique des phénomènes : « ça monte » « la figure s'agrandit, s'aplatie »… Nous avons pu montrer les différences d'interprétation d'un même observable entre l'élève et l'enseignant interagissant à propos d'une figure Cabri : l'élève perçoit des relations spatiales et mécaniques alors que l'enseignant, de par ses connaissances mathématiques, lit directement les relations géométriques entre les objets construits (Soury-Lavergne, 2001).

Enfin, même lorsque les élèves analysent la figure d'un point de vue géométrique, ils peuvent avoir du mal à identifier correctement la conservation ou la perte d'une propriété géométrique (nous en donnons un exemple plus loin).

Ces constatations nous ont amenées à concevoir le déplacement non pas comme une fonctionnalité évidente de la géométrie dynamique, mais comme un instrument pour faire des mathématiques qui doit être construit par les élèves au cours de leur interaction avec le logiciel.

Une solution explorée dans le cadre du projet MAGI (projet sur l'intégration de la géométrie dynamique à l'école primaire et au début du collège) pour aider les jeunes élèves à s'approprier le déplacement est de lui donner du sens en le contextualisant. Par exemple, dans un problème soumis aux élèves, le déplacement correspond à une tempête qui agite un bateau voguant sur la mer, la construction réalisée par l'enfant devant résister à la tempête (Fini, 2004).

Pour le début du collège, nous nous intéressons au déplacement pour décider si une propriété est vraie ou pas en s'appuyant sur sa conservation au cours du déplacement.

En référence à la théorie de l'activité instrumentée (Rabardel, 1995 ; Trouche, 2000), nous avons dissocié le déplacement en tant que partie d'artefact du déplacement comme instrument construit et mobilisé par un utilisateur dans le cadre d'activités finalisées. Le déplacement en tant que partie d'artefact correspond à la fonctionnalité de l'environnement Cabri-géomètre : il s'agit d'une propriété qu'ont certains objets de se déplacer à l'écran et du calcul par le logiciel des conséquences de ce déplacement. L'instrument est construit par l'élève quand ce dernier est capable d'utiliser cette possibilité de l'environnement pour résoudre un problème particulier.

La question soulevée est alors celle de l'instrumentation du déplacement dans Cabri-géomètre. Comment Cabri-géomètre et plus particulièrement le déplacement des points de base d'une figure peut-il devenir un instrument de l'élève lui permettant de statuer sur la validité d'une propriété géométrique dans une figure ?

Pour illustrer notre propos, nous allons utiliser la figure Cabri qui suit (figure 1) : cette figure de Cabri-géomètre consiste en un triangle ABC, D un point de [BC] et E le symétrique de D par rapport au milieu de [BC], G et F les intersections des perpendiculaires à [BC] passant par D, respectivement E, et des côtés [BA] respectivement [AC]. Le dessin ci-contre, représentant de la figure, présente des propriétés géométriques particulières, en plus de celle de la figure. Le but est justement d'amener les élèves à constater qu'au cours du déplacement, certaines propriétés sont conservées et d'autres sont « perdues ». Un questionnement peut alors être suscité chez les élèves : pourquoi certaines sont-elles perdues et pas d'autres ? Cette question peut motiver le recours au raisonnement déductif pour y répondre. Mais tout cela repose sur la possibilité qu'ont les élèves de recourir au déplacement et de l'interpréter correctement. Or, nous l'avons vu, ce n'est pas si simple.

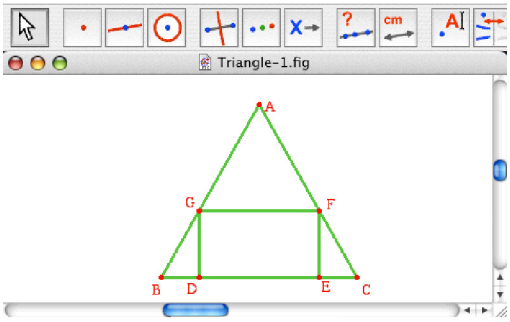
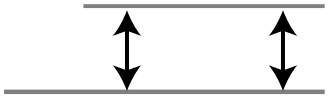


Figure 1

En effet, à propos de cette figure, la question posée aux élèves est de savoir si (GF) est parallèle à (DE).

L'élève peut alors décider, au vu de l'état particulier de la figure, qu'il y parallélisme et il justifie éventuellement sa réponse par l'argument des écarts constants : « il y a toujours le même écart entre la droite (GF) et la droite (DE). Il peut aussi, toujours à partir de la figure, conclure qu'il n'y a pas parallélisme s'il n'est pas en mesure de repérer la configuration des segments parallèles par exemple quand les segments sont décalés.



Si l'élève décide de recourir au déplacement, le choix des points à déplacer se pose.

Si on décide d'attraper le point G, on ne peut pas. En effet, il y a des points que l'on peut déplacer en les attrapant directement (point de base et point sur objet) et d'autres qui ne se déplacent que par l'intermédiaire d'un autre objet (point d'intersection). Ainsi le point G bougera si on attrape et déplace le point D par exemple mais on ne pourra pas le saisir directement.

Dans cette figure, les points A et D sont attrapables et déplaçables, et les points G, F et E ne sont pas attrapables mais pourront bouger par l'intermédiaire d'autres points. Enfin, les points B et C sont complètement fixes car ils ont été punaisés (il s'agissait de maintenir une certaine position de la construction dans l'écran nécessaire pour la poursuite de l'activité présentée page). L'exploration d'une telle figure et les déplacements possibles sont très riches et permettent une véritable exploration de la situation par les élèves.

Si l'élève déplace le point D, alors il peut obtenir la figure suivante.

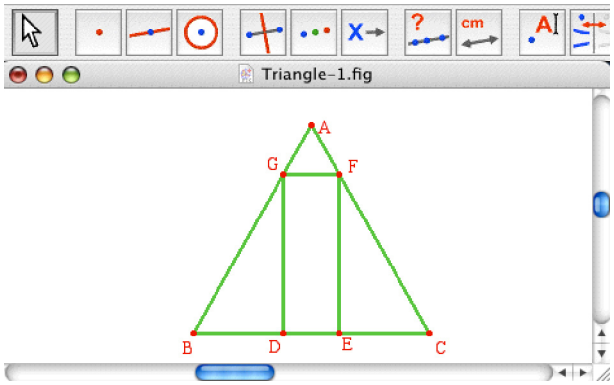


Figure 2 – Le point D a été déplacé sur [BC] en direction du point C.

Le professeur de mathématiques en tirera la conclusion que le parallélisme est conservé au cours du déplacement de D et anticipera, grâce à ses connaissances géométriques que ce n'est peut être pas le cas si on déplace d'autres points. La conclusion de l'élève peut être toute autre. Celui-ci peut s'arrêter au fait que (GF) bouge aussi. Il peut également analyser le phénomène d'un point de vue perceptif en remarquant par exemple que (GD) et (FE) se rapprochent ou s'écartent ensemble et ne pas considérer la propriété géométrique en jeu. Il peut aussi considérer la propriété géométrique mais conclure à la conservation du parallélisme au cours du mouvement et donc au parallélisme de (GF) et (DE) pour cette figure, ce qui est faux. Enfin, il peut prendre en compte la propriété de parallélisme mais avoir du mal à décider, dans tous les cas de figure obtenus au cours du déplacement, s'il y a parallélisme ou non, par exemple quand D et E sont confondus (cas limites).

Si l'élève attrape et déplace le point A, suivant le mouvement effectué, il peut obtenir une des deux figures suivantes (figures 3 et 4).

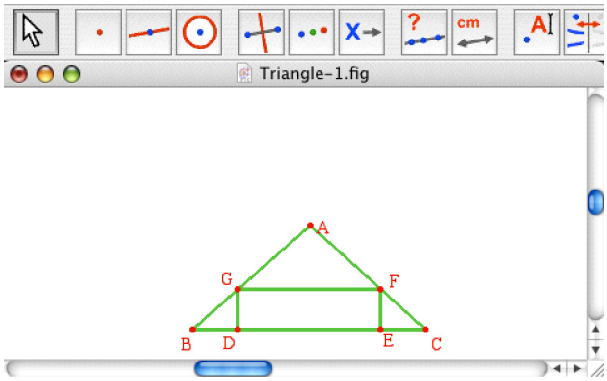


Figure 3 – Si on déplace A sur la médiatrice de [BC]

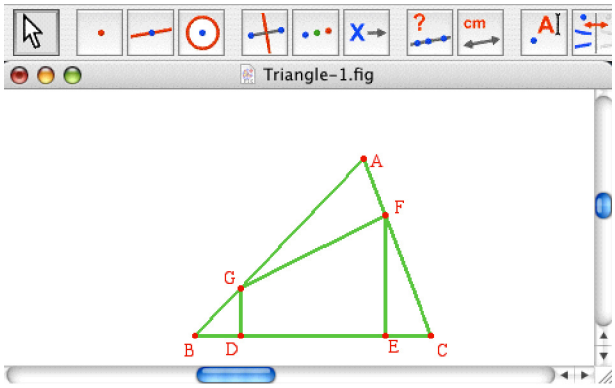


Figure 4 – Si on déplace A vers la droite

Devant la figure 4, un élève peut reconnaître qu'il n'y a plus parallélisme, mais ne pas en déduire que pour la figure les droites ne sont pas parallèles, si le principe du contre-exemple n'est pas encore acquis.

On voit donc que, à travers le déplacement, derrière l'injonction « bouge la figure », il y a un ensemble important d'actions et de décisions possibles pour l'élève. Le fonctionnement qui consiste à choisir un point particulier de la figure, le déplacer et observer au cours du déplacement si une propriété géométrique particulière est conservée pour tirer finalement une conclusion sur les propriétés géométriques de la figure est complexe. Il résulte d'un apprentissage et mobilise chez l'élève des connaissances géométriques. Cet apprentissage doit être accompagné par l'enseignant.

Cette analyse permet d'identifier quelques éléments des deux pôles de l'instrument que sont l'artefact et schèmes instrumentaux. Du côté de l'artefact, nous avons une fonctionnalité de Cabri (l'icône flèche) applicable à certains objets de la figure (points, cercles, segments, etc.) et produisant des effets graphiques continus et réversibles. Du côté des schèmes instrumentaux du déplacement, il faut pour l'utilisateur : (i) choisir les objets à déplacer, notamment en distinguant les points attrapables ou déplaçables, (ii) identifier perceptivement la propriété géométrique à contrôler au cours du déplacement, (iii) décider si elle est conservée ou pas, (iv) conclure éventuellement sur la propriété relativement à la figure.

Nous devons donc questionner le processus de genèse instrumentale qui accompagne l'utilisation de Cabri-géomètre chez les élèves de sixième. Ce processus de genèse instrumentale est complètement lié aux connaissances géométriques de l'élève : le déplacement ne peut être un instrument pour décider de la validité des propriétés géométriques que dans la mesure des connaissances géométriques de l'utilisateur.

2. Le scénario en sixième

Dans le cadre du projet MAGI, l'enjeu était de proposer une série de situations pour les élèves de sixième relativement au parallélisme et la perpendicularité, permettant une initiation au raisonnement déductif et conduisant à l'introduction de la propriété « deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles ».

La figure de départ que nous avons retenue afin de produire les tâches proposées aux élèves permet de poser la question de la validité d'une propriété deux fois : dans un cas la propriété est vraie car déductible des hypothèses et dans l'autre cas non car elle ne l'est que pour certains dessins particuliers.

Il s'agit de la figure ci-contre (figure 5) déjà décrite précédemment, à la différence près que les points D et E ne sont pas symétriques l'un de l'autre.

La question du parallélisme peut être posée à propos de (DG) et (EF) ou (DE) et (FG).

Le parallélisme de (DG) et (EF)

- se constate perceptivement sur tous les dessins ;
- se déduit des hypothèses et est toujours vrai.

Le parallélisme de (DE) et (FG)

- est faux en général, ce qui peut se confirmer perceptivement en construisant divers dessins ;
- peut être vrai selon la nature du triangle ABC et la position de D et E sur le côté [BC] ; mais la preuve du parallélisme dans ces cas particuliers est hors sujet en Sixième.

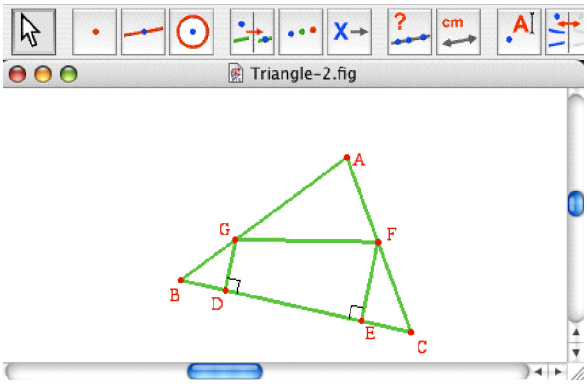


Figure 5

Le scénario, qui consiste en une succession de situations ainsi que leur mise en œuvre et gestion par l'enseignant (Laborde, 2001) utilise Cabri-géomètre, mais aussi des représentations papier-crayon de la figure, des descriptions langagières et demande à l'élève de mettre en relation ces différentes représentations. Le critère implicite pour décider qu'une description renvoie à la même figure est que toutes les propriétés géométriques de la description sont vérifiées par la figure Cabri.

Les trois grandes étapes du scénario sont les suivantes.

1. Exploration d'une figure de Cabri-géomètre dans le but de la reproduire : le déplacement est un outil d'exploration pour permettre la construction ainsi qu'un moyen de validation.

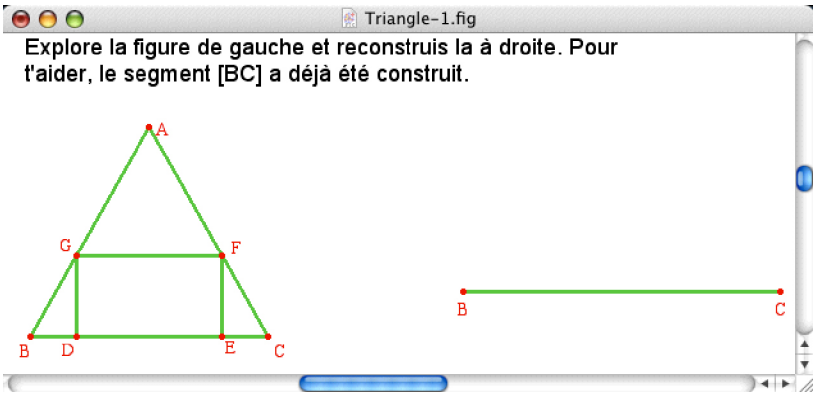


Figure 6

2. Comparaison dans Cabri-géomètre de quatre figures qui ont l'air identiques et qui se comportent différemment au cours du déplacement. Le déplacement est un outil qui permet de distinguer les figures les unes des autres et de statuer sur leurs propriétés géométriques. Au cours du travail sur ces figures, l'idée du contre-exemple est introduite pour aider les élèves à clore le débat sur la validité ou pas d'une propriété géométrique dans une figure.

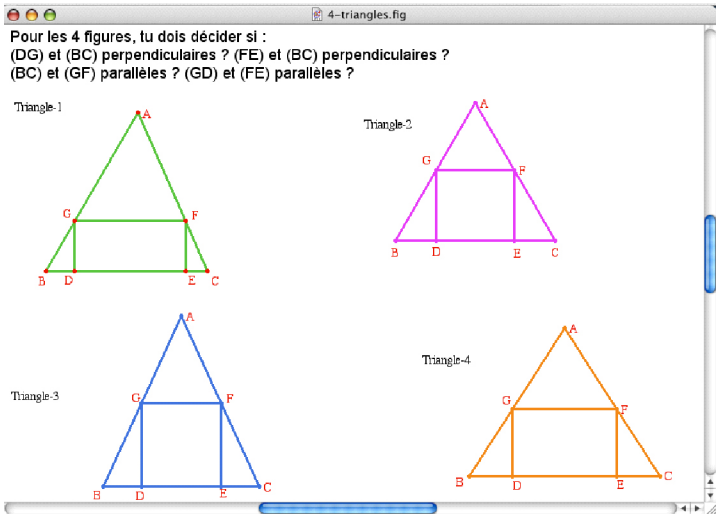


Figure 7

3. Mise en relation d'un dessin à main levée et d'une description langagière avec une figure de Cabri-géomètre à choisir parmi trois. Les questions posées sont relatives au parallélisme. Elles sont d'abord posées à propos de la figure à main levée et de sa description puis reposées lorsque l'élève dispose de la figure de Cabri-géomètre. L'impossibilité de trouver un contre-exemple au parallélisme de (GD) et (EF) motive le passage à la déduction et l'introduction de la propriété « si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles ».

➢ Voici un dessin à main levée :

ABC est un triangle.
Les points D et E appartiennent au côté [BC].
BD = EC
Le point G est à l'intersection du côté [AB] et de la droite perpendiculaire à [BC] passant par D.
Le point F est à l'intersection du côté [AC] et de la droite perpendiculaire à [BC] passant par E.

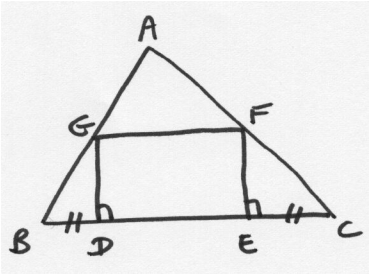


Figure 8

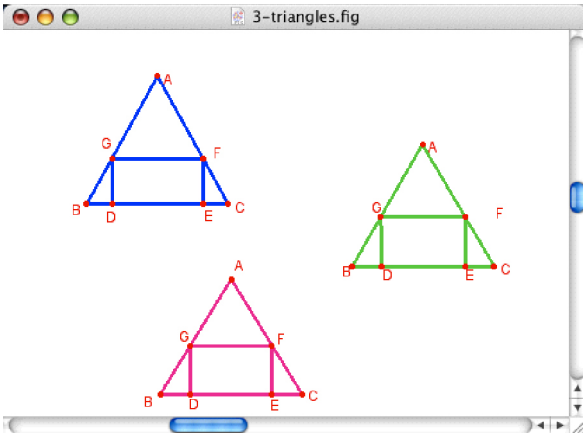


Figure 9 – Les trois représentations de la figure, un texte, une figure papier-crayon à main levée, une construction Cabri

Ce scénario a été expérimenté au cours de l'année scolaire 2004-2005 dans deux collèges de l'agglomération de Grenoble, dans deux classes de sixième avec la même enseignante. Il avait déjà été testé dans une version différente lors de l'année scolaire 2003-2004, toujours avec la même enseignante.

Il nécessite une dizaine de séances d'une heure, incluant du travail sur Cabri-géomètre en salle informatique (élèves en binômes ou seuls), du travail en classe normale avec un portable et un vidéo-projecteur notamment pour des mises en commun, du travail en papier-crayon parfois à la maison et une évaluation finale.

Le déroulement de ce scénario a mis en évidence les points suivants à propos de la gestion de la genèse instrumentale relative à Cabri concernant le déplacement :

1. La nécessité de séances de prise en main de Cabri-géomètre mettant en place les différents types de points et les conséquences sur le déplacement.
2. L'élaboration de consignes précises et d'outils proposés aux élèves pour rendre opérationnel le déplacement (par exemple, un tableau à remplir lors de l'exploration d'une figure qui mentionne les objets déplacés et les observations effectuées).
3. La gestion des débats et l'instauration de règles pour la manipulation de Cabri lors des débats : lors des mises en commun, un seul élève manipulait Cabri-géomètre sous la dictée des autres élèves qui devaient préciser l'objet à déplacer et les objets ou la propriété à observer au cours du déplacement.

Références

Capponi, B. et Laborde C. (1994). *Cabri-Classe, apprendre la géométrie avec un logiciel*. Argenteuil : Éditions Archimède.

Fini, C. (2004). Knowledge, instrumentation and Cabri. *Cabriworld*, Rome Italie, 9-12 septembre 2004

Houdement, C. et Kuzniak, A. (1999), Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 283-312.

Laborde, C. et Capponi, B. (1994), Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(1.2), 165-210.

Laborde, C. (2001), Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry, International *Journal of Computer for Mathematical Learning*, *6*, 283-317.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Restrepo, A. (2005). *Instrumentation du déplacement dans Cabri-géomètre par des élèves de 6e*. Mémoire de Master 2 Université Joseph Fourier.

Soury-Lavergne, S. (2001). Connaissances et mise en œuvre d'un micromonde dans les interactions de préceptorat distant, le cas de la géométrie dynamique. *Sciences et Techniques Éducatives*, *8*(2.3), 321-345.

Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : étude des processus d'apprentissages dans un environnement de calculatrices symboliques mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(3), 239-264.

Pour joindre l'autrice

Sophie Soury-Lavergne
Équipe IAM, Université Joseph Fourier et IUFM de Grenoble
46 avenue Félix Viallet
Grenoble – 38000
Sphie.Soury-Lavergne@imag.fr