L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Système tutoriel pour le développement des compétences lors de problèmes de preuve

Philippe R. Richard et Simon El-Khoury, *Université de Montréal, Canada*
Josep M. Fortuny, *Universitat Autònoma de Barcelona, Espagne*
Esma Aïmeur, *Université de Montréal, Canada*

Résumé

Notre communication présente le travail de recherche lié au développement d'un système tutoriel intelligent appelé TURING (TUtoriel intelligent en Géométrie). TURING est un projet multidisciplinaire qui intègre la recherche récente en didactique des mathématiques aux possibilités des environnements informatiques d'apprentissage humain. Du point de vue éducatif, le système se destine à aider l'élève dans le développement de ses compétences à l'école secondaire et à soutenir le maître dans sa responsabilité de traiter la diversité dans ses classes. Du point de vue technique, TURING est un système multiagents conçu dans un environnement client-serveur à l'aide du langage de programmation Java. La souplesse du système permet au maître de s'adapter au comportement de ses élèves, notamment en ce qui concerne les habitudes heuristiques et discursives d'un contrat didactique donné.

Introduction

Les Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain (EIAH) disponibles actuellement pour la géométrie de l'école secondaire ne considèrent pas le débat social simulé dans la construction des connaissances. En résolution de problème par exemple, on admet volontiers qu'il est possible de provoquer un débat de façon synchronique ou asynchronique à l'aide d'un bavardoir électronique, d'un logiciel de courriel ou d'un forum. Dans ces cas, la construction et le contrôle des connaissances s'effectuent lors du processus collaboratif de résolution (entre élèves) ou grâce à l'intervention d'un tuteur humain (généralement l'enseignant régulier). Mais si ce type d'EIAH est utile pour gérer les situations spéciales qui exigent un apprentissage à distance (élèves hospitalisés, entraînement sportif d'élite, éloignement temporaire de la famille, etc.), son profit s'estompe dans l'enseignement régulier. Car les compagnons de classe ou l'enseignant sont toujours présents pour alimenter un éventuel débat, le milieu informatique devenant davantage un outil qu'un instrument de médiation pour l'apprentissage (Rabardel, 1995 ; Laborde, 2001a, b ; Trouche, 2002). Or, l'attention personnalisée et l'animation de débats en classe est didactiquement coûteuse. Non seulement le temps à y consacrer est souvent dissuasif, mais il y a aussi la question des moyens pédagogiques à mobiliser pour s'assurer que les élèves travaillent dans la même situation-problème que celle qui est en jeu et qu'ils en respectent la logique interne. En outre, certaines habitudes socioculturelles entretiennent un authentique sentiment de méfiance face aux débats. On n'a qu'à penser au bris des règles de vie en commun, de l'harmonie sociale (au Québec : Cornellier, 2003 ; au Japon : Sekiguchi et Miyazaki, 2000) ou à l'impression qu'un argument contradictoire masque en fait une attaque personnelle. On comprend pourquoi la pratique enseignante n'y recours qu'occasionnellement.

Pourtant, alors que les points de vue traditionnels en psychologie (Festinger, 1957, 1989; Vygotsky, 1978) accordent déjà au débat social un rôle déterminant dans l'acquisition des connaissances, les points de vue épistémologique (Lakatos, 1984), sémiotique (Duval, 1995) et situationnel (Brousseau, 1998) le situent de façon nécessaire par rapport à l'apprentissage des mathématiques. Par débat social simulé dans un EIAH nous entendons une discussion organisée et dirigée dans laquelle les interlocuteurs sont des agents pédagogiques virtuels – comme le compagnon Office dans le système bureautique intégré de Microsoft. Ainsi, contrairement à l'activité d'apprentissage instrumentée ou au débat qui peut délayer la responsabilité de l'élève dans l'ensemble d'une classe – le milieu ou l'interlocuteur gère en quelque sorte une partie des connaissances en jeu –, le débat social simulé que nous préconisons accorde à l'élève un rôle de premier plan. C'est-à-dire que l'élève est responsable de l'application des connaissances et que la progression du débat dépend essentiellement de ses actions à l'interface, même durant la gestion des impasses par le système tuteur (voir section Axe informatique). Il faut spécifier que la toile de fond du projet TURING ne se tisse pas sur une éventuelle substitution de la responsabilité de l'enseignant par un dispositif informatique. Elle vise plutôt l'apprentissage de l'élève dans une démarche complémentaire à l'enseignement.

Le projet TURING est d'abord novateur par la considération conjointe de modèles issus des travaux de Lakatos, Duval et Brousseau pour les éprouver expérimentalement dans un EIAH. Il l'est également parce qu'il convient au développement des compétences du nouveau programme d'étude du domaine de la mathématique, de la science et de la technologie (MÉQ, 2003, 2005). En ce sens que les stratégies argumentatives véhiculées en partie par les agents pédagogiques virtuels se destinent autant à contrôler la « résolution de situations-problèmes » que le « déploiement d'un raisonnement en mathématique » et la « communication à l'aide du langage mathématique » (les trois compétences). Le projet TURING est aussi novateur par la méthodologie employée dans le processus de vérification de la validité empiriste du cadre conceptuel (Van der Maren, 1996). Même si nous détaillons cet aspect dans la section Méthodologie, nous pouvons avancer l'idée sous-jacente. Selon Guin (1996), l'efficacité d'un EIAH dépend d'une modélisation du comportement humain qui est à la fois antérieur et postérieur à la conception de l'environnement; cela implique que la vérification doit autoriser l'adaptation réciproque de l'environnement. Autrement dit, le dispositif informatique même – que nous appelons « le milieu » dans notre texte – doit permettre un aménagement des caractéristiques heuristiques et discursives (rôle des agents; programmation des répliques, des stratégies, des systèmes de signes disponibles) selon le comportement instrumenté de l'élève (Richard *et al*., 2005). Le couple milieu-élève engendre un modèle propre.

Axe situationnel

Dans la perspective constructiviste, la construction effective de connaissances pertinentes se réalise par un changement de conception de l'élève et le dépassement d'obstacles lors de situations qui reproduisent les caractéristiques constitutives du travail mathématique. Selon Brousseau (1998, p. 61), le seul moyen de « faire » des mathématiques c'est de chercher et résoudre certains problèmes spécifiques et, à ce propos, de poser de nouvelles questions. Toutefois, pour que l'élève puisse y arriver, cela suppose que l'enseignement ne se préoccupe pas seulement du développement des compétences de l'élève, mais aussi du développement de son autonomie. Au regard de la théorie des situations didactiques, Brousseau (1998) explique que :

> *La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées, par un choix judicieux de problèmes qu'il lui propose. Ces problèmes sont choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter, doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement.* […] *L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques* […]. *Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même* […]. (p. 59)

Dans cet esprit, les situations d'apprentissage sont doublement paradoxales. En premier lieu, le maître veut que l'élève produise des réponses adéquates, manifestant par là le succès au moins apparent de l'enseignement. Mais l'élève ne dispose pas des moyens cognitifs ou discursifs nécessaires : c'est justement l'objet de l'enseignement qu'il puisse en disposer (Joshua et Dupin, 1999). En second lieu, on considère que l'élève n'aura acquis une connaissance visée que lorsqu'il saura la mettre en œuvre de façon autonome, sans l'appui du maître ou de ses compagnons. Mais si l'élève refuse, évite ou ne résout pas le problème, le maître est dans l'obligation de l'aider dans son cheminement. Pour atténuer ces paradoxes, le débat social apparaît comme un moyen qui permet de s'assurer que les élèves travaillent dans la même situation-problème que celle qui est proposée et qu'ils en respectent la logique interne, conditions indispensables pour le développement de l'autonomie.

Axe épistémologique

Dans sa dialectique des preuves et des réfutations, Lakatos (1984) montre comment le débat social et sa logique discursive sont au cœur de la découverte mathématique. Lors de dialogues entre un enseignant et ses élèves, Lakatos décrit l'œuvre d'une classe pour éprouver la solidité des nombreuses solutions d'une situation-problème donnée. Par exemple, face à la venue d'un contre-exemple, on peut se demander quelle décision il faut prendre sur les voies à suivre pour localiser et dépasser la contradiction dont il est le symptôme. Or, chez des élèves de l'école secondaire, la perception la plus répandue du contre-exemple est celle d'une catastrophe dont la conséquence est l'abandon pur et simple des positions conquises lors du processus de résolution. Comme si l'obstacle, déjà inhérent à la construction des connaissances, devait se percevoir comme une erreur qui ne peut être dépassée dans une argumentation dialectique. Pour éviter d'alimenter le dogme d'une mathématique fondée sur des vérités définitives, son apprentissage en classe profitent de situations-problèmes qui demandent d'abord de formuler une conjecture audacieuse pour ensuite réaliser une preuve sur celle-ci :

> *L'analyse que propose Lakatos différencie les conséquences d'un contre-exemple suivant qu'il rejaillit sur la conjecture, sur sa preuve, ou bien encore sur les connaissances ou leurs fondements rationnels. Il se peut même que le dépassement de la contradiction révélée par le contre-exemple passe par la critique et le rejet du contre-exemple lui-même.* (Balacheff, 1999a, p. 211)

Dans un débat traditionnel, qu'il soit animé par l'enseignant ou par un groupe d'élèves, il est habituel qu'un participant manifeste une contradiction qui le gêne (Benbachir et Zaki, 2001 ; Reid, 2001). Mais lorsqu'il la révèle en explicitant un contre-exemple, l'élève a souvent besoin d'être soutenu pour en comprendre l'effet. La prise de conscience de cet effet, déjà difficile à gérer pour un enseignant, constitue pourtant un élément déclencheur qui permet à l'élève de poursuivre sa démarche.

Axe sémiotique

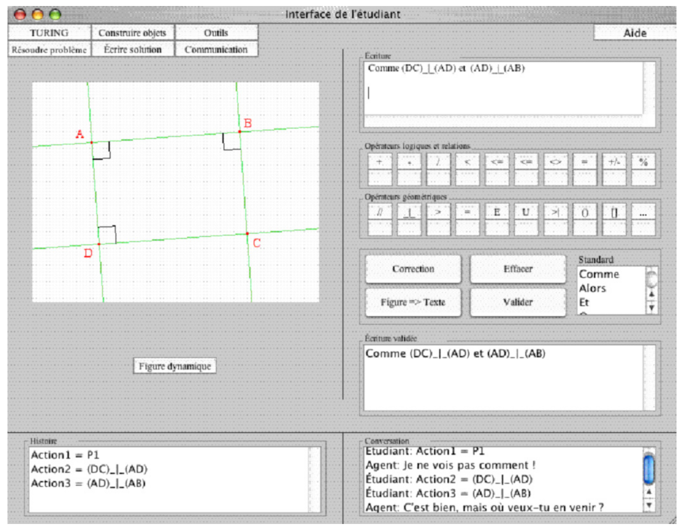
En situation d'apprentissage, la question sémiotique est souvent sous-estimée par les mathématiciens ou les informaticiens. Parce tout système de représentation sémiotique, qu'il s'agisse des signes figuraux, des symboles mathématiques ou des mots de la langue naturelle, possède à la fois des effets producteurs et réducteurs dans la représentation des connaissances. C'est-à-dire que si les signes mobilisés permettent de « voir » certaines propriétés, ils empêchent aussi d'en « voir » d'autres. Ce paradoxe est déterminant dans l'acquisition des connaissances, que ce soit au niveau de la communication, du traitement des représentations cognitives et de l'objectivation des représentations virtuelles (par exemple, celles qui sont dans la tête de l'élève). Selon Duval (1995), il s'agit en fait :

> [d'] *une donnée fondamentale de la fonction sémiotique chez l'homme : celle-ci y est liée à l'existence de plusieurs systèmes de représentation et à leur coordination. Chaque système de représentation ayant des propriétés spécifiques qui limitent intrinsèquement ses possibilités de représentation, des systèmes différents sont donc nécessaires.* (p. 64)

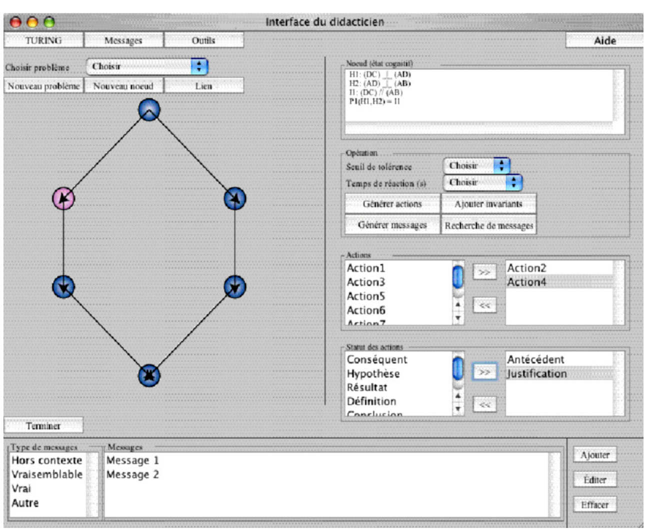
L'activité géométrique se caractérise par l'usage des figures. Il est maintenant classique d'insister sur l'apport des différents modes de visualisation auxquels on peut recourir en mathématiques pour rendre les concepts mathématiques plus immédiatement accessibles. L'intérêt de la visualisation est d'abord vu comme celui d'un support ou d'un moyen plus économique de compréhension. En introduisant les notions de raisonnement graphique et d'inférence figurale (Richard, 2004a, b), nous avons mis en évidence que tous les modes de visualisation auxquels on peut recourir en mathématiques constituent des registres de traitement qui permettent des démarches de pensée autonomes et aussi puissantes que les différents registres discursifs (verbal et symbolique). Ainsi, parce qu'un dessin géométrique véhicule un raisonnement, il est naturel pour l'élève d'intégrer ses représentations figurales à la structure discursive de ses raisonnements. Mais l'intérêt principal de ces notions est peut-être dans leur distinction. Alors que la notion de raisonnement graphique renvoie à un traitement mathématique dans un seul registre, l'inférence figurale peut être combinée avec des inférences sémantiques et des inférences discursives (au sens de Duval, 1995) en l'unité d'une même démarche de pensée. Bref, par ses valences avec des inférences d'une autre nature, l'inférence figurale permet de décrire un raisonnement transversal à plusieurs registres. En résolution de problème et en situation de validation, le débat social doit donc intégrer la coordination de plusieurs systèmes de représentation (figural, verbal et symbolique) lors de la progression des raisonnements et, bien entendu, des argumentations dialectiques.

Axe informatique

Le but d'un Système Tutoriel Intelligent (STI) est de reproduire le comportement d'un tuteur humain (compétent) qui peut adapter son enseignement aux besoins d'apprentissage de l'apprenant. Dans les modèles primitifs, le contrôle sémiotique et le contrôle cognitif étaient assumés par un tuteur (approche prescriptive) et non pas par l'apprenant. Le développement récent des STI considère une approche coopérative entre l'apprenant et le système, dans lequel plusieurs partenaires (agents pédagogiques virtuels) collaborent à la résolution d'une même situation-problème. Ces agents peuvent être un tuteur, un compagnon d'apprentissage ou un perturbateur (Aïmeur, Frasson et Dufort, 2000). Si la fonction d'un agent tuteur se destine à simuler le rôle du maître, et celle de l'agent compagnon à simuler un co-apprenant dans un processus d'apprentissage collaboratif, l'idée d'un agent perturbateur consiste tantôt à soutenir l'apprenant, tantôt à le déséquilibrer pour tester la confiance en soi (au sens de la dissonance cognitive de Festinger (1957), développée par Aïmeur et Frasson (1996) et par Aïmeur (1998) dans un EIAH). Au regard de la dialectique de Lakatos, l'agent perturbateur accepte en outre une nouvelle fonction. Parce qu'il peut à la fois révéler une contradiction en explicitant un contre-exemple puis, éventuellement, en expliquer l'effet (sur la conjecture, la preuve, etc.).



Dans un débat social simulé, nous devons souligner que les agents pédagogiques virtuels sont particulièrement utiles pour appuyer la gestion du sens, de la représentation et du respect de la logique interne (Richard *et al.*, 2003). En cas de besoin, le STI permet d'assurer que les symboles supportés par le milieu ont le même sens pour l'élève que celui qu'il est censé avoir (contrôle sémiotique), que les concepts en jeu se réfèrent effectivement aux modèles prétendus (contrôle cognitif) et que l'élève travaille dans la même situation-problème que celle qui est proposée (contrôle situationnel, appelé dévolution de la situation-problème).



Afin de faciliter la compréhension des enjeux méthodologiques du projet TURING (section suivante), nous décrivons très brièvement certains aspects fonctionnels du logiciel prototype que nous avons créé. Ses fondements théoriques et le détail de ses fonctionnalités sont expliqués dans El-Khoury *et al.* (2005), dans Cobo *et al.* (2005) et dans Richard

(2006). Pour la résolution d'un problème donné, l'élève construit un élément de figure, dégage du dessin des propositions graphiques ou écrit des propositions discursives pour produire un calcul ou une inférence structurée à l'interface de l'étudiant. Le système tuteur répond aux actions de l'élève, si nécessaire et en temps réel, à l'aide de messages. Ces messages sont d'abord programmés à l'interface du didacticien en fonction du graphe qui contient l'ensemble des inférences possibles dans la logique du problème. Pour l'enseignant ou le chercheur, il est possible d'adapter les inférences du graphe et leurs messages associés aux habitudes d'un contrat didactique spécifique – comme ceux qui admettent la contradiction en partie intégrante du processus de résolution ou qui acceptent les propositions graphiques dans la structure du raisonnement.

Méthodologie

Le projet TURING part d'un cadre conceptuel qui a été conçu, à l'origine, relativement à l'environnement papier-crayon (les trois premiers axes). Avec l'application des systèmes tutoriels intelligents pour l'acquisition de connaissances, le projet vise à vérifier la validité empiriste du cadre conceptuel dans un EIAH. Le modèle méthodologique sur lequel se base notre projet est le modèle confirmatif. De façon traditionnelle, il consiste à démontrer que si on applique des relations issues du cadre conceptuel au nouveau champ d'application, les conjectures ainsi déduites, sous forme de prédiction conditionnelle observable, se vérifieront. Ce qui caractérise le projet TURING c'est que le processus de vérification admet des ajustements par rapport aux conditions initiales de prédiction. C'est-à-dire que si nous affirmons d'emblée que :

- le développement de l'autonomie de l'élève profite des débats simulés ;
- la dialectique des preuves et des réfutations encourage le développement de cette autonomie ;
- les caractéristiques représentationnelles du dispositif informatique soutiennent le progrès cognitif dans l'apprentissage de la géométrie ;
- les caractéristiques discursives du dispositif informatique favorisent le progrès cognitif dans l'apprentissage de la géométrie.

Nous profitons des modèles engendrés par le couple milieu-élève pendant notre travail de recherche pour aménager les caractéristiques heuristiques et discursives de l'environnement. Les hypothèses du projet s'inspirent du cadre méthodologique proposé dans Balacheff (1999b) et dans Sutherland et Balacheff (1999). Pour ces auteurs, l'apprentissage est un processus d'adaptation qui implique également un sujet et un milieu. Si les propriétés des connaissances construites par l'élève dépendent de ses connaissances antérieures, elles dépendent aussi des caractéristiques du milieu avec lequel il interagit. Ce point rejoint les problèmes de décontextualisation, de transfert ou encore d'acceptation du caractère contextuel de la connaissance à construire. Ensuite, nous reconnaissons une sorte de « mouvement » dans l'interaction sujet-milieu. Puisque le milieu est un dispositif informatique, il y a une interaction de deux systèmes cognitifs (apprenant et machine), le système cognitif de la machine dépend de nos choix épistémologiques, sémiotiques et situationnels. Cette hypothèse fonde la question de la modélisation de cette interaction et de sa complexité du point de vue cognitif. Enfin, étant donné la constitution multiregistre du milieu, la coordination des systèmes de représentation permet d'effectuer une sorte de « transfert cognitif » entre la signification véhiculée par la machine et celle de l'élève. Autrement dit, parce que l'adaptation des caractéristiques heuristiques et discursives nous permet d'assurer la cohérence de ce transfert, la machine ne transformerait pas inévitablement la signification prétendue par l'élève, tel un apprentissage instrumenté.

Stratégie de recherche

Pour un ensemble de problèmes de preuve en géométrie de l'école secondaire, notre stratégie de recherche commence par la formation initiale des graphes inférentiels sur la base de nos hypothèses dans le cadre conceptuel. L'ensemble liminaire des messages des agents pédagogiques virtuels se conçoit à partir des modèles d'interactions de Cobo et Fortuny (2000) et de Kieran (2001). Le premier modèle permet l'évaluation de la progression des habiletés cognitive et heuristique dans un processus de résolution collaborative. Le second modèle permet d'identifier, en outre, si les interlocuteurs raisonnent sur les mêmes objets, contribuent à la formulation ou la preuve de la même conjecture et si la responsabilité des initiatives ou des réactions sont véritablement partagés dans le processus argumentatif. Nous considérons également l'idée d'appropriation employée par Moschkovich (2004) dans une perspective socioculturelle pour décrire l'apprentissage à travers les interactions, ce qui place l'activité discursive au centre de l'apprentissage des mathématiques (Forman, 1996 ; Lerman, 2001).

Au sujet du développement de l'autonomie de l'élève, nous considérons que, globalement, la quête de l'autonomie doit se situer par rapport à l'acquisition d'une connaissance (faits, moyens discursifs ou cognitifs). Mais l'évaluation d'une telle acquisition n'a de sens que sur une longue période et par rapport à plusieurs situations-problèmes qui engagent le même concept (Vergnaud, 1990). Par contre, si l'on reprend deux définitions que l'on trouve facilement dans les encyclopédies de philosophie :

- Autonomie stoïcienne : l'autonomie du sujet se situe au niveau du jugement, si l'on entend ainsi la capacité de prévoir et la capacité de choisir.
- Autonomie pour Kant : la réflexion, au lieu de considérer seulement la loi, s'attache au processus dont la loi est issue ; le sujet n'accède à l'autonomie qu'à la condition d'être respectueux de la loi.

on peut définir de façon opérationnelle le développement (local) de l'autonomie. Ainsi, au regard de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998), la « loi » serait la logique interne à une situation-problème. L'élève devient donc autonome s'il peut construire lui-même la connaissance nouvelle à partir des conditions de la situation-problème – il a pu construire la conclusion à partir des prémisses de la situation-problème, ce qui implique nécessairement un progrès cognitif. En outre, l'idée de jugement soulevé par les stoïciens peut s'évaluer par rapport au graphe inférentiel. Puisque ce dernier considère les progrès cognitifs et heuristiques qui s'y rattachent, le passage d'un état à un autre résulte d'une prévision et d'un choix dans le processus argumentatif.

État de la recherche

À partir d'un premier échantillon d'élèves issus du secteur régulier, nous observons leur résolution des problèmes de preuve. L'analyse des interactions considère trois sources primitives – au sens ethnographique du terme, Eisenhart (1988). Même si le dispositif informatique est conçu pour mémoriser les solutions d'élèves, nous enregistrons également le processus de résolution, d'abord dans l'environnement physique à l'aide d'une caméra numérique, puis par rapport au milieu à l'aide d'un logiciel de télécontrôle. L'analyse du progrès cognitif des élèves procède par le sens des interactions ainsi recoupées. Nous examinons trois couches d'interactions : les actions signifiantes, c'est-à-dire l'écriture des propositions à l'interface de l'élève par l'usage conjoint des aires graphique et discursive, le discours de l'élève, qui procède en fait par expansion discursivo-graphique, et la médiation du « milieu social » lors du processus argumentatif (Cobo *et al*., 2005). L'aménagement des caractéristiques heuristiques et discursives se fonde sur les résultats de ces analyses et entraîne une seconde phase de résolution des mêmes problèmes, mais avec un nouvel échantillon d'élèves. Nous comptons sur la collaboration des enseignants réguliers pour connaître leurs habitudes heuristiques et discursives et leurs contrats didactiques. Le processus de vérification, selon notre méthode de recherche, se complète au terme de la seconde phase.

Références

Aïmeur, E. (1998). Application and Assessment of Cognitive Dissonance Theory in The Learning Process. *Journal of Universal Computer Science*, Vol. *4*(3), 216-247.

Aïmeur, E. et Frasson, C. (1996). Analyzing a New Learning Strategy According to Different Knowledge Levels. *Computer and Education, An International Journal*, *27*(2), 115-127.

Aïmeur, E., Frasson, C. et Dufort, H. (2000). Co-operative Learning Strategies for Intelligent Tutoring Systems. *Applied Artificial Intelligence. An International Journal*, Vol *14*(5), 465-490.

Balacheff N. (1999a). Apprendre la preuve. *In* Sallantin, J. et Szczeciniarz, J. (dir.) *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle. Nouvelle Encyclopédie Diderot*, p. 197-236. Paris : Presses Universitaires de France.

Balacheff N. (1999b). Éclairage didactique sur les eiah en mathématiques. *In* Sierpinska, A. (dir.) *Informatique et enseignement des mathématiques – le point de vue de la didactique*. Actes du colloque GDM 1998, Montréal.

Benbachir, A. et Zaki, M. (2001). Production d'exemples et de contre-exemples en analyse : étude de cas en première d'université. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(3), 273-295.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cobo, P. et Fortuny, J.M. (2000). Social interaction and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *42*, 115-140.

Cobo, P., Fortuny, J.M., Puertas, E. et Richard, P.R. (2005). AgentGeom : a multiagent system for pedagogical support in a geometric proof problem. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. À paraître.

Cornellier, L. (2003). *À brûle-pourpoint : interventions critiques*. Sillery : Septentrion.

Duval, D. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Eisenhart, M.A. (1988). The Ethnographic Research Tradition and Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(2), 99-114.

El-Khoury, S., Aïmeur, E., Richard, P.R. et Fortuny, J.M. (2005). Development of an Intelligent Tutorial System to Enhance Students' Mathematical Competence in Problem Solving. *Actes de la E-Learn 2005 World Conference of Association for the Advancement of Computing in Education*. Vancouver.

Festinger, L. (1957). *A Theory of Cognitive Dissonance*. Stanford : Stanford University Press.

Festinger, L. (1989). The arousal and reduction of dissonance in social contexts. *In* Schachter, S. et Gazzaniga, M. (dir.) *Extending Psychological Frontiers : Selected Works on Leon Festinger*. New York : Russell Sage Foundation, 238-257.

Forman, E. (1996). Learning mathematics as participation in classroom practice : implications of sociocultural theory for educational reform. *In* Steffe, L., Nesher, P., Cobb, P., Goldin, G. et Greer., B. (dir.), *Theories of Mathematical Learning*, 115-130. Mahwah, New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

Guin, D. (1996). A Cognitive Analysis of Geometry Proof Focused on Intelligent Tutoring Systems. *In* J.M. Laborde (dir.), *Intelligent Learning Environments : the Case of Geometry*, 82-93. Berlin : Springer Verlag.

Joshua, S. et Dupin, J. J. (1999). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Paris : Presses Universitaires de France.

Kieran, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 187-228.

Laborde, C. (2001a). Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Contexts for the Complex Activity of Proving. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1), 151-161.

Laborde, C. (2001b). Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 283 – 317.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique*. Paris : Hermann.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology : a sociocultural approach to studying the teaching and the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 87-113.

MÉQ (2003). Chapitre 5 : Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie. *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire*. Ministère de l'éducation du Québec.

MÉQ (2005). *Programme de mathématique au secondaire, 2e cycle*. Document à usage restreint du Ministère de l'éducation du Québec, version validée de juin 2005.

Moschkovich, J. (2004). Appropriating mathematical practices : a case study of learning to use and explore functions through interaction with a tutor. *Educational Studies in Mathematics*, *55*, 49-80.

Rabardel P. (1995). *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Reid, D.A. (2001). Conjectures and refutations in Grade 5 Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(1), 5-29.

Richard, P.R. (2004a). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Berne : Peter Lang.

Richard, P.R. (2004b). L'inférence figurale : un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational Studies in Mathematics*, *57*, 229-263.

Richard, P.R., El-Khoury, S., Fortuny, J.M. et Aïmeur, E. (2005). An Open Architecture to Improve the Mathematical Competences in High School. *Actes de la ED-Media World Conference of Association for the Advancement of Computing in Education*. Montréal.

Richard, P.R., Fortuny, J.M., Cobo, P. et Aïmeur, E. (2003). Stratégie argumentative et système tutoriel pour l'apprentissage interactif de la géométrie. *Actes de l'Espace mathématique francophone 2003*. Tozeur.

Richard, P.R. (2006). Apprendre la démonstration au secondaire avec Turing. *Actes du Colloque 2005 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec*. Montréal. À paraître.

Sekiguchi, Y. et Miyazaki, M. (2000, janvier). Argumentation et démonstration au Japon. *La lettre de la preuve/International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Récupéré le 8 septembre 2005 dans http://www-leibniz.imag.fr/DIDACTIQUE/preuve/Newsletter/000102Theme/000102ThemeFR.html

Sutherland, R. et Balacheff, N. (1999). Didactical complexity of learning environnments. *Journal for Computers in Mathematics Learning*, *4*, 1-26.

Trouche, L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques. *In* Trouche, L. et Guin, D. (dir.) *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique : un problème didactique*, 187-214. Grenoble : La pensée sauvage.

Van der Maren, J.M. (1996). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. Bruxelles : Éditions De Boeck Université.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2, 3), 133-170.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in Society : The Development of Higher Psychological Process*. Cambridge, Massachusetts : Havard University Press.

Remerciements

Notre équipe de recherche a pu contribuer au développement de ce projet grâce à une subvention du Fonds québécois de la recherche sur la société et la culture (FQRSC 2005-AI-97435, Gouvernement du Québec) et au support logistique du Laboratoire Turing (http://turing.scedu.umontreal.ca).

Pour joindre les auteurs

Philippe R. Richard
Département de didactique
Université de Montréal
Canada
philippe.r.richard@umontreal.ca

Simon El-Khoury
Département d'informatique et recherche opérationnelle
Université de Montréal
Canada
elkhous@iro.umontreal.ca

Josep M. Fortuny
Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
Espagne
JosepMaria.Fortuny@uab.es

Esma Aïmeur
Département d'informatique et recherche opérationnelle
Université de Montréal
Canada
esma.aimeur@umontreal.ca