

Une approche multidimensionnelle de l'usage d'outils technologiques dans l'enseignement : le cas de Casyopée



Jean-Baptiste Lagrange, *IUFM Reims et Didirem, France*
Xavier Meyrier et Bernard Le Feuvre, *IREM Rennes, France*

Résumé

Cet article s'appuie sur le travail de développement de Casyopée, un environnement logiciel pour les élèves de lycée. Casyopée, peut se définir comme « une calculatrice de fonctions », offrant des possibilités étendues de calcul formel, d'exploration graphique et numérique, et une gestion dynamique des objets. Il favorise ainsi une activité mathématique où les notions prennent sens dans différents registres de représentation. Intégrant un module de preuve, il favorise aussi des démarches liant expérimentation et déduction.

Dans cet article, nous précisons la position de notre projet à partir de trois questions qui se sont posées au cours de la conception de Casyopée :

1. Quels sont les enjeux de la transposition de la démarche expérimentale et quel est l'apport de la technologie ? (dimension anthropologique)
2. Quelle peut être l'influence des outils technologiques sur l'activité algébrique des élèves ? (dimension épistémologique)
3. Comment concevoir un logiciel réellement utilisable pour l'activité algébrique des élèves ? (dimension conception)

Nous présentons par ailleurs deux exemples d'utilisation de Casyopée l'un orienté vers le développement de méthodes d'expérimentation et l'autre vers la preuve. Le premier exemple a été proposé à des élèves de Terminale Scientifique. Il s'agissait d'un problème de raccord, dans lequel on cherche à relier deux demi-droites (tA) et $[Bz)$ fixées, par une courbe tangente aux points A et B. L'autre exemple a été proposé en Première Option Électronique. Les élèves, ayant étudié des filtres en TP d'Electronique, devaient retrouver leurs caractéristiques en classe de mathématiques en étudiant les variations des fonctions de transfert associées.

Introduction

Cet article s'appuie sur le travail de développement de Casyopée, un environnement logiciel pour les élèves des lycées. De façon très concise, Casyopée peut être défini comme une « calculatrice de fonctions ». Environnement ouvert de résolution de problèmes, Casyopée offre des possibilités étendues de calcul formel, d'exploration graphique et numérique, notamment par le pilotage des paramètres et une gestion dynamique des objets. Son développement s'inscrit dans un mouvement visant à exploiter la technologie pour une activité mathématique où les notions liées aux fonctions prennent sens dans les différents registres de représentation (graphique, numérique et symboli-

que). Il s'agit aussi de favoriser des démarches liant expérimentation et déduction dans une gamme plus vaste de problèmes que celle permise par le papier/crayon.

Les programmes d'enseignement en France reflètent bien ce mouvement :

À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique, identifier un problème, expérimenter sur des exemples, conjecturer un résultat, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié [...] L'outil informatique donne la possibilité d'une démarche quasi expérimentale [...]

Pour séduisantes que soient les perspectives ainsi offertes, il convient de se garder de la naïveté qui caractérise l'innovation en matière de technologies. Faisant le constat de la disparité entre les potentialités prêtées aux instruments informatiques dans l'enseignement et leur utilisation réelle dans les classes, Lagrange *et al.* (2001) ont proposé une approche multidimensionnelle de leurs usages. Cette approche a pour but de dépasser une analyse trop centrée sur une dimension, qui, souvent, met en avant des potentialités réelles, mais sans en apprécier toutes les conséquences dans la réalité complexe que constitue la classe.

Dans cet article nous allons préciser la position du projet Casyopée dans trois dimensions, à partir de questions qui se sont posées au cours du projet :

1. La transposition des pratiques expérimentales de la recherche vers la classe (dimension anthropologique).
2. L'activité algébrique des élèves et l'influence des outils technologiques sur cette activité (dimension épistémologique).
3. La conception d'un logiciel réellement utilisable pour l'activité algébrique des élèves (dimension « conception »).

La transposition des pratiques expérimentales de la recherche vers la classe

Comme on l'a vu dans l'extrait de programme, il est demandé à l'enseignement d'initier les élèves à une « véritable activité mathématique » inspirée des pratiques des chercheurs et donnant une part importante à l'expérimentation et à la conjecture. Ce projet ancien retrouve une actualité grâce au développement des technologies. Les calculatrices et logiciels proposés pour une utilisation en classe dérivent en effet d'outils élaborés par la recherche en mathématiques pour ses propres besoins, notamment pour rendre plus productives les démarches d'expérimentation. Ce processus de transposition didactique intéresse à la fois les pratiques et les outils qui sont supposés les permettre.

Selon Chevallard (1994), les processus de transposition reflètent les contraintes de l'organisation du savoir différentes dans la recherche mathématique et dans l'enseignement, ainsi que la nécessité de légitimer le savoir enseigné. Pour être légitime, une approche expérimentale dans l'enseignement appuyée sur la technologie doit prendre en compte les pratiques homologues dans la recherche mathématique. Pour être viable, elle doit être compatible avec les contraintes de l'organisation du savoir dans l'enseignement.

Avant d'examiner ce que la technologie apporte de nouveau, étudions les similarités et différences des pratiques expérimentales dans la recherche et l'enseignement. Dans la recherche, les praxéologies se caractérisent par leur cohérence : les objets (concepts, résultats...) manipulés dans l'expérimentation sont pensés en fonction à la fois des problèmes à résoudre et des théories à construire. Les mathématiciens connaissent les contraintes que leurs conjectures doivent satisfaire pour s'insérer dans une construction déductive. Ils s'efforcent d'exprimer celles-ci dans leur plus grande généralité et avec le souci de l'appareil théorique à construire.

En revanche, dans l'enseignement, les objets théoriques n'émergent pas aisément des pratiques expérimentales. Comme le remarquaient déjà Joshua et Joshua (1987, p. 245) :

Le mode didactique (dominant dans l'enseignement des mathématiques) est celui de la rupture-démonstrative entre une série « d'activités » fermées sur elles-mêmes, et une présentation axiomatique ultérieure d'un domaine théorique qui pourrait, abstraitement, y correspondre.

Même dans le cas où les élèves ont une activité expérimentale authentique dans un domaine d'application, il est souvent difficile pour eux de faire le lien avec les objets théoriques qui modélisent les entités qu'ils manipulent. Le rôle de la preuve est crucial puisque les objets théoriques trouvent leur pleine pertinence lorsque l'on dépasse la validation empirique.

Que change la technologie ? Peut-elle faire de l'expérimentation une voie d'accès à la conceptualisation ? Le programme français reprend une idée répandue selon laquelle l'apport de la technologie serait dans l'amplification des possibilités d'expérimentation :

L'ordinateur élargit considérablement les possibilités d'observation et de manipulation ; ainsi la prise en charge d'un grand nombre de calculs ou d'une multitude de cas de figure permet d'observer et de vérifier de façon empirique différentes propriétés.

Cette idée que la multiplication des observables contribue en elle-même à l'activité mathématique a été critiquée à juste titre par Lakatos (dans Yerushalmy, 1999, p. 80) : « If you believe that the longer the table the more conjectures it will suggest, you may waste your time compiling unnecessary data ».

Pour comprendre les enjeux de la transposition d'une démarche expérimentale et de l'apport de la technologie, il est essentiel de prendre en compte les techniques. En effet, c'est par le travail sur les techniques (élaboration, discussion, etc.) que les propriétés des objets apparaissent et prennent sens dans un modèle. Il est cependant difficile d'étudier cette dimension des pratiques dans les mathématiques professionnelles. Certes, les mathématiciens reconnaissent souvent consacrer du temps à des tâches de nature expérimentale, mais les méthodes qui ont permis d'aboutir à des conjectures et le rôle que celles-ci ont pu jouer dans la conceptualisation restent du domaine privé. Dans la tradition mathématique, en effet, la façon dont les résultats ont été conjecturés s'efface au profit de la preuve, concepts et résultats trouvant leur justification dans la cohérence de l'édifice théorique plutôt que dans les conditions qui ont conduit à son élaboration.

Cherchant à savoir quel impact la technologie a sur les mathématiques professionnelles, je me suis penché sur les « mathématiques expérimentales ». Borwein (2005, p. 76) explique ainsi le projet de ce qui constitue aujourd'hui un mouvement visible dans la recherche :

At CECM (Centre for Experimental and Constructive Mathematics) we are interested in developing methods for exploiting mathematical computation as a tool (1) in the development of mathematical intuition, (2) in hypotheses building, in the generation of symbolically assisted proofs, and (3) in the construction of a flexible computer environment in which researchers and research students can undertake such research.

Borwein (*Ibid.*, p. 85) caractérise la « méthodologie expérimentale » par trois composantes où l'ordinateur a un apport spécifique : « meshing computation and mathematics, visualization, ruling out exceptions and refining hypotheses ».

Dans l'apport de la technologie, tel qu'il est vu par les mathématiques expérimentales, il y a ainsi bien davantage matière à transposition que dans une vision naïve où l'ordinateur servirait seulement à produire davantage d'observables. Dans cette perspective transpositive, le projet Casyopée se veut une contribution à la construction et à l'étude de praxéologies « techno-expérimentales » viables et légitimes. Il consiste à travailler (1) aux techniques qui vont permettre aux élèves de tirer parti des possibilités étendues de production d'observables, (2) à l'utilisation des capacités de traitement par l'ordinateur en vue de leur faciliter la recherche de conjectures et de preuves et (3) à la construction d'un environnement logiciel adapté.

L'activité algébrique des élèves

Dans le projet Casyopée, l'activité expérimentale n'est pas un but en soi. Il s'agit pour les élèves d'accéder à une activité algébrique ou de progresser dans cette activité. C'est un enjeu important. Alors que l'alphabétisation numérique (numeracy) se généralise, au moins dans les sociétés développées, la grande majorité de nos contemporains ont eu dans leur scolarité des difficultés dans le domaine algébrique et ont abandonné toute pratique. Dans son introduction à « Une brève histoire du temps » Hawking déclare : « On m'a dit que chaque équation incluse dans le livre en diminuerait les ventes de moitié. J'ai donc décidé qu'il n'y en aurait aucune ». Ce livre est destiné à expliquer des concepts et résultats de physique théorique à un public cultivé. La déclaration de Hawking témoigne de ce que l'enseignement des Mathématiques échoue à faire entrer l'algèbre dans la culture commune.

(Kieran, 2005, p. 23) spécifie trois catégories d'activité algébrique :

1. L'activité générationnelle associant une variable dépendante à une variable indépendante, dans ses aspects numériques (table de valeurs), graphiques (courbe) et algébriques (ensemble de définition et expression).
2. L'activité transformationnelle associant des propriétés à différentes expressions équivalentes définissant une fonction.
3. L'activité de modélisation (niveau global/meta).

Elle note que les fonctions et l'arithmétique généralisé constituent deux cadres servant de fil conducteur transversal aux trois catégories.

Nous avons fait le choix des fonctions car c'est le cadre qui est le plus développé au lycée, l'arithmétique généralisée étant plutôt retenue au collège.

En s'inspirant de Kieran (*Ibid.*) voici comment ce cadre est vu dans le projet :

- a) Les lettres désignent la variable, des valeurs de la variable, des fonctions et des paramètres.
- b) Les graphes et tables des fonctions constituent des représentations complémentaires aux expressions symboliques.
- c) Les équations s'interprètent comme la recherche d'une valeur de la variable pour une valeur donnée de la fonction ou pour l'égalité de deux fonctions, ou la recherche d'une valeur d'un paramètre. Elles peuvent s'interpréter aussi dans le registre des représentations graphiques (intersection de courbes...).

Le choix d'inclure des paramètres permet d'enrichir, lorsque c'est nécessaire, le répertoire de littéraux. L'usage de paramètres contribue aussi à donner corps à ce que Kieran (*Ibid.*, p. 24) appelle l'activité de niveau « Global-meta » qui comprend la modélisation, la recherche de structures, la généralisation... La modélisation d'une situation suppose notamment d'exprimer une dépendance suffisamment générale. La recherche d'un rectangle inscrit d'aire maximum dans un triangle rectangle (Lagrange, 2005, p. 153) est un exemple où une expression de la dépendance fonctionnelle entre l'aire et la longueur du rectangle peut inclure comme paramètre la longueur d'un ou des deux côtés de l'angle droit, donnant ainsi une signification plus générale au résultat.

Dans les problèmes portant sur des fonctions dépendant de paramètres, la recherche de conjectures sur des représentations graphiques ou tabulées demande plus de méthode (voir le premier exemple ci-après) et la validation empirique emporte moins la conviction que dans le cas de fonction « explicites ». Le professeur a ainsi un « levier » pour engager l'élève vers une expérimentation raisonnée et une preuve symbolique.

Dans Casyopée, chaque paramètre peut exister sous forme symbolique (élément d'un intervalle de $\mathbb{R}$) ou être instancié sous forme dynamique (il prend alors ses valeurs dans un ensemble fini qu'un curseur lui permet de parcourir). Cette fonctionnalité d'« instanciation-déinstanciation » des paramètres permet d'articuler l'exploration et la validation empirique sur des cas particuliers avec l'étude symbolique du cas général (voir l'exemple du rectangle d'aire maximum, Lagrange, 2005).

Bien que ce soit en projet, il n'y a pas actuellement de contribution de Casyopée à l'activité générationnelle, celle qui consiste à reconnaître une relation fonctionnelle et à trouver une façon de l'exprimer. Lagrange (*Ibid.*, p. 164) a montré que c'est pour cette catégorie d'activité que la géométrie dynamique et le tableur sont les mieux adaptés. En revanche, Casyopée met l'accent sur l'activité transformationnelle, telle qu'elle est décrite dans les objectifs des programmes français :

Reconnaître la forme d'une expression, reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée, etc.).

Dans ces objectifs, ce n'est pas tant la technique de transformation elle-même qui est en jeu, que la compréhension de la multiplicité des formes équivalentes et de leur utilité. C'est pourquoi le choix est fait dans Casyopée d'utiliser des primitives de calcul formel pour que les élèves puissent aisément obtenir diverses formes des expressions des fonctions, leurs sous-expressions, les valeurs prises, etc. Cette activité transformationnelle serait un pur jeu symbolique si elle n'était motivée par la preuve. Nous avons vu que l'activité « Global-meta », par exemple dans les problèmes portant

sur des fonctions dépendant de paramètres, permet d'engager les élèves vers une preuve. Il faut aussi que le logiciel apporte une aide à sa construction. Le calcul formel est utilisé ici aussi pour proposer à l'élève un ensemble de pas de preuves, appelés justifications, que l'élève utilise pour cette construction en fondant leur validité sur les formes pertinentes des expressions algébriques qu'il a pu obtenir par transformation algébrique (développement, factorisation, etc.).

La conception de Casyopée

Ayant choisi de tirer parti du calcul formel pour soutenir l'activité transformationnelle et fournir des aides à la preuve, pourquoi développer un environnement spécifique alors qu'il existe des logiciels « standard » sur ordinateur (Derive, Maple) ou sur calculatrices ? C'est après avoir fait le constat de difficultés dans l'utilisation en classe de ces logiciels et de leur faible diffusion dans l'enseignement « réel » que le groupe à l'origine du projet s'est orienté vers la conception d'un environnement. Les principaux inconvénients que nous voyons aux logiciels « standards » sont les suivants : (a) ils permettent difficilement de développer des méthodes et (b) ils n'aident pas à la cohérence de l'activité algébrique.

Ces inconvénients découlent d'une conception qui ne tient compte ni du domaine de tâche ni des connaissances de l'utilisateur. L'élève est confronté aux multiples fonctionnalités de la machine qui lui offrent de nouvelles capacités d'action, mais qu'il (elle) doit adapter à l'objectif qu'il (elle) vise. Il lui faut beaucoup de temps et des situations spécifiques pour « faire le tri » parmi ces fonctionnalités et les relier à ses connaissances mathématiques.

Yerusalmly's (*Ibid.*, p. 185) observe que « la conception des logiciels de calcul formel sert les buts (agenda) de leurs concepteurs – fournir une solution de la façon la moins contraignante possible » alors qu'un logiciel d'enseignement devrait donner comme premier message qu'il est un moyen pour apprendre. Un logiciel d'enseignement devrait aussi permettre à l'étudiant une expérimentation contrôlée en l'aidant à développer des méthodes et contribuer à l'organisation des notions en utilisant « le même répertoire d'objets et d'actions que celui qui structure l'enseignement ».

Dans un logiciel de calcul formel, l'écran est un simple historique des calculs et définitions à partir duquel l'utilisateur doit se représenter un état des objets du problème et construire sa preuve. Casyopée fournit à l'élève une organisation des objets dans des fenêtres (figure 1) : fenêtre des valeurs de la variable – celles qui définissent les intervalles et valeurs où les fonctions sont définies et où des propriétés peuvent être prouvées ou conjecturées, fenêtre des fonctions avec les propriétés prouvées ou conjecturées, fenêtre des expressions où l'on peut trouver différentes définitions algébriques équivalentes d'une même fonction, fenêtre des équations. Cette organisation est dynamique (comme dans un tableur) par recalcul des objets après instanciation et désinstanciation des paramètres, et après modification des fonctions. L'historique existe parallèlement sous forme d'un « bloc-note » qui est conçu pour servir de base à la rédaction d'un compte rendu de recherche ou d'une démonstration.

Les objets sont conçus pour s'inscrire dans le répertoire habituel des mathématiques du secondaire. Par exemple, un choix de base a été de définir les fonctions sur un domaine (intervalle ou réunion d'intervalles), plutôt que par la simple donnée d'une expression comme cela existe dans les logiciels de calcul formel. La figure 2 montre un exemple d'incohérence résultant de la non prise en

compte d'un domaine de définition des fonctions dans le module formel de la Voyage 200¹. Dans les premières versions de Casyopée, l'utilisateur choisissait des intervalles ouverts et Casyopée décidait de l'existence aux bornes à partir de l'expression de la fonction. Ce «prolongement par continuité» a été jugé par les enseignants utilisateurs non conforme aux objectifs du secondaire, et dans les versions récentes l'élève doit explicitement préciser les intervalles de définition.

Le calcul formel permet aussi bien de vérifier la conformité des entrées de l'élève que d'apporter des aides. Par exemple, Casyopée évalue l'existence de la fonction sur le domaine après que l'élève ait entré les données, mais sur sa demande, il peut calculer le plus grand domaine pour l'expression entrée.

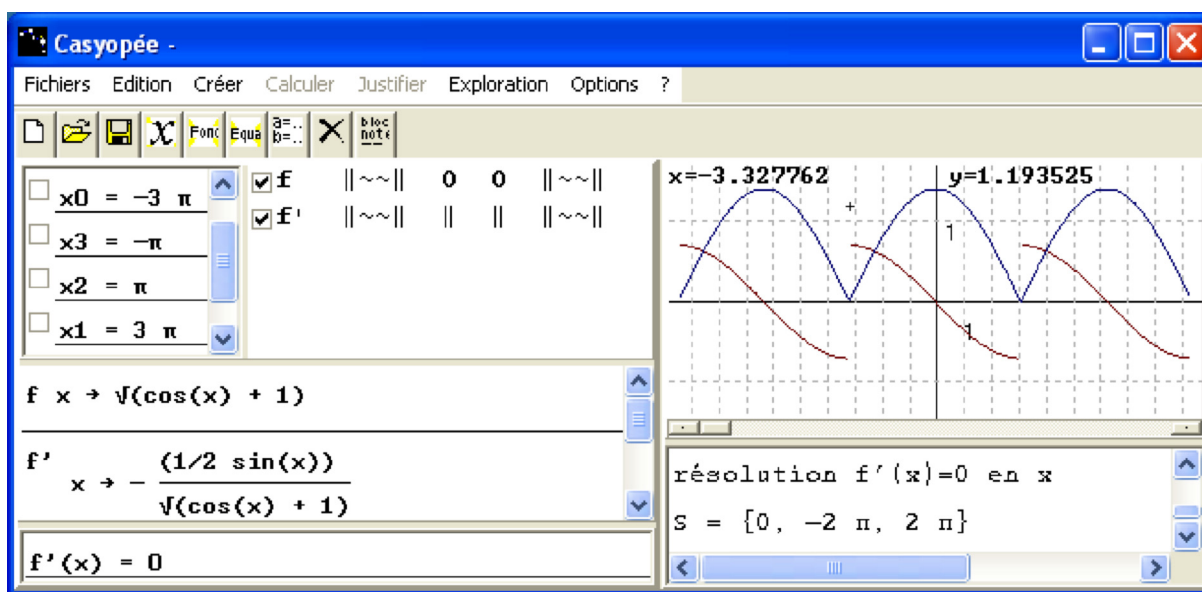


Figure1 – Les fenêtres et le bloc-note de Casyopée

La figure 1 montre les domaines de définition des fonctions. f est définie sur $] -3\pi; 3\pi[$, f' est définie sur $] -3\pi; -\pi[\cup] -\pi; \pi[\cup] \pi; 3\pi[$. La donnée de l'ensemble de définition permet qu'il n'y ait pas de tracé «à travers les discontinuités». Le bloc-note garde trace de la résolution de l'équation $f'(x) = 0$ en x .²

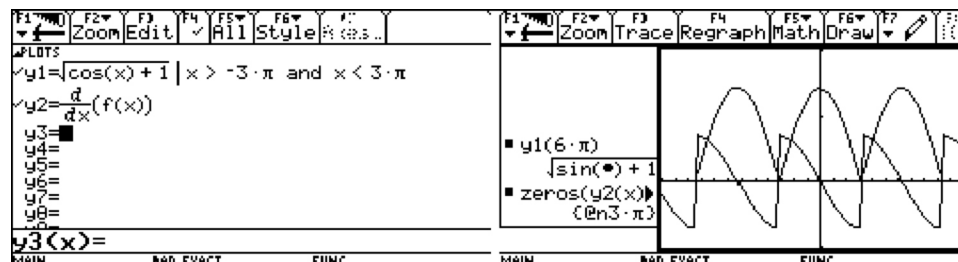


Figure 2 – Incohérence dans la définition des fonctions sur la TI-92

1 Calculatrice formelle de Texas Instruments.

2 Il n'est pas possible, dans un article court, d'en dire plus sur le fonctionnement de Casyopée. Le lecteur se reportera au document de prise en main.

La TI-92 (figure 2) permet de limiter l'ensemble de définition d'une fonction, ce qui est pris en compte dans la représentation graphique de la fonction, mais pas de la dérivée. La TI-92 donne des valeurs incohérentes en dehors de l'ensemble de définition. Elle trouve des zéros de la dérivée pour tous les multiples de π alors que celle-ci n'est pas définie pour les multiples impairs.

Comme nous l'avons dit plus haut, le logiciel apporte une aide à la construction des preuves en proposant des pas de preuve élémentaires appelés « justifications ». Les preuves portent sur les propriétés des fonctions : signe, variations et existence de zéros. Les justifications correspondent aux théorèmes classiques du secondaire et aux propriétés de fonctions de référence. Il s'agit d'aider l'élève et non de le contraindre. C'est pourquoi certaines propriétés, qui, dans un souci de simplicité, ne sont pas explicitement justifiées dans la pratique habituelle sont déduites par le logiciel à l'aide du calcul formel sans intervention de l'élève : par exemple, Casyopée attribue directement un signe aux expressions constantes et aux carrés.

Deux exemples

Cette section présente deux exemples. Le premier est orienté vers le développement de méthodes d'expérimentation et s'inscrit donc dans une certaine transposition de ces méthodes. L'autre est orienté vers la preuve de propriété et vise ainsi à motiver l'activité transformationnelle.

Une méthode pour expérimenter

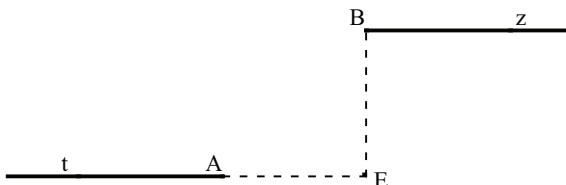
On considère deux demi-droites $(tA]$ et $[Bz)$. On cherche à relier par une « belle » courbe ces deux demi-droites c'est-à-dire à déterminer une courbe tangente en A et en B aux deux demi-droites, et qui ne change pas « brusquement » de pente. $AE = 2$ et $EB = 2$.	
1° Quels repères peut-on choisir ? Quel est le plus intéressant, pourquoi ?	
2° Proposer plusieurs types de fonctions.	
3° Déterminer des fonctions satisfaisant aux contraintes. On pourra utiliser Casyopée et on indiquera les différentes étapes de la recherche.	

Figure 3 – Un problème de raccord

Le problème de la figure 3 a été donné dans une terminale scientifique en début d'année. Il s'agissait, comme le programme officiel le spécifie, de « motiver l'étude des fonctions par la résolution de problèmes », notamment par ceux qui mettent en jeu des liens entre une fonction et sa dérivée. La séance de deux heures était placée au milieu d'une séquence entre une séance où le problème est exposé, et une séance de bilan. Les 19 élèves rencontraient des difficultés dans les calculs algébriques et ne prenaient pas facilement des initiatives dans l'élaboration d'une démarche

Mathématiquement, un repère étant choisi, le problème consiste à chercher une fonction f vérifiant quatre conditions : $f(x_A) = y_A$, $f(x_B) = y_B$, $f'(x_A) = f'(x_B) = 0$. Les fonctions auxquelles les élèves pouvaient penser étaient de trois types (figure 4) : polynôme du troisième degré ou du second degré par morceaux ou fonctions de type sinus. Suivant le type de fonction et le choix du repère, la fonction comporte au départ trois ou quatre paramètres, dont les valeurs doivent permettre que

les quatre conditions ci-dessus soient vérifiées. Ces valeurs peuvent être trouvées par ajustement de la courbe à l'aide du pilotage des paramètres, et/ou par calcul algébrique. A priori, les élèves devaient parvenir assez facilement à satisfaire les deux premières conditions, mais avoir plus de difficultés avec les conditions sur la dérivée. Satisfaire les quatre conditions par pilotage seul étant irréaliste, les conditions algébriques sur la dérivée devaient apparaître comme importantes pour modéliser ce qu'est «une belle courbe». L'utilisation de Cassyopée devait permettre aux élèves de mener une étude de façon relativement autonome sur une session de deux heures. Pour cela, ils avaient le choix du repère et du type de fonction, ceux-ci ayant été identifiés au cours de la séance de présentation.

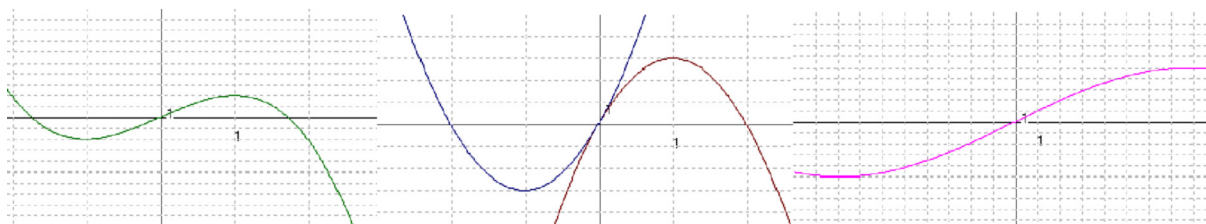


Figure 4 – Trois types de fonctions solutions

Bilan de la séance de recherche

Choix de repères

Quatre repères différents ont été identifiés et les élèves ont poursuivi la recherche dans le repère de leur choix. C'est pour nous un indice de l'autonomie favorisée par le logiciel. Dans d'autres expérimentations du même problème (Artigue, 2005)³ le professeur impose assez vite le repère pour diriger le travail des élèves. La simplicité du repère centré au milieu de [AB] a été reconnue au moment de la synthèse.

Types de fonction

Les fonctions trouvées appartiennent à différents types sans qu'un type apparaisse privilégié, ce qui est un autre indice de l'autonomie des élèves. Pour les fonctions polynômes, la difficulté est dans la complexité du pilotage des quatre paramètres. Pour les fonctions de type sinus, le rôle des paramètres est plus visible. Les élèves parviennent par exemple à une fonction $f(x)=\sin(kx)$. Ils trouvent la valeur $k=1,6$ par pilotage mais ne reconnaissent pas la valeur $\pi/2$ sans l'aide du professeur.

Rôle du pilotage et des conditions algébriques

L'analyse montre des comportements très différenciés chez les élèves. Le pilotage au hasard ne donne pas de solution et seuls quelques élèves s'obstinent dans ce comportement. La plupart orga-

3 «(To solve this problem), the calculators (TI-92) did not play necessarily a positive role. At the beginning of the session, their massive use for graphical investigations, poorly structured and controlled, was not effective at all. ...The symbolic application could have been mobilized for the resolution of the linear systems involved but students [...] preferred to solve these systems by paper and pencil techniques.»

nisent un pilotage des paramètres : en fixer certains pour mieux piloter les autres ou chercher à en diminuer le nombre. Une dynamique se crée entre la réflexion et la vérification, avec le logiciel, des fonctions conjecturées. Plusieurs élèves découvrent par eux-mêmes que l'écriture de conditions algébriques permet de diminuer le nombre de paramètres. Sauf dans un cas, les solutions sont obtenues grâce à un pilotage réfléchi.

Même si les élèves trouvant seuls des solutions ne sont pas les plus nombreux (sept seulement), chacun a mené une recherche personnelle. Elle a été productive pour une majorité -seuls quatre élèves effectuent des recherches improductives et désordonnées- et a pu être réinvestie dans un travail écrit. L'environnement permet ainsi de faire vivre une situation de recherche relativement complexe, tout en s'inscrivant dans le déroulement normal. Il faut ajouter que chercher à diminuer le nombre de paramètres est apparu comme une méthode pouvant être réinvestie.

Construire une preuve algébrique

Comme nous l'avons dit plus haut, l'accent doit être mis sur la preuve pour donner un sens à l'activité transformationnelle. Cependant de nombreux élèves sont rebutés par les preuves algébriques qu'ils pensent non pertinentes car les conjectures dans les cas usuels peuvent être validées sur un graphe ou une table de valeurs. Ils ont des difficultés non seulement dans les transformations algébriques, mais aussi dans l'organisation et la rédaction de la preuve.

Nous avons aussi dit plus haut que les fonctions avec paramètres pouvaient engager les élèves vers une preuve symbolique et que Casyopée pouvait non seulement calculer les transformations algébriques pour les élèves, mais aussi les aider à organiser une preuve et à la rédiger. Voici un exemple. Il s'agit d'élèves de Première option électronique. En enseignement d'électronique, ils étaient en train d'étudier les filtres. D'après <http://fr.wikipedia.org/wiki/Filtre> :

- Un filtre passe-haut (resp. passe-bas) atténue tous les signaux en dessous (resp. au-dessus) d'une fréquence déterminée.
- Un filtre passe-bande atténue tous les signaux au-dessus et en dessous de deux fréquences.

Ces filtres ont été étudiés en électronique, puis en mathématiques. En électronique, les élèves ont considéré la réalisation électronique de filtres analogiques composés d'un résistor (résistance R) et d'un condensateur (capacité C) (schéma figure 5), puis, à l'aide d'un oscilloscope, observé pour des valeurs de R , C et V_{in} (tension en entrée), l'évolution de la tension en sortie (V_{out}) en fonction de la fréquence. Ils ont aussi calculé la fonction de transfert, qui associe à la fréquence le module du quotient complexe V_{out}/V_{in} ainsi que la valeur en zéro et la limite en l'infini de cette fonction (figure 5).

En classe de mathématiques, il s'agissait d'aller plus loin dans l'étude des fonctions de transfert. Dans Casyopée, après l'entrée de la fonction, les élèves peuvent opérer les transformations algébriques à l'aide du menu calculer (figure 6 à gauche) et les pas de preuve à l'aide du menu justifier (figure 6 à droite). Ces actions produisent des résultats dans les fenêtres (nouvelles fonctions ou expressions, propriétés, etc.) mais aussi des « indications » dans le bloc-note (figure 7).

L'étude de variation est familière aux élèves dans son organisation, mais ici, la tâche est nouvelle à cause des paramètres R et C. Le contexte «électronique» contribue cependant à donner du sens à cette étude «générale». Une étude standard consiste à tout d'abord utiliser le menu calculer pour la dérivée, puis sa factorisation et la sélection d'une sous-expression dans cette factorisation (figure gauche). Ensuite la preuve passe par l'utilisation du menu justifier pour prouver le signe de cette sous-expression, puis celui de la dérivée. Comme nous l'avons dit plus haut, Casyopée «admet» qu'une expression «visiblement positive» (un carré, par exemple) ne change pas le signe d'un produit. L'étude se termine classiquement par la justification de la variation de la fonction à l'aide du signe de la dérivée.

Il a été demandé aux élèves de réaliser l'étude, puis d'utiliser les indications du bloc-note pour rédiger. Par exemple, il était attendu qu'après le calcul de la dérivée, les élèves motivent le calcul d'une forme factorisée par une phrase du type : la forme factorisée est celle qui permet d'étudier le signe.

Les «traces» enregistrées lors de l'utilisation et les productions écrites des élèves ont été analysées de façon à mesurer l'apport du logiciel tant pour la résolution du problème que pour la rédaction de la preuve. La première partie de l'étude utilisant les commandes du menu calculer est réalisée convenablement par 14 élèves sur 15. Le signe de la dérivée est justifié convenablement par 10 élèves. Ils ne sont en revanche que 7 à établir la nature exacte du filtre. Ces résultats nous paraissent assez satisfaisants : même si elle n'est pas complète, la démarche de preuve est cohérente chez 2/3 des élèves.

Les disparités sont grandes dans la qualité des productions écrites réalisées à partir du bloc-note de Casyopée. Huit élèves (sur quinze) «copient-collent» le bloc-note en rajoutant des sous-titres explicites. Pour les autres élèves la qualité de la rédaction est bien supérieure aux productions écrites habituelles : elle peut être très personnelle, de type narratif, ou au contraire très synthétique, l'élève réorganisant alors le bloc-note Casyopée et reformulant les réponses. L'un ou l'autre cas justifient à nos yeux les potentialités de l'environnement comme aide à la production écrite.

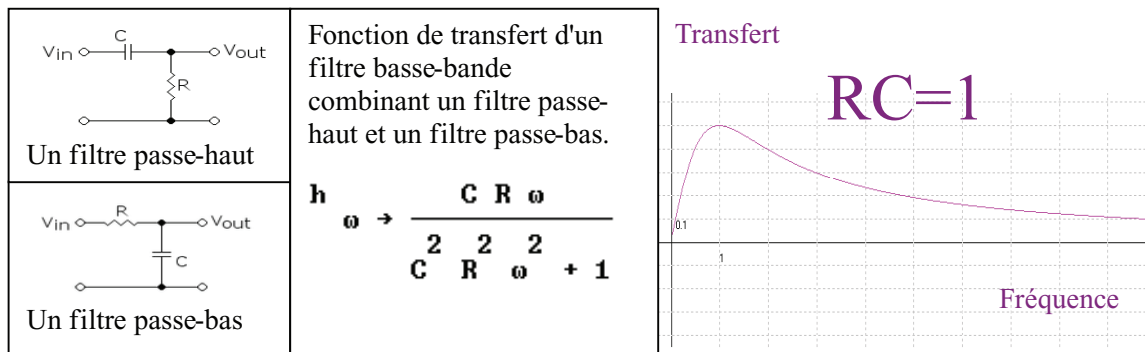


Figure 5 – Le filtre «passe-bande»
(schéma électronique, fonction de transfert et courbe pour une valeur de RC)

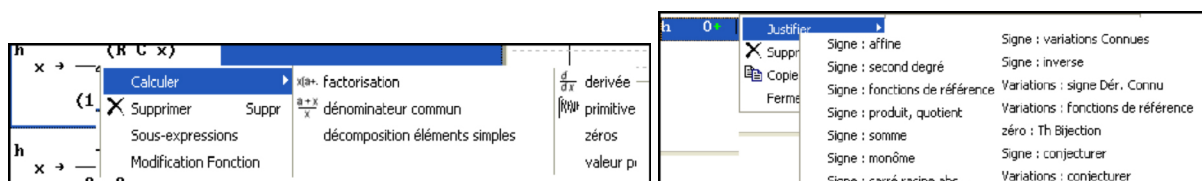


Figure 6 – Les menus calculer et justifier

Dérivée de $h(\omega)$ $\frac{C^2 R^2 \omega^2}{C^2 R^2 \omega^2} + 1 = \frac{2 C^2 R^2 \omega^2}{(C^2 R^2 \omega^2 + 1)^2}$ Factorisation de $h'(\omega)$ $C R (C R \omega - 1) (C R \omega + 1)$ Fonction définie sur $[0; \infty[$ $h' 0 \omega \rightarrow C R \omega - 1$	Signe : affine $h' 0$ négative sur $]0 ; 1/CR[$ positive sur $]1/CR ; \infty[$ Signe : produit, quotient h' est du signe opposé à $h' 0$ h' positive sur $]0 ; 1/CR[$ h' négative sur $]1/CR ; \infty[$ Variations : signe Dérivée Connu h' est la dérivée de h h croissante sur $]0 ; 1/CR[$ h Décroissante sur $]1/CR ; \infty[$
--	--

(1) calcul de la dérivée de h , (2) factorisation de cette dérivée, (3) sélection d'une sous-expression, (4) justification «signe affine», (5) justification «produit-quotient», (6) justification «signe Dérivée Connu».

Figure 7 – Indications données par Casyopée dans le bloc-note

Discussion et perspectives

Cet article a présenté la conception de Casyopée et deux exemples d'utilisation en classe, à partir d'une analyse selon trois dimensions (anthropologique, épistémologique et «conception»). Il s'agissait d'exposer comment une analyse multidimensionnelle trouve à s'employer concrètement dans un projet de développement. En retour, le projet montre l'imbrication des trois dimensions : l'aide de l'ordinateur à l'activité transformationnelle et à la construction de méthodes d'expérimentation et de preuve est cruciale dans le projet de transposition de praxéologies «techno-expérimentales» qui oriente l'effort de conception. Les utilisations dont deux exemples sont rapportés, témoignent que cet effort produit des effets visibles en classe, sans constituer bien sûr des «preuves» d'une supériorité sur un enseignement «traditionnel» ou avec un logiciel standard. Nous allons nous engager dans des expérimentations plus systématiques et développer parallèlement de nouvelles fonctionnalités pour l'activité générationnelle – découverte de formulations algébriques pour des dépendances fonctionnelles – en lien avec les activités transformationnelles et global-meta.

Remerciements

Ce travail a été soutenu par l'Institut National de la Recherche Pédagogique et l'IREM de Rennes.

Références

- Artigue, M. (2005) The integration of symbolic calculators into secondary education: some lessons from didactical engineering, 231-294. In D. Guin *et al.* (dir.) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*. New York: Springer.
- Borwein, J., (200) The experimental mathematician: the pleasure of discovery and the role of proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* (2005) 10: 75-108.
- Chevallard, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In Arsac, Martinand, Tiberghien (dir.) *La Transposition didactique à l'épreuve des faits*. Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Joshua, S., Joshua, M.A. (1987). Les fonctions didactiques de l'expérimental dans l'enseignement scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 8.3, 231-266.
- Kieran, C. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. in Stacey et al. (dir.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study*. Springer 2004.
- Lagrange, J-b. (2005) Curriculum, classroom practices and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, 143-189.
- Yerushalmy, M. (1999). Making exploration visible: on software design and school algebra curriculum. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol 4, 169-189.

Pour joindre les auteurs

Jean-Baptiste Lagrange
IUFM de Champagne-Ardenne
23 rue Clément Ader – 51685 – Reims Cedex 2
jb.lagrange@reims.iufm.fr

Xavier Meyrier
IREM de Rennes
Campus de Beaulieu – 35042 – Rennes Cedex
xavier.meyrier@ac-rennes.fr

Bernard Le Feuvre
IREM de Rennes
Campus de Beaulieu – 35042 – Rennes Cedex
le-feuvre.bernard@wanadoo.fr