



Quel environnement informatique pour une introduction aux mathématiques financières à l'université ?

Alain Birebent, Université Grenoble 2, France

Résumé

Nous illustrons ici comment une analyse en termes d'organisations mathématiques et didactiques peut soutenir la conception d'une ingénierie didactique sur le thème d'instruments de calcul à intégrer dans une institution d'enseignement mathématique. Une telle analyse, dite institutionnelle, sert à comprendre le contexte d'enseignement en ce qu'il détermine, pour les instruments de calcul – par exemple la calculatrice et le tableur – et à travers les pratiques calculatoires, les genèses instrumentales collectives et individuelles. Menée ici sur un enseignement introductif aux mathématiques financières dans une première année universitaire française en économie et gestion, cette analyse montre combien les genèses instrumentales sont recroquevillées sur l'unique capacité à exécuter des calculs numériques en recopiant « fidèlement » des formules sans donner vie à des contrôles et des significations plus riches. Elle permet alors de formuler des hypothèses sur la possibilité d'une intégration technologique des calculatrices et des tableurs qui puisse déployer autour de praxéologies nouvelles d'autres potentialités instrumentales et mathématiques relativement à l'enjeu de savoir central qu'est le concept d'actualisation d'un capital. Nous présentons l'ingénierie didactique conçue à partir de ces hypothèses dans un environnement tableur. Cette ingénierie se veut une amorce de praxéologie nouvelle à construire dans l'enseignement mathématique d'une première année universitaire pour une introduction aux mathématiques financières.

Introduction

Quelquefois abordées dès la scolarité secondaire, les mathématiques financières font l'objet d'enseignements dans toutes les filières post-baccalauréat d'économie et gestion. Malgré la diversité de ces filières, il existe un socle commun construit généralement dès la première année sur les notions d'emprunts et d'investissements dans deux des modélisations (intérêts simples, intérêts composés) du concept d'actualisation du capital. Cette première année n'aborde les mathématiques financières qu'en avenir certain. La présentation des concepts et modèles des activités financières en avenir incertain (quelquefois appelées mathématiques actuarielles¹) se fait plus tardivement quelquefois au-delà du niveau licence.

Omniprésent derrière toutes les opérations financières étudiées, se trouve le concept d'actualisation du capital. Ce concept qui rend l'évaluation de tout capital dépendante du temps rompt radicalement avec l'évaluation nominale qui veut qu'un billet de 20 euros vaille 20 euros quel que soit le moment où on le considère. La première rencontre avec la mathématisation de ce concept est d'autant plus rude que, pour distinguer court terme et long terme, elle se fait généralement à

1 La dénomination est controversée. Ce qui l'est moins c'est l'évolution des mathématiques financières vers l'analyse du risque dans l'évaluation des actifs.

travers deux modèles différents, celui des intérêts simples et celui des intérêts composés, qui ne manipulent pas les mêmes objets mathématiques (par exemple les suites arithmétiques pour le premier et les suites géométriques pour le second).

Le concept d'actualisation est l'objet de conflits théoriques entre les disciplines enseignées à l'Université et d'enjeux sociaux, comme le souligne l'article « actualisation » du Thésaurus de l'encyclopédie Universalis 1988 :

Ainsi, le choix d'un taux d'actualisation traduit, en définitive, l'appréciation individuelle ou collective du temps. À cet égard, ce choix est éminemment stratégique, voire politique, au sens précis du terme. Il faut, en effet, noter que la difficulté de ce choix ne tient pas seulement à la multiplicité du taux d'actualisation possible, mais aussi, quelquefois, surtout au fait que l'actualisation est destinée à éclairer des décisions qui s'imposent à différents groupes dont les taux ne sont pas les mêmes. Alors, le choix d'un taux particulier exprime un certain compromis s'opérant entre les différents groupes qui sont parties prenantes dans la décision, compromis qui concerne leurs préférences intertemporelles.

Un enseignement des mathématiques financières ne problématise donc pas seul ce concept. Mais il lui revient d'explicitier certains modèles mathématiques invoqués dans les théories ou pratiques dans les milieux professionnels, de les faire fonctionner pour mettre en valeur leurs domaines de validité et d'efficacité. La transposition didactique sous-jacente se manifeste par des choix institutionnels à la croisée des exigences d'une formation professionnelle, d'une formation académique et d'une formation citoyenne. Parmi ces choix, celui des environnements technologiques dédiés à la pratique des calculs numériques.

Première partie

Nous voulons éclairer la question de l'intégration technologique par celle que nous appelons la question numérique c'est-à-dire la discussion des finalités, des contraintes, des choix, des méthodes et des exigences relatives aux calculs sur des nombres. Cette question est au cœur de l'enseignement des mathématiques financières comme le souligne l'avant-propos d'un ouvrage de référence consacré aux mathématiques financières (Saada, 1991) :

La rigueur n'a pas été sacrifiée, contrairement à une tradition constante en France, à des considérations utilitaires. C'est-à-dire que le point de vue mathématique a prévalu sur le point de vue comptable. Les axiomes et hypothèses ont été souvent explicités et les théorèmes généralement établis. Pour ne pas décourager les lecteurs qui auraient été rebutés par un formalisme excessif, les démonstrations délicates ont été rédigées en petits caractères et peuvent être « sautées » sans nuire à l'intelligence de l'ensemble. [...]

Mais ce qui fait l'intérêt de ce travail pour un large public, c'est, me semble-t-il, le traitement numérique détaillé de très nombreux exemples puisés dans l'activité financière : calcul des annuités de remboursement et du taux effectif global d'emprunts, compte tenu des diverses modalités : frais, impôts, fractionnement des intérêts, primes, etc., détermination des rentes d'amortissement, incidences de l'inflation, etc. Les références aux formules sont très abondantes et permettent au

lecteur non mathématicien de suivre le détail des solutions, mais calculatrice au poing et vigilance sans défaillance (pages 3-4).

Valorisé ici pour s'opposer à une attaque comptable des problèmes financiers jugée trop utilitariste le besoin mathématique est cependant soumis à la volonté affichée d'abaisser le coût de la mathématisation pour répondre aux attentes d'un public qualifié de «non mathématicien». Cette posture didactique est commune à tous les ouvrages universitaires qui se veulent introductifs aux mathématiques financières. Nous allons montrer qu'elle s'efforce de réussir une démathématisation du calcul numérique, au sens que les activités de Calcul numérique doivent vivre en ne se chargeant d'aucune problématique mathématique au-delà d'une certaine maîtrise des formules. Mais de quelle maîtrise s'agit-il ? Comment est-elle mobilisée ? Avec quels instruments de calcul ? Les organisations mathématiques et didactiques permettent-elles de conduire un apprentissage du concept d'actualisation et de ses applications dans les pratiques financières au-delà du «suivre les solutions» que semble attendre Saada ?

Or la diversité et la complexité des moyens de calculs mis à la disposition des élèves de l'enseignement secondaire ont considérablement évolué ces dix dernières années et cette évolution a participé à modifier substantiellement les rapports personnels au calcul numérique des étudiants à l'entrée de l'université. Les tableurs ont fait leur entrée officielle dès le collège et au lycée les calculatrices sont toutes devenues graphiques. L'utilisation par les étudiants de moyens modernes de calcul est un leitmotiv noosphérique repris par tous les auteurs de manuels qui mentionnent surtout les calculatrices et les tableurs. Quels effets ces incitations ont-elles sur l'enseignement universitaire lui-même ?

Dans l'université française, tous les constats convergent : l'usage des tableurs en mathématiques financières est encore marginal et celui des calculatrices continue à être redouté et dévalorisé par les enseignants. Notre hypothèse est que les raisons les plus fortes de ces pratiques d'enseignement sont à rechercher profondément dans le fonctionnement du système didactique au cœur même de la construction du savoir, à l'articulation entre les organisations didactiques et mathématiques

En effet la maîtrise d'un calcul numérique même considéré comme élémentaire doit combiner des connaissances artefactuelles et la connaissance d'au moins une technique mathématique instrumentée adaptée au calcul². Une plus grande familiarité avec les calculatrices et les tableurs ne permet pas de préjuger d'une plus grande capacité chez les étudiants à s'approprier et à résoudre les tâches de calcul numérique si des techniques instrumentées ne sont pas installées dans l'enseignement.

D'après Lauton (1994), «les mathématiques nécessaires sont, pour l'essentiel, au programme des lycées»³. Même si les savoirs sont déjà là, leur contextualisation est nouvelle. Examinons les savoirs en jeu et leur traitement institutionnel sur un problème emblématique des mathématiques financières.

2 Les concepts d'artefact, de genèse instrumentale, d'instrumentation et d'instrumentalisation se réfèrent aux travaux de Rabardel (1995) tandis que ceux de tâche, de technique et de théorie mathématiques puisent dans les travaux de Chevallard (1999) dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique.

3 Dans son mémoire, Lauton recense les opérations élémentaires sur les rapports de nombres, les exponentielles et les logarithmes, les progressions arithmétiques et géométriques, l'évaluation d'une racine d'une équation ; avec le modèle de capitalisation instantanée, il faudrait ajouter les équations différentielles et les intégrales.

Le problème mathématique d'un emprunt indivis et de son tableau d'amortissement

Entrons dans le problème avec les définitions d'un manuel universitaire de mathématiques financières⁴.

On appelle « emprunt indivis » un emprunt qui s'adresse à une seule personne physique ou morale appelée « l'emprunteur ».

On appelle « échéancier » un tableau remis à l'emprunteur. Sur l'échéancier figurent toutes les échéances, tous les intérêts, tous les amortissements de chaque période ainsi que le capital restant dû après le paiement de chaque échéance [...].

Voici un tel tableau extrait du manuel. On peut y lire que l'on emprunte 1 200 € le 15 janvier 2005 au taux annuel de 6 % et qu'on les rembourse en deux annuités égales de 654,52 €.

Échéances	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités
15-01-2005	1 200,00			
15-01-2006	617,48	72,00	582,52	654,52
15-01-2007	0,00	37,05	617,48	654,5 2

Sa fabrication tient compte des différentes données du contrat passé entre l'emprunteur et le prêteur : le montant du capital emprunté, la date de son versement et les modalités de remboursements. Ces dernières s'expriment par un flux de versements de l'emprunteur vers le prêteur (avec leurs montants, leurs dates et les taux d'intérêt entre les dates), le dernier de ces versements annulant la dette de l'emprunteur. La valeur de la dette est une fonction du temps via le taux d'intérêt, qui peut varier avec le temps, et du flux actualisé des sommes versées et empruntées. L'annulation de la dette se traduit donc par une équation fondée sur la notion d'actualisation.

En nous référant aux pratiques bancaires françaises⁵, pour l'emprunt présenté ci-dessus cette équation s'écrit $1200.1,06^2 = R.1,06 + R$. Sa résolution permet de calculer le montant R commun aux deux annuités : $R = \frac{1200.1,06^2}{2;06} \approx 654,52$.

La répartition de chaque versement entre intérêt et capital ne peut être éludée (dans la vie vraie) puisque c'est elle qui fixe le montant de la dette à tout moment : pensons aux multiples occasions où le contrat pourrait être remis en cause. En réglant cette répartition⁶, le contrat de prêt lie entre

4 Nous choisissons Massal (2004) qui est le plus récent en notre possession.

5 Dans le système dit français, à chaque versement, l'intérêt est calculé au taux d'intérêt convenu sur le capital restant dû pendant la période qui s'est écoulée depuis le dernier versement ; à la date du versement, la différence entre la somme versée et l'intérêt passe en amortissement du capital et la différence entre l'amortissement et le capital qui restait dû avant le versement devient la nouvelle dette de l'emprunteur vis-à-vis du prêteur. La dette est alors parfaitement déterminée après chaque versement et on peut remplir totalement le tableau. Le modèle d'actualisation est celui des intérêts composés ; à signaler cependant que dans le cas de périodicités inférieures à un an, le choix des taux proportionnels fait que le taux annuel pratiqué n'est pas le taux annuel annoncé.

6 Dans le système dit allemand, les intérêts sont versés en début de période, dans le système dit anglais, l'emprunteur verse à l'issue de chaque période d'une part l'intérêt du capital emprunté d'autre part une somme constante telle que la somme des valeurs actualisées calculé à certain taux (dit de reconstitution du capital) soit égale au capital emprunté.

elles les quatre suites datées, celles des versements, celle des amortissements, des intérêts et des dettes (les capitaux restant dus).

Une fois fixés les termes du problème mathématique, la formalisation des liaisons entre les colonnes et les lignes de l'échéancier gouvernent de façon théorique le remplissage du tableau d'amortissement. Cependant le remplissage effectif soulève de nouveaux problèmes mathématiques dont l'un des moindres n'est pas celui des précisions d'affichage et de calcul : n'y a-t-il pas erreur de calcul dans l'égalité $654,52 - 37,05 = 617,48$?

L'écologie institutionnelle de ce problème

Quelles sont les tâches demandées aux étudiants qui se rapportent à un tableau d'amortissement ? Quels sont les objets mathématiques mobilisables et les instruments de calcul disponibles pour accomplir ces tâches ? Avec quelles techniques ? Comment l'institution est-elle organisée pour conduire économiquement et contrôler efficacement tous les calculs ?

Les mots tâches et techniques se réfèrent ici à la théorie anthropologique du didactique : dans une institution d'enseignement des mathématiques la vie commune d'instruments et de savoirs s'établit en organisations mathématiques qui transforment certains problèmes reconnus de la discipline, les élémentarisent en types de tâches à accomplir par les élèves, mettent en place des techniques à appliquer et des éléments d'une théorie mathématique pour produire et justifier ces techniques. Lauton avait dressé une typologie des problèmes d'introduction aux mathématiques financières dans les filières actuelles d'Économie et gestion :

- rechercher un capital ou une suite de capitaux connaissant le modèle d'actualisation, le ou les taux d'intérêt, la ou les durées (T1) ;
- rechercher un taux d'actualisation connaissant le modèle d'actualisation, le ou les capitaux, la ou les durées (T2) ;
- rechercher une durée connaissant le modèle d'actualisation, le ou les capitaux, le ou les taux (T3).

Nous la reprenons en lui apportant un éclairage anthropologique au sens défini par Bosch et Chevallard (2001) :

L'approche anthropologique répond à la question de la modélisation des pratiques sociales, de leurs composants, de leur évolution, de leurs produits. Pour ce qui est des mathématiques, considérée comme une activité humaine structurée en organisations praxéologiques, on pourra dire qu'elles naissent de la problématisation de certains types de tâches, dès lors regardées comme des types de problèmes dont l'étude donne lieu à la construction d'organisations praxéologiques locales. L'articulation de certaines de ces praxéologies autour d'une technologie commune permet de former des organisations régionales qui, à leur tour, s'articulent en organisations plus larges jusqu'à constituer globalement « le savoir mathématique ». La description de ces organisations et l'étude de leur écologie institutionnelle sont au cœur du programme d'étude de la didactique des mathématiques. (page 8)

Ici les trois types de tâches dessinent trois praxéologies locales amalgamées en une praxéologie régionale autour d'un même élément théorique, celui de l'actualisation des capitaux. Le déploiement des types de tâche en cours et exercices est le moyen institutionnel de faire fonctionner (enseigner/apprendre) ce concept fondateur des mathématiques financières même si cela se fait à travers une modélisation imposée (celle des intérêts composés) et non problématisée. Le problème de l'emprunt indivis est parfaitement adapté pour faire vivre dans l'institution ces trois types de tâche : sa formulation peut être standardisée en peu de termes, allégeant ainsi la quantité d'implicites dans l'énoncé⁷ tout en offrant de nombreuses variantes issues des différents modes de remboursements pratiqués par les établissements bancaires ou commerciaux.

À partir d'un panel de manuels et de photocopiés universitaires, nous avons étudié cette écologie institutionnelle. Voici, en cinq points, les principaux résultats de cette étude.

1. Des formules mais pas de fonctions numériques

On assiste à une débauche de formules. La plus usitée est celle du cas des remboursements constants et réguliers, $S = \frac{Ei}{1 - (1+i)^{-n}}$, où S est le capital emprunté et E le montant du remboursement.

Voici, extraites du manuel Massal dans sa partie cours, celles du cas où les annuités sont en progression géométrique de raison $(1+j)$:

C. Cas où les annuités sont en progression géométrique de raison $(1+j)$

Par exemple, si les annuités croissent de 5 % par période, $(1+j) = 1,05$ tandis que s'ils décroissent de 3 % par période, $(1+j) = 0,97$. Alors :

$$E_2 = E_1(1+j) \quad \forall k = 2, \dots, n \quad E_k = E_1(1+j)^{k-1}$$

– Si les annuités $E_1, \dots, E_n$ sont payées en fin de période et j différent de r :

$$S = E_1 \frac{(1+r)^n - (1+j)^n}{(1+r)^n(r-j)}$$

– Si les annuités $E_1', \dots, E_n'$ sont payées en début de période et j différent de r :

$$S = E_1'(1+r) \frac{(1+r)^n - (1+j)^n}{(1+r)^n(r-j)}$$

Pour la preuve, voir Exercices de base, Exercice V.

Toutes proviennent de l'équation d'actualisation $[S = \sum_{i=1}^{i=n} \dots ; \text{valeurs actualisées des } E_i]$ posée et transformée dans le modèle des intérêts composés⁸.

Les expressions algébriques obtenues représentent une économie de pensée et ouvrent la voie au travail numérique. Dans le même temps elles enferment la pensée dans une écriture complexe et

⁷ Lauton fait justement remarquer que «la dévolution du vocabulaire financier comme» étape nécessaire dans la compréhension des situations des mathématiques financières».

⁸ Il faut noter que l'équation d'actualisation peut se faire à toute date car l'équivalence des capitaux en intérêts composés ne dépend pas de la date choisie. Ce n'est pas le cas en intérêts simples.

affaiblissent le contrôle du calcul numérique si cette complexité n'est pas éclairée par les relations qu'entretiennent entre elles les lettres en tant que variables du problème financier : par exemple, la proportionnalité de E avec S, sa décroissance selon n, sa croissance selon i, etc.

2. Des suites mais pas d'algorithmes numériques

Avec le choix d'une loi de formation temporelle des versements – par exemple des versements constants ou en progression géométrique – la formule permet de remplir la colonne des versements. Sa construction fait appel aux suites numériques⁹, ici la somme des termes d'une suite géométrique.

D'autres savoirs sont absents qui pourraient être mobilisés : ceux relatifs à la récurrence. Expliquons-nous sur le cas des versements constants en raisonnant temporellement sur le capital restant dû (la dette), versement après versement :

- en $t = 0$, dette = montant de l'emprunt ;
- en $t = 1$, dette = dette précédente $\times (1 + \text{taux}) - \text{versement}$;
- etc. ;
- en $t = n$, dette = 0.

Ce raisonnement construit une suite qui n'est ni arithmétique, ni géométrique mais arithmético-géométrique. Comme pour les suites arithmétiques et géométriques, il est possible de passer de sa forme récurrente à sa forme explicite (fonction de n) et vice et versa. Le remplissage horizontal est basé sur la répétition un certain nombre de fois d'un bloc d'opérations. Il existe donc des moyens algorithmiques de le formuler qui ouvrent des possibilités de remplissage du tableau ligne par ligne sans passer par la fabrication d'une formule globale, en utilisant par exemple un tableur.

3. Un objet graphique spécifique sous- exploité : le diagramme de flux

Certains manuels illustrent le problème général par un graphique (figure 1) qu'ils appellent un diagramme de flux. Le diagramme est attaché à l'un des deux opérateurs financiers, le prêteur ou l'emprunteur, et les flux sont donc comptés positivement ou négativement selon qu'ils enrichissent ou appauvrissent cet opérateur. Pour les manuels qui présentent cet objet, sa première fonction didactique semble être de réaliser une synthèse de l'énoncé. Une deuxième est de soutenir le calcul de la valeur actualisée de l'ensemble des sommes d'argent concernées à une date quelconque :

- grâce au repérage temporel puisque toutes les dates, y compris celle que l'on choisit pour l'actualisation, peuvent être placées sur l'axe temporel
- grâce à distinction des signes des sommes d'argent engagées dans le calcul.

9 Ici nous écartons la possibilité théorique d'un versement en continu en nous restreignant à une modélisation discrète.

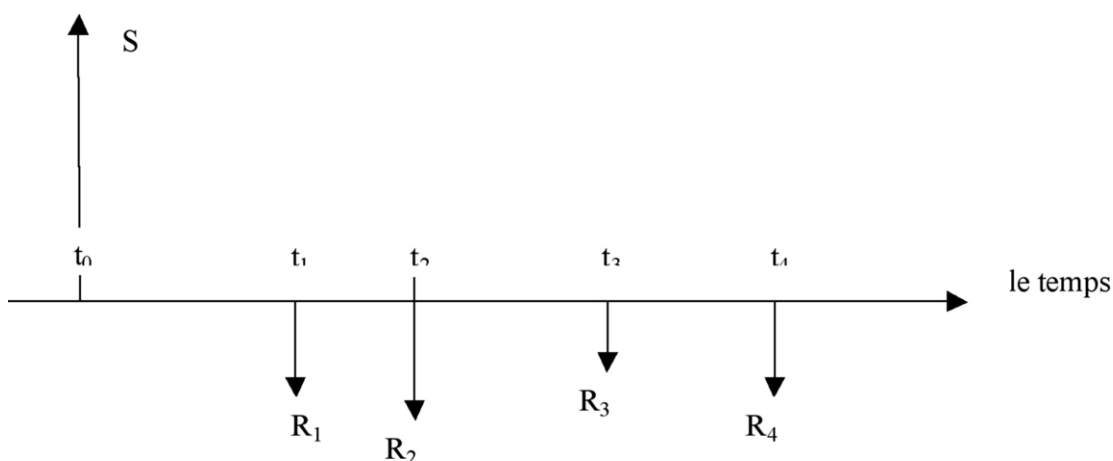


Figure 1 – Un diagramme de flux

Toujours support figuratif au raisonnement d'actualisation et à la fabrication des formules, ce diagramme n'est jamais exploité dans le cadre de l'Analyse: le temps qui figure sur l'axe horizontal serait une variable numérique continue dont dépend la somme des différentes valeurs quand elles apparaissent sur l'axe vertical et le diagramme de flux serait remplacé par le graphique fonctionnel de l'encours de la dette comme fonction du temps (figure 2). Exemple ci-dessous: 1 200€ empruntés au taux annuel de 6 % et remboursés en deux annuités de 654,52€.

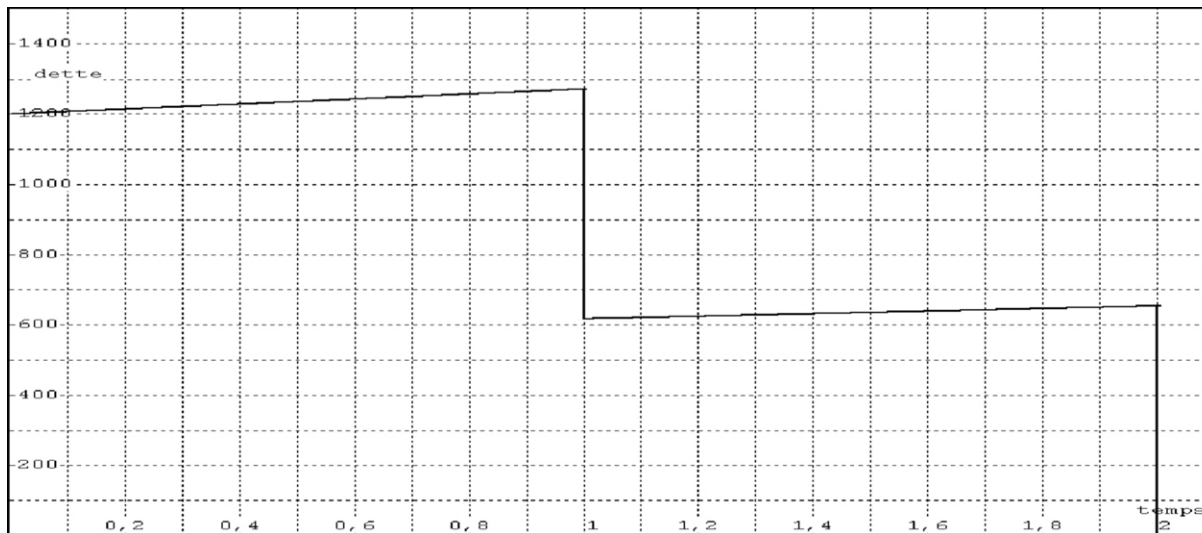


Figure 2 – La courbe représentation de l'encours de la dette

4. Un ostensif de l'Analyse numérique sans l'Analyse

À côté des exercices de remplissage partiel ou total du tableau d'amortissement, on trouve la recherche des caractéristiques d'un emprunt à partir de tableaux incomplets. Ce sont alors les types de tâche T2 et T3 qui précèdent le remplissage du tableau. La nouveauté technique réside dans la

fabrication et la résolution d'équations du type $x^a = b$ et $a^x = b$ (inconnue x , a et b paramètres). Voici (figure 3) un exercice et son corrigé choisis dans le manuel Schlachter (2004)¹⁰.

Après l'appel direct aux formules pour mettre le problème en équation, l'auteur s'empresse d'écrire les équations d'inconnue i sous la forme $f(i) = 0$ faisant ainsi référence à une méthode de résolution propre à l'Analyse. Il ne prend cependant soin ni d'étudier les variations de la fonction f pour vérifier les conditions du théorème des valeurs intermédiaires ni d'exposer la technique algorithmique de calcul effectif.

Le crédit-bail, ou *leasing*, est une modalité de financement d'un bien. Le bénéficiaire de ce crédit-bail verse pendant une certaine période des loyers et peut, s'il le désire, acheter le bien pour sa valeur résiduelle à l'issue de cette période.

L'acheteur d'une automobile a le choix entre trois modes de financement :
1°/ L'emprunt classique. Pour 1 500 € empruntés, il verse pendant cinq ans 30 € par mois.

2°/ Un crédit-bail. Pour 1 500 €, il verse pendant cinq ans 23 € par mois, et bénéficie d'une option d'achat à l'issue de la période de location. Montant de l'option : 500 €.

3°/ La société TIAF-LEASE-AUTO propose par voie publicitaire publiée dans la presse : Location avec option d'achat. Par tranche de 1 500 € : apport 500 € (dépôt de garantie : 250 € + 1^{er} loyer : 250 €) suivi de douze loyers à 0 €, puis de quarante-sept loyers à 26 €. Option d'achat en fin de location (couverte par le dépôt de garantie) : 250 €.

Calculer le taux d'intérêt de chacun de ces trois modes.

1°/ Le premier cas est un emprunt de 1 500 €, remboursable en soixante versements de 30 € au taux d'intérêt mensuel i .

$$1\,500 = 30 \times \frac{1 - (1+i)^{-60}}{i} ;$$

$$\text{soit : } f(i) = 1\,500 - 30 \times \frac{1 - (1+i)^{-60}}{i} = 0 ;$$

La résolution de cette équation fournit : $i = 0,618$.

Le taux d'intérêt mensuel est de 0,618 %.

Le taux annuel proportionnel est : $0,618 \times 12 = 7,42$, soit 7,42 %.

2°/ Par tranche de 1 500 €, si l'on lève l'option d'achat, on verse cinquante-neuf loyers de 23 € et le soixantième mois on verse 523 € (loyer 23 € + option d'achat 500 €).

Pour un taux d'intérêt mensuel i , on peut écrire :

$$1\,500 = 23 \times \frac{1 - (1+i)^{-59}}{i} + \frac{523}{(1+i)^{60}} ;$$

$$\text{soit : } f(i) = 1\,500 - 23 \times \frac{1 - (1+i)^{-59}}{i} - \frac{523}{(1+i)^{60}} = 0.$$

La résolution de cette équation fournit : $i = 0,610$.

Le taux d'intérêt mensuel est de 0,610 %.

Le taux annuel proportionnel est : $0,610 \times 12 = 7,32$, soit : 7,32 %.

Figure 3 – Un exercice et un extrait de son corrigé

¹⁰ L'auteur affirme s'adresser à un large éventail d'étudiants et même à « des professionnels engagés dans des activités financières ou bancaires »

Il faut dire que la fonction n'inspire pas la sympathie. C'est là un « effet formule » car l'existence d'un zéro unique apparaît plus facilement en examinant $30 \frac{1 - (1+i)^{-60}}{i}$ sous la forme dont elle est issue, à savoir $\frac{30}{1+i} + \frac{30}{(1+i)^2} + \dots + \frac{30}{(1+i)^{60}}$ (puisque'il s'agit de la valeur actualisée de tous les versements à la date de l'emprunt). La substitution de l'écriture par une autre supposée plus maniable dans les applications numériques fait perdre de vue :

- que la valeur actualisée est strictement décroissante avec i , qu'elle vaut 1800 pour $i = 0$ et tend vers 0 quand i tend vers $+\infty$;
- que, en conséquence, la fonction f est croissante, négative pour $i = 0$ (– 300, par prolongement par continuité) et positive pour i suffisamment grand (tend vers 1500 quand i tend vers $+\infty$).

5. Des choix instrumentaux divers mais tous mal assumés

Les manuels se dispersent sur la manière de traiter l'instrumentation des calculs numériques. Nous recensons :

- ceux qui se contentent de signaler l'existence d'instruments de calcul ou n'en parlent pas ;
- ceux qui évoquent des instruments à technologie informatique mais ne portent leurs efforts que sur les tables numériques dites financières ;
- ceux qui présentent un ou plusieurs instruments à technologie informatique : un tableur, une calculatrice scientifique programmable ou non, graphique ou non, financière ou non.

Le deuxième chapitre du manuel Boissonade-Fredon (2000) entièrement consacré aux « outils de calcul » débute par cette justification :

Les calculatrices électroniques ont un prix abordable depuis 1978, et ont été autorisées au baccalauréat en 1980. Depuis cette époque, les tables de logarithmes et les tables financières peuvent être considérées comme des objets historiques.

L'utilisation professionnelle des mathématiques financières se fait avec des logiciels spécialisés. Mais comme cet ouvrage s'adresse aux étudiants, nous allons seulement supposer que le lecteur possède une calculatrice électronique, et qu'il peut avoir aussi accès à un tableur.

On y trouve la commande Solve – de quelques rares calculatrices récentes – mais on ne mentionne pas les commandes graphiques des calculatrices. La mise à l'écart des fonctions et de leurs représentations graphiques se confirme dans les corrigés d'exercices où l'auteur préfère fournir un programme clef en main à recopier dans l'éditeur de programmes de la calculatrice programmable.

Un paragraphe classé sous la rubrique « Complément » (figure 4) porte sur l'usage du tableur Excel dans le remplissage d'un tableau d'amortissement pour un emprunt indivis à remboursements constants.

Aucune connaissance artefactuelle n'est visée par l'auteur et l'avenir de cette instrumentation apparaît très limité puisque la technique de remplissage n'est pas étendue à d'autres cas que celui des annuités constantes et que les corrigés d'exercices ignorent l'usage du tableur.

Un tableur est un logiciel qui permet des calculs en tableau. C'est un outil très adapté pour obtenir un tableau d'amortissement (cf. Fiche 8). Le plus connu est Excel de Microsoft. À titre d'exemple, voici comment créer le tableau d'amortissement d'un emprunt indivis, remboursable par annuités constantes :

- ouvrir une feuille de calculs ;
- prévoir une zone pour la saisie des informations (capital emprunté S_0 , durée n , taux i) et le calcul de l'annuité constante ;
- préparer un tableau à n lignes où chaque ligne comporte :
 - son numéro k ,
 - la dette en début de période $S_{k-1} = S_{k-2} - M_{k-1}$,
 - l'intérêt $I_k = i S_{k-1}$,
 - l'amortissement $M_k = a - I_k$,
 - l'annuité a ,

en programmant toutes les formules de calcul.

Pour $S_0 = 50\,000$ €, $i = 0,055$, $n = 8$, on obtient ainsi :

	A	B	C	D	E
1		S_0	50000	a	7893,20
2		i	0,055		
3		n	8		
4					
5	k	S_{k-1}	I_k	M_k	a
6	1	50000,00	2750,00	5143,20	7893,20
7	2	44856,80	2467,12	5426,08	7893,20
8	3	39430,72	2168,69	5724,51	7893,20
9	4	33706,21	1853,84	6039,36	7893,20
10	5	27666,85	1521,68	6371,52	7893,20
11	6	21295,33	1171,24	6721,96	7893,20
12	7	14573,37	801,54	7091,67	7893,20
13	8	7481,71	411,49	7481,71	7893,20

Dans la cellule E1, on a installé la formule de calcul de a :

$$(\$C\$1*\$C\$2/(1-(1+\$C\$2)^{-\$C\$3}))$$

Cette formule a été recopiée dans les cellules E6 à E13.

$\$C\1 est une référence absolue, ce qui signifie qu'elle n'est pas modifiée lors de la copie. Pour l'obtenir, il faut :

- cliquer sur la cellule E1 ;
- cliquer dans la barre de formules pour placer le point d'insertion immédiatement après la référence à modifier (C1) ;
- choisir l'option Référence dans le menu Sélection.

Dans la cellule B6, on a recopié la cellule C1.

Dans la cellule B7, on a installé la formule de calcul $B6-D6$. Cette formule a été recopiée dans les cellules B8 à B13 et s'est adaptée automatiquement.

Dans la cellule C6, on a installé la formule de calcul $\$C\$2*B6$. Cette formule a été recopiée dans les cellules C7 à C13 et s'est adaptée automatiquement.

Dans la cellule D6, on a installé la formule de calcul $\$E\$1-C6$. Cette formule a été recopiée dans les cellules D7 à D13 et s'est adaptée automatiquement.

➔ Remarque

Ce tableau peut être amélioré par un test qui installe automatiquement n lignes, par un calcul de contrôle qui vérifie que la somme des M_k est bien égale à S_0 .

Figure 4 – Introduction à l'usage d'un tableur

Pour Capponi (1990) qui a étudié les obstacles liés à l'édition d'une formule et des références relatives, une telle programmation sur tableur grâce à la réplication passe par un apprentissage au-delà du mimétisme¹¹ :

L'appropriation des références relatives ne va pas de soi. La facilité de l'édition automatique, qui utilise la souris pour désigner les cellules intervenant dans une cellule, ne doit pas cacher les réelles difficultés rencontrées dans l'interprétation des références produites par la machine, nécessaire au contrôle des formules produites. (page 229)

Contrairement à ce que laisse croire le manuel, les tables financières n'ont pas disparu partout¹². Grâce à une table financière le calculateur s'inscrit certes dans une formule mais rentre dans une pratique liée aux fonctions pour l'application numérique¹³. Du point de vue d'une écologie des savoirs et des instruments, tables et formules vont de paire et elles participent ensemble à l'abaissement du coût numérique. Cette écologie a été bousculée par l'arrivée d'outils modernes de calcul mais on assiste à la persistance des formules sans les tables.

Bilan de l'analyse institutionnelle en termes de contraintes et de choix d'enseignement

L'institution formule ses objectifs dans le cadre d'un enseignement qu'elle qualifie de professionnalisant pour un public de non-mathématiciens. Pour cela elle choisit de porter la mathématisation du concept d'actualisation par une approche empirique du monde financier réel découpée en séquences numériques. Cette organisation didactique est construite sur une « démathématisation » du Calcul numérique, au sens que le Calcul numérique ne doit se charger d'aucune autre problématique mathématique que la stricte exécution de formules. Elle s'appuie sur une organisation mathématique où dominent les praxéologies algébriques ponctuelles en excluant fonctions et algorithmes numériques.

La grande diversité artefactuelle des choix instrumentaux des manuels cache un même caractère : les techniques instrumentées se présentent essentiellement comme des savoir-faire ponctuels déconnectés des éléments théoriques mathématiques dont elles se nourrissent. On ne repère dans les manuels aucune investigation sur la portée de la (ou des) technique(s) choisie(s). Didactiquement cela pose le problème du contrôle par l'étudiant de l'extension possible de la technique à d'autres calculs et cela participe à rendre ces techniques instables, voire volatiles, et peu productives de contrôles sur les résultats.

Tous les manuels structurent le travail de l'étudiant de la même manière : des parties cours maigres voire squelettiques qui renvoient à de nombreux exemples illustratifs et aux exercices corrigés. A un découpage guidé par l'exposition d'éléments théoriques mathématiques, ils préfèrent un découpage par application professionnelle (emprunt indivis, emprunts obligataires, critères d'investis-

11 Nous lui empruntons le mot réplication pour désigner la recopie vers le bas des références relatives.

12 L'éditeur Foucher continue à publier un mémento intitulé « Tables financières et statistiques » qu'il met à la disposition, dit-il, « des professionnels et futurs professionnels pour être opérationnels ».

13 S'il est habile, la table lui permet d'évaluer mentalement les résultats numériques en acceptant une perte de précision connue qu'il peut regagner en partie avec l'interpolation linéaire. Cette pratique pourrait expliquer la persistance de l'interpolation linéaire dans les manuels de mathématiques alors que l'usage des calculatrices scientifiques actuelles permet de s'en dispenser totalement dans la résolution approchée des équations.

sement) en privilégiant la juxtaposition de savoir-faire très contextualisés. Lauton (1994) notait déjà :

L'enseignement apparaît comme relevant plus d'une démarche inductive que déductive. La résolution des exercices suppose l'application d'une multiplicité de formules et la répétition d'exercices à peine différents est censée faire retenir les techniques utilisées. Cet enseignement ne développe que peu d'activités visant à la prise de sens d'une notion. Il ne développe pas non plus de questionnements qu'il s'agisse de vérification d'un résultat, d'interprétation d'un résultat, d'élaboration d'une conjecture. (pages 381-382)

À quelques exceptions près tous les exercices se présentent comme de petites études de cas que le manuel corrige sans mettre en évidence les enjeux mathématiques. L'organisation mathématique dissoute dans la multitude des corrigés laisse en arrière-plan la construction mathématique du concept d'actualisation et de ses modèles.

Deuxième partie

Des apprentissages problématiques

Des extraits de deux copies corrigées d'un examen montrent combien la construction du concept d'actualisation peut s'avérer problématique :

L'énoncé :

Un consommateur a décidé d'épargner.

De 1994 à 1999 il a versé, sur un livret d'épargne, chaque année (le 05 janvier) 500€ ; de 2000 à 2005 il a retiré chaque année (toujours le 05 janvier) 500€. Le taux d'intérêts annuel est de 8%.

1) Déterminer la somme qui est restée sur son livret juste après le dernier retrait ?

2) Quel montant aurait-il dû retirer de 2000 à 2005 pour que le solde de son livret soit nul ?

Deux réponses d'étudiants :

absence ? l'intérêts :

- chaque année, pendant 6 ans (94-99)
- versement de 500€
Donc il y aura 3000€ dans le compte

- chaque année pendant 6 ans (2000-05)
- retrait de 500€
- taux annuel de 8%

10/

Donc cela fait $C_1 = 3000 - (500 + 3000 \times 0,08) = 2260€$
avec C_1 étant le capital restant après le premier retrait de 500€

Donc au bout de 6 ans,

$C_6 = 3000 (1 + 0,08)^6 = 4760,62€$
 $3000 - 4760,62 = -1760,62€$

quel rapport entre les valeurs de C_6 et C_1 ?

Sur le compte, le reste - 1760,62€ -

il y a une note des intérêts ?

Partie 1. *NOW*.

1). $500 \times (1,08)^6 \left(\frac{1 - 1,08^6}{1 - 1,08} \right) = 3661,40 \rightarrow$ l'argent épargné jusqu'en 1989 inclus. (6 ans)

raisonnement inverse qui figure l'actualisation

de consommateur retire 500 € / an pendant 6 ans donc au total 3000 €.

1) il lui reste après le dernier retrait $3661,40 - 3000 = 661,40$

2) Pour que le solde de son livret soit nul, il aurait dû retirer de 2000 à 1005 $3661,40 \div 5,5$ soit 660,23 € / an.

Le recours à une formule débouche sur un résultat numérique dont la signification est aussitôt perdue.

Problématiques aussi sont les genèses instrumentales de la calculatrice et du tableur. Nous rencontrons chez les étudiants de l'université où nous enseignons des instrumentalisations mathématiquement très pauvres :

- celle de la calculatrice ne se développe pas au-delà de l'usage des fonctionnalités arithmétiques d'une calculatrice de base (type Collège) en ignorant les potentialités graphiques et celles de programmation ;
- celle du tableur se réduit à la recopie des tableaux apprêtés.

Conception d'une ingénierie didactique : questions de départ et hypothèses

Les fonctions et les algorithmes numériques ne sont pas présents en tant qu'objets d'enseignement dans les mathématiques financières. Pourraient-ils y vivre, comment ? Pourraient-ils soutenir économiquement un travail numérique de bonne qualité et aider à la conceptualisation du concept d'actualisation ? Comment construire une instrumentation viable avec un tableur en mathématiques financières ?

Pour répondre à ces questions, nous avons choisi de concevoir et d'expérimenter une ingénierie didactique. La possibilité de faire vivre les objets fonctions et algorithmes numériques dans l'institution d'enseignement considérée passe par des choix sur ces objets et les problèmes mathématiques. L'analyse institutionnelle éclaire de tels choix. L'ingénierie didactique quant à elle a pour ambition de les opérer en conformité à des hypothèses de la recherche et de les mettre à l'épreuve d'une réalisation didactique dans le système d'enseignement lui-même. Deux hypothèses fondent la conception de cette ingénierie :

- (H1) la mise en place d'objets des cadres algorithmique et analytique favorise des changements de cadres chez les étudiants bénéfiques à la conceptualisation de l'actualisation via un contrôle plus étendu des calculs numériques.
- (H2) la mise en place d'objets des cadres algorithmique et analytique est une condition nécessaire à une intégration viable des calculatrices et tableurs dans l'enseignement des mathématiques financières.

Relativement à l'apprentissage visé du concept d'actualisation, les potentialités du tableur ou d'une calculatrice ne peuvent pas s'actualiser pas dans un contexte limité à la recopie docile d'expressions numériques issues de formules établies par ailleurs mais ont besoin d'un minimum d'objets de l'Analyse et de l'Algorithmique. L'intégration des instruments de calcul est étroitement liée à la mise en place de techniques instrumentées stables et pour cela assises sur des savoirs mathématiques qui les justifient et les produisent. Ce sont donc des praxéologies nouvelles – même si elles sont d'amplitude modeste – qu'il s'agit d'installer dans l'écologie institutionnelle du calcul numérique.

Présentation de l'ingénierie

L'ingénierie est découpée en quatre situations didactiques, les deux premières avec un tableur sans calculatrice, les deux dernières avec calculatrice sans tableur. En figure 5, le protocole expérimental et en figure 6, deux copies d'écran de feuilles de calcul à la disposition des étudiants.

Critique de l'ingénierie

Le contexte est celui du remplissage numérique d'un tableau de remboursement d'emprunt. L'ingénierie organise d'abord la (re)découverte des fonctionnalités de réplication du tableur ensuite une rupture avec la recopie de formules apprêtées par l'enseignant (ou le manuel).

L'augmentation progressive du coût d'utilisation de formules combinée à la possibilité offerte par le tableur de répéter autant de fois que l'on veut les mêmes opérations financières rend possible le travail réflexif sur le concept d'actualisation des sommes d'argent en jeu.

La question 3 de la phase 1 est destinée à favoriser une recherche par essais et erreurs associée à la lecture du montant de la dette comme fonction décroissante du montant du versement mensuel inconnu. La technique de réplication pour assurer la répétition, caractéristique du tableur, se trouve alors étroitement liée à celle de d'approximations successives, caractéristique de l'Analyse.

La question 1 de la phase 3 en faisant payer très cher la recherche d'une formule encourage à explorer et à conforter cette nouvelle technique puis propose d'en diminuer le coût grâce à l'usage commenté d'un solveur. Enfin la phase 4 permet de mettre en concurrence les points de vue algébrique et analytique sur les suites numériques. Elle est un prélude à une institutionnalisation qui s'efforcera de dégager les éléments de technologie mathématique mis en jeu dans cette technique de construction d'un tableau d'amortissement à l'aide d'un tableur.

Durant les quatre phases de la séance, les étudiants disposent de feuilles de calcul Excel et de tableaux sur papier mais ils n'ont pas de calculatrice. Fichiers et papiers seront récupérés à chaque fin de phase. Les étudiants travaillent deux par deux sauf pour la question 1 de la phase 1. Des fichiers bis servent pour les corrections publiques et restent disponibles pour les étudiants.

Phase 1

Vous empruntez aujourd'hui à un ami 900 € en vous entendant avec lui sur un taux d'intérêt mensuel de 1 % et en lui promettant d'avoir tout remboursé au bout d'un an.

Question 1 : dans un mois vous lui verserez 100 €, quelle sera alors votre dette ? Réponse individuelle sur feuille papier.

Question 2 : neuf mois de suite vous lui verserez 100 €, quelle sera votre dette après le neuvième versement ? Réponse sur fichier Q2 et papier (feuille 2et3).

Correction publique avec fichier C2et3

Question 3 : vous rembourserez la dette restante en trois versements mensuels égaux, à combien se montera ce versement ? Réponse sur fichier Q3 et papier (feuille 2et3)

Correction publique avec fichier C2et3

Phase 2

Votre ami fait comme à la banque et vous fait signer un échéancier complet comportant cinq colonnes : dates, dettes, intérêts, amortissements et versements.

Question 4 : dressez l'échéancier sur tableur. Réponse sur fichier Q4 et papier (feuille 4).

Correction publique sur fichier C4.

Phase 3

Toujours en panne d'argent vous empruntez à un autre ami 900 € au taux d'intérêt mensuel de 1 % mais vous décidez que les douze remboursements mensuels seront en progression arithmétique croissante de raison 2 €.

Question 5 : dressez l'échéancier sur le tableur. Réponse sur fichier Q5 et papier (feuille 5)

Correction publique avec présentation de l'outil Solveur sur fichier C5.

Phase 4

Question 6 : votre ami croit que la suite des amortissements est une suite géométrique. Que lui répondez-vous ? Réponse sur fichier Q6et7 et papier (feuille 6)

Question 7 : vous vous demandez si en choisissant une autre raison pour la suite des versements (toujours arithmétique) le dernier versement pourrait se monter à 90 € seulement. Réponse sur fichier Q6et7 et papier (feuille 6et7)

Correction publique sur fichier C6et7.

Figure 5 – Protocole expérimental

The top screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F
1		dates	dettes	versements	données	
2		20-mars-06	900,00	0,00	0,01	
3		20-avr-06			900,00	
4		20-mai-06				
5		20-juin-06				
6		20-juil-06				
7		20-août-06				
8		20-sept-06				
9		20-oct-06				
10		20-nov-06				
11		20-déc-06				
12						

The bottom screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		dates	dettes	intérêts	amortissements	versements		données
2		20-mars-06	900,00	0,00	0,00	0,00		0,01
3		20-avr-06						900,00
4		20-mai-06						
5		20-juin-06						
6		20-juil-06						
7		20-août-06						
8		20-sept-06						
9		20-oct-06						
10		20-nov-06						
11		20-déc-06						
12		20-janv-07						
13		20-févr-07						
14		20-mars-07						
15								

Figure 6 – Copies de feuilles de calcul à la disposition des étudiants

Les phases successives de l'ingénierie dessinent les contours d'une praxéologie locale nouvelle autour des trois types de tâche T1, T2, T3 avec des éléments technologiques sur les variations de fonction et de suites numériques. Elles donnent au tableur un rôle crucial dans la conceptualisation de l'actualisation des capitaux grâce aux rétroactions rapides et globales qu'il peut fournir au-delà de l'organisation et de l'exécution des calculs.

Conclusion

Des technologies déjà anciennes comme les calculatrices « ordinaires » et les tableurs méritent d'autant plus le regard du chercheur en didactique des mathématiques qu'elles peuvent lui apprendre comment elles ont pu modifier sensiblement ou non l'écologie des savoirs et des pratiques numériques. Pour enrichir les potentialités de telles technologies dans un enseignement de mathématiques comme celui des mathématiques financières il nous est apparu judicieux de définir clairement un enjeu de savoir – le concept d'actualisation d'un capital – d'identifier les objets mathématiques qu'il mobilise dans l'institution d'enseignement choisie et d'apprécier les conditions de viabilité des praxéologies nouvelles à créer autour de cet enjeu. La théorisation anthropologique du didactique éclaire la recherche de tels enrichissements en offrant, avec le concept de praxéologie, une modélisation de l'activité mathématique instrumentée, opératoire dans l'analyse du contexte d'enseignement et dans la construction de situations didactiques destinées à y vivre.

Références

- ARTIGUE M. (1998). Instrumentation et écologie didactique de calculatrices complexes : éléments d'analyse à partir d'une expérimentation en classe de Première S. In *Actes du colloque francophone européen, Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques*, pp.15-38. IREM de Montpellier, France.
- BIREBENT A. (2001). *Articulation entre la calculatrice et l'approximation décimale dans les calculs numériques de l'enseignement secondaire français*. Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble, France.
- BOISSONADE M., FREDON D. (2000). *Mathématiques financières*. Éditions Dunod.
- BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 19, n° 1, p. 77-124, Éditions la Pensée Sauvage, Grenoble.
- CAPPONI B. (1990). *Calcul algébrique et programmation dans un tableur : le cas de Multiplan*. Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble, France.
- CHEVALLARD Y. (1992). Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques. Le problème de l'ingénierie didactique. In *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*. Collection Nouvelle Encyclopédie Diderot, PUF.
- JUSTENS D., ROSOUX J. (1995). *Introduction à la mathématique financière*. Éditions De Boeck Université.
- LAUTON M. (1994). *Enjeux et réalités de l'enseignement des mathématiques en IUT et dans les départements de gestion : le cas des mathématiques financières*. Thèse de didactique des mathématiques de l'Université Paris 7, France.
- MASSAL M. (2004). *Mathématiques financières*. Éditions Economica.
- SCHLACTER D. (2004). *Comprendre les mathématiques financières*. Éditions Hachette Supérieur.
- RABARDEL P. (1995). *Les hommes et les technologies – Approche cognitive des instruments contemporains*. Éditions Armand Colin.
- SAADA M. (1991). *Mathématiques financières*. Collection Que sais-je ? PUF.

Pour joindre l'auteur

Alain Birebent

Université Grenoble 2

Adresse postale : 37 quai de la Graille, Grenoble-38000, France

Alain.Birebent@imag.fr