L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

La multiplicité des points de vue en Analyse comme construit historique

Philippe Brin et Renaud Chorlay, *Groupe M : A.T.H., IREM Université Paris 7, France*

Résumé

Le groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Paris 7 est engagé depuis 4 ans, sous l'égide de l'INRP, dans une recherche sur la notion de « multiplicité des points de vue », plus particulièrement en Analyse. Le colloque EMF 2003 nous avait permis d'exposer les motivations d'une recherche dont nous voudrions à présent présenter certains des résultats. Après avoir présenté les spécificités de l'angle sous lequel les IREM en France abordent la question de l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, nous présenterons successivement : les motivations de ce travail particulier et les liens avec des réflexions menées par les didacticiens ; une petite étude historique autour de la démonstration donnée par Cauchy du lien entre signe de f' et variations de f; enfin des éléments d'ingénierie didactique inspirés directement de nos lectures de textes historiques.

1. Présentation générale : le travail des IREM et l'histoire des mathématiques

Depuis une trentaine d'années existe en France un réseau d'IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) dont une des originalités est de faire travailler ensemble des universitaires (mathématiciens, didacticiens, historiens de l'enseignement) et des enseignants du Primaire ou du Secondaire. La plupart des IREM comprennent un groupe travaillant sur l'intégration d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, groupes regroupés au sein de la Commission inter-IREM Histoire et Épistémologie. Le groupe M : A.T.H. (Mathématiques : Approches par les Textes Historiques) a été fondé au début des années 1980, autour du mathématicien et historien des mathématiques Jean-Luc Verley, et poursuit depuis ses activités dans deux directions complémentaires. L'une en direction des élèves consiste en la recherche de textes historiques lisibles en classe et la mise au point de problèmes, d'activités d'introduction, de travaux de recherche personnels etc. s'appuyant sur des textes originaux. On trouve un grand nombre de tels documents dans la revue Mnémosyne que publie le groupe. Si le souci d'inscrire les mathématiques dans le contexte plus large de l'activité culturelle et intellectuelle de l'Humanité, de montrer la variété des cultures ayant contribué à l'édifice mathématique, sont aussi des objectifs du groupe, ils sont des objectifs secondaires ; plus précisément, nous pensons que notre démarche permet d'atteindre aussi ces objectifs, sans qu'ils soient ceux qui guident notre travail. Dans la recherche des textes et la mise au point de séquences d'enseignement, notre fil conducteur est le plus souvent un concept mathématique particulier (le nombre réel, la probabilité, la dérivée, le triangle arithmétique…), une méthode (algorithmes de résolutions d'équations, algorithmes d'approximation…), parfois une notation ou une réflexion sur l'évolution des modes de raisonnement et des critères de rigueur. Le groupe travaille aussi en direction des enseignants du Secondaire en organisant des stages de formation continue d'initiation à l'histoire des mathématiques. Les principes y sont les mêmes : contact avec le texte lui-même, travail organisé autour de thèmes mathématiques. Pour l'enseignant comme pour l'élève, la lecture d'un texte écrit par un mathématicien et destiné à des mathématiciens (et non à des élèves) est l'occasion d'un contact réel et personnel avec la recherche mathématique. Pour l'enseignant, plus spécifiquement, elle permet de découvrir sous un nouvel angle des notions qu'une certaine routine a peu à peu rendu incolores, ou de faire les liens entre des domaines séparés dans les programmes d'enseignement. Cette approche par les textes et les notions invite les enseignants à un travail de mathématiques avec des matériaux historiques, et non à un travail à proprement parler d'histoire des mathématiques qui nous semble n'être ni un objectif d'enseignement ni faisable autrement que superficiellement par des enseignants n'ayant bénéficié que de quelques jours de stage.

Nous voudrions ici présenter des éléments d'un travail un peu particulier, mené depuis quatre ans par une partie du groupe M : A.T.H. (P. Brin, R. Chorlay, A. Michel-Pajus), avec le soutien de l'INRP (Institut National de Recherche Pédagogique). Il s'agit, en amont du travail avec les élèves ou les enseignants, d'un travail plus fondamental sur la multiplicité des points de vue, thème qui nous a permis de confronter notre approche avec celles de didacticiens. Nous avons choisi plus particulièrement la multiplicité des points de vue en Analyse élémentaire, cherchant à croiser un travail d'histoire portant sur le 19e siècle et une interrogation didactique sur l'enseignement de l'analyse de l'entrée en Seconde au premier cycle du Supérieur. Les didacticiens ont attiré l'attention sur la multiplicité des points de vue intervenant en Analyse élémentaire : points de vue ponctuel, infinitésimal, local, global. Leurs travaux ont porté soit sur les questions de flexibilité cognitive – changement de point de vue, cadre ou registre – soit sur le rôle des ruptures curriculaires – découverte des points de vue ponctuels et globaux en classe de Seconde, infinitésimaux et locaux en classe de Première, changement de niveau de conceptualisation lors du passage dans le Supérieur. Notre travail d'Histoire a porté sur une série de points chauds conceptuels, où ces points de vue se différencient et s'explicitent au cours du 19e siècle : démonstrations de l'égalité des accroissements finis, liens entre signe de *f'* et variations de *f* ; distinction entre maximum, maximum local et borne supérieure ; évolution des caractérisations de la croissance ; émergence de la notion de domaine de définition. Ces études historiques nous ont conduits à clarifier les éléments d'un réseau conceptuel formant la trame sous-jacente à ce jeu de la multiplicité des points de vue.

2. Un lieu de rencontre entre interrogations historiques et didactiques

Des thèses récentes de didactique ont attiré l'attention sur l'importance du couple local/global à deux moments du cursus scientifique : celui de l'entrée dans l'analyse infinitésimale en classe de Première (M. Maschietto 2003), celui de l'entrée à l'université (F. Praslon 1994 et 2000).

La découverte par les élèves de l'objet fonction, en classe de Seconde, repose sur une dynamique global/ponctuel (Maschietto). On pourrait dire que les élèves de Seconde ont moins affaire à un concept de fonction qu'à un langage des fonctions permettant de formuler explicitement, sans quitter un large cadre algébrique, l'articulation entre les registres numérique, algébrique et graphique. L'entrée dans l'analyse en classe de 1re s'accompagne d'une réelle rupture : les notions de nombre dérivé et d'extremum local, la découverte des équations différentielles et de la méthode d'Euler, nécessitent de dépasser le point de vue ponctuel ; un élément du domaine de définition n'est plus seulement porteur d'une image, il est solidaire des points voisins, sans que cette solidarité puisse donner lieu à une mesure. La découverte de ce point de vue local conduit en retour à redéfinir le point de vue global. On sait que cette entrée dans l'analyse par la découverte du couple local/global est solidaire d'autres ruptures et d'autres difficultés, en particulier la nécessité d'un détour par le domaine des limites – domaine de l'infini et de l'approximation – pour obtenir des renseignements exacts et finis.

La mauvaise maîtrise du couple local/global a été observée dans le supérieur, tant au niveau de la première année universitaire qu'au niveau de la préparation aux concours de recrutement des enseignants de mathématiques. Alors que les termes « local » et « global », présents dans le texte du programme de Lycée, sont parfois repris explicitement dans les titres de chapitres des manuels, et sans doute oralement par de nombreux professeurs, leur sens est obscur pour beaucoup d'étudiants, comme l'ont montré les travaux de F. Praslon et M. Rogalski. La méconnaissance de cette dualité de points de vue semble un réel obstacle à la réussite des étudiants. Il est inutile d'insister son rôle chez de futurs enseignants.

On peut formuler l'hypothèse suivante : non seulement la découverte en classe de 1re d'un nouveau point de vue, le point de vue local, est une étape obligatoire de l'entrée dans l'analyse, mais l'explicitation de la dualité de points de vue local/global est nécessaire à l'architecture cognitive des futurs étudiants. Il nous a semblé pertinent pour notre étude de réunir sous le terme de culture mathématique commune les aspects étudiés de la 1re à la fin du 1er cycle universitaire : [Bac-2 ; Bac+2]. Ce regroupement nous semble pertinent pour le didacticien comme pour l'historien. En amont, on a vu que les connaissances de Seconde n'engageaient pas le couple local/global ; en aval, l'introduction en Licence de mathématiques de théories plus sophistiquées (topologie générale, analyse fonctionnelle) nous semble marquer une nette rupture ; historiquement, il s'agit de l'entrée dans des mathématiques spécifiques au 20e siècle.

Au-delà de la stricte question des points de vue locaux et globaux en analyse, ce thème de recherche nous semble participer de trois des chantiers de la didactique. Premièrement de la recherche sur la notion de point de vue, utilisée couramment mais plus ardue à définir, semble-t-il, que les notions cousines de cadre, registre ou niveau de conceptualisation (Rogalski, dans DIDIREM, 2001). En second lieu, notre sélection de la tranche [bac-2 ; bac+2] nous amène sur le terrain de l'advanced mathematical thinking et de l'étude de l'évolution des capacités de flexibilité cognitive (versatile thinking), d'auto-contrôle, de maîtrise des objets (par opposition aux simples processus), de passage au concept-definition (par opposition au simple concept-image) attendus dans l'enseignement supérieur (Tall. *et al*., 1991). La mauvaise maîtrise des points de vue sur les fonctions conduit à des erreurs structurelles (Artigue, dans Tall, 1991). Enfin, la distinction entre niveaux ponctuel, local et global en analyse relève du niveau méta, présent à la fois dans le discours de l'enseignant et comme métaconnaissances pour l'élève : « des méthodes, des moyens systématiques de contrôle ou de choix de stratégie, ou des activités portant sur la nature même des concepts à apprendre. » (Robert, dans Baron et Robert, 1993). Si pour les lycéens la question se pose de savoir si ces métaconnaissances doivent demeurer des moyens – des outils d'analyse pour l'enseignant – ou des objectifs d'enseignement – dont on attend une certaine maîtrise explicite par les élèves –, la question ne se pose plus pour les étudiants se destinant à l'enseignement.

3. Une étude d'histoire : lien entre signe de *f'* et variations de *f* chez Cauchy.

Entrons dans un peu plus de détail sur un exemple assez élémentaire. La notion de croissance d'une fonction nous semblait riche à travailler sous l'angle de la multiplicité des points de vue. Elle est aujourd'hui enseignée très tôt, dès la découverte des fonctions en classe de Seconde, et sa présentation ne combine que les points de vue ponctuels (seuls des images isolées sont à comparer) et globaux (quantificateur universel sur les couples de points du domaine). En classe de Première apparaît l'un des outils fondamentaux au Lycée sous la forme d'un théorème reliant, sur un intervalle (donc sous une hypothèse topologique révélatrice d'un caractère global plus profond), le signe de la fonction dérivée *f* 'et le sens de variation de la fonction *f*. Ce théorème est admis au Lycée et constitue, dans le Supérieur, l'une des premières démonstrations d'Analyse articulant les niveaux infinitésimaux, locaux et globaux. Un petit travail sur l'histoire des démonstrations, plus ou moins rigoureuses, de ce théorème est extrêmement révélatrice de l'évolution du langage de l'Analyse. Nous ne donnons ici qu'un exemple tiré des Leçons sur le calcul différentiel et intégral de Cauchy (1823).

> *Problème. La fonction y = f(x) étant supposée continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière $x = x_0$, on demande si, à partir de cette valeur, la fonction croît ou diminue, tandis que l'on fait croître ou diminuer la variable elle-même.*
>
> *Solution. Soient Δx, Δy les accroissements infiniment petits et simultanés des variables x et y. Le rapport Δy/Δx aura pour limite dy/dx = y'. On doit en conclure que, pour de très petites valeurs numériques de Δx et pour une valeur particulière x_0 de la variable x, le rapport Δy/Δx sera positif si la valeur correspondante de y' est une quantité positive et finie* […]. […] *les différences infiniment petites Δx, Δy étant de même signe, la fonction croîtra ou diminuera, à partir de $x = x_0$, en même temps que la variable x.* […]
>
> *Ces principes étant admis, concevons que la fonction y = f(x) demeure continue entre deux limites données $x = x_0$, x = X. Si l'on fait croître la variable x par degrés insensibles depuis la première limite jusqu'à la seconde la fonction y ira en croissant toutes les fois que sa dérivée étant finie aura une valeur positive* […]. (Cauchy 1823, p. 36)

L'architecture de la démonstration articule clairement les points de vue : un lemme de passage de l'infinitésimal [stricte positivité de $f'(x_0)$] au local, puis passage du local au global sur un intervalle. La conception du nombre dérivé n'utilise aucune métaphore cinématique, aucune analogie géométrique : le nombre dérivé est limite du taux de variation, et le passage de la positivité de la limite à la positivité de Δy/Δx, pour Δx suffisamment petit, autrement dit sur un voisinage de x_0, est d'une parfaite rigueur. Cette démonstration n'est toutefois pas celle que nous donnons aujourd'hui, pourquoi ? Peut-être, premièrement, parce que ce qui semble un lemme de croissance locale n'en est pas un : il est faux de conclure de la stricte positivité de $f'(x_0)$ à la croissance de *f* au voisinage de x_0, comme le montre le contre-exemple de $x + 10x^2 \sin\frac{1}{x}$ en 0. Cauchy commet-il dont une erreur ? Non, car on ne peut trouver de contradiction qu'en utilisant notre définition de la croissance, or Cauchy ne donne pas de définition de la croissance. Son lemme de comparaison locale des accroissements de x et y n'établit pas la croissance telle que nous l'entendons, mais il peut servir de résultat local permettant un passage à la croissance en notre sens. Mais ce passage du local au global, de la comparaison locale à la croissance globale, sans doute ne l'écririons-nous pas non plus comme Cauchy le fait. Là où nous mettrions bout à bout des inégalités, car c'est ainsi que nous exprimons la croissance dans notre vision ponctuelle, Cauchy fait parcourir continûment à la variable un intervalle, la notion de parcourt continue étant ici une notion primitive. Le lemme local décrit le comportement de la fonction en chaque point de l'intervalle, la persistance de ce comportement n'est autre que la croissance : la croissance est ainsi explicitée plus que définie. On voit qu'une telle conception de la croissance n'a au fond de sens que sur un domaine connexe ; elle n'est pas notre conception ponctuelle, mais elle aussi une conception de la croissance, peut-être plus proche de celle des élèves qu'une définition ponctuelle brisant toutes les solidarités locales.

Il est intéressant d'insérer en quelques mots cette démonstration de Cauchy dans le projet général de réécriture de l'Analyse que cet auteur formule et met en œuvre dans ses cours à l'École Polytechnique depuis les années 1810. On pourrait le qualifier de projet de numérisation de l'Analyse, par opposition à une Analyse fondée sur la généralité de l'Algèbre, ainsi que l'explique Cauchy dans la célèbre préface à l'Analyse Algébrique ; ce projet de numérisation le rapproche de nous. On peut en souligner trois aspects. Premièrement, exiger que le symbole d'égalité ait un sens numérique et non procédural : deux expressions sont égales non parce qu'on peut dériver l'une de l'autre par une procédure admissible, mais parce qu'en substituant des valeurs numériques dans les deux membres, on obtient des égalités entre nombres. Cette numérisation de l'égalité fonctionnelle invite à préciser des domaines de validité, instaure donc un premier jeu du type « être [propriété] sur [domaine] ». Deuxième aspect de cette numérisation de l'Analyse : nature numérique de l'existence fonctionnelle. Ainsi la convergence de la série de terme général x^n/n ! démontre-t-elle pour Cauchy l'existence de la fonction exponentielle. Cet aspect de numérisation est particulièrement frappant lorsqu'on se penche sur la notion d'intégrale. Si l'on regarde le Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et Intégral de Lacroix, dont les premières versions datent des dernières années du 18e siècle, il n'y est pas question de démontrer des existences de fonction, en particulier pas l'existence des primitives : Lacroix explique que rechercher les primitives (il parle d'« intégrale indéfinie ») c'est le contraire de dériver, qu'on passe de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie en fixant deux bornes numériques, et qu'il existe des méthodes numériques de calcul d'intégrales définies utilisant des sommes d'aires de rectangles ou de trapèzes. Cauchy renverse la démarche et résout un problème d'existence que Lacroix ne posait pas : il établit la convergence des suites de nombres obtenues par les méthodes numériques d'intégration, puis fait varier une des bornes de l'intégrale définie pour obtenir une fonction primitive. Troisième aspect, la notion de limite devient, on le voit, fondement de l'Analyse. On aurait toutefois tort de voir dans l'Analyse à la Cauchy notre Analyse. Ainsi il n'y a pas chez Cauchy de travail de construction ou de caractérisation des nombres réels : le continu (numérique) est une notion primitive ; sa notion de limite semble, lorsqu'on lit la définition, être la nôtre : Cauchy écrit toutefois que $sin(1/x)$ a pour limite, lorsque x tend vers 0, tout l'intervalle [-1 ; 1] ; il ne distingue pas continuité et dérivabilité ; la différence entre le ponctuel et l'uniforme lui échappe, par exemple lorsqu'il démontre que la limite d'une suite convergente de fonctions continues est continue ; il « démontre » en quelques lignes qu'on peut dériver sous le signe intégral, sans aucune hypothèse etc.

4. Une piste d'ingénierie didactique

Pour montrer la complémentarité entre le travail d'Histoire pure et la recherche appliquée à l'enseignement, donnons l'exemple d'une série d'énoncés qui nous ont été inspirés par notre travail d'histoire et qui peuvent servir de base à un travail en classe. Pour chaque énoncé, on peut demander à des élèves ou des étudiants s'il leur semble vrai ou faux et, dans le second cas, s'ils peuvent fournir un contre-exemple, par exemple graphique.

Énoncé 1 : Si f est continue en 2 et strictement positive en 2, alors f est strictement positive au voisinage de 2.

Énoncé 2 : si f est continue en 2 et strictement positive en 2, alors f est strictement positive en 2,0001.

Ces énoncés sont bien sûr vrai et faux, respectivement, le premier présentant un jeu déjà subtil entre des hypothèses, l'une locale (continuité) l'autre ponctuelle (positivité en 2), et une conclusion locale ; de plus, l'hypothèse locale nécessite, pour être énoncée, le filtre des voisinages de 2, alors que la conclusion porte sur l'un d'entre eux, dont on peut affirmer l'existence sans connaître en rien sa taille. L'énoncé 2 permet de travailler sur cette insaisissabilité de la « taille » du voisinage. Une variante intéressante consiste à remplacer dans le premier énoncé le « au voisinage » par « sur un voisinage ».

Énoncé 3 : Si $f(2) = g(2)$ alors $f'(2) = g'(2)$.

Énoncé 4 : Si $f'(2) = g'(2)$ alors $f(2) = g(2)$.

La nature de l'erreur est assez simple à identifier dans le cas de l'énoncé 3 : cet énoncé peut être lu comme un passage abusif du ponctuel à l'infinitésimal, ou comme une confusion entre les deux lectures possibles de « $f'(2)$ », propriété ponctuelle de la fonction f' mais propriété infinitésimale (donc aussi locale) de la fonction f. La fausseté de l'énoncé 4 est moins aisée à caractériser, mais un contre-exemple graphique est aisé à trouver. On peut se demander le sens que peut prendre un énoncé relatif à l'unicité de la primitive d'une fonction continue, sur un intervalle et moyennant une condition initiale arbitraire, pour un étudiant incapable de saisir la fausseté de l'énoncé 4.

Énoncé 5 : une fonction continue est bornée.

Énoncé 6 : une fonction localement croissante est croissante.

Ici les deux énoncés sont globaux, plus précisément des énoncés de passage du local au global. Ils sont faux, mais tous deux peuvent être rendus vrais si l'on ajoute certaines hypothèses topologiques sur le domaine d'étude : l'énoncé 5 est vrai sur les intervalles fermés bornés ; l'énoncé 6 est vrai sous hypothèse de connexité, le cas de l'opposé de la fonction inverse montrant la nécessité de cette hypothèse.

Quittons le pur commentaire mathématique pour envisager les usages didactiques. Le travail sur le lien entre $f'(2)$ et $f(2)$ (énoncés 3 et 4) a fait l'objet d'une première expérimentation en classe de Premières scientifique, à une échelle ne permettant toutefois pas encore de tirer des conclusions. Notons que cette liste d'énoncés fournit un noyau autour duquel différents types de séances peuvent être mises en œuvre, à plusieurs niveaux d'enseignement. Ainsi la recherche de contre-exemples graphiques peut-elle être l'objectif final en classe de Première. Les énoncés 1, 2, 5 et 6 peuvent donner lieu à un débat scientifique, les premiers pour mettre en place la notion de voisinage et la dialectique entre « au voisinage » et « sur un voisinage », les derniers pour conjecturer la nature des domaines sur lesquels ils semblent valides. En cycle terminal de Lycée on peut s'arrêter au niveau de la conjecture, alors que la recherche d'une démonstration (ou d'éléments de démonstration) peut être un moyen d'entrer dans une Analyse plus ensembliste et formelle dans le Supérieur. En réfléchissant à ce type de séances, nous rencontrons le concept de « niveau méta » proposé par les didacticiens : les adjectifs tels « ponctuel », « local », « global » servent à classer les propriétés et les énoncés mathématiques en catégories de haut niveau, permettent de se repérer dans un univers de connaissances mathématiques dont la croissance finit par nécessiter des éléments d'organisation explicite, signale des difficultés (du type : « attention, il y a ici passage du local au global et c'est en général hautement non trivial »), suggère des pistes de raisonnement (du type : « ce problème est de même nature que cet autre pour lequel je connais une démonstration astucieuse… »). Nous retrouvons les questions abordées par les didacticiens, en particulier : les éléments méta doivent-ils être explicités pour l'enseignant afin d'éclairer ses choix pédagogiques ou doivent-ils aussi être explicités pour les élèves (la réponse peut bien sûr varier selon qu'on s'adresse à des Lycéens ou à des étudiants) ? S'ils sont à expliciter pour les élèves, l'usage systématique et contextualisé de termes relevant du niveau méta suffit-il pour en faire comprendre le sens et le rôle, ou ces termes doivent-ils, pour un temps au moins, devenir explicitement objets de l'enseignement ?

Nous conclurons en invitant à la lecture des textes que nous ferons paraître en 2006-2007 qui présenteront l'ensemble des travaux dont nous n'avons pu donné ici qu'un aperçu. Nous remercions les organisateurs et participants au thème 3 pour les discussions riches qui nous ont permis, entre autre, de mesurer la spécificité de notre approche.

Références

M. Baron et A. Robert (dir.) *Métaconnaissances en IA, en EIAO et en Didactique des Mathématiques*, Cahier DIDIREM spécial mai 1993, IREM Université Paris 7, Paris, 1993.

A-L. Cauchy *Résumé des Leçons donnée à l'École Royale Polytechnique sur le Calcul Différentiel et Intégral*, 1823.

R. Chorlay *Fonctions implicites : de la notion au théorème*, Mnémosyne n° 18, IREM Université Paris 7, Paris, 2003.

Équipe DIDIREM *Actes de la Journée en Hommage à Régine Douady* (14 juin 2001), IREM de l'Université Paris 7, Paris, 2002.

M. Maschietto *L'enseignement de l'analyse au Lycée : les débuts du jeu local/global dans l'environnement des calculatrices*, Thèse de 3e cycle, Université Paris 7, Paris, 2002.

F. Praslon *Analyse de l'aspect Meta dans un enseignement de Deug A concernant le concept de dérivée. Étude des effets sur l'apprentissage*. Mémoire de D.E.A., Paris 7, 1994.

D. Tall (dir.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Boston, 1991.

Pour joindre l'auteur

Renaud Chorlay
I.R.E.M. Université Paris 7
Adresse postale : 9 rue du midi
94300 Vincennes
France
renaud-chorlay@noos.fr

Philippe Brin : philippe.brin@voilà.fr
Groupe M.A.T.H. : iremmath@yahoo.fr