L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Formation initiale des professeurs du secondaire supérieur et changement de posture vis-à-vis de la rationalité mathématique

Emmanuelle Rouy, *Centre Interfacultaire de Formation des Enseignants – Université de Liège (BE), LADIMATH – Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur, Belgique*

Résumé

Notre objectif est de montrer comment les élèves-professeurs, confrontés à la difficulté d'élaborer un discours technologique, adoptent ce que nous appellerons une « praxéologie à trous » à savoir le discours proprement théorique des mathématiciens dont on édulcore les points les plus difficiles, masquant alors certains enjeux en termes de rationalité.

Le rôle joué ici par le changement d'institution ainsi que le caractère professionalisant de la formation nous amènent à nous référer essentiellement à l'approche anthropologique du didactique de Y. Chevallard et nous incitent à choisir un objet mathématique présentant une double visibilité institutionnelle, à savoir la dérivée et le sens de variation d'une fonction.

Après avoir motivé le choix de ce sujet, nous en montrerons les difficultés réelles en nous appuyant sur des recherches existantes et nous ferons l'analyse des transpositions didactiques existantes de manière à montrer que l'organisation globale proposée à l'université et les organisations locales du secondaire traitent différemment les difficultés intrinsèques à ce thème. L'analyse des productions et des discours des élèves-professeurs montrera qu'ils adoptent consciemment un discours fait d'emprunts au discours proprement théorique. Faits par référence à « la rigueur » ces emprunts demeurent isolés et sont accompagnés d'un recours à l'évidence visuelle. Si leur posture vis-à-vis de la rigueur est une explication possible de leurs choix, nous mettrons aussi en évidence que les deux organisations restent « concurrentes » ce qui se manifeste par un rapport ambigu à la théorie et que les enjeux rationnels associés laissent des « traces » non prises en charge.

Introduction

Nous choisirons de polariser notre étude sur la manière dont les élèves-professeurs utilisent leurs connaissances mathématiques, alors qu'ils sont dans une nouvelle transition entre institutions remettant face à face les organisations mathématiques rencontrées. Ce saut d'une institution à l'autre doit-il provoquer un oubli ou peut-il favoriser une mise en perspective des connaissances ? Le phénomène avait été évoqué par Félix Klein[1] dont l'expression « double forgetting » suggérait d'« oublier » les mathématiques scolaires avant d'entrer à l'université, mais aussi d'« oublier » les mathématiques de l'université avant de « retourner à l'école ». Certes, ces transitions impliquent des changements d'environnement, de modes d'étude, d'objectifs et de préoccupations, mais elles présentent une caractéristique commune : la nécessité de mettre en perspective les différentes organisations des connaissances mathématiques. Une alternative à l'oubli consisterait, par exemple,

1 Cité par Freudenthal (1973).

à utiliser les connaissances universitaires pour questionner les transpositions proposées dans le secondaire et développer un discours technologique rationnel, à la fois justificatif et cohérent. Mais peut-il y avoir intégration des organisations ou au contraire cohabitation concurrente ? Nous chercherons à montrer comment les difficultés ainsi générées chez les élèves-professeurs se manifestent dans leurs choix d'enseignement autant que dans les discours qu'ils tiennent sur ces choix.

Éclairage des cadres théoriques

Dans ce souci de mettre en relation les thèmes de la rigueur et de la formation initiale, les différents cadres théoriques sont porteurs d'explications a priori.

La théorie anthropologique du didactique (TAD)

La TAD d'Yves Chevallard est ici une référence principale de par son éclairage institutionnel. En effet, les élèves-professeurs sont de ce point de vue des « mutants », quittant l'université pour pénétrer une institution dont ils sont sortis 4 ou 5 ans auparavant.

La TAD suggère une organisation des savoirs mathématiques en « praxéologie » :

- T, la tâche c'est-à-dire la question à résoudre (le « pour quoi »);
- τ, la technique conçue pour la réalisation des tâches ;
- θ, la technologie ou discours rationnel destiné à expliquer et valider l'usage de cette technique pour réaliser la tâche (le « pourquoi »);
- Θ, la théorie apportant une justification de niveau supérieur aux assertions que contient le discours technologique. Dans notre étude, elle constitue un niveau supérieur de rationalité.

L'étudiant devenant professeur se trouve donc dans la position inconfortable d'avoir étudié les théories et de devoir (re)travailler l'articulation tâche/technique pour des techniques naturalisées, ainsi que la mobilisation d'un discours technologique ne pouvant être la théorie, l'obligeant à relativiser la rigueur éventuellement associée.

De plus la dialectique ostensif/non-ostensif, devenue invisible, pourrait favoriser un glissement de la conception de rigueur devenant le fait d'utiliser les ostensifs en conformité, au risque de masquer « la dimension fonctionnelle de la rigueur » (Noirfalise *et al*., 1996).

La dialectique outil-objet (DOO)

Au sein de la perspective précédente, la DOO définie par Régine Douady apparaît aussi éclairante. C'est au moment de préparer ses propres leçons qu'on détecte un objet utilisé implicitement et qu'alors il y a risque d'en faire un objet à définir préalablement. Cette dialectique est à rapprocher de la distinction entre « objet mental [2] » (notion commune) et concept (notion définie mathématiquement), dont nous verrons l'enjeu en ce qui concerne la tangente.

2 Notion définie par Freudenthal : « sorte de substituts primitifs des concepts proprement mathématiques et qui peuvent à terme opposer des difficultés à la formation de ceux-ci ». Parmi ces objets mentaux, l'aire et le volume pour lesquels on arrive souvent à une confusion entre la grandeur et le nombre qui la mesure.

De plus, la notion de changement de cadre permet d'associer à une propriété une explication issue d'un autre cadre. Se pose alors la question de distinguer l'explication de la justification. Les étudiants utilisent d'ailleurs très peu les changements de cadre pour s'attacher à une théorie, justement caractérisée par la capacité à produire des énoncés et démonstrations de même nature. Mais les sujets choisis ici les amènent à travailler avec au moins deux cadres, la géométrie et l'analyse, ce qui pose des difficultés selon nos constats antérieurs.

La théorie des situations didactiques (TSD)

Les difficultés de transition s'expliquent aussi par la spécificité du contrat et la difficulté à revenir sur les apprentissages antérieurs disparus au profit des théories. C'est pourquoi les notions de contrat et de milieu nous paraissent éclairantes.

Dans la TSD de Guy Brousseau, le milieu désigne l'ensemble des éléments matériels, sociaux, cognitifs, etc. Dans ses évolutions plus récentes (Margolinas, 2005), le milieu inclut les différents niveaux de connaissance mobilisables par l'enseignant et donc les possibilités d'interactions entre ces niveaux.

Cette même TSD met l'accent sur la notion de contrat[3], ici intéressante puisque l'étudiant est dans un contrat didactique particulier avec les institutions prenant part à la formation. Il est souvent encore étudiant de l'université tandis qu'il est également soumis à une « norme de terrain » ainsi qu'à ses propres souvenirs d'élève. Selon le dispositif de formation, l'influence du contrat pourrait empêcher de prendre la distance requise par rapport à chacune des institutions.

Investigations préliminaires

Une première phase du travail consista en l'analyse de travaux d'ordres divers (philosophie, mathématiques, didactique, etc.) d'une part, sur la rigueur vue comme recherche de rationalité et, d'autre part, sur la formation initiale.

La criticité de cette période sur le plan du rapport au savoir a souvent été évoquée[4]. Pourtant l'organisation d'une formation initiale continue de se heurter à l'illusion de transparence des contenus et à une certaine perception du métier. En mathématiques, une difficulté supplémentaire est liée au fait que « le simple est proche du complexe » (Freudenthal, 1973), ce qui peut en faire l'attrait pour le chercheur développant le fondamental pour expliquer l'élémentaire, mais aussi la difficulté pour le professeur qui doit expliquer l'élémentaire sans pouvoir utiliser le fondamental. Doit-il et peut-il faire comme s'il ne connaissait pas ce niveau fondamental de justification ?

Un consensus semble maintenant s'être installé sur une formule mixte articulant une formation pratique avec une formation plus générale. C'est la part consacrée au questionnement du savoir mathématique et de ses transpositions qui va nous intéresser. Deux recherches récentes abordent une problématique proche de celle nous intéressant. A. Lenfant (2002) constate un malaise des

3 Représentant l'ensemble des attentes explicites et implicites existant entre professeur et élève, et qui influencent le comportement de l'un comme de l'autre.

4 Par exemple H. Lebesgue et E. Galois parlaient « d'un effort nécessaire de compréhension d'ensemble » ou « d'une méditation sur cet amas de connaissances ».

stagiaires face à l'impossibilité de « correctement » justifier des résultats ou corriger des déductions d'élèves[5], avec un paradoxe général entre des discours du type « règle » et l'attention parfois excessive portée à la justification ou à la définition. C. Ben Salah Breigeat (2001) s'intéresse « aux manifestations des connaissances mathématiques des professeurs lorsque ceux-ci enseignent les mathématiques » et constate que chez les enseignants débutants, les connaissances viennent d'être « stockées » d'une certaine manière qui a priori ne permettrait pas leur utilisation directe dans l'enseignement et deviendraient d'autant moins disponibles que le manuel de niveau (n) semble bloquer[6] les références à des connaissances de niveau (n+p).

La dérivée vue par les deux institutions : difficultés associées

La dérivée vue par les deux institutions

Si ces recherches confirment l'existence d'une problématique globale, nous choisirons de l'étudier sur un thème mathématique a priori susceptible de mettre en évidence les difficultés supposées, à savoir l'association des concepts de tangente et de dérivée, et leur rôle dans l'établissement du lien entre le signe de la fonction dérivée et la croissance de la fonction. Tout d'abord ce thème présente une double visibilité institutionnelle dans la mesure où « le critère de croissance » est abondamment utilisé dans le secondaire pour l'exercice « étude de fonction », mais n'est étudié théoriquement qu'à l'université dans le cadre de l'analyse réelle. De plus la démarche pour l'établir comporte des enjeux en termes de rigueur et de rationalité qui sont relatifs aux propriétés des nombres réels et à un changement de cadre géométrie/analyse, plus précisément la constitution de l'analyse comme domaine mathématique à part entière.

À partir d'une lecture de l'histoire de la dérivée, nous pouvons proposer une praxéologie comme suit :

1) Type de tâches : problèmes de vitesses variables, de tangentes, d'optimisation, d'approximation (affine).
2) Technique : calcul de dérivées.
3) Discours technologique : argumentations locales et souvent hybrides, liées à l'utilisation de points « infiniment proches » ou d'une argumentation cinématique.
4) Théorie : l'analyse réelle basée sur la construction axiomatique de R et l'utilisation d'inégalités et de quantificateurs.

Une analyse de manuels du secondaire et de syllabus universitaires montre comment ces composantes sont en quelque sorte « réparties » dans les organisations proposées par les institutions concernées.

5 Par exemple, Benjamin suppose son propre niveau théorique non utilisable, ce qui l'amène à un argument d'autorité qui ne le satisfait pourtant pas « c'est sûr qu'on va pas leur dire que la dérivée est continue, je suis d'accord, mais Moi, ça me pose un vrai problème je suis obligé de leur dire « croyez-moi » […] alors qu'en maths on doit tout justifier. Et nous on leur balance des trucs comme ça […] C'est le décalage qui me tue. […] Mais d'un autre côté, quand je pense à ce que je ressentais en tant qu'élève, cela ne me gênait pas. Mais en réfléchissant, c'est sûr qu'un jour il y en a un qui va me le dire, c'est pas possible » (Benjamin, dans Lenfant (2002).

6 L'auteur parle même de « connaissances concurrencées ».

	Université : organisation globale	Secondaire : organisation locale
Types de tâches	**Oubli des types de tâches**	**Statut inégal des tâches** Intervention « excessive » de la tangente tandis que les problèmes d'optimisation, approximation et vitesses sont des problèmes d'application.
Techniques		Prédominance de la technique de calcul et de l'utilisation du critère de croissance.
Discours technologique		Pratiquement pas de discours technologique.
Théorie	**Analyse réelle** Axiomatisation de R et définition des concepts fondamentaux : nombre réel, fonction, limite ; Étude systématique des propriétés de ces concepts, dont le critère de croissance ; Organisation rationnelle globale (travail dans R^n) et « purement » analytique.	**Ersatz de théorie avec centration sur une justification du critère de croissance** Les transpositions ne proposent en général pas d'autre éclaircissement que la figure correspondante. La référence à la théorie consiste en l'énoncé isolé de théorèmes légitimant la technique.

Difficultés associées

Nos observations antérieures suggéraient que l'utilisation de la tangente pour introduire la dérivée ou pour montrer que cette dérivée « contrôle » la croissance de la fonction était susceptible de rajouter des difficultés. L'introduction de la notion de dérivée[8] se fait en effet souvent par référence à la notion de tangente à une courbe. Or la tangente n'est à ce stade définie mathématiquement que pour le cercle et par une propriété géométrique. On constate alors une argumentation circulaire : le nombre dérivé est défini comme coefficient de la tangente puis la tangente est définie comme droite ayant pour coefficient directeur le nombre dérivé. L'enjeu rationnel consistant à faire passer la tangente soit du statut d'objet mental (une droite qui frôle la courbe, ou qui passe par deux points infiniment proches) au statut de concept mathématique délivré d'ambiguïté (la droite ayant pour coefficient le nombre dérivé), soit d'objet géométrique à objet analytique, devient invisible en créant de plus une interférence entre les deux cadres. Ensuite, pour établir le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction, la tangente (toujours pas définie dans certains cas) apparaît de nouveau comme intermédiaire. Dans ce cas, le dépassement du constat visuel local (en quelques points la tangente « monte ») à une propriété numérique sur un intervalle réel est laissé à la charge de l'élève.[9]

7 La tâche d'approximation n'est en fait quasiment jamais utilisée comme introduction ni même comme application.

8 Nous ne détaillerons pas ici la difficulté supplémentaire apportée par les appellations « nombre dérivé », « dérivée » et « fonction dérivée ».

9 Même l'élément de théorie fourni, c'est-à-dire le théorème des accroissements finis, laisse cet enjeu transparent dans la mesure où il mentionne l'existence d'un point dans un intervalle, alors qu'on en déduit précisément une propriété « en tout point » d'un intervalle. De plus, il est essentiellement énoncé sous la forme utilisant un quotient/pente et plus sous la forme d'accroissements.

Historiquement la notion de tangente est un objet « hybride » par nature. D'abord géométrique, sa généralisation à d'autres courbes amènera la manipulation de « quantités infiniment petites » ou de « points infiniment proches », marquant les débuts de ce que nous appelons maintenant « analyse » quelle qu'en soit la formalisation. C'est aussi par la nécessité de développer une argumentation sans recours à l'intuition géométrique que l'analyse deviendra un cadre mathématique à part entière. Pour cela, les problématiques seront transférées du cadre des figures au cadre des nombres, plus précisément les nombres réels traduisant le continu géométrique. L'histoire montre l'intervention à deux reprises de la cinématique dans ce transfert : d'abord un renversement de point de vue sur la courbe devenant trajectoire puis représentation de la loi du mouvement, ensuite le recours à une analogie avec la vitesse instantanée pour faire accepter l'existence d'un « rapport extrême [10] ».

Plusieurs recherches en didactique viennent d'ailleurs confirmer la difficulté d'enseignement et d'apprentissage de ces notions. C. Castela (1991) montre, en particulier, que la généralisation de la tangente au cercle à la tangente à une courbe quelconque est loin d'être évidente et que le passage du cadre géométrique aux cadres fonctionnel et numérique nécessite vraiment une prise en charge par le professeur. M. Schneider (1991) montre, de plus, une « réelle difficulté des élèves du secondaire à associer la pente d'une tangente à la limite d'une suite de quotients différentiels ». Cette difficulté liée aux changements de cadre s'inscrit dans un obstacle épistémologique d'hétérogénéité des grandeurs, plus précisément l'obstacle géométrique de la limite. Les élèves considérant la tangente comme objet premier par rapport à sa pente procèdent en fait à un « faux » passage à la limite dans le domaine géométrique.

Analyse des transpositions

L'analyse de différents manuels montre comment ces enjeux sont pris en compte dans les transpositions proposées pour le secondaire. Une analyse précise des définitions, formulations, notations et représentations graphiques utilisées amène à identifier 1) pour la définition de la dérivée, deux catégories : les manuels distinguant clairement les changements de cadre[11], et les manuels proposant des discours juxtaposés ; 2) pour le lien entre dérivée et variation, trois catégories : les manuels ne proposant pas de démonstration, ceux proposant une démonstration consistant en l'énoncé du TAF avec son illustration géométrique, et ceux proposant un discours spécifique.

Cette analyse aboutit de plus à parler de « praxéologie à trous [12] » en comparant le discours complet de l'université et les discours proposés dans le secondaire. Le discours théorique pour établir le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction comporte 20 étapes dont le fondement est soit l'axiome des intervalles emboîtés, soit l'existence d'une borne supérieure. La plupart des transpositions proposent par contre l'énoncé du résultat « démontré » par le TAF[13], sans

10 « Ultima ratio » de Newton.

11 Assez curieusement, on retrouve dans cette catégorie un manuel clairement formaliste (manuel français des années 1970) et un manuel récent AHA annonçant une approche heuristique.

12 Cette appellation est vraisemblablement à rapprocher des organisations incomplètes étudiées par Bosch et Gascon

13 En fait, les énoncés sont seulement présentés l'un après l'autre. Signalons également que le théorème de Rolle est souvent présenté comme « un cas particulier » du TAF, au risque de sous-entendre qu'il peut en être déduit alors qu'il sert à le démontrer dans l'organisation théorique.

autre discours accompagnateur excepté l'illustration géométrique avec les tangentes. Le discours technologique faisant fonction peut donc être décrit comme un « discours à trous ». C'est une adaptation tronquée du discours proprement théorique dans laquelle un ou deux théorèmes extraits de la théorie donnent un caractère légitime à la technique sans pour autant la rendre intelligible[14], d'autant qu'il y a recours à l'évidence visuelle pour « combler les trous » avec l'utilisation de la tangente : la « définition » de position limite de sécantes va permettre de forcer le passage à la limite du quotient différentiel, et la représentation de tangentes en quelques points d'une courbe va « forcer la conviction » quant au critère de croissance.

Un autre manuel (AHA) développe un discours voulant mettre en évidence la nécessité de préciser ce que signifie « en tout point d'un intervalle ». Partant d'un problème cinématique « si x(t) est la position d'un mobile, une vitesse positive provoquera un déplacement dans la direction des x positifs », l'argumentation fera intervenir la nécessité de disposer de nombres autres que les seuls rationnels pour que les mathématiques apportent au problème posé une solution qui reste conforme au bon sens. Il est alors possible de proposer une démonstration du résultat annoncé en utilisant explicitement l'axiome des intervalles emboîtés ainsi que des outils de pensée spécifiques à l'analyse : la manipulation d'inégalités, la dichotomie, le remplacement d'une fonction par une autre très voisine.

Discours des élèves-professeurs

La difficulté à élaborer un discours rationnel pour présenter ces notions au niveau du secondaire est donc une réalité que doivent affronter ces étudiants-professeurs. Les questions pour la recherche et la formation sont alors 1) comment articulent-ils les différentes organisations rationnelles impliquant ces sujets et 2) peut-on lors de la formation les aider à construire un discours technologique approprié ? Des observations ont été recueillies depuis 3 ans auprès des étudiants en formation initiale à l'Université de Liège et aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix (FUNDP). Ce dispositif comporte les caractéristiques suivantes : 1) préparations de cours sans contrainte avec ou sans exposé oral et avec ou sans interview ; 2) dévolution aux élèves-professeurs d'une situation adidactique (le « vase conique » où un problème de débit instantané amène à utiliser la dérivée dans un cadre strictement numérique) ; 3) analyse de transpositions dont une est « orthogonale [15] » à celles habituellement rencontrées ; 4) demande explicite de construction d'un discours technologique à partir de tâches constituant une ingénierie de la dérivée et de techniques proposées par des élèves.

Les dernières données étant encore en cours d'analyse, nous précisons ici les premiers résultats basés essentiellement sur les préparations « spontanées » de leçons et les discours associés.

Introduction de la dérivée

6 étudiants sur 16 choisissent comme activité d'introduction une activité proche de la construction de tangentes ; 4 choisissent une activité à caractère cinématique (en fait une application de notions

14 En faisant appel à l'aspect visuel de la tangente, donc au sensible, se manifeste par contre une forme d'empirisme, qui cohabite curieusement avec le formalisme latent.

15 Au sens où elle repose sur une argumentation cinématique refusée par les étudiants.

supposées être définies en physique) immédiatement suivie par une activité sur la tangente dans laquelle ils veulent donner une définition ; les autres travaillent sur une définition formelle du taux d'accroissement.

L'analyse des nombreuses interactions entre les « définitions » de la tangente et de la dérivée[16] montre cependant une absence généralisée de prise en charge du changement de statut de la tangente.

La « définition » comme « (position) limite de sécantes » est utilisée par un tiers[17] des étudiants, accompagnée de la mystérieuse précaution « si elle existe ». Pour un quart des observations, le nombre dérivé est explicitement défini à partir de la tangente non définie et on ne relève que 2 préparations où le nombre dérivé et la tangente reçoivent une définition ne permettant pas de circularité, dont une correspondant à une approche uniquement théorique[18].

On retrouve par ailleurs chez presque un tiers des étudiants une insistance à montrer, mais par un jeu de notations, que les notations $\lim_{x \to a}$ et $\lim_{h \to O}$ sont équivalentes, ce que l'on peut interpréter comme une trace de la difficulté numérique en jeu.

Lien entre dérivée et variation

9 préparations sur 15 proposent une « démonstration » avec les théorèmes ; 3 se passent des théorèmes, mais utilisent quand même la tangente ; 3 se passent des théorèmes et de la notion de tangente. Il y a donc 12 préparations sur 15 (soit 4/5) qui adoptent la « praxéologie à trous » et le recours au visuel.

Parmi les 3 préparations n'utilisant ni les théorèmes, ni la notion de tangentes, on trouve 2 étudiantes qui proposent de mettre en relation le signe de la dérivée avec la définition « algébrique » de la croissance d'une fonction[19] et un problème d'optimisation amenant à la question « Si f est croissante entre 2 points d'abscisse a et a+h, comment être sûr qu'elle le sera pour toute valeur de h ? » et à un discours sur la capacité à rendre un nombre réel « aussi petit que possible ».

Quant aux théorèmes de Rolle et Lagrange, on observe des énoncés comme « on voit que f est croissante ssi la tangente est une droite croissante ssi la pente de la tangente est positive » ainsi qu'une tendance à mettre en avant l'interprétation graphique : « Si f est continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b [alors il existe au moins un réel c de]a,b[tel que la tangente au graphe cartésien de f au point (c,f(c)) soit parallèle à la droite comprenant les points (a,f(a)) et (b ;f(b)) ce qui se traduit par Si f est continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[alors il existe au moins un réel c de]a,b[tel que f'(c)= $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ».

Les propriétés que doivent posséder les nombres permettant la connexion géométrie/analyse sont un enjeu rationnel de ce résultat. Cette question est éludée dans les préparations faisant appel au

16 Détail dans Rouy (2005).

17 Au regard des observations plus récentes, cette proportion va en augmentant.

18 Cette approche, dite formaliste est souvent utilisée par les étudiants disant « vouloir faire de l'analyse et pas de la géométrie ».

19 Une caractéristique les distinguant des autres est également de travailler avec des fonctions dont l'expression analytique est connue.

tracé de tangentes en quelques points et concluant « la dérivée est toujours positive », mais est prise en compte dans 2 préparations posant la question d'être sûr de la croissance « sur un intervalle entier » ou « en tout point d'un intervalle », ou « entre a et a + h pour tout h ». L'insistance sur l'équivalence des notations $\lim_{x \to a}$ et $\lim_{h \to O}$ nous semble par contre pouvoir être interprétée comme une manifestation de la difficulté proprement numérique de ce résultat, mais sous forme de trace le plus souvent traitée sur le mode symbolique.

Il apparaît donc que les étudiants adoptent en majorité la transposition proposée par les manuels classiques, en comblant les trous par l'utilisation de la notion de tangente. Mais la difficulté numérique laisse des traces que les étudiants gèrent sur le plan symbolique, ou exceptionnellement en langage naturel.

Une relation ambiguë à la théorie

Les élèves-professeurs s'orientent donc plus facilement d'une part vers une approche de la dérivée à partir de la tangente au risque de faire apparaître une définition circulaire et, d'autre part, vers ce qui a été appelé une « praxéologie à trous » consistant en une adaptation du discours théorique complet dont on ne garde que les théorèmes pouvant être illustrés moyennant le recours à la notion de tangente et donc à l'évidence visuelle.

Ces observations confirment qu'il n'y a pas spontanément de questionnement de la transposition didactique proposée dans le secondaire, mais aussi qu'elle est adoptée consciemment puisque des choix ont été opérés dans les manuels. Les réponses d'étudiants à un questionnaire leur demandant d'apprécier la rigueur de différents documents suggèrent bien que cette notion est pour eux problématique puisque par exemple l'approche heuristique de AHA est évaluée comme étant aussi bien la plus rigoureuse que la moins rigoureuse, parce qu'elle utilise des phrases comme « une droite qui frôle la courbe ». Le fait d'utiliser des énoncés, ou même seulement des mots mathématiques dans le cas de la définition comme position limite, semble prédominant sur le fait de développer une argumentation liée à la modélisation et utilisant le langage naturel.

Une autre observation est le rejet de la démonstration par l'absurde utilisant l'axiome des intervalles emboîtés parce que « trop théorique », ce qui peut paraître contradictoire avec le point précédent. En rapprochant ces propos de ceux de professeurs d'université qui parlent d'accueillir des élèves « qui souhaitent des techniques, mais le minimum de théorie », les deux transitions entre secondaire et université semblent donc être un saut entre « un monde technique » et « un monde théorique », sans discours permettant de les mettre en relation.

Signalons enfin que ces observations montrent que le discours proposé lors des études secondaires devient la référence essentielle par rapport aux acquis universitaires pourtant plus récents. On note aussi que les étudiants ne semblent en général pas conscients des difficultés : la difficulté concernant les nombres en jeu n'apparaît que sous forme de traces symboliques et une seule étudiante évoque le fait que la connexion géométrie/analyse soit « plus facile en dimension 2 ». [20]

20 En particulier, l'aspect visuel et l'association entre dérivabilité et existence d'une tangente ne sont pas généralisables au cas d'une fonction de deux variables.

En première interprétation, les réponses obtenues laissent à penser que la référence au cadre géométrique[21], c'est-à-dire un cadre proprement mathématique, est plus facile à admettre qu'une approche avec les vitesses, modélisation qui peut pourtant être directement liée à l'axiomatique de R.[22]. Enfin, cette absence de discours amène à une interférence entre les cadres géométrique et analytique, qui pourrait à moyen terme avoir des conséquences sur l'enseignement de l'analyse : pourquoi faire de l'analyse si « ça se voit sur le dessin ».

Conclusions et perspectives

La première étape de la recherche a montré que les étudiants en formation initiale ne se montrent pas conscients de la nécessité d'un discours technologique basé sur une rationalité autre que celle proposée par les théories[23]. Ceci les amène à adopter un modèle ambiant de discours technologique consistant en un discours théorique « à trous » et à manifester un rapport ambigu à la théorie se traduisant par exemple par l'insistance sur les éléments de théorie « illustrables » tout en refusant d'évoquer le rôle de l'axiomatisation de R. Nos objectifs ont ensuite été de chercher à identifier quels éléments d'un dispositif de formation permettraient d'accompagner les étudiants dans cette transition, en suivant deux axes : d'une part mener les étudiants à expliciter la rationalité sous-jacente à leurs leçons (notamment une prise de conscience du rôle de l'axiomatisation) et, d'autre part, analyser leurs réactions face à la nécessité de développer un discours technologique pour accompagner des situations dans lesquelles le graphique et les objets géométriques (courbe, tangente) ne servent plus seulement d'argument visuel mais sont effectivement utilisés et inclus dans un raisonnement en langage naturel.

Ce travail nous paraît se rapprocher des programmes récents en France recommandant « la réintroduction de définitions explicites pour les limites en langage naturel, une approche explicite de la complétude à travers les suites adjacentes ou les intervalles emboîtés, et l'incitation d'établir, si la classe s'y prête, à partir d'un de ces énoncés pris comme axiome un certain nombre de résultats jusque-là admis ou hors programme » (Artigue, 2005). Plutôt que l'oubli mentionné au début, cette explicitation pourrait être un facteur de transformation des connaissances d'une institution à l'autre.

Je remercie les étudiants et professeurs ayant participé à cette recherche, ainsi que le professeur M. Schneider qui a accepté de diriger ce travail.

21 Et ce malgré le fait que ces étudiants aient auparavant été placés dans une situation adidactique qui amène à envisager la dérivée et la limite uniquement pour résoudre un problème de variation de grandeurs sans aucun recours à la tangente.

22 La problématique de modélisation en mathématiques apparaît sous la forme « les exemples concrets permettent de savoir à quoi ça va servir », donc pour des applications ultérieures, en évitant de faire référence au fait que les objets mathématiques pourraient trouver leur origine dans une recherche de « modélisation du réel » (Douady, 1992). Remarquons à ce sujet qu'un manuel propose une activité à caractère cinématique mais en l'accompagnant d'une petite phrase énigmatique : « en passant des grandeurs à leurs mesures » et que cette activité n'est jamais utilisée par les étudiants s'inspirant de ce manuel, ceux qui proposent une activité analogue n'insistant pas sur cette question.

23 La suite de la recherche permettra de nuancer ce résultat dans la mesure où lorsqu'on demande aux étudiants de supprimer les théorèmes, certains se montrent insatisfaits de ne pas pouvoir fournir d'argumentation.

Références

AHA (1992). Une approche heuristique de l'analyse. *In* Hauchart, C. et Rouche, N. (Dir.), *L'enseignement de l'analyse aux débutants*. Erasme.

Antibi, A. (1996). Les niveaux de rigueur dans nos programmes : un exemple d'ensemble vide ? *Bulletin APMEP n° 410* – Journées nationales Albi.

Arsac, G. (1996). Un cadre d'étude du raisonnement mathématique. *In* Grenier, D. (dir.), *Séminaire didactique et technologies cognitives en mathématiques*. Grenoble : IMAG

Artigue, M. (2005). *Le défi de la transition secondaire-supérieur : que peuvent nous apporter les recherches didactiques et les innovations développées dans ce domaine ?* Conférence au LADIMATH (FUNDP), 05 juillet 2005.

Ben Salah Breigeat, C. (2001). *Les connaissances mathématiques des nouveaux enseignants de mathématiques au collège à l'épreuve du feu : une étude de cas*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques. Université Paris 7.

Bkouche, R. (2002). Introduction. *In Des grandeurs aux espaces vectoriels*. CREM asbl.

Bloch, I. (2005). *Peut-on analyser la pertinence des réactions mathématiques des professeurs dans leur classe ? Comment travailler cette pertinence, en formation, dans des situations à dimension adidactique ?* Présentation au séminaire de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, *Vol 19*, n° 1, p. 77-123.

Bosch, M., Fonseca, C. et Gascon, J. (2004). *Effets de l'incomplétude des organisations mathématiques dans les transitions collège-lycée-université*. RDM.

Bouvier, A. (1981). *La mystification mathématique*. Hermann.

Brousseau, G. (). *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage.

Buekenhout, F. (1992). La spirale des dérivées. *In* Hauchart, C. et Rouche, N. (Dir.), *L'enseignement de l'analyse aux débutants*. Erasme.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. Un exemple concret, celui de la tangente. *RDM*, *Vol 15*, n° 1, p. 7-47

Cavaillès, J. (1981). *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*. Hermann.

Chevallard, Y. (1997). *Contribution à la Table ronde « Formalisme et rigueur »*, XIe Ecole d'été de didactique des mathématiques.

Chevallard, Y. (2002). *Recherches en didactique et pratiques de formation d'enseignants*. Conférence donnée au LADIMATH, Namur 05 février 2002.

Chevallard, Y. (2003). *Didactique et formation des enseignants*. Journées d'études INRP-GEDIAPS.

Comiti, C., Grenier, D., et Margolinas, C. (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation des phénomènes didactiques. *Différents types de savoirs et leur articulation*. La Pensée Sauvage. Grenoble

Defrance, A. (2004). *Rigueur et sens dans l'apprentissage des mathématiques. Au-delà de l'outil, un principe de pensée*. Mémoire de DEA en Sciences psychologiques et de l'Education : Université Libre de Bruxelles.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères Irem*, *n° 6*.

Douady, R. (1995). Didactique des mathématiques. Article de l'*Encyclopaedia Universalis*.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Kluwer

Jaulin-Mannoni, J. (1975). *Le pourquoi en mathématiques*. ESF.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations*. Hermann.

Legrand, M. (1988). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *Vol. 9*, n° 3, p. 365-406.

Legrand, M. (2003). *Paradoxes et tensions entre « choix de pertinence en didactique » et « vigilance épistémologique »*. Conférence séminaire DidaTech.

Lenfant, A. (2002). *De la position d'étudiant à la position d'enseignants : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques. Université Paris 7.

Lerouge, A. (2000). La notion de cadre de rationalité à propos de la droite au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *Vol. 20*, n° 2, p. 171-208.

Noël, G. (1992). Pourquoi l'analyse n'est pas rationnelle. *In* Hauchart, C. et Rouche, N. (Dir.). *L'enseignement de l'analyse aux débutants*. Erasme.

Pressiat, A. (2002). *La Théorie Anthropologique du Didactique*. Notes de cours du DEA.

Robert, A. (1995). *Professeurs de mathématiques de collège et lycée : formation professionnelle initiale ou comment désaltérer qui n'a pas soif ?* Irem – Université Paris 7.

Robert, A. (1996). *Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques. Un essai de didactique professionnelle*. Irem – Université Paris VII.

Rouche, N. (1995). *L'enseignement des mathématiques d'hier à demain*. CREM asbl.

Schneider, M. (1991). Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente. *Repères-Irem*, n° 5, p. 65-82.

Schneider-Gilot, M. (1988). *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives*. Thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve.

Pour joindre l'autrice

Emmanuelle Rouy
LADIMATH (FUNDP Namur) et Université de Liège
Adresse postale : Rue Nysten, 30 B-4000 Liège (Belgique)
Courriel : erouy@ulg.ac.be