L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Situations de formation et imparfaits espaces de travail géométrique des professeurs d'écoles

Alain Kuzniak, *IUFM Tours, France*
Jean-Claude Rauscher, *IUFM Alsace, France*

Résumé

Comment initier les futurs enseignants d'école et de collège aux enjeux de l'enseignement de la géométrie ? Cela ne peut se faire sans prendre en compte a priori la diversité de leurs approches dans ce domaine. Nous présentons ici un cadre théorique et un dispositif de formation qui permettent de repérer cette diversité et les enjeux de formation qui y sont liés. Les futurs enseignants se différencient par les paradigmes géométriques qu'ils ont en horizon et aussi par leurs modes de raisonnement. Les observations faites dans le cadre la formation d'enseignants pour les classes d'élèves en grande difficulté montrent également le risque d'une « adaptation » au public des élèves synonyme de renoncement aux enjeux des apprentissages en géométrie.

Introduction

De manière générale, nos recherches portent sur la formation des enseignants du premier et du second degré dans le domaine particulier de la géométrie.

Dans notre approche, la géométrie élémentaire peut s'envisager suivant trois paradigmes bien distincts dont les deux premiers (Géométrie I et II) jouent un rôle essentiel dans le contexte actuel de l'enseignement français mais aussi, comme nous avons pu le constater, dans de nombreux autres pays. Ces paradigmes sont globaux et consistants : chacun d'entre eux définit une forme élaborée de géométrie. Ils déterminent la nature des activités géométriques et structurent des espaces de travail différents.

En nous appuyant sur ces prémisses théoriques, nous avons mis en place un dispositif de formation qui se propose de sensibiliser les futurs enseignants à l'existence des paradigmes et à leur rôle dans certains malentendus didactiques dus en grande partie à une différence de posture et de rapport à la géométrie chez les enseignants et chez les élèves. Une hypothèse fondatrice de la recherche était que :

> *Élèves professeur(e)s, enseignant(e)s et élèves se situent implicitement fréquemment dans des paradigmes différents : cette différence de posture est source de malentendus didactiques*

Diverses études (Houdement-Kuzniak, 1999 ; Parzysz, 2001 ; Jore, 2002 ; Rauscher-Kuzniak, 2005) ont montré la fécondité de cette affirmation mais en la nuançant considérablement. En effet, les futurs enseignants ne constituent pas un ensemble homogène et la diversité de leurs espaces de travail géométriques personnels est très grande.

Nous repérerons cette diversité à partir de notre dispositif de formation et nous insisterons sur certains enjeux de la formation initiale des professeurs déterminés par cette diversité. Nous envisagerons aussi le cas de la formation des enseignants pour les classes d'élèves en grande difficulté

S.E.G.P.A (Section d'enseignement général et professionnel adapté), structure regroupant des élèves en difficulté scolaire, âgés de 12 à 16 ans à l'intérieur d'un collège.

Prémisses théoriques

Les recherches épistémologiques initiées par Bachelard ou Koyré, relayées en mathématiques par Lakatos, ont montré l'illusion d'une évolution scientifique paisible des concepts mathématiques. Un certain aboutissement de la logique conflictuelle de l'histoire des idées scientifiques culmine dans l'œuvre de Kuhn qui propose le passage d'un paradigme à l'autre par une révolution où le nouveau paradigme se substitue à l'ancien.

Nous avons envisagé l'étude de la géométrie à travers cette vision de l'évolution de la science basée sinon toujours sur des ruptures du moins sur des évolutions notables de point de vue. Pour parvenir à dégager des paradigmes géométriques qui, par-delà la perspective historique, rendaient compte des conceptions des pratiques géométriques, nous avons suivi l'idée de Gonseth de poser l'existence de la géométrie dans son articulation avec le problème de l'espace. Autour de trois modes de connaissances de l'espace (intuition, expérience, déduction), il est ainsi possible d'effectuer une synthèse qui réorganise la relation avec l'espace et donne naissance à trois paradigmes géométriques que nous avons désignés sous les termes de Géometrie I (ou Géométrie naturelle), Géométrie II (ou Géométrie naturelle axiomatique) et enfin Géométrie III (ou Géométrie axiomatique formelle).

Pour comprendre cette approche par les paradigmes, il est nécessaire de voir que ces géométries ne sont pas a priori hiérarchisées par leur nature mathématique, leur complexité psychologique ou leur rôle sociétal. Elles ont en fait des horizons de travail différents.

La Géométrie I regarde du côté de la technologie et du monde de la pratique. Elle apparaît en phase avec la conception des mathématiques outils pour agir sur le monde. Elle est censée permettre de résoudre un grand nombre de problèmes posés dans la vie quotidienne.

La Géométrie II insiste sur l'explication des actions effectuées et elle a pour horizon une modélisation qui s'articule avec une axiomatisation croissante destinée à fonder le mieux possible la théorie. L'insistance sur la cohérence de la base axiomatique débouche sur la Géométrie III qui privilégie les relations entre les objets théoriques introduits en Géométrie II. Son horizon s'intègre parfaitement dans le développement des mathématiques actuelles dont elle épouse les principes ce qui fait que certains auteurs la qualifient de mathématique oubliant ainsi que les autres géométries font aussi partie des mathématiques.

Il importe également de distinguer la géométrie des limbes du proto-géométrique qui englobe à la fois les pratiques spontanées autour de l'espace, étudiées par Piaget dans ce qu'il appelle justement « la géométrie spontanée ». Pour nous, la Géométrie supposera une distanciation théorique minimale par rapport à l'espace qu'elle étudie.

L'activité ou, plus exactement, le travail géométrique se développe au sein de ce que nous appelons un espace de travail géométrique, organisé par et pour le géomètre de façon à articuler, de façon idoine, les trois composantes suivantes :

– un ensemble d'objets, éventuellement matérialisés dans un espace réel et local ;
– un ensemble d'artefacts qui seront les outils et instruments mis au service du géomètre ;
– un référentiel théorique éventuellement organisé en un modèle théorique.

Les paradigmes géométriques que nous avons introduits servent de référence et d'horizon. Ils permettent d'interpréter les contenus des problèmes et de lancer l'activité géométrique.

La question de la formation des enseignants

Pour étudier la nature des paradigmes privilégiés par les étudiants dans leur approche de la géométrie et aussi mieux définir la réalité de leur espace de travail personnel, nous avons exploré différentes pistes. Nous ne retiendrons ici que celle qui s'appuie sur un dispositif de formation relativement complexe qui comporte deux phases bien distinctes (Kuzniak-Rauscher, 2003).

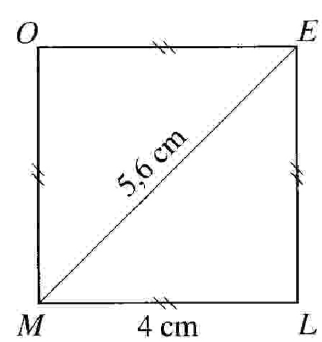
1. La première phase repose entièrement sur un questionnaire écrit et individuel dont certains éléments servent ensuite à la deuxième phase gérée plus collectivement. Ce questionnaire comprend notamment deux exercices de mathématiques de fin de Collège que les étudiants doivent résoudre et sur lesquels ils sont invités à exprimer « les incertitudes ou les difficultés qu'ils y ont rencontrées ».
2. La deuxième phase propose aux étudiants diverses activités et notamment un retour sur un des exercices recherchés pendant la phase 1 et qui s'intitule « Géométrie : Charlotte et Marie, qui a raison et pourquoi ? Les étudiants ne sont pas d'accord… ». Les étudiants doivent analyser et caractériser quatre réponses données à un exercice de la première phase. Ils doivent aussi expliquer de quelle réponse leur production initiale était la plus proche et pourquoi, avant de signaler s'ils modifieraient maintenant leur réponse et dans quel sens.

Les quatre productions ont été choisies pour refléter diverses approches que l'on peut rencontrer chez les étudiants.

L'exercice proposé « Charlotte et Marie »

Cet exercice[1] entre dans la catégorie des exercices de géométrie où se pose clairement la question de l'existence d'un espace de travail idoine pour résoudre le problème.

1° Pourquoi peut-on affirmer que le quadrilatère *OELM* est un losange ?
2° Marie soutient que *OELM* est un carré.
Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai.
Qui a raison ?



1 Hachette, *Cinq sur Cinq 4^e^,* 1998, page 164.

Le dessin proposé à l'étude ressemble à un carré mais son statut dans le problème n'est pas clair. Il possède certaines particularités d'un dessin coté : les côtés du quadrilatère sont codés et indiquent leur égalité, des mesures figurent sur le dessin. Mais quelle est l'origine de ces mesures ? S'agit-il de mesures effectuées sur une figure préexistante ou sont-elles, notamment pour la diagonale, le fruit d'un calcul. La longueur de la diagonale [ME] est donnée au dixième de cm près (5,6 cm), ce qui peut incliner à penser qu'il s'agit d'une mesure réelle. Mais, comme d'autre part le problème est issu d'un livre de fin de collège, on peut penser à une mesure théorique plus conforme au contrat didactique usuel dans ce type de classe.

Ainsi, le dessin est-il une donnée première, un objet réel, que le problème se propose d'étudier ou résulte-t-il d'une construction à partir d'un cahier des charges précisé dans un texte. Dans ce cas la réalisation pratique est-elle importante ou n'est-elle qu'un support pour aider le raisonnement ?

Le texte du problème doit normalement permettre de répondre à ces questions et déterminer le statut de l'objet figuré et ainsi orienter vers un paradigme géométrique précis soit celui de la Géométrie I soit celui de la Géométrie II. Mais l'énoncé ne donne aucune indication sur ce point car comme le signale un étudiant : il n'y a pas de textes pour l'énoncé, il n'y a qu'un dessin qui peut tromper. Seul semble acquis le fait que le quadrilatère soit un losange, savoir s'il s'agit d'un carré ou non est laissé à la charge de l'élève.

Finalement, est-ce Charlotte ou Marie qui a raison ? Une façon classique de traiter ce type d'exercice consiste à utiliser le théorème de Pythagore qui évite le recours à une mesure effective de l'angle. Mais là encore, resurgit l'ambiguïté sur le choix de l'espace de travail. Pour notre propos, nous introduirons deux formes du théorème de Pythagore, une forme abstraite classique portant sur des nombres réels et sur des égalités :

Si le triangle ABC est rectangle alors $AB^2+BC^2=AC^2$.

Et une forme concrète pratique qui utilise des nombres approchés et, de façon moins courante, des figures approchées :

Si le triangle ABC est « à peu près » rectangle alors $AB^2+BC^2 \approx AC^2$.

Si l'on utilise la forme abstraite du théorème de Pythagore, alors on peut raisonner comme le propose un étudiant et donner raison à Charlotte :

On sait que si OEM est rectangle en O alors on a $OE^2+OM^2=ME^2$.

On vérifie $4^2+4^2=5{,}6^2$ *et* $32 \neq 31{,}26$. *Donc OEM n'est pas un triangle rectangle.*

Si on utilise le théorème de Pythagore pratique dans un cadre mesuré alors on conclura que c'est Marie qui a raison.

En fait, il faudrait conclure qu'OELM est « presque » un carré mais comme on le sait, faute d'un langage adapté, il n'est pas possible aux élèves et aux étudiants de jouer sur ces différentes distinctions. Ils vont être de fait confrontés à un malentendu à la fois épistémologique et didactique sur lequel va s'appuyer notre séance de formation. En effet, ce problème très ambigu en situation ordinaire de classe devient très riche pour une situation de formation et permet de travailler sur le jeu entre la Géométrie I et la Géométrie II.

Une interprétation en terme d'espaces de travail géométrique personnels

Nous avons analysé les réponses de futurs professeurs d'école en repérant les paradigmes dominants. Cette étude était complétée par des analyses statistiques de type factoriel et implicatif (Kuzniak, 2005).

L'étude a montré que les étudiants ne se plaçaient pas tous dans le même paradigme géométrique et que soit la Géométrie I soit la Géométrie II servaient de référentiel théorique pour les espaces de travail mis en œuvre par les étudiants. Ces espaces de travail personnels diffèrent également par la maîtrise technique individuelle des propriétés et des raisonnements.

Un premier groupe d'étudiants semble se contenter de l'évidence perceptive et d'une constatation visuelle.

> *1°) Quatre côtés du quadrilatère sont parallèles entre eux et de la même longueur OE=ML et OM=EL. Selon la définition d'un losange, nous pouvons dire que les diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires entre elles.*
>
> *2°) Marie a raison ; OELM est aussi carré parce que ses côtés forment un angle droit.*

Cependant, une analyse plus fine montre une très grande hétérogénéité chez ceux qui formulent ce type de réponse. Les réponses données à la question que nous avions posée sur les difficultés rencontrées permettent de repérer des étudiants qui expriment leurs doutes de façon parfois particulièrement subtile comme ici :

> *Peut-on dire que les diagonales sont vraiment perpendiculaires ? Peut-on dire que le quadrilatère possède 4 angles droits ? En plaçant son équerre, oui. En calculant avec Pythagore, ce n'est pas exact, mais approximatif. $5{,}62 = 31{,}36 \neq 32$.*

La suite de notre processus où nous demandions aux étudiants s'ils modifieraient ou non leur réponse nous a montré qu'une formulation unique recouvrait en fait deux populations dont les horizons de travail étaient différents. Les premiers effectuent leur travail sur un objet réel particulier, les autres sont, en fait, dans le monde de la Géométrie II mais leur espace de travail apparaît imparfait soit à cause de l'oubli de certaines propriétés, soit à cause d'une compréhension superficielle des règles de cette géométrie.

Un second groupe d'étudiants donne une justification basée sur la mesure et l'utilisation des instruments de construction. Ils se placent dans le monde expérimental de la Géométrie I. Voici une réponse typique de cette entrée

> *1°) OELM est un losange car ses diagonales se coupent en leur milieu (mesure) en formant des angles droits* [avec l'équerre].

L'étudiant a construit la deuxième diagonale sur la figure.

> *2°) Marie a raison. C'est un carré, puisqu'en plus d'être un losange, OELM a ses angles droits* [équerre].

Généralement, ces étudiants concluent que Marie a raison. Mais, ce n'est pas toujours le cas ainsi un étudiant vérifie avec son compas que les sommets du quadrilatère ne sont pas cocycliques et il conclut qu'OELM n'est pas un carré.

Il nous faut maintenant considérer les étudiants qui utilisent le théorème de Pythagore « approché », en fait sa réciproque.

2°) Marie a raison car tous les côtés du quadrilatère ont la même longueur et il y a au moins un angle droit. On peut le vérifier par le théorème de Pythagore. $ML^2+LE^2=ME^2$

$4^2+4^2=16+16=32$

$ME=\sqrt{32} \approx 5{,}6$ *donc* $MLE=90°$

Dans ce cas, l'étudiant possède les connaissances théoriques nécessaires pour justifier sa réponse. Il applique le théorème de Pythagore pratique sous une forme que nous n'avons presque jamais rencontrée chez les élèves de Collège (dans une étude semblable) mais qui apparaît ainsi plusieurs années plus tard. Les propriétés sont utilisées comme des outils pour produire une nouvelle information sur les objets géométriques vus comme des objets réels.

Ces étudiants reconnaissent l'importance du dessin et de l'approximation des mesures. Le théorème de Pythagore pratique apparaît comme un outil de Géométrie I. La question est de savoir si les étudiants peuvent jouer sur les différences entre la Géométrie I et la Géométrie II ou si leur horizon reste uniquement technologique.

Enfin existe un groupe très homogène et très stable, il s'agit des étudiants qui travaillent dans un espace de travail dont le référentiel théorique est celui de la Géométrie II et qui maîtrisent suffisamment, au moins dans l'exercice en question, ce référentiel et ses règles de fonctionnement. Ils appliquent la forme classique du théorème de Pythagore à l'intérieur du monde des figures abstraites sans considération sur l'apparence réelle de l'objet. Seules comptent les informations données par l'énoncé et les différents codages. Des propriétés minimales et suffisantes servent à prouver que le quadrilatère est un losange et que ce n'est pas un carré. Lorsque le dessin est évoqué, c'est surtout son aspect trompeur qui est souligné comme le veut l'usage didactique français à partir des classes de collège, moment où la Géométrie II se met en place.

Un regard sur les difficultés de raisonnement

À côté du paradigme privilégié, les difficultés de raisonnement des étudiants vont être essentielles dans le déroulement de la situation de formation. Nous avons évalué ces difficultés en regardant la structure des preuves proposées grâce à des niveaux d'argumentation inspirés par les niveaux de Van Hiele.

Nous plaçons dans le niveau 1, les productions qui énumèrent une liste non minimale de propriétés de quadrilatère pour justifier des affirmations. Dans le niveau 2, nous plaçons des productions qui évoquent une relation correcte d'inclusion entre les carrés et les losanges et dans le niveau 3, celles qui utilisent une information minimale suffisante pour soutenir l'argumentation.

Il y a bien sûr chez les professeurs d'écoles, des étudiants qui ont des connaissances solides sur les propriétés des figures et qui utilisent un niveau 3 de raisonnement mais nombreux sont ceux qui accumulent les propriétés et ne semblent pas avoir gardé un souvenir précis des propriétés géométriques. Voici un premier exemple :

1°) Le quadrilatère OELM est un losange. Celui-ci répond aux caractéristiques d'une telle figure : les 4 côtés sont égaux ; les diagonales se coupent en leur milieu et forment un angle droit.

2°) Les deux filles ont raison, OELM est un carré car il a 4 côtés égaux et 4 angles droits. Il est aussi un losange, même si cette figure qu'est le losange ne se construit pas forcément avec des angles droits.

Cet étudiant justifie sa première réponse en énumérant une liste de propriétés du losange (niveau 1). Les propriétés employées sont partiellement justifiées par des indications visuelles ou instrumentées. Cet étudiant considère la figure dans sa réalité matérielle et son approche du problème se situe dans la Géométrie I.

La réponse à la deuxième question « les deux filles ont raison » est assez fréquente. Sa justification montre que la déclaration « Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai » est à tort interprétée comme « Charlotte affirme que c'est un losange » occultant l'affirmation « ce n'est pas un carré ». L'étudiant se concentre sur la question de la relation entre des carrés et les losanges. C'est une question classique, qui n'est pas demandée ici, et à laquelle il sait répondre.

Enfin, voici une autre réponse assez caractéristique en formation des enseignants :

1°) Les 4 côtés du quadrilatère sont parallèles entre eux et de même longueur OE=ML et OM=EL.

Définition même du losange, de ce fait on peut dire que les diagonales ont même milieu et sont perpendiculaires entre elles.

2°) Marie a raison, OELM est aussi un carré car les côtés sont tous de même longueur : OE=ML=EL=OM=4 cm.

Rappelons que le carré est aussi un losange mais qui a comme particularité d'avoir tous ses côtés de même longueur (donc forment des angles droits) et d'avoir ses diagonales de même longueur.

La syntaxe employée pourrait laisser penser au niveau 3 : certaines implications sont correctes. De plus, l'étudiant tient une sorte de meta-discours typique d'un enseignant. Mais le corps des connaissances n'est pas très fiable. Ainsi est utilisé « le théorème élève » : n'importe quel quadrilatère ayant quatre côtés égaux est un carré. Des indices visuels sont employés pour soutenir le raisonnement.

Le cas particulier de la formation des enseignants de SEGPA

Les étudiants que nous avons évoqués jusqu'à présent se destinaient à l'enseignement primaire ou secondaire général. Mais nous avons aussi considéré le cas particulier des stagiaires se préparant à l'enseignement pour des élèves en grandes difficultés au collège (section SEGPA). Issus de la formation initiale pour professeurs d'école, ces enseignants bénéficient d'une année de formation pour certifier leur spécialisation. Ils ont souvent déjà eu l'occasion d'enseigner dans ces sections spécialisées. Les sections SEGPA ont comme référence, le programme standard du collège et elles ont la mission de ramener si possible les élèves vers cet horizon. En particulier en géométrie, l'initiation à la Géométrie II devrait être présente dans les préoccupations des professeurs en formation. La passation du test « Charlotte et Marie » est alors intéressante pour connaître a priori l'horizon de travail de ces enseignants ?

Les productions recueillies indiquent une prédominance importante de la Géométrie I. En voici un exemple représentatif :

1°) - 4 côtés égaux ;

- les diagonales se coupent à angle droit et en leur milieu.

2°) - C'est un losange dont les côtés sont égaux et parallèles deux à deux donc un carré ;

- les diagonales se coupent à angle droit et en leur milieu.

Rares sont les références faites à d'autres approches mais elles existent néanmoins :

C'est Charlotte qui a raison. En vérifiant par le calcul, on constate que la réciproque de Pythagore n'est pas vraie.

Cette impression se confirme quand on demande aux stagiaires de se situer par rapport aux différents points de vue, le rabattement sur un horizon de Géométrie I se renforce. À la question « Et si c'était à refaire, de quelle production votre réponse se rapprocherait-elle et pourquoi ? », les réponses préférant une démarche visuelle ou instrumentée sont très majoritaires :

Je me rapprocherai d'une démarche qui s'appuie sur des bases précises et concises, l'objet d'étude est observable et observé [une figure géométrique].

En voici une version plus élaborée qui témoigne d'un choix assumé :

Je resterai sur un domaine approximatif avec surtout en SEGPA, basée sur la mesure et l'utilisation des outils [plutôt que les calculs].

La perspective de l'accompagnement vers une Géométrie II n'est pas évoquée. Au-delà des connaissances variables d'un stagiaire à l'autre on peut aussi sans doute noter que la détermination de l'horizon de travail pour ces professeurs en exercice est fortement influencée par la représentation des élèves auxquels ils s'adressent.

Quelques conséquences sur la formation

L'idée initiale de la situation était de sensibiliser les étudiants aux deux grands types de paradigmes géométriques qui sont employés dans l'enseignement et ceci de façon à les préparer à la mise en place d'un jeu entre ces paradigmes et à la négociation du passage d'une géométrie à l'autre. Cette intention a été parfaitement perçue en formation des enseignants de Collège qui sont des spécialistes des mathématiques et qui spontanément se situent en Géométrie II. Ce type de situation les a aidés à comprendre les difficultés des élèves qui sont encore pleinement dans le paradigme de la Géométrie I. De même, nous pouvons dire que les futurs professeurs d'écoles dont l'Espace de travail géométrique avait pour référence initiale la Géométrie II, sont entrés dans la problématique que nous souhaitions.

Bien évidemment, ce n'est pas le cas pour tous ceux qui semblaient avoir oublié toute idée d'une géométrie plus abstraite ou étaient totalement englués dans leurs difficultés de raisonnement. Nous retrouvons ici la remarque déjà faite dans nos travaux anciens sur la dénaturation simplificatrice (voir Kuzniak, 2003) repérée à la suite des situations d'homologie chez les étudiants les plus en difficulté en mathématiques : la notion mathématique est souvent dénaturée pour être enseignée à un niveau mathématique où le professeur est à l'aise.

Cette idée se renforce chez les professeurs pour les élèves en difficulté qui pensent ainsi s'adapter au niveau de leurs élèves.

Références

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An educational Approach*. Kluwer.

Gonseth, F. (1945-1954). *La géométrie et le problème de l'espace*. Éditions du Griffon Lausanne

Houdement, C. et Kuzniak, A. (1999). Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 40/3. 283-312 Kluwer.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2002). *Pretty (good) didactical provocation as a tool for teachers' training in geometry*. Proceedings of CERME 2. 292-304. Prague : Charles University.

Jore, F. (2003). *Les Pe1 et la médiatrice : étude de cas in Actes du XXIX^e^ colloque COPIRELEM*, La Roche sur Yon IREM des Pays de la Loire, p. 59-72.

Kuzniak, A. (2003). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Irem Paris VII.

Kuzniak, A. (2005). *Espace de travail géométrique personnel : une étude didactique et statistique.* Colloque ASI Palerme.

Kuzniak, A. et Rauscher, J.C., (2003). *Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école, in Actes du XXIX^e^ colloque COPIRELEM*, La Roche sur Yon IREM des Pays de la Loire, p. 271-290.

Parzysz (2001). Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *In Concertum Tome 2* p. 107-126 Arpeme ISBN 2-9515107-1-3.

Rauscher (1993). *L'hétérogénité des professeurs face à des élèves hétérogènes : le cas de l'enseignement de la géométrie en début de collège* (Thèse, IREM de Strasbourg).

Kuzniak, A., Rauscher, J.C., *On Geometrical Thinking of Pre-Service School Teachers* Cerme IV Sant Feliu de Guíxols http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/7/kuzrau.pdf

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight. A theory of Mathematics Education*. Academic Presss Orlando.

Pour joindre les auteurs

Alain Kuzniak
Equipe Didirem et IUFM Tours
Adresse postale : 45 avenue d'Italie 75013, Paris, France
Courriel : _kuzniak@tele2.fr

Jean-Claude Rauscher
LISEC et IUFM Alsace
Adresse postale : 141 avenue de Colmar 67000, Strasbourg, France
Courriel : Jc.Rauscher@wanadoo.fr