

LA NOTION DE CONCEPTION SOUS L'ANGLE DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET DE LA PSYCHOLOGIE DU DÉVELOPPEMENT. UN EXEMPLE SUR LE CONCEPT DE FRACTION

| LEMRICH* CHLOÉ, GARDES** MARIE-LINE ET SANDER*** EMMANUEL

Résumé | Le modèle de conception est utilisé, en didactique des mathématiques et en psychologie du développement, dans le but de comprendre et prédire les comportements des individus dans des situations d'apprentissage. Ces deux approches présentent aussi des différences, telles que la prise en compte de la nature intuitive de certaines connaissances ou de la complexité d'une situation d'enseignement-apprentissage. Dans le cadre d'une étude portant sur les conceptions sur les fractions, nous explorons la complémentarité des approches et l'apport de regards croisés pour enrichir les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Mots-clés : modèle de conception, complémentarité des approches, didactique, sciences cognitives, fraction

Abstract | The conception model is used in both mathematics education and developmental psychology to understand and predict individuals' behaviors in learning situations. These two approaches also show differences, such as the consideration of the intuitive nature of certain knowledge and the complexity of a teaching-learning situation. As part of a study on conceptions of fractions, we explore the complementarity of these approaches and the added value of cross-perspectives to enrich research on mathematics teaching and learning

Keywords: Conception, complementary approaches, didactic, cognitive sciences, fraction

I. INTRODUCTION

Notre réflexion sur la notion de conception sous l'angle de la didactique des mathématiques et de la psychologie du développement a émergé d'une recherche que nous menons sur l'enseignement et l'apprentissage des fractions. Dans ces deux domaines de recherche, et depuis plusieurs années, de nombreuses études se sont intéressées aux difficultés d'apprentissage des élèves sur les fractions (e.g. Lortie-Forgues et al., 2015). Différents facteurs explicatifs de ces difficultés ont été relevés, notamment les ruptures entre les propriétés des nombres entiers et celles des nombres rationnels (appelé biais du nombre entier par Ni et Zhou, 2005), la multiplicité des registres de représentation d'un nombre rationnel (Marmur et al., 2020) et les sens variés que peuvent prendre les fractions dans diverses situations, comme des situations de partage, de mesurage ou d'agrandissement-réduction (Behr et al., 1983 ; Brousseau, 1989). Plusieurs auteurs révèlent par exemple que l'adoption du seul sens « partie d'un tout » constitue un obstacle à la compréhension du concept de fraction, d'une part en empêchant la compréhension d'une fraction en tant que nombre (elle est davantage vue comme deux entiers séparés par une barre, c'est-à-dire une structure bi-partite) et d'autre part, en limitant le répertoire de procédures disponibles pour résoudre des problèmes (Adjage et Pluvinage, 2000).

D'un point de vue didactique, cet obstacle est lié à l'enseignement. Charalambous et Pitta-Pantazi (2007) montrent par exemple la prégnance des fractions comme partie d'un tout dans les manuels

* Haute Ecole pédagogique du canton de Vaud et Université de Genève – Suisse – chloe.lemrich@hepl.ch

** Haute Ecole pédagogique du canton de Vaud – Suisse – marie-line.gardes@hepl.ch

*** Université de Genève – Suisse – emmanuel.sander@unige.ch

scolaires à Chypre. Ces constats ont mené les chercheur·es en didactique à élaborer et analyser l'effet de séquences d'enseignement introduisant les fractions dans des situations de mesurage. Cette approche permet de travailler directement les fractions supérieures à 1 et de faciliter la transition vers le statut de nombre, notamment par l'utilisation de la droite graduée (Anselmo et Zucchetta, 2018).

D'un point de vue développemental, le sens de la fraction comme partie d'un tout est considéré comme un obstacle de nature cognitive. La notion de fraction se construirait en premier lieu par analogie avec des connaissances familières, issues des expériences de la vie quotidienne (comme le partage équitable d'un gâteau entre plusieurs personnes). Ces connaissances permettent de donner du sens au concept de fraction, mais avec un domaine de validité restreint dans la mesure où certaines situations sont difficiles, voire impossibles à appréhender avec une telle conception. Selon plusieurs auteurs (Fischbein, 1989 ; Gvozdic et al., 2022), ces connaissances, qualifiées d'intuitives, sont particulièrement résistantes à de nouveaux apprentissages.

Ces deux approches, l'une mettant l'emphasis sur les situations d'enseignement et l'autre sur les processus cognitifs en jeu, nous ont semblé intéressantes à croiser du fait de leur complémentarité. En effet, étant donné que le sens d'une fraction comme partie d'un tout est observé dans de nombreux pays, avec des contextes d'enseignement différents, elle pourrait être une connaissance de nature intuitive, que les élèves sont prédisposés à adopter et qui est renforcée ensuite par l'enseignement des fractions à l'école. Nous avons donc cherché à mieux comprendre le rôle du sens « partie d'un tout » dans le processus de conceptualisation des fractions. Pour cela, le modèle de conception nous est apparu pertinent, car il est mobilisé tant en didactique des mathématiques qu'en psychologie du développement, pour décrire les connaissances d'un individu.

L'objectif de ce texte est de mettre en évidence comment nous avons utilisé ce modèle de conception en croisant nos regards cognitifs et didactiques et l'apport que cela a eu dans notre étude sur le rôle du sens « partie d'un tout » dans le processus de conceptualisation des fractions. Dans une première partie, nous mettons en évidence des points de convergence et des différences dans l'utilisation du modèle de conception dans les recherches en didactique des mathématiques et en sciences cognitives. Dans une seconde partie, nous détaillons le croisement des regards dans notre étude sur les fractions.

II. LE MODÈLE DE CONCEPTION

1. *En didactique des mathématiques*

En didactique des mathématiques, la notion de conception a émergé à partir de travaux empiriques qui ont mis en évidence la stabilité de certaines erreurs d'élèves. La récurrence de ces erreurs a conduit les chercheur·es à mettre en cause leur caractère fortuit. Ils ont cherché à construire des modèles explicatifs, désignés par le terme de conception. Comme le mentionne Artigue (1989), la notion de conception a été utilisée de nombreuses années sans définition formelle. La première définition semble être celle donnée par Duroux (1983, p. 54) :

Dans le déroulement du processus d'acquisition, pour diverses causes [...], certaines de ces situations sont privilégiées au détriment d'autres, ce qui provoque l'apparition de connaissances locales, opérantes sur des sous-clans du champ conceptuel, et pour certaines valeurs des variables des situations concernées, c'est ce savoir local que nous appelons conception.

Dans la théorie des situations (Brousseau, 1989), le modèle de conception permet de caractériser l'état des connaissances des élèves en situation d'enseignement-apprentissage.

« Une conception permet de traiter (reconnaître et résoudre) une sous-classe de situations considérées comme comparables (identifiées) à l'aide des mêmes schèmes, des mêmes termes et avec des procédures voisines, justifiées par des “raisonnements semblables” ou traitées à l'aide de propriétés et de reconnaissances logiquement et fortement liées ». (Brousseau, 1987, p. 7)

Ainsi, le modèle de conception permet de traiter de la même façon l'ensemble des productions des élèves, qu'elles soient correctes ou non, en considérant qu'elles sont la manifestation de la construction d'une connaissance (Soury-Lavergne et al., 2020). Différentes recherches (pour une synthèse, voir Artigue, 1989) ont mis en évidence qu'un individu peut utiliser différentes conceptions de manière indépendante, sans tenir compte de leurs relations, ou au contraire, les lier pour former une conception plus générale, et ce de manière correcte ou incorrecte.

Dans la théorie des champs conceptuels, Vergnaud (1990) définit le concept à l'aide d'un triplet (S, I, J), qui regroupe l'ensemble des situations S qui donnent du sens au concept, l'ensemble des invariants opératoires I associés à ce concept et l'ensemble des signifiants J permettant de représenter le concept, ses propriétés et les situations qu'il permet d'appréhender. Pour lui, une conception est l'analogie du concept, défini à l'aide de ce même triplet, mais cette fois du côté de l'individu (Artigue, 1989). Parmi les invariants opératoires, Vergnaud (1990) identifie les théorèmes-en-acte. Un théorème-en-acte conduit, dans une situation donnée, à une règle d'action valide. Il n'engage pas forcément le concept mathématique considéré dans cette situation et son utilisation dans d'autres situations, en dehors de son domaine de validité, peut mener à des règles d'actions erronées.

D'un point de vue méthodologique, il s'agit, pour les chercheur·es, d'identifier une ou plusieurs conceptions relatives à un concept scientifique donné, à une population d'individus, à un type de problèmes donné. Pour cela, une double analyse est menée, d'une part une analyse épistémologique du concept (au sens de Artigue, 1989), et d'autre part, une étude des connaissances des individus sur le concept, à partir de données expérimentales obtenues en situation (par exemple les stratégies de résolution, les représentations utilisées, etc.). La validation d'une conception en tant que modèle didactique se fait alors par sa confrontation avec les faits observés et par l'étude de sa cohérence avec les théories dans lesquelles elle est développée.

En synthèse, en didactique des mathématiques, une conception est « un objet local, étroitement associé au savoir en jeu et aux différents problèmes dans la résolution desquels il intervient » (Artigue, 1989). Le modèle de conception est utilisé pour élaborer des situations didactiques et analyser le comportement de l'élève dans une situation d'enseignement-apprentissage.

2. *En psychologie des apprentissages*

En psychologie des apprentissages, la notion de conception s'est développée au sein de travaux portant sur la construction des concepts chez un individu. Fischbein (1989) l'a tout d'abord expliqué en termes de modèle tacite pour ensuite mentionner une dimension intuitive. Lakoff et Núñez (2000) les assimilent à des métaphores conceptuelles. Ces travaux évoquent un mécanisme par lequel tout concept mathématique, étant intrinsèquement abstrait, est saisi en se fondant sur des expériences concrètes, de manière non consciente.

Dans la théorie de Fischbein (1989), les modèles tacites font référence aux représentations mentales qui se forment chez les apprenant·es dès le début du processus d'apprentissage des mathématiques. Ces représentations influencent de manière implicite les interprétations et les choix de résolution des problèmes mathématiques. L'individu n'est souvent pas conscient de l'influence de ces modèles sur ses stratégies. Selon Lakoff et Núñez (2000), les métaphores conceptuelles font référence aux processus cognitifs qui permettent de comprendre des notions abstraites, souvent complexes et

difficiles à appréhender directement, en les interprétant dans les termes de concepts préexistants et plus concrets : par exemple « soustraire » est pensé comme « enlever ». Ces métaphores s'ancrent dans des expériences concrètes préalables et ne dépendent pas nécessairement de l'instruction scolaire. Ainsi, dans ce processus, un domaine cible est perçu à travers le prisme d'un domaine source, en utilisant des concepts plus concrets (Lakoff et Núñez, 2000). Ces métaphores conceptuelles permettraient alors aux individus de conceptualiser des notions abstraites en s'appuyant sur des expériences concrètes, en élaborant des idées et des modes de raisonnement déjà éprouvés dans d'autres contextes ; elles peuvent également introduire de nouveaux éléments dans le domaine cible.

Selon Fischbein et ses collègues (1985), les modèles liés aux opérations arithmétiques sont des modèles tacites, intuitifs et comportementaux. Ils montrent que de nombreux élèves rencontrent des difficultés lorsqu'ils abordent les concepts arithmétiques et leur mise en œuvre. Ces difficultés peuvent s'expliquer par le conflit entre les connaissances liées aux procédures algorithmiques enseignées et les modèles tacites, primitifs et non contrôlés, qui s'y rapportent (Fischbein et al., 1985). Ces connaissances intuitives sont acceptées directement comme évidentes, peuvent être valables mais parfois mènent à des raisonnements erronés.

D'un point de vue méthodologique, l'identification des conceptions intuitives s'effectue par le recueil de données expérimentales, via un questionnaire. Deux types de questions peuvent être posées : inventer un problème pour identifier la conception mobilisée en premier lieu et résoudre des problèmes où la conception supposée intuitive est, soit facilitante (car dans son domaine de validité), soit limitante (car en dehors du domaine de validité). Par exemple, Tirosh et Graeber (1991 ; voir aussi Gvozdic, Naud et Sander, 2022 pour des résultats convergents auprès d'autres populations adultes) ont demandé à des enseignants en formation d'inventer des problèmes de division. Dans les productions, les problèmes de type *partition* sont privilégiés, ce qui suggère que la partition est une conception intuitive de la division, contrairement à la quotition. De plus, de meilleurs résultats sont obtenus lorsque les problèmes à résoudre sont des problèmes de partition, en accord avec leur conception intuitive.

En synthèse, en psychologie des apprentissages, les conceptions intuitives font référence à des structures profondes de la pensée, elles ne sont pas toujours explicites, mais façonnent la compréhension, ce qui les rend résistantes à l'enseignement.

3. *Convergences et différences*

En didactique des mathématiques, comme en psychologie des apprentissages, le modèle de conception a émergé au sein d'études cherchant à comprendre et prédire les comportements des individus dans des situations d'apprentissage. Il relève d'une théorie relativement partagée de l'apprentissage, comme un processus dynamique où l'apprenant est acteur et où les connaissances se construisent par interaction du sujet avec un milieu. La conception est alors vue comme une connaissance de l'individu qui se manifeste dans la résolution de tâches mathématiques. Elle a un domaine de validité restreint et est résistante aux apprentissages. La confrontation avec les limites d'une conception, lors de la résolution de problèmes participe au processus de conceptualisation en fournissant des contextes propices à l'évolution des conceptions des élèves. Il s'agit donc d'identifier et élaborer des situations d'apprentissage qui permettent une telle évolution.

Face à ces points de convergence sur la notion de conception, il existe également plusieurs différences. La première est la nature des situations d'apprentissage étudiées. En didactique des mathématiques, les situations sont des situations d'enseignement-apprentissage : c'est le système élève – enseignant – savoir qui est étudié. Dans une situation didactique, l'élève est ainsi amené à interagir avec un milieu constitué de l'ensemble des objets (physiques, culturels, sociaux, humains). Dans la

plupart des études en psychologie des apprentissages, les situations d'apprentissage étudiées ne sont pas des situations d'enseignement. Le milieu étudié est donc de nature différente. Le plus souvent, il ne comporte, par exemple, pas les interactions entre les élèves et l'enseignant·e, entre les élèves entre eux, ou les interactions sociales qui se passent au sein d'une classe.

La seconde différence est le caractère local versus global d'une conception. En didactique des mathématiques, la conception est une connaissance locale, liée aux situations et au savoir en jeu. En psychologie des apprentissages, la conception est davantage un objet global, liée au sujet et qui permet de modéliser des processus mentaux stables et transversaux, c'est-à-dire mobilisés dans différentes situations d'apprentissage, tels que les processus d'analogie, qui ne sont pas propre à un domaine de savoir mais peuvent s'y appliquer (Hofstadter et Sander, 2013).

La troisième différence est l'origine des conceptions et de leur résistance aux apprentissages. En didactique des mathématiques, la conception est liée au savoir en jeu et aux situations, et la résistance provient d'obstacles de nature épistémologique ou didactique. En psychologie, la conception est liée aux processus cognitifs du sujet, et la résistance provient des caractéristiques du comportement mental humain qui sont précoces, irrépressibles et fondamentales.

La quatrième différence est de nature méthodologique. Si les méthodes en didactique des mathématiques et en psychologie s'appuient sur des données empiriques, elles ne le font pas de la même manière. En effet, en didactique des mathématiques, les conceptions sont inférées de l'analyse mathématique et épistémologique du savoir en jeu puis identifiées, dans les comportements des élèves, par confrontation entre les données expérimentales et le modèle conçu a priori. En psychologie, les conceptions sont davantage supposées à partir de modèles théoriques de la cognition humaine non spécifiques au domaine de savoir concerné puis inférées de l'observation directe de comportements d'élèves dans des situations de résolution de tâches mathématiques.

Les points de convergence et les différences nous amènent à identifier deux intérêts principaux afin de croiser les regards cognitifs et didactiques. Le premier est la possibilité de mieux prendre en compte les dimensions cognitives et didactiques et leur dialectique (par exemple local-global, contextuel-stable) dans l'étude du processus de conceptualisation. Le point de vue cognitif conduit à relativiser le poids de l'enseignement et le point de vue didactique permet de ne pas le mettre de côté, en s'intéressant au système élève-enseignant-savoir. Le second est de croiser les méthodes et de proposer des outils complémentaires pour identifier et caractériser les conceptions des élèves sur un savoir donné et étudier leur rôle dans le processus de conceptualisation, en situation d'enseignement-apprentissage. Dans la partie suivante, nous montrons l'apport du croisement de ces deux regards dans le cas particulier d'une étude portant sur les conceptions des fractions.

III. CROISEMENT DES REGARDS DANS UNE ÉTUDE DES CONCEPTIONS DES FRACTIONS

À notre connaissance, aucune étude ne s'est spécifiquement intéressée à identifier le caractère intuitif d'une conception sur les fractions parmi les différents sens identifiés, ni à étudier l'évolution des conceptions au cours de l'enseignement et à son issue. Dans cette étude, nous avons cherché à identifier l'existence d'une conception intuitive des fractions et à la caractériser. L'hypothèse que nous cherchons à vérifier est que le sens « partie d'un tout » est une conception intuitive, renforcée par l'enseignement. Pour cela, nous avons croisé les méthodes utilisées en didactique des mathématiques et en psychologie : nous avons mené une analyse mathématique et épistémologique du concept de fraction, en le modélisant sous la forme du triplet de Vergnaud (1990), afin de caractériser les conceptions, et ensuite, nous avons recueilli des données expérimentales, pour identifier la conception

dominante (identifiée a priori comme partie d'un tout) ainsi que le caractère intuitif de cette conception.

1. Description du concept de fraction

Pour décrire ce concept, nous avons utilisé la modélisation de Vergnaud (1990), sous la forme du triplet (Situations, Invariants opératoires et Registres de représentation). L'ensemble des situations qui donnent du sens au concept de fraction sont les suivantes : des situations de mesurage, de partage (d'une ou plusieurs quantités), de proportion, de ratio, d'agrandissement-réduction ou de proportionnalité. L'ensemble des invariants opératoires associés au concept de fractions sont des définitions, propriétés, règles de comparaison, de calcul sur les fractions. Nous détaillons ci-dessous quelques invariants opératoires que nous avons identifiés, en étudiant les fractions selon leurs différents sens (Behr et al., 1983 ; Charalambous et Pitta-Pantazi, 2007 ; Kieren, 1980) : partage en parts égales, a/b représente a parts d'un tout découpé en b parts égales (sens partie d'un tout) ; définition de $1/b$ comme la part qui reportée b fois donne l'unité de référence ou comme le nombre qui, multiplié par b donne 1 (sens mesure) ; a/b représente le rapport entre deux quantités, propriété des rapports égaux $a/b = ka/kb$ (sens rapport) ; a/b est un coefficient multiplicatif, notion de fonction (sens opérateur) ; a/b est le nombre qui multiplié par b donne a , a/b est le quotient de a par b (sens quotient). L'ensemble des registres de représentations utilisés pour représenter un concept permet d'appréhender ses propriétés et les situations qui sont liées. Pour les fractions, il existe différents registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993) : le registre symbolique comprend l'ensemble des représentations réalisées à l'aide de signes mathématiques et d'écritures chiffrées ; le registre verbal comprend l'ensemble des représentations décrites à l'aide de mots ; le registre iconique comprend les représentations reposant sur des dessins ou des représentations iconiques comme une surface circulaire ou rectangulaire ; le registre de la droite graduée se trouve à la frontière entre le registre visuel, car il s'appuie sur « un dessin » d'une droite graduée, et le registre symbolique avec des nombres, (en écriture chiffrée,) pour indiquer les graduations.

2. Présentation des deux questionnaires pour recueillir les conceptions des élèves sur les fractions

Nous avons créé deux questionnaires, d'une part pour identifier et caractériser les conceptions mobilisées sur les fractions, et d'autre part, pour identifier le caractère intuitif de la conception partie d'un tout d'une fraction. Nous avons proposé ces questionnaires à des enseignants en formation (noté dorénavant adultes), à des élèves de grade 4 (6H en Suisse) n'ayant pas reçu d'enseignement sur les fractions et à des élèves de grade 6 (8H en Suisse) ayant reçu deux années d'enseignement sur les fractions. En questionnant des adultes et des élèves, nous souhaitons étudier l'évolution des conceptions, en lien avec l'enseignement reçu.

Le premier questionnaire est composé de huit questions ouvertes (voir Tableau 1 en annexe). Son objectif est d'identifier, dans un contexte ouvert, les connaissances mobilisées par les élèves. Des questions utilisées pour identifier une conception intuitive ont été proposées, à savoir « pour vous, qu'est-ce qu'une fraction ? » et « inventer un problème dont le résultat est $3/8$ ». Ainsi, si la conception partie d'un tout est intuitive alors les réponses à la première question devraient mobiliser des invariants opératoires tels que le partage en parts égales où a/b représente a parts d'un tout découpé en b parts égales et évoquer une situation de partage d'une quantité pour la seconde question, par exemple j'ai un gâteau coupé en 8 parts égales, 5 ont été mangées, quelle fraction du gâteau reste-t-il ?

Le second questionnaire est composé de six problèmes (voir Tableau 2 en annexe) que nous les avons choisis, en référence aux travaux de Charalambous et Pitta-Pantazi (2007), en raison de la

mobilisation d'un sens différent des fractions selon l'énoncé : problème de partage d'une quantité – sens partie d'un tout ; problème de mesure – sens mesure ; problème de réduction – sens opérateur ; problèmes de partage de plusieurs quantités – sens quotient et problème de ratio – sens ratio. Pour chaque problème, plusieurs méthodes de résolution sont possibles. Nous les avons identifiées dans une analyse a priori et catégorisées à l'aide des invariants opératoires. Si la conception partie d'un tout est intuitive alors elle devrait être majoritairement utilisée lors des résolutions de problèmes, être facilitante pour les problèmes dans son domaine de validité (partage d'une quantité, mesure, réduction) et limitante pour les problèmes qui sont en dehors ou à la limite de son domaine de validité (partage de plusieurs quantités, ratio).

IV. RÉSULTATS

Nous présentons ici nos résultats préliminaires, qui résultent d'une analyse globale des réponses des adultes aux questionnaires. Les analyses des réponses des élèves et des analyses qualitatives et quantitatives plus fines, portant sur chaque participant·e, sont en cours et seront présentées lors du colloque.

Pour le premier questionnaire, nous avons analysé les réponses aux questions 1 et 4/5 (voir Tableau 1) en termes d'invariants opératoires. Lorsqu'il s'agit de définir ce qu'est une fraction (question 1), la majorité des adultes ont recours à des invariants opératoires qui relèvent de la fraction quotient. Leur définition est proche de la définition mathématique d'un nombre rationnel et mobilise des connaissances issues de l'école secondaire. En revanche, lorsqu'il s'agit de créer un problème avec une fraction (questions 4 et 5), les participants ont tendance à mobiliser des invariants opératoires relevant de partie d'un tout, dans un contexte de partage, où un tout (un objet ou un ensemble d'objets) doit être partagé en un nombre de parties ou de sous-ensembles identiques.

Tableau 1 – Pourcentage des adultes qui mentionnent ces interprétations au moins une fois dans leur réponse

Nature des invariants opératoires	Partie d'un tout	Mesure	Opérateur	Quotient	Rapport	Notation formelle	Non interprétable
Question 1	36 %	0 %	2 %	57 %	11 %	2 %	7 %
Question 4/5	49 %	1 %	2 %	11 %	4 %	16 %	16 %

L'identification des représentations mobilisées révèle que les représentations symboliques et iconiques sont largement les plus présentes dans les réponses des adultes (voir Tableau 2). Ces deux registres semblent coexister, l'un provenant de l'apprentissage scolaire (représentation symbolique utilisant des signes mathématiques) et l'autre provenant de connaissances familières (représentation iconique). Parmi les représentations iconiques mobilisées, beaucoup évoquent une surface circulaire. Ce type de représentation a un domaine de validité restreint lorsqu'il s'agit de sortir de la conception partie d'un tout et de représenter, par exemple, 4/3.

Tableau 2 – Pourcentage des adultes qui mobilisent au moins une fois ces registres de représentation

Représentations symboliques	Représentations langagières	Représentations iconiques	Représentations liées à l'axe gradué	Non pertinent
89 %	9 %	54 %	3 %	11 %

Pour le second questionnaire, nous avons vérifié, pour chaque participant·e et chaque type de problème, si les réponses aux problèmes étaient mathématiquement correctes (voir Tableau 3). Nous

constatons que les problèmes les moins bien réussis sont ceux de ratio et de partage de plusieurs quantités et les problèmes les mieux réussis sont ceux de partage d'une quantité, de mesurage et de réduction.

Tableau 3 – Pourcentage de réponse correcte par type de problème et groupe de participant·es

Types de problème	Partage d'une quantité	Mesurage	Réduction	Partage de plusieurs quantités (1)	Partage de plusieurs quantités (2)	Ratio
Adultes (206)	91 %	95 %	92 %	75 %	73 %	71 %

Ensuite, pour chaque réponse correcte, nous avons analysé les stratégies de résolution utilisées par les participant·es en termes d'invariants opératoires pour identifier le sens de la fraction mobilisée (voir Tableau 4). Pour l'ensemble des problèmes (hormis le problème de réduction), les adultes ont davantage utilisé une procédure mobilisant des invariants opératoires liés au sens de la fraction invoquée dans le problème (cases grisées dans le tableau 4). Toutefois, pour chaque problème, une partie des adultes mobilise aussi une stratégie de résolution mobilisant la fraction comme partie d'un tout (première colonne du tableau 4).

Tableau 4 – Proportion des stratégies de réponse mobilisée, pour chaque type de problème pour chaque groupe de participant·es, parmi leurs réponses correctes (en gras les adultes)

	Nature des invariants opératoires mobilisés					autres
	partie d'un tout	mesure	opérateur	quotient	rapport	
Partage d'une quantité	73 %	18 %				
Mesure	45 %	55 %				
Réduction	41 %	24 %	30 %	3 %		
Partage de plusieurs quantités (1)	5 %	13 %		83 %		
Partage de plusieurs quantités (2)	9 %			91 %		
Ratio	20 %				68 %	12 %

À l'instar des travaux existants sur les conceptions intuitives (voir paragraphe 2), nous considérons la prégnance d'une approche comme un indicateur d'une conception intuitive. Ainsi, nos résultats soutiennent l'hypothèse que le sens « partie d'un tout » d'une fraction est une conception intuitive. En effet, il est majoritairement évoqué lors de la création d'un problème et mobilisé dans les résolutions. De plus, il semble facilitant pour les problèmes dans son domaine de validité (partage d'une quantité, mesure, réduction) et limitant pour les problèmes en dehors ou à la limite du domaine de validité (partage de plusieurs quantités, ratio), moins bien réussis par les adultes. Ces résultats seront à confirmer, d'une part avec l'analyse de profils de réponses, et d'autre part avec l'analyse des réponses des élèves pour étudier l'évolution des conceptions.

V. CONCLUSION

Dans cette étude, l'apport du regard didactique a permis de proposer une grille d'identification, de caractérisation et d'analyse des conceptions, grâce à la description du concept de fraction avec le triplet (situations, représentations et invariants opératoires). Il a aussi permis de choisir les différentes situations de résolution de problèmes et mettre en évidence la cohabitation de différentes conceptions, avec la prégnance de la conception partie d'un tout. L'apport du regard cognitif est la caractérisation

de cette conception qui semble plus indépendante des situations et donc moins contextuelle que les autres. La compréhension de ce phénomène pourrait permettre de mieux comprendre les résistances très fortes de cette conception aux situations d'enseignement-apprentissage. En particulier, il semble que les enseignant·es en formation en soient encore très empreints, ce qui pourrait expliquer certains choix d'enseignement, sans doute inconscients et un renforcement de cette conception chez les élèves.

RÉFÉRENCES

- Adjage, R. et Pluvinage, F. (2000). Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(1), 41-88.
- Anselmo, B. et Zucchetta, H. (2018). *Construire les nouveaux nombres au cycle 3 : fractions et décimaux*. Réseau Canopé ; IREM de Lyon.
- Artigue, M. (1989). *Épistémologie et didactique*. IREM de Paris. <https://hal.science/hal-02138030>
- Behr, M., Lesh, R., Post, T. R. et Silver, E. (1983). Rational number concepts. Dans R. Lesh et M. Landau (dir.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (p. 91-125). Academic Press Inc.
- Brousseau, G. (1987). Représentations et didactique du sens de la division. Dans G. Vergnaud, G. Brousseau et M. Hulin (dir.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Actes du colloque du Sèvres* (p. 47-64). La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Dans N. Bednarz (dir.), *Construction des savoirs, obstacles et conflits* (p. 41-63). CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc. <https://hal.science/hal-00516581>
- Charalambous, C. Y. et Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293-316. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2>
- Duroux, A. (1983). La valeur absolue : Difficultés majeures pour une notion mineure.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(1), 37-65.
- Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 9-14.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. et Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17.
- Gvozdic, K., Naud, S. et Sander, E. (2022). How robust and persistent are intuitive conceptions? Insights from production tasks. Dans J. Culbertson, A. Perfors, H. Rabagliati et V. Ramenzoni (dir.), *Proceedings for the 44th Annual conference of the Cognitive Science Society*. <https://escholarship.org/uc/item/1903669c>
- Hofstadter, D. R. et Sander, E. (2013). *Surfaces and essences: Analogy as the fuel and fire of thinking*. Basic books.
- Kieren, T. E. (1980). *Recent research on number learning*. Information Reference Center (ERIC/IRC), The Ohio State University. <https://eric.ed.gov/?id=ED212463>

- Lakoff, G. et Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. Basic Books.
- Lortie-Forgues, H., Tian, J. et Siegler, R. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201-221. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008>
- Marmur, O., Yan, X. et Zazkis, R. (2020). Fraction images: The case of six and a half. *Research in Mathematics Education*, 22(1), 22-47. <https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1627239>
- Ni, Y. et Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3
- Soury-Lavergne, S., Croquelois, S., Martinez, J.-L. et Rabatel, J.-P. (2020). Conceptions des élèves de primaire sur la numération décimale de position. *Revue de Mathématiques pour l'École*, 233, 128-143.
- Tirosh, D. et Graeber, A. O. (1991). The effect of problem type and common misconceptions on preservice elementary teachers' thinking about division. *School Science and Mathematics*, 91(4), 157-163.
- Vergnaud, G. (1990). Théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10, 133-170.

ANNEXES

Tableau 1 – Questions du questionnaire 1

1. Pour vous, qu'est-ce qu'une fraction ?
2. Donnez 4 exemples de fraction.
3. Représentez de quatre manières différentes la fraction $1/2$.
- 4/5. Donnez le premier problème qui vous vient à l'esprit dont la solution est $3/8$. Proposez un corrigé pour ce problème.
- 6/7. Donnez le deuxième problème qui vous vient à l'esprit dont la solution est $3/8$. Proposez un corrigé pour ce problème.
8. Si vous deviez expliquer à une autre personne ce qu'est $6/5$, que lui diriez-vous ?

Tableau 2 – Problèmes du questionnaire 2

- Partage d'une quantité** – Andréa fête son anniversaire, son gâteau est découpé en 12 parts, Andréa en mange 5. Quelle fraction de gâteau a été mangée ?
- Mesure** – Je participe à une course de vélo. Chaque étape représente $\frac{1}{4}$ de la course. Combien d'étapes dois-je faire, pour atteindre les $\frac{3}{4}$ de la course ?
- Réduction** – Dans la cour de récréation, il y a 120 enfants, $\frac{3}{4}$ des enfants jouent au ballon. Combien d'enfants jouent au ballon ?
- Partage de plusieurs quantités (1)** – Il y a 5 personnes et 6 plaques de chocolat. Chaque personne reçoit la même quantité de chocolat. Combien chacun en aura-t-il ?
- Partage de plusieurs quantités (2)** – Il y a 8 personnes et 3 plaques de chocolat. Chaque personne reçoit la même quantité de chocolat. Combien chacun en aura-t-il ?
- Ratio** – On prépare une boisson chocolatée en mélangeant du chocolat et du lait. La boisson d'Alix a 2 parts de chocolat pour 3 parts de lait. La boisson de Charlie a 1 part de chocolat pour 2 parts de lait. Qui a la boisson la plus chocolatée ?