TROUBLES DE LA COORDINATION ET VISUALISATION EN GÉOMÉTRIE : LE CAS D'UNE COLLABORATION ENTRE SCIENCES COGNITIVES ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

| GOMEZ[*] ALICE, MITHALAL[**] JORIS ET HANSSEN[***] LUDIVINE

Résumé | Ce texte présente un projet de recherche pluridisciplinaire visant à comprendre les difficultés spécifiques d'élèves dyspraxiques confrontés à des tâches géométriques, et explorer l'efficacité d'aménagements spécifiques. Il s'appuie sur un double ancrage en didactique des mathématiques et en sciences cognitives, combinant analyse épistémologique des tâches et étude cognitive. Nous montrons que cette collaboration interdisciplinaire est impérative pour ce cas spécifique d'apprentissage de la géométrie avec un TDC.

Mots-clés : didactique des mathématiques, géométrie, visualisation, dyspraxie, sciences cognitives

Abstract | This study investigates the specific challenges faced by students with dyspraxia in geometry and evaluates the impact of targeted accommodations. Grounded in both mathematics education and cognitive science, it combines epistemological task analysis with cognitive approaches. The research highlights the critical role of interdisciplinary collaboration in addressing the needs of learners with Developmental Coordination Disorder (DCD).

Keywords: Mathematics education, geometry, visualization, dyspraxia, cognitive sciences

I. INTRODUCTION

L'enseignement apprentissage de la géométrie, et plus largement la pratique de la géométrie, soulève des questions liées au traitement de l'espace. On les retrouve sous différents termes : habiletés spatiale, compétences spatiales, connaissances spatiales, représentation de l'espace, visualisation… Ce dernier terme est au cœur de nombreux travaux récents en didactique de la géométrie, mais fait intervenir des acceptions diverses selon qu'on se place d'un point de vue cognitif ou didactique. Il est aussi, sous d'autres terminologies, un enjeu pour les sciences cognitives qui tentent d'identifier les processus d'analyse des objets géométriques.

Les travaux que nous décrivons ici sont tirés d'une collaboration entre sciences cognitives et didactique des mathématiques, destinée à éclairer les difficultés d'élèves dyspraxiques lors de la résolution de problèmes de géométrie, et à proposer des pistes leur permettant d'accéder aux apprentissages. Nous nous concentrerons sur la question de la visualisation en lien avec les actions des élèves pour souligner la nécessité de croiser ces deux points de vue, ainsi que les défis théoriques et méthodologiques rencontrés.

[*] Centre de Recherche en Neurosciences de Lyon (CRNL), INSERM U1028 — CNRS UMR5292, Université de Lyon – France – alice.gomez@univ-lyon1.fr

[**] Univ Lyon, Université Lyon 1, Laboratoire Sciences, Société, Historicité, Éducation et Pratiques (S2HEP), UR4148, Lyon – France – joris.mithalal@univ-lyon1.fr

[***] Univ Lyon, Université Lyon 1, Laboratoire Sciences, Société, Historicité, Éducation et Pratiques (S2HEP), UR4148, Lyon – France – ludivine.hanssen@univ-lyon1.fr

II. VISUALISATION EN GÉOMÉTRIE : DEUX REGARDS SUR LA QUESTION

1. *Visualisation en géométrie*

La géométrie soulève la question du traitement de l'espace, généralement désignés par « habiletés spatiales » ou « *spatial abilities* ». Il s'agit de prendre en compte la manière dont se produit l'acquisition et le traitement (essentiellement interne dans ce cas) d'informations relatives à l'espace, pertinentes pour résoudre des problèmes de géométrie. La reconnaissance de dessins à partir de leurs traits semble être une caractéristique universelle de l'être humain (Biederman et Ju, 1988 ; Kennedy et Ross, 1975), démontrée même dans des tribus isolées de Nouvelle-Guinée. Cette capacité n'est en revanche pas évidente chez les primates non humains (Close et Call, 2015), qui produisent uniquement des tracés courbés élémentaires lorsqu'on leur demande de dessiner (Tanaka et al., 2003). Dans les travaux directement appuyés sur la psychologie cognitive (Battista et al., 2018 ; Ramful et al., 2017), essentiellement dans la littérature anglo-saxonne, la « visualisation spatiale » est une composante des habiletés spatiales. Il s'agit d'un processus mental consistant en la création et la manipulation interne d'images mentales. Les travaux en éducation mathématique tendent à utiliser ce terme de visualisation (Duval, 2005) — plutôt que celui de *vision* — pour désigner les processus spécifiques à la géométrie visant à traiter les informations visuelles d'une manière adaptée aux problèmes rencontrés (Ceretkova et al., 2015). Ce que la didactique désigne par « visualisation » consiste en des stratégies de recherche et de traitement de l'information obéissant à plusieurs logiques, et combinant généralement plusieurs d'entre elles : coordination avec le langage verbal (Duval, 2005), processus de construction à l'aide d'instruments (Duval, 2005 ; Mithalal, 2010 ; Mithalal et Balacheff, 2019), identification de sous configurations permettant d'orienter la structure d'une preuve (Duval, 1994, 2005), réalisation des fonctions identifiées par Chaachoua (1997) nécessaires à la résolution de problèmes en géométrie, etc. S'il s'appuie sur les travaux de psychologie cognitive (la *Gestalttheorie*), Duval (2005) procède avant tout d'une analyse des savoirs et pratiques de la discipline. Il identifie une modalité de visualisation spécifique, qu'il qualifie de « visualisation non iconique », qui peut mettre en jeu trois processus distinct : la division méréologique, pour identifier des sous figures pertinentes pour la résolution d'un problème ; la déconstruction instrumentale, pour décrire comment un objet géométrique peut être construit à l'aide d'instruments donnés ; et la déconstruction dimensionnelle, qu'il qualifie de processus discursif, consistant à identifier des sous constituants de dimensions inférieures (les unités figurales) ainsi que les relations géométriques les liant. L'analyse mathématique conduit à souligner la nécessité d'ajouter — en actes ou mentalement — des tracés initialement absents sur la figure, sans fonction graphique, mais qui la *réorganisent* en faisant apparaître de nouvelles relations (par exemple un alignement). Le point de vue cognitif n'est convoqué que pour identifier le « processus normal de la visualisation », qualifié de « visualisation iconique », et montrer en quoi il agit comme un obstacle à l'apprentissage de la géométrie.

En sciences cognitives, Sablé-Meyer et al. (2022) suggèrent que les primates non humains possèdent des précurseurs du nombre et des concepts spatiaux, mais que seuls les humains attribuent une dimension symbolique à ces représentations proto-mathématiques. Ils perçoivent les formes géométriques différemment des autres primates, avec une reconstruction mentale nécessaire pour générer ces formes dans le langage de la pensée. Dehaene et al. (2022) avancent que la spécificité humaine réside dans la capacité de recombiner les connaissances primaires de manière compositionnelle. La communication linguistique et l'éducation facilitent cette recombinaison, qui peut varier selon les besoins spécifiques des apprenants au sein d'une culture. Les travaux de Dehaene et al. (2008) ainsi que d'Izard et al. (2011) ont permis de mettre en évidence la compréhension des primitives géométriques en l'absence d'éducation formelle chez les populations Munduruku, grâce à la tâche de détection d'intrus. De manière spontanée, les Indiens d'Amazonie, en l'absence d'enseignement formel, sont capables de détecter les intrus au-dessus du hasard pour la perception de propriétés euclidiennes, les figures géométriques ou des propriétés métriques.

Les deux disciplines portent ainsi des regards complémentaires sur la manière dont doivent être réalisés l'acquisition et le traitement des informations visuelles en géométrie plane.

2. *Quand la dyspraxie sème le trouble*

Le trouble de la coordination motrice (TDC), ou dyspraxie, est un trouble neuro-développemental qui affecte environ 5 % de la population d'une classe d'âge (Albaret et al., 2019 ; American Psychiatric Association, 2015 ; Lingam et al., 2009). Sa manifestation la plus visible concerne les fonctions motrices : exécution ou reproduction de mouvements, coordination œil-main, proprioception… (Gauduel et al., 2023 ; Hyde et Wilson, 2011 ; Li et al., 2015 ; Plumb et al., 2008) Les élèves porteurs de ce trouble sont particulièrement empêchés en géométrie, du fait de leur faible capacité à utiliser des instruments pour réaliser des tracés. Pourtant, ces enfants sont capables d'acquérir des concepts mathématiques de nature visuospatiale (la ligne numérique, Gomez et al. 2017), aussi on peut faire l'hypothèse que les difficultés d'apprentissage de la géométrie sont liées à ces difficultés praxiques et visuospatiales (Bellocchi et al., 2021 ; Gaymard et al., 2017 ; Sumner et al., 2016; Pisella et al. 2020a, 2021) plutôt que des aspects conceptuels.

Ce trouble comporte en effet de manière moins visible, des difficultés de perception et de traitement des informations visuelles, de mémoire visuo-spatiale et de difficultés de planification. Ces élèves peuvent éprouver des difficultés à contrôler les mouvements oculaires (Bellocchi et al., 2021 ; Gaymard et al., 2017 ; Sumner et al., 2016), ou à repérer les positions relatives. (Pisella et al. 2020a, 2021, Gauduel et al., en préparation) Notre recherche a également permis d'identifier des difficultés pour identifier des relations telles que l'orthogonalité ou le parallélisme, ou reconnaître des formes géométriques qui ne partagent pas les mêmes propriétés (ex. : une ellipse parmi des cercles). Ils peuvent présenter un déficit plus ou moins marqué de planification motrice. Enfin, l'utilisation de la mémoire de travail — en particulier visuospatiale — est-elle aussi moins performante pour ces élèves (Alloway et Temple, 2007). L'ensemble de ces difficultés peut se traduire par une incapacité à réaliser les tâches, mais aussi par une fatigue excessive pour des élèves tentant de les compenser.

S'intéresser aux élèves TDC conduit nécessairement à réinterroger le paradigme proposé par Duval, et à inclure une dimension cognitive pour identifier — au-delà de la visualisation iconique — ce qui est en jeu dans la visualisation géométrique et ce qui pourrait y faire obstacle. La perception des unités figurales, et de leurs relations potentielles sera au cœur d'un travail d'analyse pour la reproduction d'un dessin ou pour une heuristique lors d'une recherche de preuves, elle semble ici empêchée. La planification des actions, en revanche, n'est pas identifiée par l'analyse épistémologique ; pourtant on peut émettre l'hypothèse que, même en disposant des bonnes informations, des élèves TDC soient limités dans la mise en fonctionnement d'une déconstruction instrumentale. La mémoire visuospatiale enfin, n'est pas non plus identifiée comme une limite à l'analyse des dessins par les élèves. Pourtant, même lorsque des objets ou des relations sont identifiées, leur faible disponibilité peut s'avérer un frein aux trois processus attachés à la visualisation non iconique.

Cet effet de focale lié au contexte du trouble interroge plus largement cette notion de « visualisation ». Il conduit à adjoindre aux propositions de Duval, qui identifie des nécessités épistémologiques et la conduite nécessaire de certaines opérations de décomposition, la prise en compte précise — d'un point de vue cognitif — des processus nécessaires à la satisfaction de cette nécessité et des obstacles multiples que peuvent rencontrer des élèves. Pour adopter un « regard géométrique » sur les objets graphiques, il est nécessaire de rencontrer des situations qui le rendent pertinent, mais aussi de disposer des ressources permettant sa mise en fonctionnement. C'est ainsi que nous pouvons interroger la visualisation des élèves au travers des processus de résolution, qui témoignent de son caractère mobilisable et opérationnel.

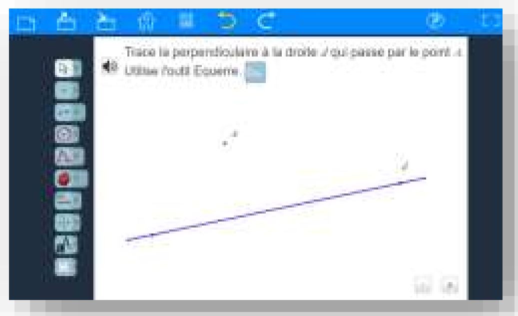
De nouvelles questions de recherche, à l'interface des deux disciplines, sont ainsi soulevées. Quelles difficultés des élèves dyspraxiques peuvent-ils rencontrer pour percevoir des informations pertinentes sur un dessin géométrique ? Quelles peuvent être les difficultés de traitement de cette information ? Quelles difficultés peuvent apparaître en lien avec la planification de cette exploration visuelle ? Elles ouvrent des questions plus larges concernant l'ensemble des élèves, en particulier relatives au mécanisme de prise d'informations et de traitement spécifiquement en jeu dans des tâches de géométrie.

III. DES DÉFIS THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES

1. *Un projet de recherche interdisciplinaire*

Nous nous appuyons ici sur les objectifs et les données du projet DYSDYN, déposé conjointement par les deux disciplines et par la société Cabrilog. Constatant les obstacles générés par le trouble, mais la possibilité pour ses élèves d'accéder conceptuellement à cet apprentissage, il vise à identifier spécifiquement les acquisitions nécessaires à l'entrée en cycle trois, et à développer un dispositif les rendant accessibles. L'appui sur un logiciel de géométrie dynamique (CabriExpress) vise en première intention à limiter les difficultés de manipulation d'instruments lors des constructions géométriques : l'usage exclusif de la souris permet de simplifier les gestes et est jugé généralement accessible aux élèves dyspraxiques (Hanssen, 2020). La collaboration avec l'éditeur permet en outre d'envisager des adaptations de l'ergonomie du logiciel lorsque cela s'avère nécessaire. La seule possibilité de manipulation des instruments étant insuffisante pour résoudre des tâches de géométrie, un enjeu majeur du projet consiste à identifier les difficultés de perception et d'analyse de l'environnement graphique : repérage des outils, perception des formes, des relations géométriques, des sous-constituants, des sous-configurations, etc. L'adaptation de l'interface du logiciel, et la construction de tâches adéquates, permet en outre d'étudier la possibilité de parcours d'apprentissage adaptés à ces élèves, leur permettant de traiter des tâches similaires et de réaliser les mêmes apprentissages que des élèves travaillant sur papier.

Nous proposons ici de considérer un exemple minimal proposé en laboratoire à des élèves travaillant sur Cabri Express. Ces élèves ont réalisé une première séance en laboratoire au cours de laquelle ils ont été testés sur des tâches de reconnaissance, puis ont suivi un tutoriel leur permettant d'apprendre les premières fonctionnalités du logiciel. Au cours de la seconde séance, ils doivent réaliser des constructions dans Cabri Express en utilisant un certain nombre d'outils. Les trois premières pages consistent en des tracés de segments de longueur donnée avec différents outils, la quatrième vise une perpendiculaire à l'aide de l'outil perpendiculaire, et la cinquième à l'aide de l'outil équerre.



D'un point de vue didactique, sans faire une analyse a priori fine, cette tâche engage plusieurs aspects notables :

- la notion convoquée est celle de perpendiculaire, c'est-à-dire une relation entre deux droites respectant une condition (la deuxième droite passe par le point A) ;
- l'outil mobilisé, l'équerre, désigne l'angle droit comme secteur angulaire (l'angle est une surface, comme le coin d'un objet) ou de ligne brisée (un changement de direction lorsqu'on suit le bord de l'équerre), mais ne matérialise pas deux droites comme le pourraient d'autres instruments (tels la réquerre) ;
- les élèves doivent mettre en relation deux conceptions de l'angle droit, celle que porte l'équerre et la perpendiculaire que mentionne l'énoncé, et pour cela coordonner deux modalités de visualisation telles que décrites par Duval ;
- ils doivent aussi s'approprier la structure logique de l'énoncé, la mettre en fonctionnement pour réaliser des constructions ;
- du point de vue de la géométrie dynamique, il leur faut sélectionner les arguments de la primitive de construction : cliquer sur la droite, cliquer sur le point. Pour que leur construction résiste au déplacement, ils ne doivent pas cliquer sur un autre point qui ferait passer visuellement la droite par ce point.

D'un point de vue cognitif, il faut pour les élèves être capable de repérer visuellement la position de l'outil, la position de la droite et du point, de les garder en mémoire, de les viser et de déplacer le pointeur sur ces positions, et de cliquer sur la souris sans la déplacer.

Cet exemple permet de souligner combien les contraintes — et donc les obstacles — sont à la fois de natures très différentes et complémentaires, du point de vue des deux disciplines.

2. Les données disponibles : construction d'observables et défis méthodologiques

Pour analyser activité de l'élève lors de la réalisation de cette tâche, nous avons recueilli plusieurs données. L'écran de l'ordinateur sur lequel travaille l'élève est enregistré en vidéo, ce qui donne accès à ses réalisations finales et au processus de résolution. Le regard de l'élève est suivi à l'aide d'un oculomètre, permettant d'identifier les déplacements et fixations du regard de l'élève à une fréquence d'échantillonnage de 120 Hz. L'usage de la souris est enfin enregistré chaque milliseconde : position du pointeur, pression sur l'un des deux boutons.

L'enjeu de ces données consiste à être capable d'analyser la tâche de l'élève du point de vue cognitif et du point de vue didactique. En appui sur une analyse a priori, l'enregistrement vidéo permet d'analyser les stratégies et des connaissances mobilisées par les élèves. Le suivi du regard et des mouvements de la souris peut apporter des renseignements complémentaires, par exemple pour identifier les stratégies avortées faute de pouvoir les réaliser concrètement. Les données de l'oculomètre et de position de la souris renseignent quant à eux sur les points d'attention des élèves, leur capacité ou non à percevoir certains objets, à viser du regard, à déplacer la souris vers l'endroit visé, cliquer sans bouger la souris… Les stratégies des élèves peuvent ainsi être conditionnées par deux facteurs, les connaissances géométriques (dont les connaissances instrumentales) mise en jeu, et leur capacité à prévoir et exécuter certaines actions. Le niveau de description étant de granularité très différente, tout l'enjeu consiste à pouvoir les mettre en relation de manière efficace.

3. *Construction d'une méthodologie pour combiner résultats didactiques et cognitifs : un essai en cours*

Pour répondre à ces besoins méthodologiques, nous développons une méthodologie d'analyse appuyée sur le modèle cKc (Balacheff, 1995), déjà utilisé pour modéliser les connaissances en géométrie (Mithalal, 2010 ; Mithalal et Balacheff, 2019). Une conception désigne ici une forme locale de la connaissance de l'élève, modélisée par un quadruplet :

- P : ensemble de problèmes sur lesquels la conception est opératoire, perturbations du système [sujet<>milieu] ;
- R : ensemble d'opérateurs. Ils associent à des buts des actions, de la forme P ⇒ A ;
- L : systèmes de représentation permettant l'expression des problèmes et des opérateurs ;
- Σ : structure de contrôle, assurant la non-contradiction. Les contrôles sont des règles offrant un jugement sur l'utilisation (pertinence, fonctionnement, résultat notamment) des opérateurs et sur le traitement des problèmes.

En considérant P et L localement stables, il est possible de décrire des stratégies *a priori* ainsi que les procédures effectivement employées par les élèves à l'aide de R et Σ. Dans l'exemple qui nous intéresse, on pourra par exemple identifier *a priori* :

- des opérateurs, par exemple
  - **[r_1]** (construire une perpendiculaire à (d) passant par A) ⇒ (utiliser l'outil "droite", cliquer sur (d), déplacer la souris pour que la nouvelle droite semble perpendiculaire, cliquer)
  - **[r_2]** (construire une perpendiculaire à (d) passant par A) ⇒ (utiliser l'outil équerre, cliquer sur (d), déplacer la souris pour que la droite perpendiculaire passe par A, cliquer)
  - **[r_3]** (construire une perpendiculaire à (d) passant par A) ⇒ (utiliser l'outil équerre, cliquer sur A, cliquer sur (d))
- des contrôles, par exemple
  - **[σ_1]** (deux droites semblent visuellement former un angle droit) ⇒ (elles sont perpendiculaires)
  - **[σ_2]** (deux droites restent visuellement perpendiculaires quand je déplace l'une d'entre elles) ⇒ (elles sont perpendiculaires)
  - **[σ_3]** (j'ai créé une droite en sélectionnant A et une droite (d) avec l'outil "perpendiculaire") ⇒ (j'ai créé la perpendiculaire à (d) passant par A)

Nous pouvons alors décrire une procédure employée par un élève à l'aide de ces opérateurs et contrôles : un problème initial p_0 est transformé successivement en p_1, p_2,…, p_f par une succession d'opérateurs et contrôles, un dernier contrôle garantissant sa validité. La description de la procédure repose sur l'identification des opérateurs et des contrôles, ces derniers étant moins manifestes et souvent inférés grâce à l'analyse a priori. Cette description en opérateurs et contrôle vise à permettre le lien entre deux niveaux d'analyse.

D'une part, nous pouvons mettre en lien certains opérateurs, contrôles, ou ensembles de tels objets, avec les connaissances des élèves : notionnelles (conception de l'angle droit, de la perpendicularité), en termes de paradigmes géométriques (Houdement et Kuzniak, 2006), relativement à la distinction dessin/figure (Laborde et Capponi, 1994), en termes de robustesse des constructions dans un environnement de géométrie dynamique (Baccaglini-Frank, 2012), etc. Cela permet de qualifier leurs apprentissages géométriques, et ainsi de répondre à notre question initiale concernant les possibilités d'apprentissage dans de tels environnements par des élèves dyspraxiques.

D'autre part, nous sommes conduits à nous appuyer sur les travaux en sciences cognitives pour analyser les conditions d'emploi de ces opérateurs et contrôles qui ne seraient pas de nature mathématique. Ainsi, **[r_1]** est mathématiquement moins complexe que **[r_3]**, et on pourrait s'attendre en cycle trois à ce que son usage privilégié. En revanche, l'analyse cognitive nous apprend que pour ces deux opérateurs il faut trouver un outil dans l'interface du logiciel, cliquer sur son icône, et cliquer sur deux objets. Sous réserve d'un contrôle mathématique suffisant, **[r_3]** ne nécessite pas de contrôle perceptif ; **[r_1]** en revanche suppose que l'élève soit capable de repérer visuellement un angle droit, et de se servir des informations visuelles pour en temps réel ajuster ses mouvements et parvenir à placer la droite au bon endroit. On peut s'attendre alors à ce que cette manipulation soit plus difficile, et que **[r_1]** — pour des raisons cognitives, et toujours sous réserve de la disponibilité des connaissances mathématiques nécessaires — soit moins employé. On retrouve ici l'intérêt d'un contrôle théorique fort lorsque le contrôle perceptif n'est plus disponible, que nous avions déjà mis en évidence par ailleurs (Mithalal, 2010).

Ce développement méthodologique vise ainsi à tirer parti des deux disciplines pour analyser l'activité géométrique des élèves dans une situation de construction, même minimale telle que nous la présentons. Elle permet a priori d'identifier les conditions nécessaires, d'un double point de vue didactique et cognitif, à la mise en œuvre de procédures de résolution. Nous sommes ainsi en mesure d'anticiper que certaines stratégies, que l'analyse didactique aurait a priori attendues, ne sont pas accessibles à des élèves en raison du trouble — mais aussi, dans un cadre plus large, en raison de contraintes ergonomiques. A posteriori, l'usage ou l'évitement répété de certains opérateurs (les contrôles étant généralement inférés des procédures des élèves), peut nous renseigner sur certaines difficultés elles aussi d'ordre didactique ou d'ordre cognitif. Cette méthodologie est en cours de développement.

IV. CONCLUSION

Le projet de recherche dont nous rendons compte ici a été pensé dès sa construction comme un projet pluridisciplinaire, la combinaison des deux disciplines en était un enjeu identifié. Nous avons souhaité montrer à la fois la difficulté à combiner deux approches théoriques qui répondent à des questions très différentes, avec des régimes de preuve eux aussi très différents, et la fécondité d'une telle combinaison. La compréhension des difficultés liées aux troubles ne peut faire l'économie d'aucune des deux approches, et à l'inverse il nous semble que ceci informe sur l'activité géométrique des élèves quels qu'ils soient. Nous avons souhaité montrer en outre que le rapprochement ne peut se contenter d'une mise en dialogue des deux disciplines, et doit s'accompagner d'une innovation méthodologique. Ce travail est bien entendu exploratoire et à poursuivre.

FINANCEMENT

Cette contribution s'appuie sur le projet « Pack Ambition Recherche » DYSDYN, financé par la Région AURA.

RÉFÉRENCES

Baccaglini-Frank, A. E. (2012). Dragging and making sense of invariants in dynamic geometry. *The Mathematics Teacher*, *105*(8), 616-620. https://doi.org/10.5951/mathteacher.105.8.0616

Balacheff, N. (1995). Conception, propriété du système sujet/milieu. Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (dir.), *Actes de la VIIIe École d'été de didactique des mathématiques* (p. 215-229). IREM de Clermont-Ferrand.

Balacheff, N. et Margolinas, C. (2003). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. Dans A. Mercier et C. Margolinas (dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques. Cours de la XIIe École d'été de didactique des mathématiques*, *20-29 aout 2023, Corps*. La pensée sauvage. https://hal.science/hal-01139408v1/document

Battista, M. T., Frazee, L. M. et Winer, M. L. (2018). Analyzing the relation between spatial and geometric reasoning for elementary and middle school students. Dans K. S. Mix et M. T. Battista (dir.), *Visualizing mathematics: The role of spatial reasoning in mathematical thought* (p. 195-228). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98767-5_10

Campbell, D., Kumar, S., Giallanza, T., Griffiths, T. L. et Cohen, J. D. (2024). *Human-like geometric abstraction in large pre-trained neural networks* (nº arXiv:2402.04203). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.04203

Ceretkova, S., Chesnais, A., Maschietto, M., Mithalal, J., Richard, P. R. et Swoboda, E. (2015). Introduction to the papers of TWG04: Geometrical thinking. Dans K. Krainer et N. Vondrová (dir.), *CERME 9—Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, *Charles University, Prague* (p. 511-513). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01286992

Chaachoua, H. (1997). *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Étude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes* [Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier].

Dehaene, S. (2023). *Modèles de la perception de la géométrie | Collège de France*. https://www.college-de-france.fr/fr/agenda/cours/la-perception-des-objets-mathematiques-elementaires-formes-geometriques-motifs-et-graphes/modeles-de-la-perception-de-la-geometrie

Dehaene, S., Izard, V., Pica, P. et Spelke, E. (2006). Core knowledge of geometry in an Amazonian indigene group. *Science (New York, N.Y.)*, *311*(5759), 381-384. https://doi.org/10.1126/science.1121739

Dehaene, S., Roumi, F. A., Lakretz, Y., Planton, S. et Sablé-Meyer, M. (2022). Symbols and mental programs: A hypothesis about human singularity. *Trends in Cognitive Sciences*, *26*(9), 751-766. https://doi.org/10.1016/j.tics.2022.06.010

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM*, (17), 121-138.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5-53.

Hanssen, L. (2020). *Potentialités didactiques offertes par un environnement de géométrie dynamique pour l'apprentissage des élèves porteurs d'un trouble développemental de la coordination* [Mémoire de Master 2 inédit].

Heinke, D., Wachman, P., van Zoest, W. et Leek, E. C. (2021). A failure to learn object shape geometry: Implications for convolutional neural networks as plausible models of biological vision. *Vision Research*, *189*, 81-92. https://doi.org/10.1016/j.visres.2021.09.004

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *11*, 175-193.

Laborde, C. et Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(1), 165-210.

Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle* [Thèse de doctorat, Université de Grenoble]. HAL theses. https://theses.hal.science/tel-00590941v1

Mithalal, J. et Balacheff, N. (2019). The instrumental deconstruction as a link between drawing and geometrical figure. *Educational Studies in Mathematics*, *100*(2), 161-176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9862-z

Petitfour, É. (2015). *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : Étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot – Paris 7]. HAL science ouverte. https://hal.science/tel-01228248v1

Petitfour, É. (2017). Enseignement de la géométrie à des élèves dyspraxiques en cycle 3 : Étude des conditions favorables à des apprentissages. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, *78*(2), 47-66.

Petitfour, É. (2022). Outils théoriques d'analyse de l'action instrumentée, au service de l'étude de difficultés d'élèves dyspraxiques en géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *38*(1), 1-15.

Ramful, A., Lowrie, T. et Logan, T. (2017). Measurement of spatial ability: Construction and validation of the spatial reasoning instrument for middle school students. *Journal of Psychoeducational Assessment*, *35*(7), 709-727. https://doi.org/10.1177/0734282916659207

Sablé-Meyer, M., Ellis, K., Tenenbaum, J. et Dehaene, S. (2022). A language of thought for the mental representation of geometric shapes. *Cognitive Psychology*, *139*, Article 101527. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2022.101527

Sablé-Meyer, M., Fagot, J., Caparos, S., van Kerkoerle, T., Amalric, M. et Dehaene, S. (2021). Sensitivity to geometric shape regularity in humans and baboons: A putative signature of human singularity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *118*(16), Article e2023123118. https://doi.org/10.1073/pnas.2023123118

Satlow, E. et Newcombe, N. (1998). When is a triangle not a triangle? Young children's developing concepts of geometric shape. *Cognitive Development*, *13*(4), 547-559. https://doi.org/10.1016/S0885-2014(98)90006-5