# LA DÉVOLUTION DE LA LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE EN CLASSE DE TERMINALE EN ALGÉRIE

| ZEDEK-LEDJIAR* NACIMA

**Résumé |** L'enseignement des probabilités et des statistiques, l'acquisition de la pensée aléatoire et la maitrise du hasard sont faiblement étudiés dans les lycées algériens au contraire des lycées français. Depuis les années 2000, l'enseignement des probabilités au lycée pour le programme français est passé d'une approche fréquentiste à une approche Laplacienne. Mes recherches présentent deux objectifs principaux : étudier comment l'objet dit « linéarité de l'espérance » vit-il dans le système scolaire français. Analyser, l'introduction de cette notion en classe par le professeur : Dévolution.

**Mots-clés** : dévolution de la linéarité, espérance mathématique, contrat didactique, probabilités, obstacle didactique

**Abstract |** The teaching of probability and statistics, the acquisition of random thinking, and the mastery of chance and poorly studied in algerian high schools, unlike in French high schools. Since the 2000s, the teaching of probability in French high school curricula has shifted from a frequetist approach to a Laplacian approach.My research has two main objectives. First, it focuses on studying how the concept known as "linearity of expectation" is intefrated into the French educational system. Second, it analyzes how teachers introduce this concept in the classroom.

**Keywords**: Devolution of linearity, mathematical expectation, expected value, didactic contract, probalities, didactic obstacle

## I. INTRODUCTION

Pourquoi l'étude des probabilités fait-elle si peur, aussi bien aux élèves qu'aux enseignants ? Est-ce trop abstrait dans leur esprit ? Pourquoi ne parviennent-ils pas à matérialiser cette notion ? Ces questionnements font écho à ceux de Raoult et Arnoux (2013) :

> Cette place de ces disciplines au sein de l'édifice mathématique est de plus en plus reconnue par les chercheurs ; pourquoi donc la retombée de cette conviction sur la pratique enseignante rencontre-t-elle tant d'obstacles en France ? Et pour ceux qui objectent le manque d'attractivité de ces branches de programmes, telles qu'ils les voient en œuvre dans les collèges et lycées aujourd'hui, nous voudrions les persuader que, au contraire, nombre d'élèves peuvent être stimulés par le fait qu'on peut leur présenter là des mathématiques « en action », avec des possibilités de traitement réfléchi de données réelles (et non « de manière passive » comme semble le juger inévitable Pierre Colmez. Encore faudrait-il que les programmes soient largement repensés et les enseignants mieux aidés. (Arnoux et Raoult, 2013, s. p.)

C'est ce qui m'a motivée à vouloir observer comment l'enseignant et les élèves appréhendent cette notion, en classe.

## II. ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LES INSTITUTIONS FRANCOPHONES EN ALGÉRIE

L'enseignement des disciplines dites scientifiques en Algérie dans les milieux scolaires francophones se fait au primaire et au collège dans les deux langues ; Arabe littéraire[1] et Français. Dans l'enseignement secondaire, en France, la notion de probabilité est intégrée dans le domaine « statistiques et

* Lycée Privé El Malak – Algérie – zedeknacima@gmail.com

[1] L'arabe littéraire langue de scolarisation n'est pas le même que l'arabe dialectale parlé au sein des familles.

probabilités ». Dans la section « Modéliser le hasard, calculer des probabilités » du programme de seconde (élèves de 15-16 ans) (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, 2019a, p. 14), les contenus à l'étude sont les suivants :

- Ensemble (univers) des issues. Événements. Réunion, intersection, complémentaire.
- Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un événement : somme des probabilités des issues.
- Relation $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
- Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.

Dans ce même programme, les capacités attendues des élèves sont les suivantes :

- Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.
- Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
- Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves. (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, 2019a, p. 14)

Les notions abordées en classe de première (élèves de 16-17 ans) (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, 2019b), selon la nouvelle réforme mise en vigueur depuis 2019 sont : les variables aléatoires discrètes, les lois de probabilité de variables aléatoires discrètes et le schéma de Bernoulli. L'enseignement s'organise entre autres autour des buts suivants :

- Introduire la notion de probabilité conditionnelle, sous-jacente dans toute modélisation probabiliste, et mettre en évidence la problématique de l'inversion des conditionnements ;
- Formaliser la notion d'indépendance ;
- Introduire la notion de variable aléatoire, en lien étroit avec les applications des probabilités ;
- Introduire les notions d'espérance, de variance et d'écart-type d'une variable aléatoire ; […]
- Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème (mise pour un jeu équitable…). (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, 2019b, p. 12-14)

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire est estimée comme une moyenne observée sur un échantillon. Il n'y a aucune allusion à la propriété de linéarité.

En terminale (élèves de 17-18 ans), le nouveau programme a réintégré le calcul combinatoire et le dénombrement où les ensembles considérés sont finis, on étudie les probabilités conditionnelles, la notion d'indépendance, les lois de probabilité de variables aléatoires discrètes vues en classe de 1re.

Le schéma de Bernoulli est considéré fondamental : succession de *n* épreuves identiques indépendantes à deux issues. Tirage avec remise dans une urne de Bernoulli, lancers de pièce, etc. L'indépendance des expériences se traduit par la propriété multiplicative : la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités des résultats. La linéarité de l'espérance introduite dans le nouveau chapitre « somme de variables aléatoires » donne un outil très puissant permettant de déterminer l'espérance d'une variable aléatoire sans avoir à en déterminer la loi. L'additivité de la variance pour les variables indépendantes est présentée dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes. Elle permet d'établir l'expression de la variance de la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire (mise pour un jeu équitable…). (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, 2019c).

# III. PROBLÉMATIQUE

Comment le professeur va-t-il faire pour se placer dans un processus de dévolution de la propriété de linéarité de l'espérance mathématiques ?

L'étude sera basée sur l'observation de la séance d'activité mise en place par l'enseignant. Deux questions spécifiques de recherche, d'abord centrées sur l'enseignant, sont établies dans ce contexte :

1. Quelles stratégies l'enseignant met-il en place pour aborder cet objet ?[2]
2. Quelles sont les difficultés qu'il rencontre pour mettre en place ce dispositif ?

Le cadre théorique de la transposition didactique nous permettra de définir une méthodologie, pour analyser la démarche choisie par le professeur de la mise en place en classe du dispositif expérimental.

La théorie de la transposition didactique telle qu'elle a été développée par Chevallard (1991), est celle des savoirs et des institutions. Cette théorie met en évidence le problème de légitimation des objets de savoir enseignés, et l'apparition systématique de l'écart entre un savoir enseigné et les références qui les légitiment, écart dû à des contraintes pesant sur le fonctionnement du système d'enseignement.

Nous avons étudié cette transposition et la démarche activée au sein de la classe de terminale, spécialité mathématiques, dans le Lycée International Alexandre Dumas[3], à Alger, en suivant trois étapes :

a) La présentation des programmes officiels de la classe de terminale, spécialité mathématiques ;
b) Comment cette définition des programmes conduit-elle à des praxéologies exprimées dans le manuel ;
c) De quelle manière le professeur l'adapte-il à ses élèves.

La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème, et, accepte lui-même les conséquences de ce transfert. La dévolution, ou le processus de dévolution, désigne l'ensemble des actions de l'enseignant visant à rendre l'élève responsable de la résolution d'un problème ou d'une question en suspens (Brousseau, 1998).

Le concept de dévolution apparait ainsi pour rendre compte de certains dysfonctionnements dans le déroulement didactique d'une séquence d'enseignement. Comment expliquer que certains élèves n'identifient pas les objets proposés par l'enseignant comme éléments d'un milieu pour apprendre ?

Le fondement épistémologique de la dévolution et du contrat didactique est étroitement associé à la théorie des situations.

Nous souhaitons aussi décrire comment les élèves construisent la notion de linéarité de l'espérance mathématique en utilisant des connaissances antérieures et comment vont-ils lui donner du sens dans une situation nouvelle. Autrement dit, une troisième question de recherche, celle-ci centrée sur les élèves, est établie :

[2] Nous questionnerons aussi le rôle de l'enseignant dans la gestion des artefacts numériques (logiciels, comme par exemple la calculatrice) qui encadrent l'activité.

[3] Lycée de programme français.

3. De quelle manière les élèves vont se saisir d'un enseignement précis sur la propriété de la linéarité de l'espérance mathématique, sous un contrat didactique nécessaire à la pratique du professeur ?

# IV. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

## *1. Présentation du problème proposé aux élèves*

Le professeur propose aux élèves un exercice qu'il a réfléchi, conçu et écrit au tableau, il leur explique ensuite l'activité d'étude et de recherche (AER), en prenant appui sur le référentiel théorique. Ici, l'événement élémentaire considéré, comme on le voit sur la Figure 1, est le suivant : « Nous notons X le nombre de fois qu'on a obtenu PILE » (avec une pièce de 1 €). L'évènement élémentaire présenté à la Figure 2 est celui-ci : « Nous notons Z le nombre de fois qu'on a obtenu PILE » (avec les deux pièces).[4]

Cette étape fait appel au référentiel théorique des probabilités (la notion d'événements et d'évènements contraires). Les élèves doivent identifier les évènements considérés en accord avec l'activité proposée par le professeur. Le travail des élèves doit prendre appui sur les résultats issus du lancer des deux pièces.

**Figure 1**

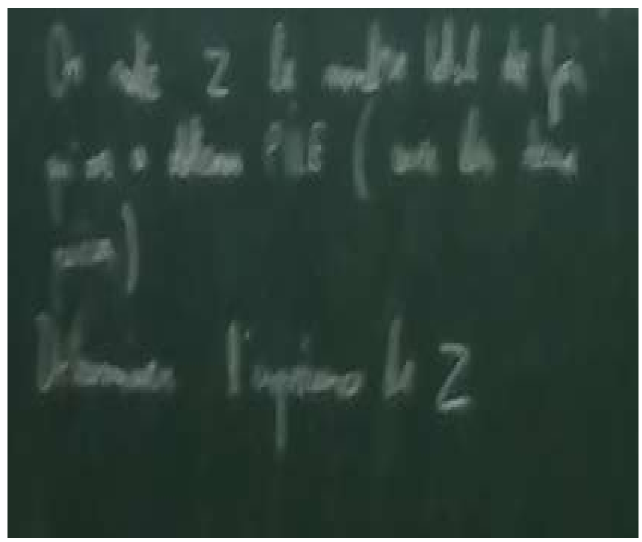

**Figure 2**

## *2. Analyse à priori de la séance*

L'analyse a priori réalisée par le didacticien permet de prévoir les conduites probables des élèves sur le dispositif en relation avec les objets de savoir sollicités. Le professeur veut que les élèves mobilisent leurs connaissances sur la loi binomiale et la loi géométrique tronquée, vues lors des séances préalables avec lui pour la résolution de la tâche, enjeu de l'étude (Dialectique ancien-nouveau).

[4] Cette explication participe à la dévolution de la situation.

Il pense que les élèves mobiliseront une approche Laplacienne, en prenant appui sur un outil sémiotique tel qu'un arbre de dénombrement ou un tableau à double entrée, afin d'institutionnaliser la tache liée à la propriété de linéarité de l'espérance mathématique, enjeu de l'étude.

Cette activité a été conçue par le professeur de telle sorte à ce que la question principale aboutisse à un obstacle que les élèves doivent confronter. Ils devront se poser alors d'autres questions au cours de la recherche, et les nouvelles réponses obtenues leur permettront d'aboutir à la réponse.

Cette activité nous permet de rencontrer deux variables X et Y, leurs lois de probabilités respectives et leurs espérances respectives. Les élèves auront à définir chacune des variables, ainsi que leurs loi et espérances, respectives.

### *3. Le moment de première rencontre*

Le moment de première rencontre par définition permet de rencontrer le type de tache. Il s'agit ici, d'un moment de première rencontre auquel les élèves ont déjà été exposés lors des séances précédentes des cours sur la loi binomiale et la loi géométrique.

Cependant, ici, le nouveau moment de première rencontre est le moment de rencontre d'une tache du type, *t* : « calcul de l'espérance de Z, somme de deux variables X et Y ».

Ce type de tâches t ϵ T : « comment démontrer que l'espérance d'une somme est la somme des espérances ? ». Les élèves savent calculer l'espérance pour une loi binomiale, ils savent le faire pour la loi géométrique. Ils vont essayer d'articuler leurs connaissances pour démontrer que E(Z)= E(X)+E(Y).

La question est : Comment faire ? D'où le moment exploratoire. Les élèves exploitent leurs connaissances pour explorer le type de tache de leur activité. Ils travaillent en autonomie, chacun à sa place, le professeur les laisse faire. Il constate des éléments technologiques qui émergent chez certains élèves, avec des erreurs chez les uns, des non aboutis chez les autres.

Tous s'affairent à l'activité, le professeur va guider, conseiller, mais il laisse un topo assez large aux élèves dont voici quelques ébauches.

> Quand on observe l'activité humaine dans différentes institutions, il apparait presque toujours un discours autour de la technique pour accomplir T, même si ce discours est naturalisé, évanouissant, discours dont le but est de légitimer, de justifier la manière de faire τ, c'est la troisième composante du modèle que nous appellerons la technologie θ. Ce mot de technologie est à prendre dans son sens étymologique, discours (logos) sur la technique (techne). C'est une nécessité qui surgit dés qu'on demande une description du faire. Une technologie peut différer suivant l'institution dans laquelle la praxéologie est observée, et il n'y a pas de norme : une technologie relative à une technique peut être sans rapport avec la théorie scientifique. Notons que cette remarque vaut aussi pour les techniques : une technique peut être maladroite, ne pas bien marcher. (Artaud et Sahraoui-Kaidi, 2004, p. 4).

Nous verrons que quelques élèves se rapprochent quand-même de la bonne technologie dont voici le brouillon de l'un d'entre eux :

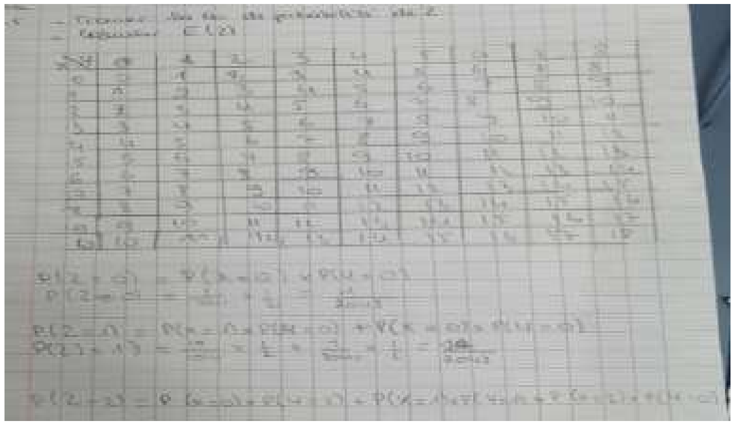

***Figure 3*** **–** *Brouillon d'un élève*

L'heure arrive presque à sa fin, le professeur veut mettre au tableau, par un élève, les ingrédients technologiques nécessaires.

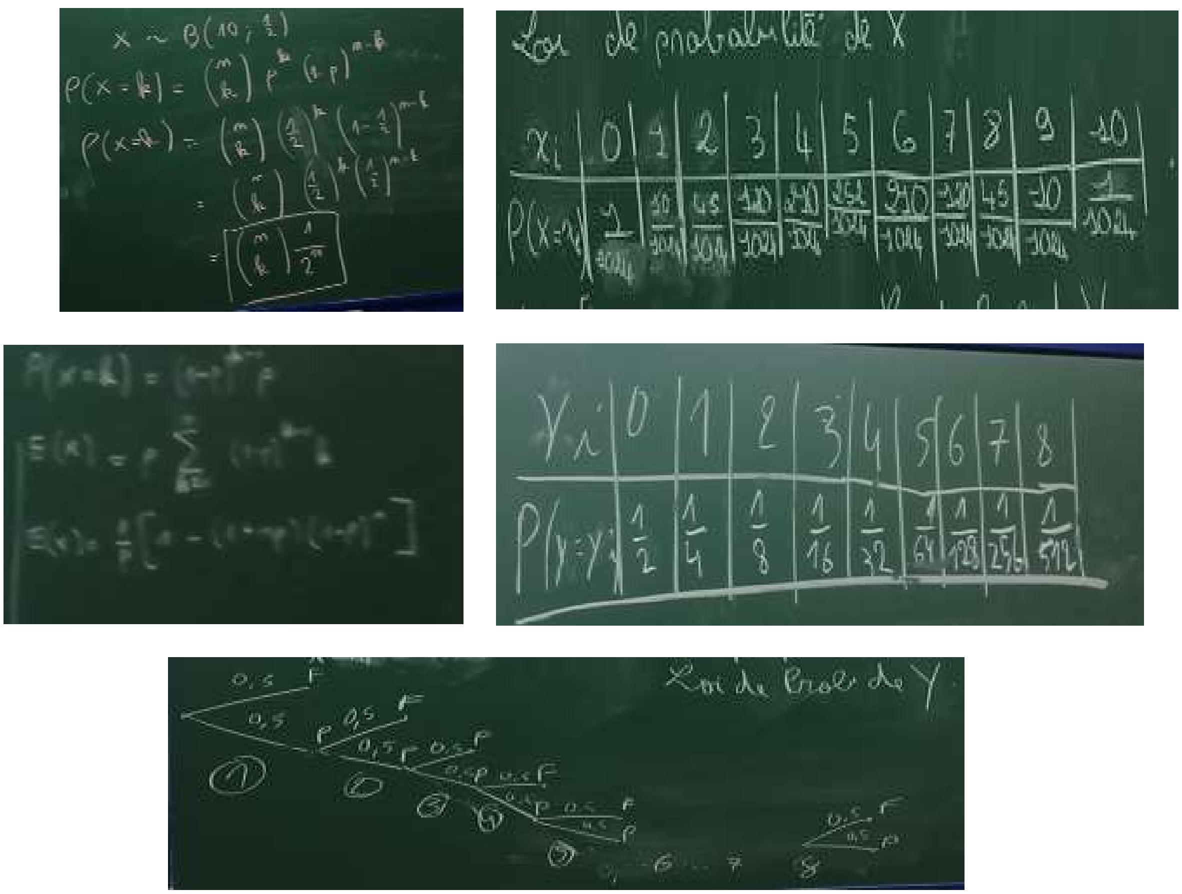


***Figure 4***

Seulement, les élèves se rendent compte que la loi de probabilité de la variable Y est erronée : la somme des probabilités ne donne pas 1.

L'heure sonne, la première séance s'arrête car il est 17h. Le professeur ayant compris d'où venait l'erreur, demande aux élèves de reprendre l'activité chez-eux pour qu'ils parviennent à le comprendre eux-mêmes.

Après la sortie des élèves le professeur me fait remarquer que les élèves n'ayant pas fait un arbre complet, ont oublié de comptabiliser la probabilité sur une branche d'où le manquement pour une somme de probabilité de 1. Il reprend le lendemain matin à la première heure, c'est-à-dire 8 heures du matin. Et là, bonne nouvelle le tableau n'est pas effacé depuis la veille, l'enseignant commence par un retour sur des erreurs repérées lors de la séance précédente (Figure 5). Tous les éléments sont encore présents pour confronter la bonne réponse apportée le matin par certains élèves, par rapport à l'erreur de la veille.

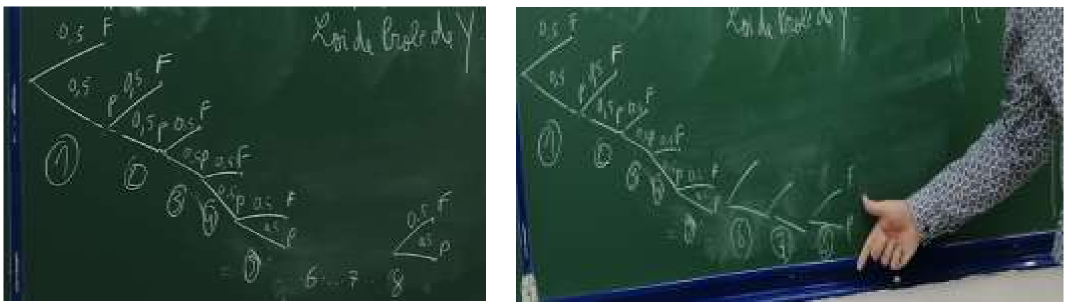

***Figure 5***

Un élève passe au tableau, reprend l'arbre et continue de traiter l'exercice en utilisant un tableau à double entrée pour commencer le calcul de la somme de variable aléatoire Z=X+Y.

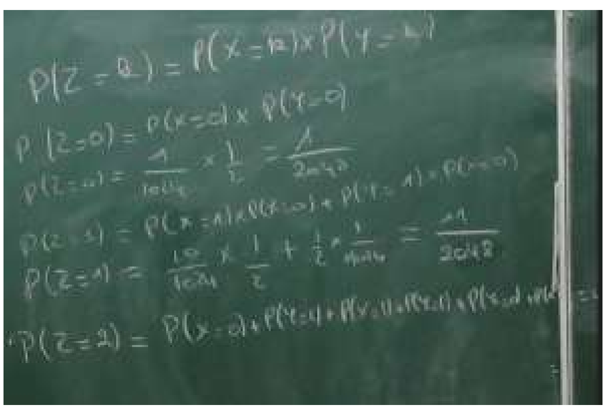

***Figure 6 –*** *calcul de variable aléatoire Z=X+Y*

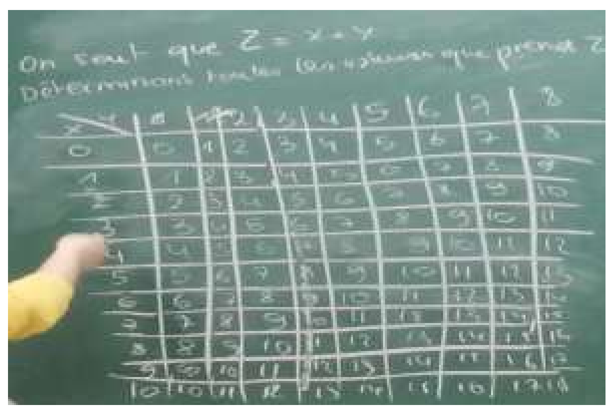

***Figure 7 –*** *Tableau double entrée*

Les élèves font remarquer que les deux évènements sont indépendants et commencent le calcul de P(Z=0), P(Z=1) et P(Z=2) comme le montre le tableau à droite, ci-dessus.

Nous remarquons, lors de cette étude, qu'il y'a une partielle rupture de contrat didactique. Car les élèves vont vite s'apercevoir que leurs connaissances sur E(X) et E(Y) ne suffisent pas à trouver une formule à partir du tableau à double entrées qu'ils établissent.

L'extrait du verbatim entre le professeur et les élèves qui suit, témoigne de la manière dont l'enseignant va conduire la classe par un jeu de questions-repenses pour faire émerger la technique.

- P : « Vous avez à la fois les valeurs prises par X et les valeurs prises par Y,…inaudible…, on entre dans une forme de complexité qui fait intervenir plusieurs variables aléatoires, c'est tout l'enjeu de l'activité, un enjeu important ». Silence dans la salle puis le professeur reprend.

- P : « … en mathématique, on a souvent à décomposer les problèmes complexes en problèmes plus simple ». Silence dans la salle les élèves travaillent chacun devant sa feuille. Le professeur passe dans les rangs, observe les brouillons des élèves.

C'est à partir de cet instant que la question que le professeur veut dévoluer aux élèves émerge chez certains d'entre eux. Le professeur décide alors de faire passer un élève au tableau :

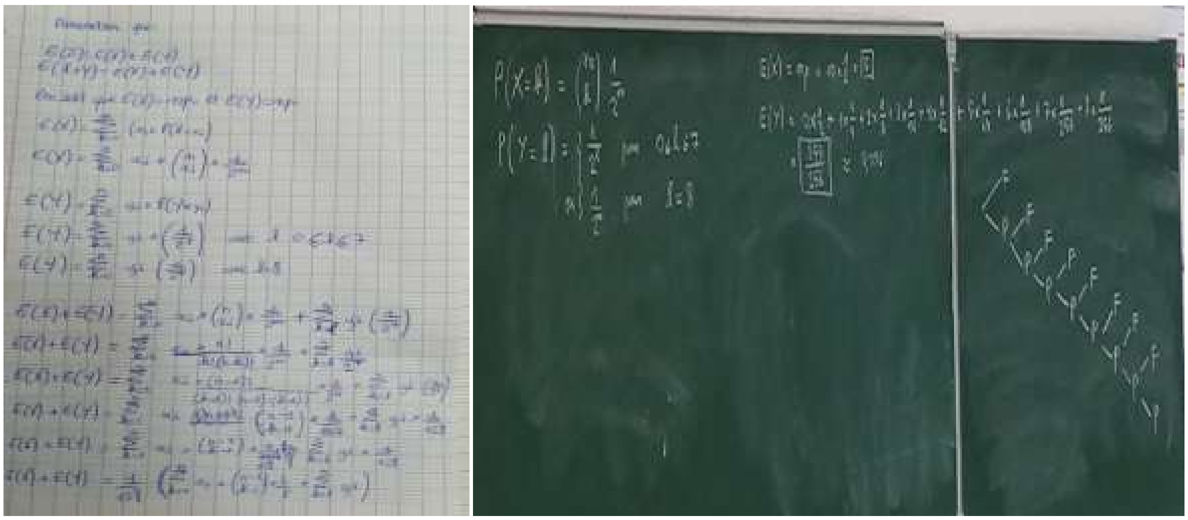

***Figure 8***

Nous pouvons constater ci-dessus, que l'élève a décidé de reprendre l'arbre pondéré de la loi géométrique sur le tableau, et a commencé, ensuite, à redéfinir la loi de chacune des deux variables aléatoires X et Y, puis à calculer l'espérance pour chacune d'entre elles selon ses pré-requis. Ce qui fera émerger un nouveau questionnement : Comment faire ? Sachant que dans l'organisation mathématique du cursus, les élèves ne sont pas censés rencontrer le « SIGMA », sauf que cette classe-là, l'avait étudié au préalable avec le professeur. Ainsi le professeur a surmonté la contrainte de non-existence de ce symbole officiellement dans le programme, en le faisant rencontrer à ses élèves dans des séances précédentes à travers des activités.

Le rapport des élèves à ce savoir ( $\Sigma$ ) hors du contrat didactique du programme a été renforcé par le professeur. Ce qui a rendu ce rapport non vide. Mais cela a couté un temps didactique supplémentaire. Ainsi, le programme officiel confronte les élèves à ce type de taches, mais ne donne pas la technique de démonstration requise.

Les élèves ont un nouvel ingrédient qu'il faudrait ensuite amalgamer à la réponse déjà mise en forme. Ce processus d'amalgamation d'un certain nombre de réponses entre elles nous semble être rendu spécialement nécessaire pour produire la technologie nécessaire pour cette AER. Pour finalement définir la théorie autour de « Lois des grands nombres » établit les conditions sous lesquelles la moyenne de la somme de n variables aléatoires indépendantes, centrées sur leur espérance mathématique, converge en loi. Même si elle n'est pas énoncée explicitement, en tant que telle par les élèves.

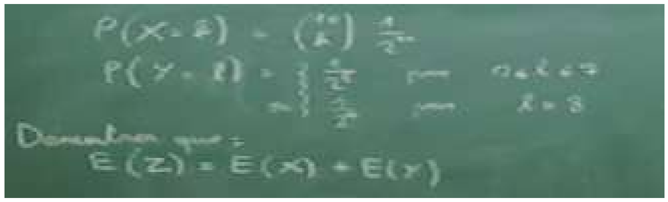


***Figure 9***

On aboutit lors de la séance observée à un résultat de nature technologique et à l'émergence d'une nouvelle question cruciale : Peut-on trouver ce résultat d'une manière moins longue ? Effectivement, le professeur leur montre sur le tableau, comment investir leurs connaissances autrement, et de là l'institutionnalisation.

# V. CONCLUSION

L'analyse de la séance de travail a mis en évidence les difficultés chez les élèves sur la maitrise des propriétés d'associativité des sommes et révèle les obstacles didactiques et épistémologiques dans l'enseignement et l'apprentissage de ses objets. Ce qui a été un frein pour les élèves à l'aboutissement de la démonstration de manière optimale de la linéarité de l'espérance mathématique, alors que les autres objets semblaient mieux acquis, notamment la loi de probabilité, l'application de la loi binomiale et la loi géométrique tronquée. Le milieu sera pertinent pour l'analyse des phénomènes observés lors de l'expérimentation présentée. La démonstration des élèves s'avérait plus couteuse que celle du professeur. Nous constatons lors de l'économie de la technique apportée par le professeur que les élèves arrivent à donner du sens à la problématique.

## RÉFÉRENCES

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématique*, *9*(3), 309-336.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Dans N. Bednarz et C. Garnier (dir.), *Construction des savoirs, obstacles et conflits* (p. 41-63). CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516581v1

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112. https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/

Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R. et Floris, R. (dir.). (2002). *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques, 21-30 aout 2001, Corps (Isère).* La pensée sauvage.

Ministère de l'Education nationale (MEN), et Direction de l'Enseignement Scolaire. (2019). *Mathématiques. Classe de première des séries générales*. Centre national de documentation pédagogique.

Raoult, J.-P. et Arnoux, P. (2013). *Pourquoi enseigner les probabilités et la statistique dans les cours de mathématiques.* Image des maths. https://images.math.cnrs.fr/billets/pourquoi-enseigner-les-probabilites-et-la-statistique-dans-les-cours-de-mathematiques-completer/