

LA LOGIQUE ET L'APPRENTISSAGE DE LA DÉMONSTRATION À LA TRANSITION SECONDAIRE-UNIVERSITÉ

| TILMAN* ÈVE

Résumé | Ce travail de recherche examine les difficultés logiques rencontrées par les étudiants lors de l'apprentissage de la démonstration mathématique à la transition secondaire-université. Il identifie plusieurs obstacles, tels que la manipulation des variables liées, la négation, la quantification implicite et la distinction entre contraposée et réciproque. L'étude analyse comment ces difficultés sont traitées dans les cours d'initiation à la démarche mathématique en Fédération Wallonie-Bruxelles et propose des perspectives de poursuite du projet.

Mots-clés : didactique des mathématiques, logique, démonstration, difficultés d'apprentissage, transition secondaire-université

Abstract | This research work examines the logical difficulties encountered by students when learning mathematical demonstration at the high school-university transition. It identifies several obstacles, such as the manipulation of related variables, negation, implicit quantification and the distinction between contraposed and reciprocal. The study analyzes how these difficulties are dealt with in introductory courses to the mathematical approach in the Wallonia-Brussels Federation and proposes prospects for continuing the project.

Keywords: Didactics of mathematics, logic, demonstration, learning difficulties, Secondary school-university transition

I. CONTEXTE

Ce projet vise à explorer les questions de logique et d'apprentissage de la démonstration à la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, dans le cadre d'une thèse en didactique des mathématiques.

Dans l'enseignement secondaire belge francophone, « Les concepts et méthodes de la logique ne font pas l'objet d'un cours spécifique, mais prennent naturellement leur place dans la plupart des unités. » (Ministère de l'Enseignement obligatoire et de promotion sociale de la Communauté française, 2025)

Les étudiants de première année de bachelier en sciences mathématiques arrivent souvent avec une vision utilitaire et technique des mathématiques. Ils rencontrent des difficultés face au langage abstrait et au concept de démonstration. En 2004, à l'université de Namur et à la suite de l'allongement des études, le cours d'initiation à la démarche mathématique est créé. Il aborde la logique des propositions et son utilisation dans des problèmes mathématiques, les stratégies de démonstration et certains concepts de base comme les ensembles et les relations. Il a pour objectif d'accompagner les étudiants et de leur faire manipuler les techniques et les concepts vus dans les cours d'analyse et d'algèbre.

Des initiatives similaires ont eu lieu dans les différentes universités de la Fédération Wallonie-Bruxelles.

* Université de Namur – Belgique – eve.tilman@unamur.be; Centre Scolaire Asty-Moulin – Belgique – tilev@site.asty-moulin.be

II. INTRODUCTION

Nos questions de recherche sont les suivantes :

- Quels sont les obstacles rencontrés par les apprenants dans leur pratique de la logique mathématique ?
- Comment ces obstacles apparaissent-ils dans les cours d'introduction à la démarche mathématique en FWB ?
- Comment les étudiants de première année se situent-ils par rapport à ces obstacles ?
- Quelles sont les pratiques enseignantes qui favorisent la disponibilité des outils de la logique mathématique ?

Ce travail vise à réaliser un état de l'art de la didactique de la logique afin d'identifier les difficultés liées à l'apprentissage de la démonstration et de chercher de quelle manière ces difficultés sont abordées au sein des cours introductifs.

Pour cela, nous allons présenter certaines difficultés connues en les illustrant par des exemples concrets. Nous allons également illustrer notre analyse par des réponses d'étudiants.

III. ÉTAT DE L'ART

Nous nous sommes intéressés aux difficultés bien connues que les étudiants peuvent rencontrer lorsqu'ils doivent comprendre ou créer une démonstration. Certaines sont d'ailleurs déjà identifiées pour les élèves de secondaire.

Pour cela, nous allons lister plusieurs difficultés, les expliquer et donner des exemples dans lesquels elles sont rencontrées.

1. *Les variables liées*

Les variables liées sont déterminées par les quantificateurs universel et existentiel. En analyse, par exemple, la définition de limite utilise des variables liées qui doivent être maniées avec prudence. Durand-Guerrier et Arsac (2003) donnent l'exemple d'une démonstration erronée du théorème des accroissements finis généralisé¹ fréquemment rencontrée chez les étudiants.

Cette démonstration consiste en l'application du théorème des accroissements finis² successivement aux deux fonctions f et g , et conclure en faisant le quotient.

L'erreur provient du fait que le réel c du théorème des accroissements finis est lié à la fonction (f ou g) sur laquelle le théorème est appliqué. Dans la pratique, les mathématiciens éviteront cette erreur en utilisant une instanciation différente du réel à chaque application du théorème.

Cette difficulté est traitée dans le cours d'initiation à la démarche mathématique. Nous allons donc pouvoir étudier comment elle est traitée.

¹ **Théorème des accroissements finis généralisé** : Étant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et deux fonctions numériques f et g définies et continues sur l'intervalle fermé $[a; b]$, dérivables sur l'intervalle ouvert $]a; b[$, si la dérivée g' de la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]a; b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a; b[$, tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

² **Théorème des accroissements finis** : Étant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction numérique f définie sur l'intervalle fermé $[a; b]$, si f est continue sur l'intervalle fermé $[a; b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a; b[$, tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

2. La négation

La négation a pour effet de changer la valeur d'une proposition. Elle est problématique dans de nombreux cas. Illustrons cela par un exemple issu du séminaire du réseau des IREM du 20 mars 2024 (Lac, Bernard et Mesnil, 2024) présentant la brochure de Logique et raisonnement.

Lorsqu'on demande à des enseignants ou des étudiants en formation d'enseignant de donner la négation de la proposition suivante :

- « Si le triangle ABC est rectangle en A , alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$? »,

beaucoup répondent :

- « Si le triangle ABC n'est pas rectangle en A , alors $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$? »,

Or, d'une implication universellement quantifiée fait apparaître une existentielle et une conjonction :

- « Il existe un triangle ABC rectangle en A tel que $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ ».

Il est évident que si cette difficulté est présente pour les enseignants, elle est aussi présente pour les élèves.

Nous retrouvons également cette difficulté dans les réponses d'étudiants. Nous avons accès aux réponses données dans le cadre des « Passeports pour le bac » (Massart, 2025)³. Il s'agit d'un projet comprenant une évaluation formative des prérequis, sous forme de questionnaire à choix multiples, à destination des étudiants en début de première année d'université à l'université de Namur et à l'UCLouvain Saint-Louis Bruxelles. Ces étudiants n'ayant pas encore reçu d'enseignement universitaire, ce sont leurs connaissances antérieures qui sont évaluées.

La question ciblée dans notre analyse est la suivante :

34. La négation de la phrase « personne n'aime tout le monde » est :

- (a) Personne n'aime personne.
- (b) Tout le monde aime quelqu'un.
- (c) Tout le monde aime tout le monde.
- (d) Il y a au moins quelqu'un qui aime tout le monde.
- (e) Il y a au moins quelqu'un qui n'aime personne.

Figure 1 – Question 34 des Passeports pour le bac 2024 sur la négation

Cette question regroupe de nombreuses difficultés. Tout d'abord, la phrase est écrite en français. Cela augmente le recours à l'usage de la langue française plutôt qu'à la logique mathématique. Ensuite, les expressions « personne » et « tout le monde » font référence au quantificateur logique universel. Enfin, la négation est elle-même une difficulté. Dans son habilitation à diriger des recherches, Viviane Durand-Guerrier explique en détail les difficultés liées à la négation, et en particulier la distinction entre négation et contraire. Elle y explique que deux propositions sont contraires si elles ne peuvent être vraies simultanément, alors que deux propositions sont la négation l'une de l'autre, si elles échangent

³ Le nom du projet vient du fait qu'en Belgique, le nom du diplôme de premier cycle d'université est le bachelier, usuellement abrégé en « bac ».

leurs valeurs de vérité, c'est-à-dire que lorsque l'une est vraie, l'autre est fausse et inversement (Durand-Guerrier, 2005).

Bien que la réponse correcte soit la réponse (d), les répondants donnent majoritairement les réponse (b). En effet, ce distracteur est un contraire de la proposition à nier.

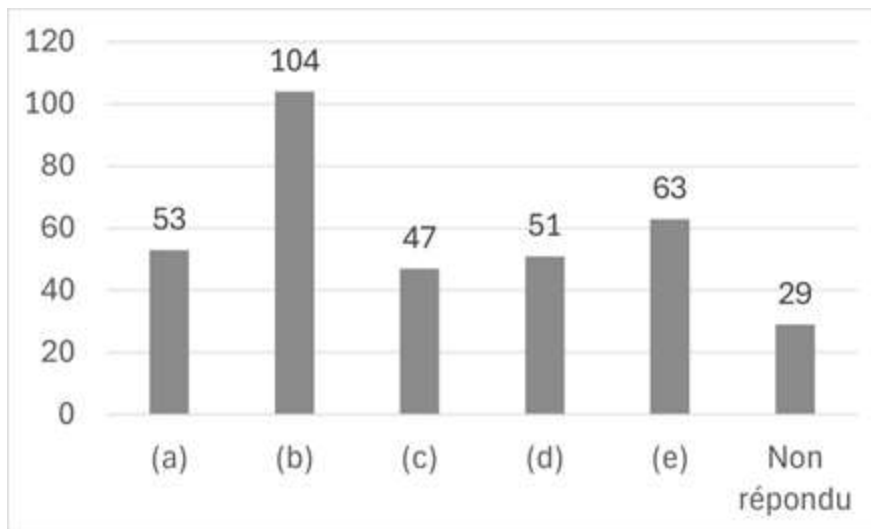


Figure 2 – Réponses données par les étudiants à la question 34 du Passeport pour le bac 2024

Cette difficulté est traitée dans le cours d'initiation à la démarche mathématique. Nous allons donc pouvoir l'analyser également.

3. La quantification implicite

La quantification implicite est problématique, car elle peut aboutir à une contingence de la valeur de vérité. Durand-Guerrier (1999) analyse cette contingence dans l'exemple du labyrinthe (voir figure 3).

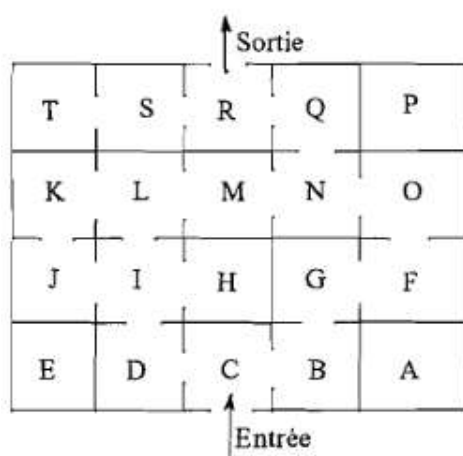


Figure 3 – Exemple du labyrinthe

L'énoncé est le suivant : une personne, que nous appellerons X , a traversé ce labyrinthe, de l'entrée à la sortie, sans jamais passer deux fois par la même porte. Les pièces sont nommées $A, B, C \dots$ comme

il est indiqué sur la Figure 3. Pour chaque proposition, les élèves doivent dire si elle est vraie, fausse ou si on ne peut pas savoir si elle est vraie ou fausse.

La proposition amenant le plus de contingence est : « Si X est passé par L , alors X est passé par K ». Durand-Guerrier analyse dans son article que cette incertitude est causée par l'existence de chemins passant par L et K aussi bien que de chemins passant par L , mais pas par K . La quantification étant implicite, les élèves ne savent généralement pas se prononcer sur la valeur de vérité de l'énoncé.

On retrouve également cette contingence chez les élèves plus jeunes. Voici un exemple donné dans Durand-Guerrier et Arsac (2003), dont la source est un énoncé universellement quantifié faux : « Soit Q un quadrilatère. Si les diagonales de Q sont perpendiculaires, alors Q est un losange ».

Cette fois encore, on peut donner des exemples où l'énoncé est vérifié et d'autres où il ne l'est pas. La quantification étant implicite, on ne peut pas dire si cet énoncé est vrai ou faux.

La quantification implicite est également traitée dans le cours d'initiation à la démarche mathématique. Par exemple, un exercice demande d'écrire sous forme mathématique la définition d'une application injective : deux points distincts ont des images distinctes.

4. *Implications dont la prémisse est fausse*

La table de vérité de l'implication amène toujours des discussions et des difficultés. En particulier, lorsque la prémisse est fausse. Or, cette propriété est utilisée dans toutes les implications universellement quantifiées. Dans la présentation de la brochure sur la logique (Lac, Bernard, et Mesnil, 2024), Mesnil illustre son propos en expliquant que dans la démonstration d'une implication, on ne démontre que le cas où la prémisse est vraie, car on sait que l'implication est vraie lorsque la prémisse est fausse. Elle donne également un exercice pour travailler l'implication : « Démontrer que pour tout entier naturel n , $(10n + 1 \text{ divisible par } 9) \Rightarrow (10n+1 + 1 \text{ divisible par } 9)$ ».

5. *Distinction entre contraposée et réciproque d'une implication*

La confusion entre contraposée et réciproque d'une implication est bien connue et travaillée en conséquence dans le cours d'initiation à la démarche mathématique. Par exemple, l'exercice suivant est proposé : « Énoncé (en français) la négation, la contraposée et la réciproque de l'implication suivante : "Si je réussis mes examens et si j'ai assez d'argent, alors je pars en vacances" ».

6. *Distinction entre démonstration par contraposée et par l'absurde*

Les démonstrations par contraposée et par l'absurde peuvent facilement être confondues. Les deux stratégies reposent sur la négation. Une démonstration par l'absurde nie le contexte, une démonstration par l'absurde nie quant à elle la thèse d'une implication explicite et conclut en niant son hypothèse.

La preuve par l'absurde est majoritairement utilisée pour la démonstration de non-existence ou l'unicité. Celle par contraposée est quant à elle utilisée pour démontrer les implications dont l'antécédent est compliqué. S'il est simple, on utilisera plutôt une preuve directe.

Cette distinction est explicitée dans le cours sous la forme suivante :

Preuve par contraposée :	
à démontre	$P \Rightarrow Q$
on démontre	$\neg Q \Rightarrow \neg P$

Preuve par l'absurde :	
à démontrer	$P = 1$
on démontre	$\neg P = 0$ (on suppose que la négation est vraie et on essaie d'aboutir à une contradiction)

Figure 4 – Distinction entre démonstration par contraposée et par l'absurde

D'autres difficultés, comme la récurrence, existent et pourraient être creusées. Nous décidons cependant de ne pas nous y attarder dans un premier temps.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons identifié, expliqué et illustré, au sein de la logique, les difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'apprentissage de la démonstration. Cela nous a permis d'étudier la manière dont ils sont traités dans les cours d'introduction à la démarche mathématique à l'université de Namur.

Nous pourrions étendre cette analyse aux autres universités de la Fédération Wallonie-Bruxelles et analyser des réponses d'étudiants au sein de l'évaluation de ces cours.

Dans un second temps, notre travail portera sur la manière dont les étudiants de première année se situent par rapport à ces difficultés dans les cours de mathématiques générales tels que l'analyse ou l'algèbre.

Nous nous demanderons également ce que nous pouvons mettre en place pour que les étudiants et les enseignants puissent rentrer les éventuels obstacles non traités dans le cadre des cours d'initiation.

RÉFÉRENCES

- Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x*, (50), 57-79.
- Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique* [Habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard – Lyon I]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-00201626v1>
- Durand-Guerrier, V. et Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(3), 295-342.
- Lac, P., Bernard, D. et Mesnil, Z. (2024, 20 mars). *Présentation de la brochure Logique et raisonnement de la commission Inter-Irem Lycée* [Vidéo]. Serveur vidéo de l'IREM de Paris. <https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/w/e7abb54e-b593-4046-b937-82ff6fb23ba7>
- Massart, X. (2025). *Passeport pour le BAC*. Repéré le 30 juin 2025 au : <https://www.passeportspourlebac.be/>
- Ministère de la Communauté française. (2014, 17 avril). *Arrêté du Gouvernement de la Communauté française déterminant les compétences terminales et savoirs requis à l'issue de la section de transition des humanités générales et technologiques en mathématiques, en sciences de base et...* (Numac : 2014029173) Service Public Fédéral Belge. <https://www.ejustice.just.fgov.be/eli/arrete/2014/01/16/2014029173/moniteur>