UNE EPÉRIENCE DE FORMATION D'ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES
La Notion de Marque d'une Transformation Géométrique du Plan

Mamadou Souleymane SANGARÉ*

Résumé : Ce texte est relatif à une recherche-action sur la formation de futurs professeurs de mathématiques à propos de l'enseignement des transformations géométriques dans les lycées du Mali. Il s'agit de mener une expérience de formation sur certaines questions liées au rapport "*savoir universitaire/savoir scolaire*". Cette recherche s'appuie sur un résultat de recherche en didactique des mathématiques, *le modèle des marques d'une transformation géométrique du plan*. Initialement, ce modèle a été réalisé pour faire évoluer les conceptions d'élèves en début de lycée. Cette évolution se situe dans la problématique du passage des conceptions *transformations de figures* aux conceptions *transformations ponctuelles*. Nous tentons dans cette expérience d'utiliser le modèle des marques comme élément de formation à l'enseignement des transformations au lycée. Un bref aperçu est donné sur le contexte dans lequel s'effectue la formation mathématique à l'École Normale Supérieure de Bamako. Nous concevons ensuite une séquence comprenant trois situations de formation dont la mise en œuvre s'effectue selon le scénario suivant : *énoncé de la situation→objectif(s) de la situation→Résultats attendus→Bilan suivi d'un résumé des comportements d'élèves-professeurs*.

INTRODUCTION

La formation mathématique des élèves-professeurs à l'École Normale Supérieure de Bamako est orientée depuis l'année *2005*, vers la recherche permanente d'une meilleure articulation entre *mathématiques universitaires* et *mathématiques scolaires*. Cette option se traduit pour la filière « Formation des Professeurs d'Enseignement Secondaire (*PES*)[1] », par la conception et la mise en pratique d'un certain nombre de cours, en lien étroit avec l'étude des questions d'enseignement/apprentissage des mathématiques. Notre intérêt porte sur l'enseignement intitulé, "*Enseignement de la Géométrie au Lycée*" dont l'exécution débuta à la rentrée *2005-2006*. Le vécu de ces trois premières années, nous a permis de faire un premier état des lieux sur cette modalité de pratiques de formation, en particulier sur des questions liées à la prise en compte des relations entre *savoir universitaire* et *savoir scolaire*.

I. CONTEXTE DE L'EXPÉRIENCE

I.1. La Formation d'Enseignants à l'École Normale Supérieure de Bamako

L'ouverture de l'université de Bamako en *1996* a entraîné une reformulation des missions de formation de l'École Normale Supérieure de Bamako[2]. Deux filières de formation d'enseignants sont ouvertes actuellement.

– La filière *Formation des Professeurs d'Enseignement Secondaire* (PES) : La formation a une durée de deux ans ; le recrutement s'effectue sur concours

* Équipe de Didactique des Mathématiques (ÉDiMath**)** – D.E.R. de Mathématiques – École Normale Supérieure de Bamako, BP. 241, MALI.

[1] Au Mali, le Professeur d'Enseignement Secondaire enseigne au lycée.

[2] Cf. le décret n°00-054/P-RM du *11* février *2000* portant sur les missions, l'organisation et les modalités de fonctionnement de l'École Normale Supérieure de Bamako.

direct avec comme niveau minimal, la licence. La première année est consacrée aux enseignements sur des compléments disciplinaires et à la didactique desmathématiques;la seconde est réservée au stage pratique dans un lycée et à la préparation d'un mémoire professionnel.

– La filière *Formation des Professeurs d'Enseignement Fondamental* (PEF)[3] : la formation a une durée de quatre ans ; le recrutement s'effectue sur concours professionnel avec comme niveau minimal le grade de maître principal (à peu près le niveau Baccalauréat). Les deux premières années sont consacrées aux enseignements sur des compléments disciplinaires correspondant au niveau du *DEUG*. La troisième année est réservée aux enseignements liés à la pédagogie et à la didactique. La quatrième année est prévue pour un stage pratique avec un volet administratif et un volet pédagogique ; il est effectué en lien étroit avec la préparation d'un rapport de stage.

I.2. Bref Aperçu sur le module "*Enseignement de la Géométrie au Lycée*"

I.2.1. Sur les objectifs de la formation

Deux principaux objectifs sont assignés à l'"*Enseignement de la Géométrie au Lycée*".

- Donner aux élèves-professeurs des connaissances théoriques et des outils méthodologiques qui leur permettent d'exécuter de façon satisfaisante, les programmes de géométrie du lycée.
- Permettre aux élèves-professeurs de construire et de réaliser en classe des séquences d'enseignement/apprentissage sur la géométrie, d'intérêt pédagogique attesté, et qui respectent l'esprit des programmes du lycée au Mali.

I.2.2. Sur le contenu de la formation

Le contenu est modulable suivant l'état de connaissances des élèves-professeur à l'entrée en première année *P.E.S* ou encore selon les recommandations faites en conseil pédagogique en fin d'année. Néanmoins les éléments ci-dessous ont été retenus durant ces trois premières années d'application.

Étude des figures de base du plan et de l'espace : Cet élément de formation fait le point sur les principales figures de base du plan et de l'espace prévues au lycée. Il s'agit de faire approprier les caractéristiques de chaque figure, tout en établissant les liens logiques entre celles-ci.

Constructions Géométriques : Le contenu de cet élément de formation est assez ouvert.Le but essentiel est de faire de l'usage des instruments une exigence dans les pratiques pédagogiques, lorsque les activités géométriques proposées s'y prêtent.

Étude des transformations du plan et de l'espace : Cet élément porte sur un inventaire des applications affines d'un espace affine quelconque de dimension au plus égal à *3*. Il est suivi de l'étude des applications affines d'un espace affine euclidien. L'accent est mis sur l'étude des applications affines figurant aux programmes des classes de lycée.

[3] Au Mali, le Professeur d'Enseignement Fondamental enseigne au Second Cycle Fondamental (équivalent du collège en France).

La formation à "*l’enseignement de la géométrie au lycée*" commence en principe chaque année, après une avancée significative dans l’exécution du complément de cours de mathématiques intitulé "*Algèbre linéaire et Géométrie Affine de la Droite du Plan et de l’Espace*". Sa mise en œuvre pratique est menée en tenant compte de certains outils théoriques relevant de la didactique des mathématiques.

I.3. Avènement desEnseignants Contractuels auLycée depuis 1996

La rentrée scolaire 1996 a vu l’arrivée au lycée d’enseignants appelés contractuels de l’éducation.La plupart d’entre eux n’ont pas reçu de formation initiale d’enseignants de mathématiques.Leur arrivée a permis de pallier l’insuffisance notoire de professeurs, en particulier dans l’enseignement des mathématiques[4]. Cependant, le rapport de l’Inspection de l’Enseignement Secondaire (*2004*), relatif à l’exécution des programmes d’enseignement de mathématiques fait apparaître plusieurs disfonctionnements.Notre intérêt porte en particulier le passage suivant : « un renvoi systématique à la fin de l’année scolaire de chapitres de géométrie élémentaire (*p. 17, 2004*) ».Les élèves-professeurs concernés par la présente expérience, pour leur cursus lycéen, sont issus de cette formation.

II. ORIGINE ET MOTIVATIONS D’UNE EXPÉRIENCE DE FORMATION

II.1. Une Activité de Construction Géométrique

La situation[5] qui est à l’origine de cette expérience en première année *P.E.S.* est relative à l’élément de formation, "*Étude des transformations du plan et de l’espace*". Elle est libellée de la façon suivante :

L’exercice ci- dessous est proposé aux élèves d’une classe de 10^{e} S[6], après enseignement de la leçon sur la rotation plane.

*Le triangle ABC est isocèle en A. La rotation d’angle représenté par θ transforme ABC en XYZ dans cet ordre. Ce triangle-image a été effacé sauf le point X, transformé du point A. (**Fig.1**)*

Peux-tu reconstruire le triangle XYZ ? Explique ta construction.

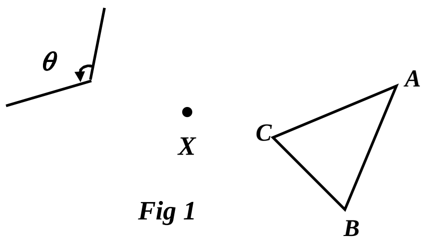

Fig 1

On vous demande d’effectuer les tâches suivantes :

(*T*$_1$) : Résoudre l’exercice ; on décrira à chaque fois :
- La technique de construction ;
- Les propriétés géométriques utilisées dans chacune de ces constructions.

(*T*$_2$) : On suppose que l’utilisation du centre de la rotation considérée n’est pas autorisée pour la construction du triangle *XYZ*. Pouvez-vous identifier deux points possibles de blocage des élèves dans la résolution de cet exercice ? Justifiez à chaque fois votre réponse.

II.2. Objectif de l’activité – Stratégies de résolution du problème

[4] Les estimations de *2007-2008*, indiquent que les professeurs contractuels constituent au moins 60% de l’effectif total des professeurs de mathématiques dans les lycées au Mali.

[5] La séance s’est déroulée le *27* mars *2007*.

[6] La *10^{e} S* est à peu près équivalente à la *2^{e} S*.

Objectif : L'objectif de l'activité était double : il s'agissait d'abord de tester les compétences des élève-professeurs dans une tâche de construction géométrique à l'aide d'instruments, puis les inciter lorsque cela est nécessaire, à utiliser les propriétés de conservation exception faite du centre de la rotation pour construire le triangle image *XYZ*.

Stratégies de résolution du problème :Deuxstratégies de résolution du problème que nous noterons respectivement (***S_1***) et (***S_2***) étaient attendues.

- La stratégie (***S_1***) est fondée sur la détermination préalable du centre de la rotation. La construction des points *Y*et *Z* s'effectue par des techniquesutilisant uniquement le centre et l'angle de la rotation en jeu.
- La stratégie (***S_2***) n'utilise pas le centre de la rotation, elle se fonde uniquement sur les autres propriétés de conservation de la rotation (distance, angle orientée, etc.).

Nos pratiques de classe tendent à privilégier les techniques qui considèrent la détermination du centre de la rotation en jeu,comme unesorte de condition nécessaire à la construction de la figure demandée. Ce choix peut être considéré comme une restriction à l'émergencede techniques de résolution, en particulier celles utilisantles autres propriétés de conservation. C'est ce qui justifie la proposition de la tâche (**T_2**).

II.3. Synthèse des Résultats de l'Activité

II.3.1. Résumé des comportements d'élèves-professeurs

Les élèves-professeurs ayant participé à cette séquence sont au nombre de *24* ; les deux tâches ont été exécutées de façon individuelle. Les deux tableaux ci-dessous, donnent un résumé des types de réponses donnéesrespectivement à la tâche (**T_1**) et à la résolution du problème par la stratégie (***S_2***) dans la tâche (**T_2**).

(***T_1***)	(***S_1***)	(***S_2***)	**Réponses Erronées**
	17	***0***	***7***

Tableau 1

(***T_2***)	(***S_2***)	**Réponses Erronées**	**Pas de Réponse**
	6	***8***	***10***

Tableau 2

II. 3.2. Quelques difficultés révélées à l'issue de cette activité

L'analyse des résultats ci-dessus montrent que certaines connaissances géométriques et d'autres non géométriques nécessaires à la résolution de cet exercice, n'étaient pas disponibles chez la plupart de ces élèves-professeurs.

•Les résultats de type «Pas de Réponse » du tableau (***Tableau 2***), sont dus essentiellement àl'insuccès des intéressés à construire par exemple, le point *Y* tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{XY})=\theta$ sans utiliser le centre et l'angle de la rotation en jeu.

•Un second type de difficultés est relatif à l'utilisation des propriétés géométriques destransformations (leur effet sur les longueurs, les angles, le parallélisme, l'orthogonalité, la tangence, etc.) comme outils de construction de figures.Par exemple, « comment utiliser l'orientation de l'angle θde la rotation en jeu pour anticiper sur la position du centre de rotation à partir de la figure par rapport aux deux demi-plans de frontière la droite (*AA'*) ? »Or, les programmes de *10*e sciences stipulent que : « l'on présentera quelques situations où interviennent les transformations pour démontrer une propriété, construire une figure, rechercher un ensemble de points (1992, p. 5).»

II.3.3. Des indicesliés à un besoin de formation

Nous avons constaté[7] chez les élèves-professeurs, une assez bonne maîtrise des connaissances mathématiques exigibles sur le cours intitulé, "*Compléments d'algèbre linéaire et de géométrie*". Cependant, le réinvestissement de ces acquis n'est effectif que dans le domaine de la géométrie analytique.En résolution de problèmes, la transformation est réduite à sa forme ponctuelle et traduite en un système d'équations linéaires de $\mathbb{R}^2$. En revanche, par rapport à la géométrie du début de lycée, bon nombre d'élèves-professeurs étaient encore au niveau d'une géométrie « où les observations à faire ne reposent que sur des impressions visuelles (Rauscher, 1994, p.292) ». Pour les transformations du plan, les moyens de contrôle exercés dans les tâches liées aux situations proposées sont très réduits : ils se résument le plus souvent à la comparaison de visu des positions relatives de figures homologues. Les acquis de leur formation académique se trouvent donc presque déconnectés par rapport aux exigences professionnelles. Or ces futurs professeurs sont appelés à faire acquérir par les élèves de *10*[e] science les compétences ci-dessous à propos des transformations du plan :

- *formuler les propriétés géométriques d'une transformation ?*
- *établir une classification des transformations géométriques du plan?*
- *caractériser une transformation géométrique du plan ?*

Ces difficultés à première vue anodines, sont des indices d'un certain besoin de formation que l'on peut situer à mi-chemin entre les"mathématiquesdu lycée", très partiellement enseignées avec des chapitres de géométrie occultéssciemment, et les "mathématiques académiques".Ainsi, le formateur se trouve confronté simultanément à un triple défiqui pourrait s'énoncer comme suit : permettre aux élèves-professeurs de combler l'essentiel des lacunes sur la géométrie du lycée, concevoir des situations pertinentes de formation d'enseignants sur cette géométrie du lycée, et leur permettre de prendre de la hauteur sur cette géométrie du lycée en la reliant à la géométrie universitaire, pour unedurée annuelle de formation de *60* heures.

III. PRINCIPES FONDATEURS D'UN ÉLÉMENT DE FORMATION

L'élaboration de cet élément de formation s'est effectuée en nous fondant sur un certain nombre principes d'ordre théorique et méthodologique.

Passage d'un métier « artisanal » à une profession réfléchie *:* Altet M. (*2001*) propose un modèle de «l'enseignant-professionnel» fondé sur « le passage du métier artisanal où l'on applique des techniques et des règles vers la profession où l'on construit ses stratégies en s'appuyant sur des savoirs rationnels et en développant son expertise de l'action en situation professionnelle ainsi que son autonomie. (Altet M., *2001*, p. *29*) ». En effet, à défaut d'une formation réfléchie, les élèves-professeurs peuvent être tentés d'useruniquement de *recettes pédagogiques*, (par exemple le choix d'une seule ressource

[7] A partir de trois contrôles successifs sur les éléments suivants :"*Applications affines du plan et de l'espace*" ; "*Isométries et similitudes du plan et de l'espace affines euclidiens*". Ces éléments relèvent du complément de cours de mathématiques intitulé "*Algèbre linéaire et Géométrie Affine de la Droite du Plan et de l'Espace*".

pédagogique). Ceci risqueraitde produire les mêmes lacunes au niveau de leurs élèves dont eux-mêmes ont été victimes.

Le "caractère intégrateur" de la didactique des mathématiques : L'élaboration de cet élément de formation s'appuie également sur le point de vue de Brousseau (2000) selon lequel, « La dépendance de l'enseignement par rapport à de nombreux domaines de connaissances conduit à un engorgement décourageant de la formation. La didactique réduit les redondances qui en résultent et rend plus facile l'organisation de cours centrés sur l'activité principale visée (Brousseau G., 2000, p. 29)». La didactique des mathématiques nous permet à la fois de mieux préciser les significations des résultats obtenus plus haut (***Tableau 1*** et ***Tableau 2***) pour concevoir et réaliser une séquence de formation pertinente, et qui tient compte de la contrainte de temps imparti pour l'exécution du module.

L'évolutionfréquentedes objets d'enseignement:Selon Chevallard (1994), «Le curriculum ne cesse de bouger. La transposition est pour cela un processus continué, dont il serait naïf de penser qu'il permette une stabilisation prolongée du curriculum(Chevallard, 1994)». Cette caractéristique de l'objet d'enseignement nous paraît assez importante ; sa prise en compte en formation de futurs professeurs de mathématiques s'avère pertinente afin de mieux gérer les fréquentes réformes de programmes et (ou) les innovations pédagogiques.

IV. ÉLÉMENT DE FORMATION– DISPOSITIF DE FORMATION

IV.1. La marque d'une transformation géométrique du plan

L'élément de formation est issu d'un résultat de recherche en didactique des mathématiques[8]. Il s'agit d'un modèle de transformation géométrique du plan appelé « modèle des marques » qui est destiné à des niveaux scolaires allant du second cycle fondamental au début du lycée.

La définition proposée est la suivante :

> *Nous appelons marque d'une transformation, tout segment [MM'] qui joint un point M de la figure objet à son transformé M' sur la figure image.*

Les marques constituent une représentation visuelle du lien fonctionnel de la transformation en jeu. Elles peuvent être tracées de façon effective comme elles pourraient être évoquées au cours d'un processus de résolution de problème. Sur la figure (***Fig. 2***), F_o et F_i(traits en pleins)désignent respectivement les figures objet et image dans la transformation *f* en jeu. Le lien fonctionnel est matérialisé par les marques (traits en pointillés) d'extrémités un point de F_o et son image sur F_i.

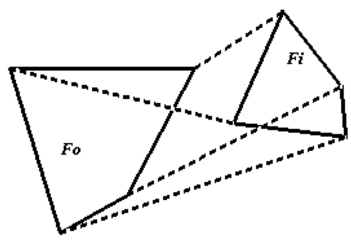

Fig. 2

IV.2.Les raisons de ce choix

Le choix du modèle des marques comme élément de formation repose sur certains critères qui nous semblent pertinents par rapport aux principes fondateurs évoqués plus haut.

[8] Cf. Sangaré M. (2000)

Légitimité mathématique du modèle : Pour une transformation donnée *f* et pour tout point M de la figure objet *F*, il existe une et une seule marque *[MM′]* telle que *M′ = f(M)*. Cette unicité confère à la marque une signification théorique. Le contrôle préalable de la validité du modèle relève de compétences liées aux mathématiques académiques et exigibles du futur professeur. En l'absence de ce type de contrôle, la voie est ouverte à toute sorte de dérapage sur les objets d'enseignement, au moment où le libre accès à une profusion de ressources pédagogiques (numériques ou non) s'installe de plus en plus dans nos pratiques professionnelles. Par ailleurs, pour une transformation donnée *f*, l'existence d'une marque réduite en un point est significative de cette transformation : il s'agit d'un point invariant par *f*. Nous l'appelons "*marque ponctuelle*" ; l'ensemble de telles marques constitue alors l'ensemble des points invariants par *f*.Pour la formulation de certaines propriétés géométriques, il est commode d'utiliser selon la propriété à formuler, les « *droites-supports* » des marques (ou des demi-droites liées aux marques) plutôt que les marques elles-mêmes.

Pertinence didactique du modèle :Par rapport au classement de Grenier et Laborde (*1987*), le modèle des marques se situe entre le *niveau1* où «la transformation est considérée "comme une relation entre deux configurations ou entre deux parties d'une même configuration" (le caractère fonctionnel est absent), Grenier et Laborde (*1987*), p. *66* », et le *niveau2* où « la transformation est considérée comme une application ponctuelle du plan dans lui-même (il s'agit de l'objet fonctionnel), ibid.». De plus, la construction du *niveau2* n'est pas encore achevée à la fin du lycée au Mali. On crée ainsi une rupture avec les configurations attachées aux figures familières (polygones réguliers ou non, cercle, etc.) pour proposer de nouvelles configurations, attachées aux marques. Cette *segmentation* des transformations du plan offre la possibilité d'élaborer des situations de construction géométrique qui problématisent les propriétés de conservation d'une transformation. L'exercice qui est à l'origine de cette expérience de formation en est un exemple : l'usage des marques et des propriétés de conservation est nécessaire pour construire le point *X* dans la tâche (**T**$_2$).

Du côté des élèves, le segment est un objet géométrique familier. Sa représentation dans le domaine *spatio-graphique* peut être entièrement située à l'intérieur de supports généralement utilisés dans l'enseignement de la géométrie (feuille de cahier, tableau noir, support plan d'une machine mécanique, écran d'un ordinateur, etc.) : il peut être l'objet d'un traitement effectif avec les instruments de géométrie.

En résumé, le modèle des marques attaché aux transformations du plan peut être considéré comme un exempled'objet d'enseignement qui offre la possibilitéd'articulation *connaissances académiques* et *connaissances scolaires*. En effet, la conception et la validation mathématique du modèle relèvent a priori de *connaissances académiques* tandis que l'usage du modèle en classe relève des *connaissances scolaires*.

IV.3. Le dispositif de formation

Le dispositif conçu pour cette séquence de formation est bien sûr expérimental ; il s'appuie sur la notion de « formation à l'analyse des tâches à effectuer par les élèves, (Rauscher, 1994, p.297) ». Ce choix repose sur l'hypothèse selon laquelle,*l'analyse des tâches d'élèves par le professeurde mathématiques exige à* *priori la mise en rapport du savoir académique et du savoir scolaire par le biais de la didactique.*Le premier est source de légitimité pour le second, le second est en général un *reconstruit* du premier suivant certaines contraintes.Dans le cas des marques d'une transformation, c'est l'usaged'outils de didactique qui a permis à la fois, d'établir une légitimité théorique du modèle et de le faire apparaître comme objet porteur de du sens par rapport à l'enseignement.

V. LA SÉQUENCE DE FORMATION

V.1.Une brève présentation

Nous tentons de réinvestir ce modèle dans une formation d'enseignants de mathématiques pour le second cycle fondamental et le début de lycée. A cet effet, nous adoptons le point de vue de Robert (1998), sur la distinction entre transformation et application dans l'enseignement : « Nous ne faisons pas de différence entre ces deux mots. Il est toute fois habituel de distinguer dans l'enseignement secondaire les transformations, désignation réservée aux bijections de (ou) sur lui-même, et les applications (de (ou) dans lui-même, non bijectives), (Robert, 1998, p. 25). »

Nous présentons la séquence, par une description succincte des différentes situations de formation, par la formulation des objectifs visés et par un bref résumé des comportements d'élèves professeurs.Rappelons que les élèves-professeurs au nombre de *24*, ont l'habitude de travailler selon un type d'organisation dans les enseignements dits professionnels. Il peut être décrit suivant le schéma, «*travail individuel puis travail par petits groupes→bilan→synthèse (ce qui est à retenir de la situation)*». Chaque groupe est composé de trois personnes.

V. 2. Situation 1 : *une première rencontre avec la notion de marque*

a. Énoncé

Pour chacune des transformations géométriques du plan enseignées en 10^e science (projection parallèle, symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation, rotation, homothétie), effectuer les tâches ci-dessous :

***T_1* :** *Choisir et représenter le(s) élément(s) caractéristique(s) de chacune d'elles.*

***T_2* :** *Pour chaque transformation, dessinez un quadrilatère convexe non particulier ABDC puis construire son transformé A'B'C'D' par celle-ci.*

***T_3* :** *Pour chaque transformation, construire les marques associées aux sommets A, B, C, et D du quadrilatère objet.*

***T_4* :** *Formuler si possible les propriétés géométriques de chaque transformation à partir des marques uniquement.*

a. Objectifs

Deux principaux objectifs sont visés par cette situation :

- Faire construire par les élèves-professeurs un modèle de transformation géométrique du plan au niveaude la*10^e* science à partir des marques.
- Leur faire établir les premières propriétés géométriques du modèle.

b. Nos attentes

Les tâches (***T_1***) et (***T_2***)nous permettent d'avoirau niveau des élèves-professeurs, un bref aperçu sur leur maîtrise des constructions géométriques avec les instruments, selon les pratiques habituelles de classe. En effet,la construction de l'image d'une figure donnée à partirde (ou des) élément(s) caractéristique(s) de la transformation en jeu,est une tâche classique en début de lycée. Le travail en groupe permet à ceux qui ont des lacunes d'y remédier.Les tâches (***T₃***) et (***T₄***) ne sont pas familières, elles rompent avec les tâches(***T₁***) et (***T₂***). Cetterupture offre l'occasion d'initier lefutur professeurà l'élaboration d'objets d'enseignement. Laréalisation de cette tâche professionnelleexige une étudecentréesurl'établissement de la validité théorique et la justification de la pertinence didactique du modèle élaboré. Une telle démarcheleur permet d'éviter de tomber dès le début de leur carrière professionnelle, dansdes pratiques tendant à appliquer stricto sensu des recettes tirées de n'importe quelle ressource pédagogique. Ainsi on peut espérer sur les résultats ci-dessous.

<u>La projection parallèle</u> :

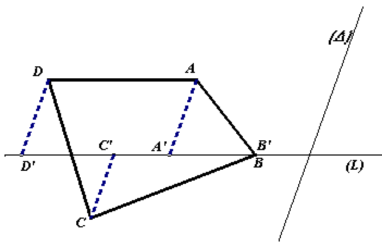

Fig. 3

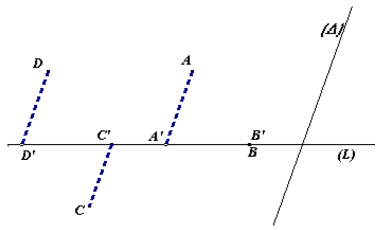

Fig. 3bis

Il s'agit ici d'une projection sur la droite (*L*) parallèlement à la direction de droites (*Δ*) (***Fig.3***). Nous pouvons considérer la figure (***Fig. 3 bis***) comme un modèle extrait de la figure (***Fig. 3***). A ce sujet, on peut formuler les propriétés suivantes pour une projection parallèle :

i. *Les droites-supports des marques sont parallèles.*

ii. *La direction de la projection est la direction de la droite-support de toute marque non ponctuelle.*

iii. *L'ensemble des marques ponctuelles est une droite qui est la droite de projection.*

<u>La symétrie orthogonale</u> :

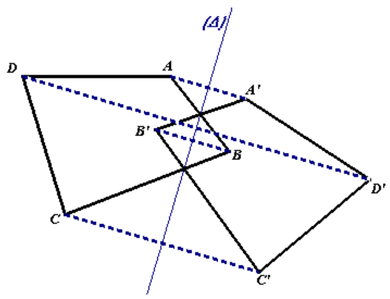

Fig. 4

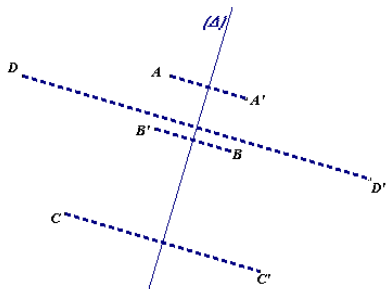

Fig. 4bis

Il s'agit ici, d'une symétrie orthogonale d'axe *(D)* (***Fig. 4***). En considérant la figure (***Fig. 4 bis***) comme un modèle extrait de la figure (***Fig. 4****)*, on peut formuler certaines propriétés ci-dessous :

i. *Les droites-supports des marques sont parallèles.*

ii. *L'ensemble des marques ponctuelles est une droite qui est l'axe de symétrie.*

iii. *Les marques non ponctuelles ont même médiatrice qui est l'axe de symétrie.*

La rotation :

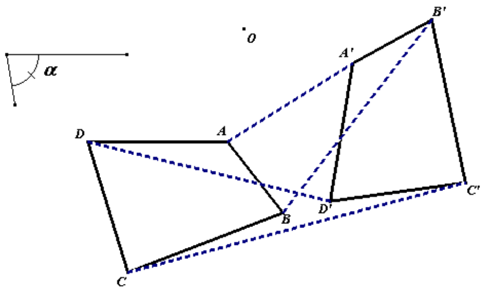

Fig. 5

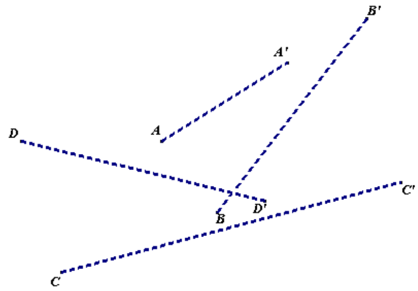

Fig. 5bis

Le point *O* est le centre de la rotation en question (***Fig. 5***). La figure (***Fig. 5 bis***) extraite de la figure (***Fig. 5***), laisse apparaître très peu d'indices sur les propriétés de la transformation en jeu. Le modèle à lui seul s'avère sur le plan visuel, inhibiteur dans une tâche de découverte de la rotation. Cependant, avec des tracés supplémentaires sur le modèle, (donc une reconfiguration au sens de Duval, 1995), nous pouvons émettre pour une rotation :

i. *Les médiatrices des marques sont concourantes.*
ii. *Le point commun des médiatrices des marques est le centre de rotation.*
iii. *L'angle de rotation est l'angle sous lequel on "voit toute marque non ponctuelle à partir du centre de rotation".*

L'homothétie de rapport négatif :

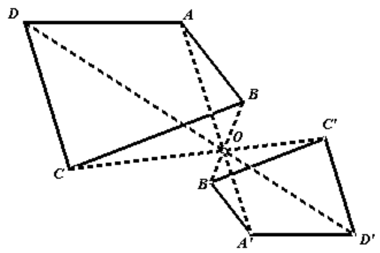

Fig. 6

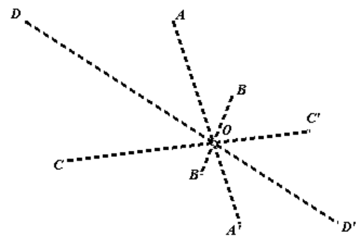

Fig. 6bis

Nous avons ici une homothétie de rapport négatif (***Fig.6***). En considérant la figure (***Fig.6bis***) comme un modèle extrait de la figure (***Fig.6***), nous pouvons émettre à partir des marques, les propriétés suivantes d'une homothétie de rapport négatif :

i. *Les marques sont concourantes.*
ii. *Le point commun à toutes les marques est le centre de l'homothétie.*
iii. *Le centre d'une homothétie de rapport négatif, partage en mesure algébrique, chaque marque dans le même rapport que celui de l'homothétie.*

c. Un résumé des comportements d'élèves-professeurs

Les résultats obtenus par les différents groupes ont été conformes dans l'ensemble à nos attentes à l'exception de deux cas. Le premier est relatif à la formulation des propriétés d'une homothétie de rapport positif : les marques sont très peu fonctionnelles alors que leurs droites-supports respectives le sont. Le second cas est lié à la rotation ; il faut apporter des modifications à la *figure des marques* par des tracés supplémentaires, pour faire apparaître de visu certaines propriétés de la rotation. Ces deux types de lacune relèvent de notre point de vue du fait que les connaissances exigibles pour la conversion entre deux registres (ici figures et texte) ne sont pas disponibles (Duval, 2003, p.54). Elles sont à construire car, apprendre aux élèves à formuler une propriété mathématique dans différents registres est une tâche pédagogique inévitable par un professeur.

V. 3. Situation 2 :*Une classification des transformations géométriques selon les marques*

a. Énoncé

*On veut établir à partir de la notion de marque, une classification des six transformations étudiées dans la (**situation 1**). A cet effet deux variables sont retenues.*

*La première variable notée (**V_1**) est liée à la longueur des marques ; elle prend deux valeurs :*

- *(**$V_{1.1}$**) : "les marques ont même longueur" ;*
- *(**$V_{1.2}$**) : "les marques n'ont pas même longueur".*

*La deuxième variable notée (**V_2**) est liée à la position relative des marques ; elle prend trois valeurs :*

- *(**$V_{2.1}$**) : "les marques sont parallèles" ;*
- *(**$V_{2.2}$**) : "les marques sont concourantes" ;*
- *(**$V_{2.3}$**) : "les marques sont non parallèles et non concourantes".*

***T_1* :** *On vous demande d'établir cette classification sous forme de tableau.*

***T_2* :** *Faire un commentaire axé essentiellement sur une éventuelle exploitation didactique de la classification obtenue.*

b. Objectifs

- Faire établir par les élèves-professeurs une classification des transformations géométriques considérées,suivant le modèle des marques.
- Inciter les élèves-professeurs à faire un travail réflexif sur cette classification par la production d'un commentaire.

c. Nos attentes

En formation académique, la classification des isométries planes est en général effectuéesuivantqu'elles soient directes ou indirectes, et selon la nature de l'ensemble de leurs points fixes.A ce niveau, les isométriessontconsidérées comme applications ponctuelles du plan dans lui-même ; ceci a comme conséquence l'abandon de tout usage des configurations géométriques usuelles au profit de techniques relevant de la géométrie analytique.Or ces techniques ne sont pas suffisamment maîtrisées par les élèves en début de lycée ;de plus, aucune autre méthode s'appuyant sur les figures ne leur est proposée.Aussi, le modèle des marques est une alternative pour combler ce vide : il offre la possibilité d'une classification fondée à la fois sur des propriétés spatiales (comme la perception visuelle de l'intersection ou non de marques) et sur des propriétés géométriques (comme l'égalité des longueurs de marques ou le parallélisme de leurs droites-supports …). On peut ensuite émettre des conjectures de regroupement de ces transformations selon les valeurs des deux variables retenues. Le tableau ci-dessousest une proposition de classification.

LONGUEURSDES MARQUES / POSITIONSDES MARQUES	**Les marques sont de même longueur**	**Les marques ne sont pasde même longueur**
Les marques sont parallèles	- *Translation*	- *Projection parallèle* - *Symétrie orthogonale*
Les marques sont concourantes		- *Symétrie centrale* - *Homothétie de rapport négatif*
Les marques ne sont ni parallèles ni concourantes		- *Rotation* - *Homothétie de rapport positif*

Tableau3

En particulier, on peut déduire de ce tableau, une classification des isométries enseignées en *10*^{e} science à savoir, la symétrie orthogonale, la symétrie centrale, la translation et la rotation[9] :ces quatre isométries se distinguent les unes des autres à partir des marques puisque dans le tableau (***Tableau 3***), chacune occupe une et une seule cellule.

d. Un résumé des comportements d'élèves-professeurs

Le tableau de classification a été réalisé sans grande difficulté par tous les groupes.Il n'en a pas été de même pour le commentaire. En effet, les élèves-professeurs pour la plupart, se sontheurtés à la question suivante : «*comment établir une classification des isométries enseignées en 10*^{e} *science sans utiliser les méthodes analytiques?*».Afin de relancer l'étude du tableau, nous leur avons signalé de nouveau, que la classification cherchée doit s'effectuer en faisant usage du seul modèle des marques d'une transformation. Les résultats consécutifs à cette relance ont été fructueux dans l'ensemble : *4* groupes sur les *8* se sont engagés dans des stratégies de distinction des *4* isométries suivant des critères d'ordre perceptifs (*les marques se coupent ou non ; les marques sont de même longueur ou non ; etc.*) ; ces critères sont le plus souvent validés par un contrôle pragmatique à l'aide des instruments de géométrie. Les*4* autres groupessont restés bloqués après l'élaboration du tableau ci-dessus : ils n'ont pas su interpréter le contenu de ce tableau.

V. 4. Situation 3 :*Une caractérisation des isométries du plan en 10*^{e} *science*

a. Énoncé

On se propose d'étudier en particulier les 4 isométries du plan enseignées (symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation et rotation) en 10^{e} *science, en utilisant uniquement le modèle des marques. Effectuez les tâches ci-dessous :*

[9] La symétrie glissée n'est pas concernée dans cette classification car elle ne figure au programme de *10*^{e} science. Elle apparaît en *11*^{e}SE (*1*^{è} S en France). Néanmoins, on pourrait la classer dans la même case que la rotation et l'homothétie de rapport positif. Par ailleurs, les marques d'une symétrie glissée permettent de déterminer son axe par la propriété suivante : « *L'axe d'une symétrie glissée est l'ensemble des milieux de ses marques* ».

***T_1* :** *Formuler une « propriété caractéristique » de chacune de ces isométries, en utilisant uniquement les marques, les droites ou les demi-droites supports des marques, à l'intention d'élèves de 10e science.*

***T_2* :** *Y-a-t-il un lien entre cette caractérisation des isométries du plan fondée sur le modèle des marques avec les connaissances apprises sur le cours relatif aux applications affines du plan. Si oui lequel ?*

b. Objectifs

- Établir une caractérisation des transformations fondée uniquement sur le modèle des marques.
- Étudier l'existence d'un lien entre une caractérisation selon le modèle des marques, et les caractérisations possibles reçuesen formation académique.

c. Nos attentes

L'observation d'une figure en lien étroit avec des possibilités multiples de sa reconfiguration en d'autres figures ou sous-figures à l'aide d'instruments de géométrie, permet de faire apparaître de nouvelles configurations qui peuvent être pertinentes dans la résolution du problème posé (Duval, 1995). En particulier, les configurations liées au modèle des marques, pourraient susciter l'appréhension de nouvelles propriétés de la figure. Par exemple, lorsque *f* est une isométrie du plan, (*X, Y, Z*) un triplet de points non alignés transformé par *f* en le triplet (*X', Y', Z'*), alors la configuration géométrique obtenue par les trois marques [*XX'*], [*YY'*], [*ZZ'*] peut être caractéristique de l'isométrie en jeu. C'est ainsi qu'on pourrait énoncer les « propriétés caractéristiques» ci-dessous.

Soit (X, Y, Z) un triplet de points non alignés transformé en le triplet de points (X', Y', Z') par une isométrie inconnue f.

- *Dire que les marques [XX'], [YY'] et [ZZ'] ont même médiatrice équivaut à dire que f est une symétrie orthogonale.*
- *Dire que les marques [XX'], [YY'] et [ZZ'] ont même milieu équivaut à dire que f est une symétrie centrale.*
- *Dire que les marques [XX'], [YY'] et [ZZ'] ont même longueur, que les demi-droites [XX'), [YY'), [ZZ') sont parallèles et de même sens, équivaut à dire que f est une translation.*
- *Dire que les médiatrices des marques [XX'], [YY'] et [ZZ'] sont concourantes en point I et que ces 3 marques sont vues sous le même angle orienté à partir de I, équivaut à dire que f est une rotation.*

Ces «propriétés caractéristiques»peuvent être considérées comme des connaissances scolaires ; elles peuvent être admises ou vérifiées à l'aide des instruments par les élèves de *10*e science. Leur usage s'avère approprié dans des problèmes de reconnaissance d'isométries du plan enseignées à ce niveau scolaire[10].Mais la recherche de leur légitimité théorique est une tâche du futur professeur de mathématiques et par conséquent doit être prise en compte dans sa formation initiale. Cette légitimité est attachée aux connaissances supposées reçues en formation académique : *« Dans un espace affine de dimension finie E, toute application affine f de E dans lui-même est déterminée par la donnée d'un repère affine R de E et de son image parf* ». Lorsqu'il s'agit du plan affine

[10] Ce type de compétence est exigible des élèves de *10*e science comme l'indique le texte des savoir-faire : « Savoir reconnaître deux figure isométriques et caractériser l'isométrie qui échange l'une en l'autre (dans le cas où cette isométrie est une translation, une symétrie centrale, une symétrie axiale, une rotation). (Savoir faire 10e science, 1992, p. 26) »

euclidien, trois points non alignés constituent un repère affine; la donnée de leurs images respectives par *f* détermine parfaitement cette application.

d. Résumé des comportements d'élèves-professeurs

A l'exception de la rotation, *5* groupessur *8*ont émis des formulations correctes liées aux configurations attachées aux marques de chaque isométrie. Le fait que pour un point *X* donné, un segment *[XX']* peut être une marque relative à plusieurs isométries,a incité ces groupes à choisir 3 points *X*, *Y*, *Z* non alignés.Les *3*autres groupes ont donné des réponses erronées pour l'une au moins des deux raisons ci-dessous :

- Aucune exigence n'est faite sur le nombre minimal de marques à choisir ;
- Dans le cas où ce nombre est fixé à*3*, aucune exigence n'est faite sur la position relative des trois points objets *X*, *Y* et *Z*.

L'observation visuelleet globale de la position relative des deux figures isométriques semble avoir été le seul moyen de contrôleutilisé par ces *3* trois groupes.

VI. CONCLUSION

La séquence expérimentalea été menée en deux séances (de*90* minutes chacune sur deux jours consécutifs). Les résultats sont parcellaires, mais les élèves-professeurs ont pu se convaincre qu'une maitrise suffisante des mathématiques académiques ne suffit pas pour exécuter les tâches pédagogiques du moins, celles liées à l'analyse des tâches d'élèves.Ils sont à présent conscients que le passage d'une géométrie académique ponctuelle, où les figures sont *des parties anonymes* du plan, à une géométrie du compas et de la règle s'appuyant sur des figures familières, constitue un élément pertinent de formation pour le futur professeur. Par ailleurs, le décalage temporel dansl'exécution du cours intitulé, "*Algèbre linéaire et Géométrie Affine de la Droite du Plan et de l'Espace*" et celle du module de formation, "*Enseignement de la Géométrie au Lycée*" ne suffit pas, une étude sur d'éventuels liens entre leurs contenus respectifs nous paraît nécessaire.

Notons enfin, que les tâches d'élèves à analyser peuvent être construites à condition qu'elles soient conformes aux apprentissages visés par les programmes d'enseignement en vigueur. Le modèle des marques se situe dans cette perspective.

RÉFÉRENCES BLIOGRAPHIQUES

[*1*] ALTET M. (2001). *Les compétences de l'enseignant-professionnel : Entre savoirs, schèmes d'action et d'adaptation, le savoir analyser*, in Léopold Pakay, Marguerite Altet, Philipe Perrenoud (Éds), pp 27-37, DeBoeck Université.

[*2*] AUDIN M. (1998).*GÉOMÉTRIE, De la licence à l'agrégation*, Éditions Scientifiques&Culturelles, BELIN.

[*3*] BROUSSEAU G. (2000).*Education et Didactique des mathématiques*, « Educacion matematica » Vol 12 n°1 Abril, 2000, pp 5-39.

[*4*] CHEVALLARD Y. (1994).*Le processus de transposition didactique* in*la Transposition didactique à l'épreuve*, Ouvrage coordonné par Arsac et al. La Pensée Sauvage Éditions, pp.135-180.

[5] DUVAL R., (2003). *Décrire, visualiser ou raisonner : quels "apprentissages premiers" de l'activité mathématique ?* Annales de Didactique et de Sciences cognitives, Volume 8/2003. IREM de Strasbourg.

[6] DUVAL R. (1995).*Sémiosis et pensée humaine – Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*, Peter Lang.

[7] GRENIER D., LABORDEC. (1988), "Transformations géométriques : le cas de la symétrie orthogonale". In Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Actes du Colloque de Sèvres, mai 1987, pp.65-86. Grenoble : la pensée sauvage.

[8] RAUSCHER J-C (1994). *Les enjeux de l'enseignement de la géométrie au début du collège et leur prise en compte par les professeurs*. In EDS : Artigue et al. Vingt ans de didactique des mathématiques en France. La Pensée Sauvage – Recherche en Didactique des Mthématiques.

[9] ROBERT A. (1998). *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques*, I. Géométrie, 2e édition, ellipses.

[10] SANGARÉ M. (2006). *La marque d'une transformation géométrique : un exemple demodélisation didactique*, Educacão Mathemàtica Pesquisa, Educ. Math. Pesqui, São Paulo, v.8, n.2, pp.225-266.

AUTRES DOCUMENTS CONSULTÉS

- Rapport Général (*2003*), Atelier de formation sur les aspects pratiques de la formation des élèves-professeurs de l'École Normale Supérieure de Bamako ; du *15* au *30* septembre *2003* - Bamako.
- "Enseignement de la géométrie au lycée" (*2005*), séminaire sur les Contenus de formation en mathématiques – DER de Mathématiques – E.N.Sup., mars *2005* – Bamako.
- Rapport de l'Inspection de l'Enseignement Secondaire – Groupe Mathématiques (2004), "État d'exécution des Programmes de mathématiques dans l'enseignement Secondaire Général" (avril 2004).