

CATÉGORISATION DE QUELQUES PROBLÈMES DE PROPORTIONNALITÉ

| MRABET* SLIM ET OUNI** MOHAMED WARDI

Résumé | Dans ce travail, nous traitons la question de la catégorisation des problèmes de proportionnalité. Nous nous plaçons dans le contexte de l'enseignement primaire tunisien, proposons des situations qui relèvent de la proportionnalité et varions les données suivant une logique que nous expliquons. Les représentations sous forme de tableaux ont le double rôle de permettre de mieux comprendre les relations entre les données et les inconnues, et d'aider les élèves à unifier les procédures de résolution.

Mots-clés : proportionnalité, catégorisation, classification, représentation, problèmes

Abstract | In this work, we treat the question of categorizing the problems of proportionality. We place ourselves in the context of Tunisian primary education, propose situations related to the proportionality principle and vary the data according to a logic that we explain. We use tabular representation playing two possible roles: allowing a better understanding of the relationships between data and unknowns and helping pupils to unify some resolution procedures.

Keywords: Proportionality, categorization, classification, representation, problems

I. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

Dans le cadre de ce groupe de travail, nous essayons d'éclairer le lien entre enseignement et apprentissage à partir des choix institutionnels relatifs à la proportionnalité, et de l'analyse des résultats des productions des élèves. La prise en compte de la spécificité de ces choix qui conditionnent les activités des élèves, pourrait mettre à la disposition des enseignants, inspecteurs et concepteurs des manuels un outil qui leur permet de faire les adaptations didactiques nécessaires.

Après une longue expérience avec le système d'enseignement tunisien, nous partons de notre inquiétude quant aux faibles résultats de nos élèves de 6^e année du premier cycle de l'enseignement de base tunisien (élèves de 11 à 12 ans) en mathématiques, dans le concours d'accès aux collèges pilotes. À l'instar de beaucoup d'enseignants, nous nous sommes posé la question des raisons qui expliquent ces résultats. Les difficultés à traiter une situation de proportionnalité, à mettre en œuvre des stratégies pour sa résolution et à délimiter des relations entre les concepts qui entrent en jeu, sont au cœur de cette question, puisque le thème de la proportionnalité est souvent central dans ces concours. Après plusieurs années d'enseignement de ce niveau, nous pouvons affirmer que les élèves éprouvent en général des difficultés notables liées à ce thème, et que certains enseignants ont du mal à expliquer à leurs élèves les procédures de résolution d'une manière claire et accessible à tous. Ainsi, nous rejoignons deux questions de Vergnaud (1990) :

Peut-on trouver des schèmes pour regrouper ces problèmes dans des classes bien déterminées afin d'unifier les procédures de leur résolution ?

Peut-on utiliser les représentations graphiques, les nombres de données et d'inconnues dans une situation pour mieux comprendre les relations qu'entretiennent les données et les inconnues et de regrouper celles qui se ressemblent ?

* Université de Carthage – Tunisie – mrabet_slim@yahoo.fr

** E.P. Bouhssina 2, Sousse – Tunisie – ouniwardi@yahoo.fr

En outre, nous nous interrogeons sur la relation mise en jeu entre les termes de la proportionnalité, et sur la façon de distinguer les cas où il s'agit d'une addition des cas où on fait la multiplication des termes donnés.

II. CADRE THÉORIQUE

En didactique, le travail sur les problèmes arithmétiques est un enjeu fort de l'enseignement mathématique de l'école. Le défi est de comprendre ce qui se joue pour le sujet dans la résolution, notamment cette dialectique (mentale) entre trouver une stratégie efficace dans la mémoire de l'élève des problèmes analogues, et l'élaboration d'une nouvelle stratégie si le problème n'est pas lié à une ancienne stratégie connue (Houdement, 2017). Dans ce travail, nous partons de l'idée qu'entraîner les élèves à catégoriser les problèmes en traitant leur structure profonde induit de meilleures performances (Iacono et al., 2021), et nous tentons d'aider les élèves à conceptualiser la notion de proportionnalité, indispensable à la compréhension de la société dans laquelle nous évoluons.

Rappelons d'abord que deux grandeurs liées sont dites proportionnelles si la multiplication d'une valeur par un nombre dans une des deux grandeurs entraîne une multiplication de la valeur liée par le même nombre dans l'autre. L'étude des rapports et proportions a autrefois fait l'objet de recherches mathématiques qui ont eu une importance considérable dans le développement de certains concepts (Dahan – Dalmedico, Peiffer, 1995). Puis, l'algèbre a rendu caduque la théorie des proportions qui a été remplacée par l'application linéaire. L'évolution de la transposition didactique de la proportionnalité passe par trois périodes alors essentielles : celle de la « règle de trois » des « mathématiques traditionnelles », celles des fonctions linéaires des « mathématiques modernes », et celle de tableaux de proportionnalité des « mathématiques concrètes » (Pluvineau et Dupuis, 1981). Dans ce qui suit, nous n'abordons pas la question des bases théoriques nécessaires à la compréhension de la notion de proportionnalité en termes de « théorie des proportions » et en termes de « fonctions linéaires » (Alpha et al., 2021; Simard, 2012; Hersant, 2005; Comin, 2000). Nous présentons ici un dispositif d'apprentissage qui favoriserait chez des élèves la capacité à recatégoriser des problèmes de proportionnalité, en développant leur flexibilité cognitive, et évoquons et discutons de la question de l'intérêt des dispositions tabulaires, notamment en primaire (Voisin, 2017).

Un cadrage théorique faisant appel à la théorie des champs conceptuels et à la notion de schèmes (Vergnaud, 1990) semble pertinent. Pour reconnaître une situation, le sujet semble passer par la construction d'invariants opératoires qui sont les éléments centraux des schèmes. Ces derniers structurent la prise d'information et organisent des conduites particulières pour chaque classe de problèmes (Simard, 2012). Pour analyser la structure mathématique du problème de proportionnalité, Vergnaud a développé les relations qui entretiennent les questions et les différentes données de l'énoncé, et a souligné l'importance du concept d'homomorphisme dans l'analyse des rapports entre le réel et sa représentation, tant dans la conceptualisation que dans la symbolisation. Sur ce point, Levain (1992) remarque que les énoncés relevant d'une même structure mathématique appartiennent à une même classe de problèmes et que, en fonction de la donnée recherchée, une même classe de problèmes pourrait se subdiviser en plusieurs catégories, et recommande de présenter plus systématiquement aux élèves les différentes structures de problèmes en faisant varier très largement les valeurs numériques (petit entiers, grand entiers, décimaux supérieurs et inférieurs à 1). Voisin (2017) remarque que les choix relatifs aux variables didactiques numériques ont une incidence sur la réussite des élèves confrontés à des problèmes relevant de la proportionnalité. Sur ce point, nous pensons qu'il serait important de présenter systématiquement aux élèves les différentes structures du problème posé, en faisant varier les données dans une classe de situations qui se ressemblent, et ce, pour les aider à

constituer un répertoire de procédures organisées et favoriser la compréhension du fondement des problèmes de proportionnalité.

III. MÉTHODOLOGIE

Pour creuser cette idée, nous avons consulté et analysé quelques sujets de mathématiques proposés dans ce concours, tout en mettant l'accent sur le thème de proportionnalité. Nous avons regroupé les épreuves de cinq concours proposés durant les années allant de 2007 à 2011, à raison de 3 problèmes dans chaque sujet de l'épreuve du concours. Parmi les 15 problèmes retenus, 5 relèvent de la proportionnalité. Nous avons procédé à une représentation sous forme de tableaux de chaque situation de proportionnalité, précisant à chaque fois ce qui est donné et ce qui demandé, et expliquant les moyens de passage d'une représentation sous forme de tableaux aux procédures de résolution. Nous nous inspirons des travaux de Vergnaud (1990) pour mettre en avant le lien entre les données du problème et les conséquences sur l'apprentissage des élèves. Dans chaque problème, les données et les inconnues sont classées dans un tableau formé de 3 colonnes et 2 lignes. Nous nous contentons des problèmes de proportionnalité de pourcentage, qui sont les plus fréquents en 6^e année primaire, et qui posent des problèmes pour les élèves. Dans chaque cas, nous avons toujours une quantité initiale, exprimée soit en pourcentage (ligne 1, colonne 1), soit en valeur réelle qui correspond à ce pourcentage (ligne 2, colonne 1), qui va subir soit une augmentation, soit une diminution. La forme générale des deux tableaux obtenus est la suivante :

Tableau 1

	L'initial	Augmentation	L'initial + Augmentation
M1	100 %	a%	b%
M2	x	y	Z

M₁ : grandeurs exprimées en pourcentage.

M₂ : valeurs correspondantes aux grandeurs exprimées en pourcentage

Tableau 2

	L'initial	Diminution	L'initial - Diminution
M1	100 %	a%	b%
M2	x	y	Z

IV. CLASSIFICATION DES PROBLÈMES DE PROPORTIONNALITÉ : UNE NOUVELLE APPROCHE

Cette approche suit le schéma suivant :

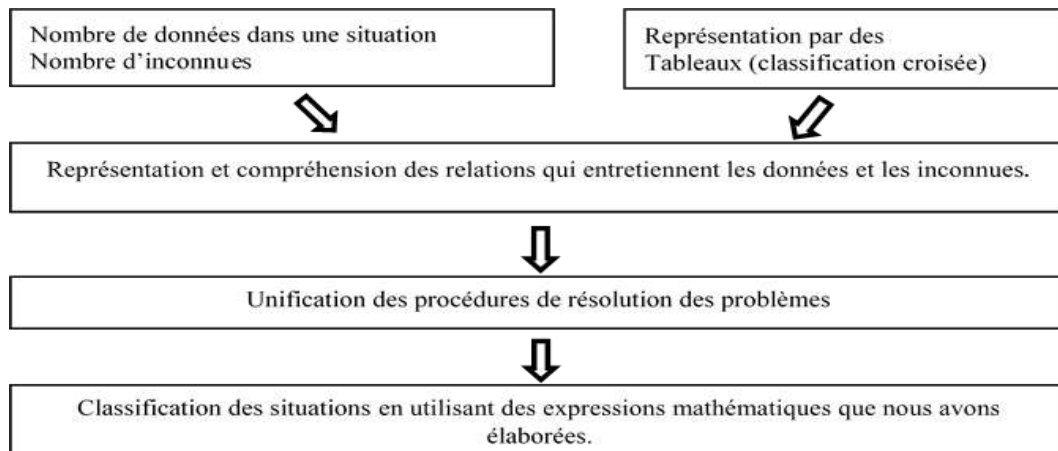


Figure 1 – procédure de résolution

Dans ce qui suit, nous distinguons des catégories et des classes de problèmes de proportionnalité données compte-tenu des variables suivantes : le nombre de données et d'inconnues, la nature de la proportionnalité (simple ou simple composée) et la nature des données dans l'espace de mesure M_1 (entières ou fractionnaires).

1. *Catégorie 1 : classe des problèmes : C_5^2-1 où les grandeurs de l'espace de mesure M_1 sont des entiers*

Cette classe est représentée comme suit :

Tableau 3

	Lecture Verticale 1 ^{ère} et 2 ^{ème} colonne		Lecture Verticale 2 ^{ème} et 3 ^{ème} colonne	
M₁				
Lecture Horizontale 1 ^{ère} ligne (1)	100%	a%	b%	
M₂	x	y	z	
Lecture Horizontale 2 ^{ème} ligne (2)				
	Lecture verticale 1 ^{ère} et 3 ^{ème} colonne			

Remarquons que ce tableau permet de distinguer deux cas, suivant qu'il s'agisse dans le problème posé d'une augmentation ou d'une diminution de la quantité initiale.

Pour une augmentation, nous avons les égalités

$$100 + a = b, \quad x + y = z \quad \text{et} \quad 100y = ax, \quad az = by \quad \text{et} \quad 100z = bx$$

Pour une diminution, nous avons les égalités : $100 - a = b, \quad x - y = z$

Nous avons ainsi un tableau de six cases « classification croisée : 2 lignes et 3 colonnes ».

Lecture horizontale :

1^{er} ligne : relations additives (grandeurs exprimées en pourcentage).

2^e ligne : relations additives (valeurs correspondantes aux grandeurs exprimées en pourcentage).

Lecture verticale : il s'agit d'une proportionnalité simple pour chaque paire de colonnes choisie.

Dans cette catégorie, nous avons une donnée invariable qui occupe la 1^{re} case de la 1^{re} ligne (le taux de pourcentage de la quantité initiale est « 100 % »), et deux données variables qui peuvent occuper les 5 autres cases, avec la contrainte suivante : la 1^{re} inconnue qu'on va chercher doit être placée sur une même ligne avec deux données. Remarquons que, par conséquent, le cas où les deux données variables occupent la 2^e et la 3^e case de la 1^{re} ligne est à éliminer. Dans cette catégorie, le nombre de cas possibles est donc : $C_5^2 - 1 = 9$. Ce résultat permettrait d'unifier les méthodes de résolution pour des problèmes qui semblent différents, mais qui font réellement partie d'une même classe.

Voici deux exemples des 9 cas possibles, le travail sur le reste des cas est similaire.

Exemple 1

Tableau 4

(1)	100 %	a%	b ? %
(2)	x	y ?	z ?
	(1)	(2)	(3)

On a: $100 + a = b$; $y = \frac{ax}{100}$

Tableau 5

(1)	100 %	a%	b ? %
(2)	x	y ?	z ?
	(1)	(2)	(3)

On a: $b = 100 - a$; $y = \frac{ax}{100}$

Exemple 2

Tableau 6

(1)	100 %	a%	b ? %
(2)	x ?	y	z ?
	(1)	(2)	(3)

On a $100 + a = b$; $x = \frac{ay}{100}$

Tableau 7

(1)	100 %	a%	b ? %
(2)	x ?	y	z ?
	(1)	(2)	(3)

On a $b = 100 - a$; $x = \frac{ay}{100}$

2. *Catégorie 2 : cas des problèmes de la proportionnalité simple composée, de la classe $C_5^2 - 1$*

Exemple : Une jupe coûtait 90^{DT}, son prix augmente de 10 % puis augmente de 15 %. Quel est son prix final ?

Pour répondre à cette question, l'élève doit remplir les cases d'un premier tableau.

Tableau 8

100 %	10 %	inc1 ? %
90 ^{DT}	inc2 ?	inc3 ?

$inc_1 = 100 \% + 10 \% = 110 \%$; $inc_2 = \frac{90 \times 10}{100} = 9^{DT}$; $inc_3 = 90 + 9 = 99^{DT}$ / ou $\frac{9 \times 110}{10} = 99^{DT}$ /
ou $\frac{90 \times 110}{100} = 99^{DT}$

Puis, il remplit les cases d'un deuxième tableau.

Tableau 9

1 = 100 %	15 %	inc1 ? %
99 ^{DT}	inc2 ?	inc3 ?

$inc_1 = 100 \% + 15 \% = 115 \%$; $inc_2 = \frac{99 \times 15}{100} = 14^{DT},850$; $inc_3 = 99 + 14,850 = 113^{DT},850$
ou $inc_3 = \frac{14,850 \times 115}{100} = 113^{DT},850$ ou $inc_3 = \frac{99 \times 115}{100} = 113^{DT},850$

Les contraintes de l'emplacement des variables et des données étant les mêmes que les cas précédents, les problèmes de la proportionnalité simple composée font partie de la catégorie $C_5^2 - 1$: deux données doivent occuper deux des cinq cases restantes (à part la première case de la première ligne) ; il y a toujours un cas à éliminer où toutes les données sont alignées).

À partir de ce résultat, nous reprenons les sujets des concours tunisiens où tous les problèmes proposés font partie de cette catégorie (voir Annexes).

Dans l'histogramme suivant, A désigne le cas d'une augmentation ; B le cas d'une diminution. les résultats obtenus sont les suivants :

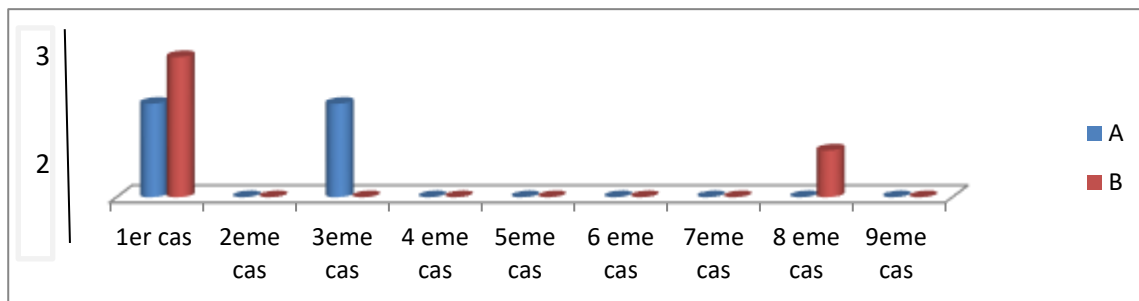


Figure 2 – Les 9 cas de la catégorie C_5^2-1

Nous avons remarqué que :

- Un premier cas est répété 5 fois, un deuxième cas est répété 2 fois et un troisième cas est repris une seule fois.
- Tous les autres cas ne font pas parties des sujets des concours. L'apprenant est testé deux fois dans un même cas à la même session. Ceci pose une question principale quant aux critères mis en place par les responsables de la préparation de ces épreuves.

3. Catégorie 3 : La classe des problèmes : $C_7^3 - 1$

Cette catégorie est représentée selon le tableau suivant :

M_1	$\frac{d}{d}$	$\frac{a}{d}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{c}{d}$
M_2	x	x_1	x_2	x_3
	(1)	(2)	(3)	(4)

Nous avons un tableau de huit cases (classification croisée de 2 lignes et 4 colonnes).

Les relations reliant les données du tableau

$$d = a + b + c ; x = x_1 + x_2 + x_3 ; ax = dx_1 ; bx = dx_2 ; cx = dx_3$$

$$ax_2 = bx_1 ; bx_3 = cx_2 ; cx_1 = ax_3$$

Lecture horizontale :

- 1^{re} ligne : relations additives (grandeurs exprimées en fraction)
- 2^e ligne : relations additives (valeurs correspondantes aux grandeurs exprimées en fraction)

Lecture verticale : il s'agit d'une proportionnalité simple pour toutes les paires de colonnes choisies.

Dans cette catégorie de situations, nous avons une donnée invariable qui occupe la 1^{re} case de la 1^{re} ligne ($\frac{d}{d} = 1$) et 3 données variables qui peuvent occuper les 7 autres cases avec toujours la même condition : la 1^{re} inconnue qu'on va chercher doit être sur la même ligne avec 3 données, et le même cas à éliminer : lorsque les 3 données variables occupent la 2^{me}, la 3^{me} et la 4^{me} cases de la 1^{re} ligne.

Le nombre de situations possibles relativement à cette catégorie est : $C_7^3 - 1 = 34$

Exemple : Un agriculteur exploite un champ dont la superficie est de 160 hectares comme suit :

Tableau 10

	Superficie totale	Superficie cultivée en blé	Superficie plantée en oliviers	Superficie cultivée en légumes
Les fractions qui les représentent	$1 = \frac{8}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{inc_1?}{8}$
Superficie en hectares	160 hectares	inc ₂ ?	Inc ₃ ?	Inc ₄ ?

L'élève peut suivre les étapes suivantes

$$inc_1 = \frac{8}{8} - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{8}; inc_2 = \frac{160 \times 2}{8} = 40 \text{ hectares}; inc_3 = \frac{40 \times 3}{2} = 60^h \text{ ou } \frac{160 \times 3}{8} = 60 \text{ hectares}$$

$$inc_4 = inc_3 = \frac{160 \times 3}{8} = 60 \text{ hectares ou } 160 - (40 + 60) = 60 \text{ hectares.}$$

Ce problème fait partie de la classe $C_7^3 - 1$: trois données variables peuvent occuper 7 places (la première case de la première ligne est toujours donnée) avec un cas à éliminer, lorsque toutes les données s'alignent.

Le nombre de situations possibles dans cette classe est $C_7^3 - 1 = 34$

Mise en application

En 2017, nous avons fait l'expérience avec des élèves de deux classes de sixième année primaire. Nous avons choisi arbitrairement 18 élèves de chaque classe, puis que nous avons au total 18 situations qui relèvent du cas $C_5^2 - 1$. Nous avons réparti les élèves sur trois groupes de six élèves chacun, et nous leur avons demandé de résoudre six situations en 60 minutes, à raison d'une situation toutes les 10 minutes. Toutes les situations portent sur la proportionnalité ou sur le calcul de pourcentage.

Pour les groupes de la première classe, aucune aide n'est donnée aux élèves. Les résultats obtenus sont les suivants :

Groupes de la première classe	Pourcentage de réussite
situation 1 (travail en groupe)	50 %
situation 2 (travail individuel)	33.33 %
situation 3 (travail en groupe)	55.55 %
situation 4-5-6 (travail individuel)	39.3 %

Pour les groupes de la deuxième classe, il est demandé aux élèves de remplir deux tableaux vierges du type suivant (suivant qu'il s'agit d'une augmentation ou d'une diminution), avant de procéder à la résolution des situations.

100 %		

L'élève est appelé à remplir le tableau avec des données numériques. La première ligne est consacrée aux pourcentages ; la deuxième aux valeurs numériques correspondantes.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Groupes de la deuxième classe	Pourcentage de réussite
situation 1 (travail en groupe)	66.6 %
situation 2 (travail individuel)	50 %
situation 3 (travail en groupe)	83.3 %
situation 4-5-6 (travail individuel)	88.88 %

Voici un exemple des situations proposées pour la deuxième classe :

Le nombre d'élèves d'une école était 600 l'année dernière. Cette année, ce nombre a augmenté de 90 élèves.
Cherchez le pourcentage du nombre d'élèves de cette année par rapport à celui de l'année dernière.

Dans cette situation, l'élève doit d'abord remplir le tableau suivant :

100 %	inc 2	inc 3
600	90	inc 1

Il cherche les inconnues :

$$inc1 = 600 + 90 = 690$$

$$inc2 = \frac{90 * 100}{600} = 15\%$$

$$inc3 = 100\% + 15\% = 115\% \text{ ou encore } inc3 = \frac{690 * 15}{90} = 115\%$$

$$\text{ou encore } inc3 = \frac{690 * 100}{600} = 115\%$$

Après ces exemples, nous avons remarqué que le taux de réussite des élèves a nettement augmenté. Les quelques erreurs qui persistent proviennent le plus souvent des erreurs de calcul ou d'une mauvaise compréhension de la situation.

V. CONCLUSION

Pour conclure, nous ne prétendons pas apporter une solution immédiate aux difficultés d'enseignement de la proportionnalité, mais nous espérons avoir nourri la réflexion des enseignants sur le fait que, si l'on veut que les élèves progressent dans la résolution de problèmes de proportionnalité, on peut penser à institutionnaliser des techniques (Hersant, 2005). Dans notre lecture des épreuves des concours de mathématiques, nous avons cherché à déchiffrer la logique derrière la variation des valeurs numériques dans les problèmes proposés. Le codage que nous proposons définit une catégorie spécifique à partir des nombres de données variables et d'inconnues, avec des classes de problèmes à l'intérieur de chaque catégorie en fonction de la nature des données (entières ou fractionnaires) et/ou la nature de la proportionnalité (simple ou composée). Les procédures de résolution qui appellent des tableaux convenablement remplis font créer chez les élèves des invariants opératoires pour unifier la manière de résolution des problèmes d'une même classe. Remarquons que n'avons pas tenu compte de toutes les variables didactiques qui peuvent intervenir, mais notre méthode de catégorisation semble réduire les difficultés qui pourraient apparaître par la variation des catégories

de situation. En effet, une première expérience que nous avons faite avec des élèves de 6^e année primaire a montré que l'utilisation des tableaux de proportionnalité, dans cet esprit de catégorisation, a permis d'avoir, dans les différentes catégories, des progrès importants dans les productions des élèves. Ces derniers qui ont pu construire des réflexes pour fixer et distinguer les cases connues des cases inconnues, et des techniques pour la recherche des inconnues après les avoir ordonnés, mais ce travail est à creuser.

Cette idée de catégorisation qui se base sur des formules simples, pourrait être au service des enseignants de mathématiques du primaire, pour leur permettre de montrer aux élèves de nouvelles techniques de résolution. En outre, les expressions $C_p^n - 1$ peuvent être traduites grâce à un langage de balisage (HTML) et un langage de programmation (JavaScript) en un produit exécutable par un ordinateur, et peuvent donc servir comme moyen de validation des procédures utilisées, et de contrôle des résultats. Un tel langage pourrait-il contribuer à l'amélioration de l'auto-apprentissage des élèves et de l'apprentissage à distance ? Il nous semble que cette piste mérite d'être explorée.

RÉFÉRENCES

- Alpha, O. et Almouloud, A. A. (2021). Conceptions des enseignants du fondamental I dans le traitement des Situations-problèmes de proportionnalité. *Revista matematica, Ensino e Cultura*, 16 , 197-230.
- Comin, E. (2000). Proportionnalité et fonction linéaire. Caractère, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire [Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-00827905v1>
- Dahan-Dalmedico, A. et Peiffer, J. (1995). *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*. Seuil.
- Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères IREM*, (59), 5-41. <https://hal.science/hal-00450476/document>
- Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, (100), 59-78.
- Iacono, É., Gros, H. et Clément, E. (2021, décembre). *Flexibilité cognitive et processus de catégorisation dans la résolution de problème de proportionnalité : une étude en milieu scolaire* [Communication]. 61^e congrès de la Société Française de Psychologie, Tours, France. <https://hal.science/hal-03379086/document>
- Levain, J. P. (1992). La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 139-161. <https://doi.org/10.1007/BF00588053>
- Pluvinaige, F. et Dupuis, C. (1981). La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(2), 165-212. <https://revue-rdm.com/1981/la-proportionnalite-et-son/>
- Simard, A. (2012). Reconnaissance de situations de proportionnalité en CM2–6^e. *Grand N*, (90), 49-68.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133-170.
- Voisin, S. (2017). L'enseignement de la proportionnalité : une expérimentation en classe de SEGPA. *Grand N*, (103), 36-56.

ANNEXES

Les 9 cas possibles de la catégorie $C_5^2 - 1$; a et b désignent des données.

1^{er} cas

100 %	a%	inc ₁ % ?
b	inc ₂ ?	inc ₃ ?

2^e cas

100 %	a%	inc ₁ % ?
inc ₂ ?	b	inc ₃ ?

3^e cas

100 %	a%	inc ₁ %
inc ₃ ?	inc ₂ ?	b

4^e cas

100 %	inc ₁ %	a%
b	inc ₂ ?	inc ₃ ?

5^e cas

100 %	inc ₁ %	a%
inc ₂ ?	b	inc ₃ ?

6^e cas

100 %	inc ₁ %	a%
inc ₃ ?	inc ₂ ?	b

7^e cas

100 %	inc ₂ %	inc ₃ %
a	b	inc ₁ ?

8^e cas

100 %	inc ₂ %	inc ₃ %
a	inc ₁ ?	b

9^e cas

100 %	inc ₂ %	inc ₃ %
inc ₁ ?	a	b