

LA CONSTRUCTION DE LA DÉFINITION DU CERF-VOLANT : UNE PRATIQUE ENSEIGNANTE POUR DÉVELOPPER LE RAISONNEMENT CHEZ DES ÉLÈVES DE 6^E ANNÉE DU PRIMAIRE AU QUÉBEC

| MICHOT* SANDRINE

Résumé | Certaines pratiques enseignantes, ainsi que ce qui est proposé dans les manuels, à propos de l'apprentissage de la définition mathématique ne favorisent pas la construction du sens des concepts géométriques chez les élèves. À cette fin, nous proposons une tâche sur la construction de la définition du cerf-volant pour des élèves du primaire. Des éléments logiques essentiels pour comprendre les spécificités de la définition mathématique et amorcer un travail sur le raisonnement déductif seront travaillés.

Mots-clés : géométrie, définition mathématique, cerf-volant, école primaire, raisonnement déductif

Abstract | Teaching practices and textbook suggestions regarding the learning of mathematical definitions are not conducive to building students' sense of geometric concepts. To this end, we propose a task on the construction of the definition of a kite for primary school pupils. Logical elements essential to understanding the specifics of mathematical definition and initiating work on deductive reasoning will be worked on.

Keywords: Geometry, mathematical definition, kite, elementary school, reasoning

I. PROBLÉMATIQUE : L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DE LA DÉFINITION MATHÉMATIQUE

Cette contribution s'inscrit dans un projet doctoral visant à amorcer le développement du raisonnement déductif dès l'école primaire. De fait, certains auteurs soulèvent que le raisonnement déductif est à faire ressortir davantage au primaire (Harel et Sowder, 1998 ; Mariotti, 2006 ; Solomon, 2006 ; Usiskin, 1982). Un travail sur les définitions (De Villiers, 1998 ; Ouvrier-Buffet, 2003 ; 2005), mené de concert avec l'analyse de figures à l'aide des instruments de géométrie (Cyr, 2011 ; Perrin-Glorian, 2001 ; Tanguay et Geeraerts, 2012), et avec l'intégration progressive d'éléments de raisonnement déductif, comme la maîtrise des bases de logique et de théorie des ensembles, est une piste à considérer.

Par un travail sur les définitions, nous entendons une approche favorisant l'engagement des élèves et dans laquelle ces derniers ont à découvrir ou à construire des définitions (De Villiers, 1998). De fait, bien comprendre le rôle et le statut de la définition est un facteur essentiel dans l'élaboration de démonstration. Effectivement, si l'élève amalgame dans la définition toutes les propriétés qu'il connaît de la figure géométrique, alors il ne sera pas en mesure de les dissocier, ou d'en choisir une pour en prouver une autre. Ainsi, lorsqu'il réalise une démonstration (preuve déductive), il ne sera pas quoi invoquer et à quel moment dans la « sériation des propositions » (Tanguay et Geeraerts, 2012).

Néanmoins, la littérature relève que certaines pratiques enseignantes à propos de la définition en géométrie ne permettent pas aux élèves de construire le sens des concepts définis. D'après De Villiers (1998), les enseignant·e·s ont tendance à présenter des définitions aux élèves sans qu'il y ait eu un travail de construction préalable et sans s'appuyer sur des connaissances sur la structure de la définition

* Université du Québec à Montréal – Canada – michot.sandrine@courrier.uqam.ca

mathématique (minimale et sans éléments redondants) (voir section II). Apprendre par cœur des définitions sans leur donner du sens peut avoir un impact négatif sur les apprentissages des élèves. Un élève qui apprend la définition d'un objet ne comprend pas forcément le concept sous-jacent ou même la définition en tant que telle, et pourrait ne pas être en mesure de réexploiter la définition dans un contexte qui met des raisonnements déductifs en jeu (Bernat, 2021). L'enseignement direct des définitions en géométrie est donc une pratique enseignante critiquée par les mathématiciens et les enseignants de mathématiques (De Villiers, 1998 ; Freudenthal, 1973 ; Griffiths et Howson, 1974 ; Ohtani, 1996 ; Vinner, 1991). De plus, Ouvrier-Bufferet (2003) montre qu'en géométrie, il n'est pas rare que les définitions présentées aux élèves soient variables et même parfois contradictoires dans les manuels scolaires. Elle constate un manque d'uniformité entre les définitions formelles proposées dans les ouvrages de référence, ce qui contribue à la confusion qui règne autour de la définition mathématique. Afin d'aller valider ces constats, nous avons réalisé une analyse de manuels québécois à propos des définitions des quadrilatères présentées au 2^e cycle du primaire, (Michot, 2023). Nos observations vont dans le même sens que celles d'Ouvrier-Bufferet (2003) : il n'y a pas d'uniformité entre les énoncés présentés et le référentiel théorique (au sens de Kuzniak et al., 2016) est très instable au sein des collections étudiées. L'aspect minimal des définitions mathématiques n'est pas pris en compte : les énoncés sont redondants et exhaustifs. On retrouve dans la plupart des cas une liste de propriétés pour « définir » les figures géométriques. La plupart des énoncés ne respectent ni la structure de la définition mathématique ni celle de la définition lexicale.

Or, une théorie géométrique se construit et s'élabore à partir d'objets définis selon la propriété caractéristique choisie (il peut y avoir plusieurs définitions acceptables) : à partir d'une proposition donnée, on peut déduire une nouvelle proposition en s'appuyant sur une règle d'inférence (axiome, théorème, définition) (voir exemple p. 9-10 de Tanguay et Geeraerts, 2012). La définition mathématique et le travail sur la définition mathématique ont donc un rôle important à jouer pour préparer et pour appuyer le travail déductif à venir des élèves. Pour ce faire, la définition doit être minimale et inclusive (voir section II). Ouvrier-Bufferet (2005) met en avant que les activités impliquant la construction de définitions apportent un réel enrichissement conceptuel, et peuvent constituer une pratique pédagogique intéressante pour amener les élèves à développer leur pensée géométrique, et ce dès le primaire. Même si la culture de la définition mathématique n'est pas encore installée au primaire, nous pensons qu'il est possible de mettre en place cette pratique si les définitions travaillées portent sur des objets géométriques accessibles et prévus au programme de formation du primaire. Il nous semble judicieux de réaliser des expérimentations auprès d'élèves du primaire afin de mieux cerner en quoi cette pratique enseignante a des impacts sur l'appréhension de nouveaux concepts.

C'est pourquoi nous avons construit une séquence d'enseignement dans laquelle des élèves de 6^e année du primaire sont amenés à réaliser un travail sur l'analyse de figures et la construction de définition du cerf-volant, objet géométrique peu connu des élèves. L'objectif est de voir si cette pratique enseignante influence les apprentissages potentiels des élèves et leur permet de mieux comprendre les propriétés des figures tout en amorçant un travail sur le raisonnement déductif ainsi que sur les processus logiques sous-jacents. Dans le cadre de cette communication, nous présentons l'élaboration d'une tâche géométrique tirée de cette séquence.

II. CADRE CONCEPTUEL : LA DÉFINITION MATHÉMATIQUE ET L'ACTIVITÉ DE DÉFINITION

Pour que la définition puisse préparer le raisonnement déductif à venir des élèves, celle-ci doit avoir une structure spécifique aux mathématiques. D'abord, les particularités de la définition lexicale et de la définition mathématique sont présentées, afin de mieux comprendre les enjeux de l'enseignement-

apprentissage de la définition pour les enseignants et les élèves. Ensuite, différentes approches pour l'enseignement de la définition mathématique sont décrites pour voir comment il est possible de travailler la définition mathématique à l'école primaire.

1. *La définition lexicale vs la définition mathématique*

Les définitions mathématique et lexicale se distinguent par leur structure et leurs finalités. La définition lexicale a comme finalité de donner le sens le plus précis possible à propos du terme défini, dans le but de décrire le langage et de donner des explications sur son utilisation. La définition lexicale se subdivise en deux parties : une composante centrale construite autour d'un sens appelé *genre prochain* et d'un ensemble de *différences spécifiques* (Polguère, 2016). Le *genre prochain* exprime ce que le mot défini a en commun avec les autres mots ou concepts qui lui ressemblent le plus. Les *différences spécifiques* expriment ce par quoi ce mot se distingue des mots qui ont le même genre prochain. Par exemple, le parallélogramme est défini comme un « quadrilatère [genre prochain] dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles et égaux [diff. spécifiques] » (Petit Robert, 1984, p. 1355). Comme il est illustré ici, la définition lexicale est exhaustive : on y retrouve la liste de toutes les propriétés de l'objet défini.

Quant à la définition mathématique, elle permet d'attribuer un sens aux objets mathématiques travaillés. C'est un énoncé particulier impliquant des propriétés mathématiques qui respecte une structure spécifique aux mathématiques : elle doit tenir compte de tous les cas possibles (Duval, 2005) et doit être rédigée en s'appuyant sur un nombre minimal de caractéristiques (Duval, 2005 ; Ouvrier-Buffer, 2015 ; Tanguay et Geeraerts, 2012).

La définition d'un objet géométrique associe un groupe nominal à une condition nécessaire et suffisante. Celle-ci est constituée d'une seule propriété caractéristique (par exemple, avoir quatre angles droits [pour le rectangle]) ou d'une conjonction minimale de propriétés simples (par exemple, avoir quatre angles droits et quatre côtés isométriques [pour le carré]) (Tanguay et Geeraerts, 2012, p. 14).

En effet, comme l'indique Duval (2005, p. 38),

[p]armi une liste de propriétés pouvant être attribuées à un objet, il s'agit de retenir uniquement celles qui suffiront pour retrouver, par déduction, toutes les autres. Naturellement cela ouvre à la voie à plusieurs définitions possibles d'un même objet. Ainsi on peut avoir au moins trois définitions différentes d'un parallélogramme : [quadrilatère qui a deux paires de côtés parallèles ; quadrilatère qui a deux paires de côtés opposés isométriques ; quadrilatère qui a des diagonales partageant le même milieu].

La définition mathématique se construit à partir d'une seule propriété caractéristique. Il y a donc une équivalence ($\Leftrightarrow$) entre la propriété caractéristique et l'objet géométrique défini. La minimalité des définitions mathématiques est essentielle pour établir une structure logique entre les propriétés, c'est-à-dire pour que les différentes propriétés soient déduites les unes des autres, à travers la construction d'une théorie où chaque propriété a sa place dans un ordre (logique) précis. Cette structure logique, essentielle pour la construction du sens mathématique, échappe souvent aux élèves, qui ont tendance à donner en bloc indissociable toutes les propriétés qu'ils connaissent de l'objet à définir, ce que Tanguay et Geeraerts (2012) appellent la *litanie des propriétés*. Ces difficultés découlent du fait qu'ils définissent les objets selon la structure des définitions lexicales : ils sont exhaustifs et listent toutes propriétés, plutôt que de proposer des définitions minimales en s'appuyant sur une propriété caractéristique.

Une autre particularité de la définition mathématique est qu'en géométrie, la définition se présente habituellement sous une forme inclusive (De Villiers, 1994). Une définition inclusive est organisée de façon à ce que les concepts plus particuliers forment des sous-ensembles du concept plus général. Par exemple, le rectangle sera défini comme « un quadrilatère avec 4 angles droits » ($\text{rectangle} \Leftrightarrow 4 \text{ angles}$

droits). Ainsi, le carré entre dans cette catégorie de figure puisqu'il satisfait à la définition, le carré est donc alors un cas particulier de rectangle.

Toutefois, les définitions peuvent aussi prendre une forme exclusive, ce qui est semblable à l'usage dans le langage courant. Une définition exclusive «interdit à un objet de vérifier des propriétés additionnelles à celles le définissant, donc lui interdisant d'appartenir à une classe restreinte d'objets plus particuliers» (Bernat, 2021, p. 16). Les différents sous-ensembles de concepts sont alors considérés comme disjoints les uns des autres. Par exemple, sous cette forme, le rectangle est défini comme «un quadrilatère ayant quatre angles droits et possédant deux paires de côtés opposés de mêmes dimensions, les longueurs de ces paires étant différentes» (Bernat, 2021, p. 16). Ainsi, avec cette définition, le carré n'est pas un rectangle. Par exemple, si nous demandons des tuiles de céramique rectangulaires dans une quincaillerie, nous serions surpris qu'on nous présente des tuiles carrées.

Les élèves sont en mesure de réaliser une classification inclusive : ils comprennent la logique et sont capables de donner des définitions inclusives, mais n'en voient pas l'utilité (Clements et Battista, 1992). De Villiers (1994) a mis en évidence que même si les élèves sont en mesure de donner des définitions inclusives, ils préfèrent employer des définitions exclusives parce que c'est plus naturel pour eux. La définition inclusive n'est pas employée spontanément dans la vie courante : c'est sans doute la raison la plus évidente pour expliquer les difficultés qu'ont les élèves à réaliser une classification inclusive des quadrilatères. En effet, comme le souligne De Villiers (1994), si on voit un carré, on ne dira pas que l'on voit un losange. On réservera le terme «carré» pour des carrés et le terme «losange» pour des losanges non carrés.

La définition inclusive permet une meilleure compréhension des objets géométriques et de leurs propriétés (Bernat, 2021 ; De Villiers, 1994). Elle est donc à privilégier en géométrie, dans la mesure où elle servira pour la rédaction de démonstrations. Malgré cela, De Villiers (1994) mentionne que le type de classification des figures et les définitions associées sont arbitraires et non absolues : le choix est personnel et varie selon l'utilité souhaitée. Il mentionne qu'il est important de ne pas considérer les définitions mathématiques exclusives comme invalides, elles seraient plutôt inefficaces, mal adaptées au travail mathématique subséquent.

L'enseignement-apprentissage de la définition mathématique est complexe, notamment parce qu'il est contre-intuitif pour les élèves de rédiger des définitions mathématiques minimales et inclusives qui s'appuient sur une propriété caractéristique, car dans le langage courant les définitions lexicales sont plutôt exhaustives et exclusives et s'appuient sur une liste de propriétés. Il est d'autant plus important de construire le sens des définitions mathématiques, afin que l'élève soit en mesure de choisir la propriété qui caractérise l'objet défini (il y a une équivalence entre l'objet défini et la propriété caractéristique) et qu'il comprenne pourquoi la définition peut être considérée comme minimale et inclusive.

2. *L'apprentissage de la définition : définition formelle ou définition provisoire*

La conception et le rôle de la définition mathématique ne font pas l'unanimité en didactique des mathématiques (Ouvrier-Buffet, 2003). Différentes perspectives s'affrontent, parmi lesquelles nous exposons ci-dessous celles de définitions formelle et provisoire.

La définition formelle est présentée lors de l'exposition des savoirs et de l'explication des concepts mathématiques. Elle est construite et présentée par un «expert» comme un enseignant ou un auteur de manuel. Elle est utilisée dans une approche déductive, où l'on présente aux élèves une définition qu'ils doivent réutiliser dans les chaînes déductives.

La définition provisoire est celle qui se met en place dans un contexte de découverte. L'élève construit une définition tout en découvrant une nouvelle connaissance. Elle lui permet de comprendre le sens du mot, mais également, de découvrir par lui-même la chaîne déductive dont découle la définition. Il est possible de distinguer deux types de définitions provisoires des concepts : la définition descriptive et la définition constructive, toutes deux envisageables dès l'école primaire (De Villiers, 1998 ; Freudenthal, 1973). La définition « descriptive » est mise en œuvre lorsque le concept et ses propriétés sont déjà connus. Le but est alors de formaliser des connaissances existantes. Quant à la définition « constructive », le but en est de produire de nouvelles connaissances. Un travail sur la définition permet de construire un nouveau concept.

Étant donné qu'un élève a peu de chance de comprendre le sens d'une définition formelle s'il n'a pas la chance d'inventer des définitions en se fiant aux propriétés des objets géométriques qu'il découvre (Freudenthal, 1973), nous avons choisi de travailler la description provisoire pour favoriser la construction de sens chez les élèves. De fait, comme présenté précédemment, les pratiques rapportées dans les recherches autour de la définition mathématique sont déficientes. Dans le cadre de l'activité présentée dans cet article, les élèves travailleront la définition de type « constructive » à l'aide du cerf-volant, figure géométrique avec laquelle ils sont peu familiers et dont toutes les connaissances sont à produire.

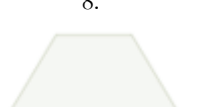
III. PRATIQUES ENSEIGNANTES ENVISAGÉES : UNE TÂCHE SUR LA DÉCOUVERTE DES PROPRIÉTÉS DU CERF-VOLANT ET LA CONSTRUCTION D'UNE DÉFINITION PROVISoire DU CERF-VOLANT

Dans cet article nous présentons en détail la sixième activité tirée d'une séquence d'enseignement. Les quatre premières activités proposées dans cette séquence travaillent la définition provisoire de type « descriptive ». L'idée est de partir du travail habituel des élèves sur des quadrilatères usuels, avec mesure et instruments de géométrie (activités 1 et 2), pour les amener vers les notions de propriétés géométriques indépendantes du représentant de la figure (activités 2 et 3 : « jeu du portrait »), puis à comprendre les différences entre une propriété simple et une propriété caractéristique (en lien avec l'implication, sa réciproque et l'équivalence correspondante), différences essentielles pour réaliser un travail sur la définition mathématique (activité 3). Il s'agit de mettre en évidence qu'une définition mathématique s'appuie sur des propriétés caractéristiques (activité 4 : définition de quadrilatères usuels). Les cinquième et sixième activités prévues au sein de cette séquence permet de travailler la définition provisoire de type « constructive ». Ces tâches visent la construction de la définition du quadrilatère nommé cerf-volant au Québec. Les élèves sont amenés à découvrir le cerf-volant en tant que quadrilatère convexe particulier et à reconnaître la figure d'une manière globale : activation des connaissances antérieures et lecture d'un énoncé historique sur le cerf-volant en guise de dévolution pour introduire le sujet (activité 5). Puis, lors de la sixième activité, l'enseignant·e y invite les élèves à définir cette nouvelle classe de quadrilatères. L'objectif principal est de réinvestir la notion de propriétés caractéristiques d'une classe de figures géométriques afin de proposer une définition d'un cerf-volant en prenant en compte les propriétés sur les côtés, les angles et les diagonales.

Pour ce faire, l'enseignant·e distribue une fiche sur laquelle des cerfs-volants et des non-cerfs-volants (avec des propriétés communes aux cerfs-volants) de toutes tailles et formes sont tracés (Tableau 1), et une affiche sur laquelle les élèves doivent rédiger la définition et inscrire les propriétés simples et caractéristiques du cerf-volant (voir annexes). Puisque des non-cerfs-volants (#5, 7, 8, 9) sont proposés aux élèves, ceux-ci devront décider quelles sont les figures à garder, et repérer quelles

propriétés pourraient caractériser la classe des cerfs-volants. Ils ont à se positionner et décider si chaque figure doit être mise dans la catégorie « cerf-volant » ou non : qui est et qui n'est pas un cerf-volant ? Le non-cerf-volant #5 a été choisi car il ressemble à un cerf-volant, le #7, car il a des diagonales perpendiculaires, le #8, car il a un axe de symétrie et le #9, car il a 2 paires de côtés consécutifs isométriques. Les cerfs-volants #4 et #6 sont des doubles cerfs-volants et le #10 peut être considéré comme un cerf-volant non-convexe.

Tableau 1 – Cerfs-volants (# 1, 2, 3, 4, 6) et non-cerfs-volants (#5, 7, 8, 9)

				
1.	2.	3.	4.	5.
				
6.	7.	8.	9.	10.

L'enseignant·e rappelle aux élèves que pour définir cette nouvelle classe de quadrilatères, il faut isoler une *propriété caractéristique*, c'est-à-dire une propriété particulière qui permet de différencier la figure de toutes les autres figures, celle qui va caractériser complètement la figure. Les élèves essaient de voir ce que les figures retenues ont toutes en commun et ils peuvent s'aider de leurs instruments de géométrie (règle graduée, équerre et rapporteur d'angles) pour déterminer le plus de propriétés possibles vérifiées par chaque figure : les côtés, les angles, les diagonales, les axes de symétrie.

Une fois que l'équipe s'est mise d'accord à propos de ce qu'est un cerf-volant, elle formule une définition du cerf-volant et l'écrit sur leur affiche. Elle inscrit également les propriétés simples et les propriétés caractéristiques du cerf-volant. L'enseignant·e circule pour observer comment chaque équipe s'y prend pour formuler les définitions et pour soutenir les équipes qui seraient bloquées ou auraient plus de difficultés à repérer les propriétés des figures. L'enseignant·e essaie de repérer les équipes dont les définitions pourraient alimenter des discussions intéressantes pour le retour en grand groupe (voir exemple à la section V).

Après l'analyse des cerfs-volants et la composition de la définition, une séance de discussion sous forme de débat en grand groupe est arbitrée par l'enseignant·e. Chaque équipe vient afficher sa définition au tableau afin de lire les définitions du cerf-volant et les propriétés simples et caractéristiques proposées par chaque équipe. Ensuite, chacune vient à tour de rôle présenter sa définition d'un cerf-volant et les propriétés simples et caractéristiques retenues. Si certaines définitions sont identiques ou similaires, l'enseignant·e peut choisir de les traiter parallèlement ou l'une à la suite de l'autre. À partir des réponses, les équipes ou élèves discutent s'ils sont d'accord ou non avec les définitions proposées et les propriétés identifiées. Les élèves réagissent également s'il y a des erreurs, si certaines propriétés ne sont pas vérifiées, etc. L'enseignant·e les invite à donner des contre-exemples le cas échéant. Les élèves peuvent s'aider des figures non-cerfs-volants des fiches pour en suggérer.

Finalement, l'enseignant·e fait un retour sur les apprentissages effectués lors de cette séance. Il ou elle inscrit sur une affiche la définition du cerf-volant qui a été retenue pour le référentiel théorique de la classe. Il ou elle inscrit également toutes les propriétés du cerf-volant : côtés consécutifs isométriques, une paire d'angles opposés isométriques, des diagonales perpendiculaires et qui se coupent au milieu d'une des diagonales, un axe de symétrie.

IV. APPRENTISSAGES POTENTIELS DES ÉLÈVES

Pour être en mesure de proposer une définition, les élèves doivent choisir les figures à retenir dans cette nouvelle classe de quadrilatères. Pour ce faire, ils devront utiliser adéquatement leurs instruments de géométrie et avoir une vision non iconique des formes pour analyser les figures (Duval, 2005), c'est-à-dire concevoir les figures en termes de points, de droites, de segments, de courbes, de surfaces. Du fait qu'il y a trop de similitudes entre les figures présentées (globalement elles ressemblent toutes à un cerf-volant), les élèves doivent décomposer et comprendre les relations entre les éléments de dimensions 0, 1 et 2 (c'est ce qu'on appelle la déconstruction dimensionnelle) et analyser les unités figurales (sommets, angles, côtés, diagonales, etc.) des figures dessinées pour en repérer les propriétés. Les élèves auront l'occasion de réinvestir leurs connaissances à propos des propriétés simples et caractéristiques et de la définition mathématique : retenir les propriétés caractéristiques pour composer leur définition mathématique, afin qu'elle soit minimale et efficace. Par ailleurs, il est envisagé que les élèves soient obligés d'employer un vocabulaire géométrique adéquat (ex. : *angle, opposé, côté, perpendiculaire, consécutif*) et de délaisser le vocabulaire courant (ex. : *coin, trait, ligne, croisement, vertical, à gauche*) pour l'élaboration d'un référentiel théorique satisfaisant, sur lequel ils pourront s'appuyer par la suite.

Un des apprentissages envisagés dans cette tâche est une amorce sur le développement du raisonnement déductif en faisant des liens logiques entre implication, réciproque et équivalence entre les propriétés, et en validant les définitions proposées par les différentes équipes. Les élèves pourront prendre conscience que les définitions inclusives sont à privilégier.

Les élèves définiront vraisemblablement le cerf-volant de plusieurs façons différentes, selon les propriétés des côtés et/ou des angles, des diagonales, des axes de symétrie. Par exemple, une équipe pourrait définir le cerf-volant comme « un quadrilatère qui a deux paires de côtés adjacents isométriques ». Une subtilité à prendre en compte à propos du choix de cette définition : un quadrilatère qui aurait 3 côtés isométriques (sur 4) satisferait à cette définition, sans pour autant être un cerf-volant : voir le 9^e quadrilatère (tableau 1). Les phases de débat permettront aux élèves d'être sensibilisés à la nécessité, en mathématiques, d'être aussi précis que possible. L'enseignant·e pourrait corriger en proposant « les 4 côtés du quadrilatère sont répartis dans deux paires de côtés adjacents isométriques ». On pourrait aussi dire que c'est « un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et dont une coupe l'autre en son milieu » ou « un quadrilatère dont une des diagonales est un axe de symétrie ». Les élèves pourront aussi définir le cerf-volant en termes de déconstruction dimensionnelle : « c'est un quadrilatère composé de deux triangles isocèles disposés sur une base commune ».

L'enseignant·e invite les élèves à donner des contre-exemples le cas échéant. Les élèves peuvent s'aider des figures non-cerfs-volants des fiches de la première partie de l'activité pour suggérer des contre-exemples. Supposons par exemple qu'une équipe définisse le cerf-volant comme « un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires ». Il s'agit d'une condition nécessaire, mais qui n'est pas suffisante (on ne peut pas parler d'équivalence ici). Une autre équipe pourrait proposer un contre-exemple en dessinant un quadrilatère qui a des diagonales perpendiculaires mais qui n'est pas un cerf-volant (ex. : 7^e quadrilatère du tableau 1). Une équipe pourrait proposer « un quadrilatère qui a un axe de symétrie ». Une autre équipe proposerait alors le trapèze isocèle comme contre-exemple : il respecte cette condition, mais n'est pas un cerf-volant (ex. : 8^e quadrilatère du tableau 1). L'inadéquation peut être formulée (ou reformulée, par l'enseignant·e, par les autres équipes) de plusieurs façons : la classe des cerfs-volants est incluse dans la classe des quadrilatères qui ont un axe de symétrie mais c'est une inclusion stricte, il y a dans cette 2^e classe des quadrilatères qui ne sont pas

des cerfs-volants ; c'est une propriété nécessaire, mais non suffisante, elle ne caractérise pas complètement les cerfs-volants et ne peut donc être prise comme définition ; etc. « Être un cerf-volant » implique « avoir un axe de symétrie », mais la réciproque n'est pas (toujours) vraie ; etc.

Au besoin, l'enseignant·e peut également prévoir au tableau une banque de quadrilatères additionnels pour aider les élèves à trouver des contre-exemples et une série de questions pour relancer la discussion et enrichir le débat pour que de courts raisonnements soient mis à profit.

Par exemple, l'enseignant·e pourrait poser ce type de questions aux élèves : « est-ce qu'un cerf-volant peut avoir un angle droit ? » (Réponse attendue : oui) (ex. : 1^{er} ou 4^e quadrilatère du tableau 1) ; « est-ce qu'un cerf-volant peut avoir deux angles droits ? » (Réponse attendue : oui) ; « est-ce qu'avoir deux diagonales perpendiculaires est suffisant pour être un cerf-volant ? (*avoir deux diagonales perpendiculaires $\Leftrightarrow$ être cerf-volant) » (Réponse attendue : non, parce qu'une des diagonales doit couper l'autre en son milieu) ; « est-ce que le losange pourrait être considéré comme un cerf-volant ? Si oui, sinon pourquoi ? » (Réponse attendue : oui, c'est un double cerf-volant) (ex. : 6^e quadrilatère du tableau 1) ; « être un carré implique-t-il être un cerf-volant ? (être carré $\Rightarrow$ être cerf-volant) (Réponse oui : car le carré a des côtés adjacents isométriques. C'est aussi un double cerf-volant ou un cerf-volant particulier) (4^e quadrilatère du tableau 1) ; Réciproquement : « est-ce que tous les cerfs-volants sont des carrés ? (*être cerf-volant $\Leftrightarrow$ être carré ; être carré $\Rightarrow$ être cerf-volant –mais la réciproque n'est pas vraie– *être cerf-volant $\Rightarrow$ être carré) » (Réponse attendue : non, on vient de montrer qu'un losange est un cerf-volant et ce n'est pas (nécessairement) un carré. Ce n'est pas une équivalence) (faire les liens avec la définition retenue), etc.

À cet égard, le losange (en particulier le carré) et le trapèze isocèle seront à surveiller, pour des raisons opposées : le losange et le carré sont à garder même s'ils ne correspondent pas tout à fait à l'idée intuitive qu'on se fait d'un cerf-volant ; le trapèze isocèle est à rejeter même s'il correspond pour certains à l'idée d'un cerf-volant. Si les élèves n'arrivent pas à trouver des contre-exemples, l'enseignant·e peut prendre une définition et proposer un contre-exemple comme décrit précédemment. Le but est que la définition du cerf-volant soit minimale et efficace, qu'elle soit composée d'une seule propriété caractéristique (équivalence entre la propriété caractéristique choisie et le cerf-volant).

Les questions de l'enseignant·e sont importantes pour alimenter le débat et pour s'assurer que les élèves poussent leur réflexion plus loin en ce qui a trait à la logique entre les propriétés des figures (travailler l'implication, sa réciproque et l'équivalence) : cette pratique enseignante vise à travailler le raisonnement des élèves. Par exemple les questions « être un carré implique-t-il être un cerf-volant ? » et « est-ce que tous les cerfs-volants sont des carrés ? » visent à ce qu'ils se rapportent à la définition du cerf-volant donnée dans cette tâche pour y répondre.

V. CONCLUSION

L'enseignement et l'apprentissage de la définition mathématique doivent permettre aux élèves de construire du sens à propos des concepts définis et de s'y référer pour le travail déductif subséquent. Pour ce faire, les tâches proposées aux élèves doivent leur laisser la chance de construire des définitions minimales et inclusives qui s'appuient sur une propriété caractéristique. Présenter des définitions aux élèves sans qu'il y ait eu un travail de construction préalable et sans s'appuyer sur des connaissances sur la structure de la définition mathématique ne favorise pas les apprentissages des élèves. L'enseignant·e a donc un rôle important à jouer pour guider les élèves dans cet apprentissage : la construction du sens passe par une mise en action des élèves et l'enseignant·e doit être capable de se

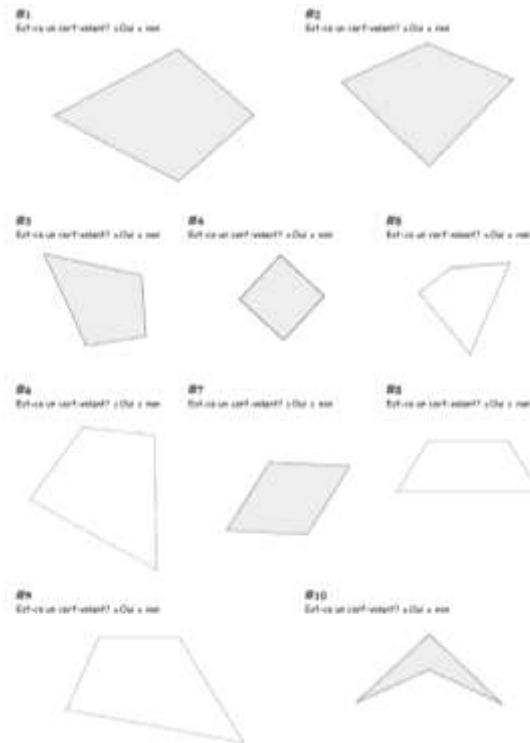
saisir de leurs réponses pour les aider à raisonner et à saisir la logique entre les propriétés des figures et la définition mathématique et ainsi faire progresser la connaissance commune de la classe. En ce sens, une véritable pratique est à développer, pour une gestion efficace de ce type d'activités.

RÉFÉRENCES

- Bernat, J. (2021). Réflexions sur les quadrilatères et leur enseignement. *Repères-IREM* (122), 15-46.
- Clements, D. H. et Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 420-464). Macmillan.
- Cyr, S. (2011). Development of beginning skills in proving and proof writing by elementary school students. Dans M. Pytlak, T. Rowland et E. Swoboda (dir.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 9-13 février 2011, Université de Rzeszów, Pologne* (p. 263-272).
- De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.
- De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? Dans A. Olivier et K. Newstead (dir.), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 12-17 juillet 1998, Université de Stellenbosch, Afrique du Sud* (volume 2, p. 248-255).
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel.
- Griffiths, H. B. et Howson, A. G. (1974). *Mathematics: Society and curricula*. Cambridge University Press.
- Harel, G. et Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, 7, 234-283.
- Kuzniak, A., Tanguay, D. et Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM*, 48(6), 721-737.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. Dans A. Gutiérrez et P. Boero (dir.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education past, present and future* (p. 173-204). Sense Publishers.
- Michot, S. (2023, 11-12 mai). *La définition des quadrilatères à l'école primaire : un état des lieux des manuels québécois du 2^e cycle du primaire* [communication orale]. 90^e congrès de l'ACFAS, Université de Montréal, Montréal, Canada.
- Ohtani, M. (1996). Telling definitions and conditions: An ethnomethodological study of sociomathematical activity in classroom interaction. Dans L. Puig et A. Gutiérrez (dir.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 8-12 juillet 1996, Universitat de València, Espagne* (volume 4, p.75-82).

- Ouvrier-Bufferet, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques* [Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier - Grenoble I]. ProQuest Dissertations & Theses Global.
- Ouvrier-Bufferet, C. (2005). Activités de classification et construction de définitions à l'école élémentaire. Dans *Actes du XXXII^e Colloque COPIRELEM* (p. 1-8).
<https://bibnum.publimath.fr/IWO/IWO06019.pdf>
- Perrin-Glorian, M.-J. (2001). Des problèmes pour enseigner la géométrie à l'école. Des expériences spatiales aux objets géométriques. Dans *Actes de la Journée IREM-APMEP-IUFM-CRDP sur la géométrie en primaire*, Centre régional de documentation pédagogique Nord-Pas-de-Calais. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02428982>
- Solomon, Y. (2006). Deficit or difference? The role of students' epistemologies of mathematics in their interactions with proof. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 373-393.
- Tanguay, D. et Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, (88), 5-24.
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* [Thèse de doctorat inédite]. University of Chicago.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. Dans D. Tall (dir.), *Advanced mathematical thinking* (p. 65-81). Kluwer Academic Publishers.
https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5

ANNEXES



1. D'après l'analyse sur les figures réalisée, inscrivez toutes les propriétés du cerf-volant.

2. Composez une définition de ce qu'est un cerf-volant.

Attention, votre définition doit être précise et permettre d'identifier clairement un cerf-volant parmi un lot de figures.

Que pouvez-vous dire à propos de :

- Des côtés?

- Des angles?
- Des diagonales?
- Des axes de réflexion?

Définition du cerf-volant :

Définition du cerf-volant :