

LA PREUVE EN MATHÉMATIQUES : DIFFICULTÉS D'ÉTUDIANTS ET APPORTS POTENTIELS DES ASSISTANTS DE PREUVE

| SISCO* CLARA ET OUVRIER-BUFFET** CÉCILE

Résumé | La rupture entre le secondaire et le supérieur est notamment marquée par un changement d'exigences et de rapport aux objets et processus de preuve, plus complexes et plus formels. Les recherches internationales sur les technologies dans les apprentissages en mathématiques en appellent à une analyse des usages et apports des assistants de preuve dans l'apprentissage de la preuve. Nous présentons les premiers résultats d'une étude exploratoire sur les conceptions sur la preuve de 153 étudiants de première année d'université, et leur évolution après 10h de séances mobilisant des assistants de preuve.

Mots-clés : preuve, démonstrations, difficultés, étudiants, assistants de preuve

Abstract | The transition between secondary and tertiary education is characterized, in particular, by different requirements and a change in the relationship to concepts and proving processes, which are more complex and more formal. International research on technology in mathematics education calls for an analysis of the uses and the potentialities of proof assistants to proof learning. We present the first results of an exploratory study in which the proof's conceptions of 153 first-year university students and their evolution after 10 hours of sessions with proof assistants.

Keywords: Proving processes, proof, difficulties, undergraduate students, proof assistants / theorem provers

I. MOTIVATIONS DE LA RECHERCHE ET CONTEXTE

La preuve, constitutive de l'activité mathématique, est une composante caractéristique de son épistémologie. Fondamentale à tous les niveaux de la scolarité et de la formation, elle contribue de manière significative aux processus d'apprentissage des connaissances mathématiques (p. ex., Hanna et De Villiers, 2012). Les enquêtes internationales à grande échelle (p. ex., TIMSS) montrent qu'elle occupe une place trop marginale dans l'enseignement, avec une formation des enseignant·es insuffisante voire inadéquate (p. ex., Stylianides, 2016). La rupture entre le secondaire et le supérieur, constatée par les didacticien·es à l'échelle internationale (p. ex. Battie, 2009 ; Gueudet, 2008 ; Selden et al., 2010), complexifie encore les problématiques liées à l'enseignement de la preuve. Cette transition est marquée par un changement d'exigences et de rapport aux objets et processus de preuve, plus complexes et plus formels, qui nécessite une acculturation aux pratiques des mathématicien·nes (Dawkins et Weber, 2017 ; Selden, 2012). Les étudiant·es eux-mêmes se sentent en grande difficulté avec la logique et le formalisme requis pour concevoir des preuves et écrire des démonstrations (Gueudet et Vandebrouck, 2022 ; Selden, 2012 ; Selden et Selden, 2003). Par ailleurs, la nécessité de développer de nouvelles approches de l'enseignement de la preuve prenant en compte les assistants de preuve (notés dorénavant AP) est clairement démontrée et affirmée par Hanna et Knipping (2020), avec des premières analyses *a priori* (p. ex., Bartzia et al., 2022) et expérimentations prometteuses (p. ex., Kerjean et al., 2022).

Cette recherche est réalisée dans le cadre du projet « les Assistants de Preuve Pour les Apprentissages Mathématiques » (APPAM) dont la visée est d'expérimenter et d'évaluer quels peuvent

* Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Cité – France – clara.sisco@etu.u-paris.fr

** Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris-Est Créteil – France – cecile.ouvrier-buffet@u-pec.fr

être les apports des AP au début de l'enseignement supérieur. Un préalable est d'identifier et caractériser les difficultés du public visé, à savoir des étudiant·es de première année d'université, de telle façon à avoir un référent permettant d'analyser les apports d'AP dans l'apprentissage de la preuve, et ce, à large échelle. C'est l'un des objectifs de notre prochaine expérimentation prévue au printemps 2025.

Nous présentons ici les premiers résultats d'une étude exploratoire qui a été menée pour construire et éprouver les outils théoriques et méthodologiques afin de caractériser des preuves papier-crayon d'étudiant·es.

Les questions qui guident notre recherche doctorale sont les suivantes : Comment décrire et analyser une preuve rédigée par des étudiant·es de manière systématique pour conduire une étude à grande échelle ? Est-il possible d'appréhender, dans un test écrit, une évolution significative du rapport des étudiant·es à la preuve avant/après des séances mobilisant des AP ?

Nous allons, dans une première partie, résumer les principales difficultés connues dans la littérature d'étudiant·es à l'université lorsqu'ils produisent des preuves. Cela nous permettra, dans une deuxième partie, de justifier nos choix pour concevoir des tests préliminaires de diagnostic et de préciser les fondements théoriques que nous avons retenus pour construire ces tests et analyser les données. Les premiers résultats de cette expérimentation seront présentés dans une troisième partie. Nous concluons sur les éléments nous permettant d'assurer la robustesse de notre grille d'analyse et formulerons trois hypothèses à mettre à l'épreuve quant à l'impact des AP sur l'écriture de preuve courte. Nous ouvrirons ainsi des perspectives sur notre mise en œuvre expérimentale prévue au printemps 2025.

Dans cet article, nous prenons le mot « preuve » dans une acception didactique large, englobant tout processus de preuve et la rédaction de démonstrations.

II. PRINCIPALES DIFFICULTÉS D'ÉTUDIANT·E·S RELATIVES À L'ÉCRITURE DE PREUVE

Comme mentionné plus haut, la rupture entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur est soulignée au niveau international par de nombreux chercheur·euses en didactique des mathématiques (p. ex., Gueudet, 2008 ; Selden et al., 2010). Dans cette transition, il y a un changement dans le contrat didactique, mais aussi dans le rapport aux concepts mathématiques et aux preuves qui nécessite une vision plus complexe et formelle des objets et des processus de preuve avec une forme d'acculturation aux pratiques des mathématicien·nes (p. ex., Dawkins et Weber, 2017 ; Selden, 2012). Les étudiant·es ont le sentiment d'être en difficulté, notamment en ce qui concerne les « modes de pensée pour les mathématiques » (Di Martino et Gregorio, 2019), ainsi que la logique et le formalisme requis dans les processus de preuve et de rédaction de preuves (p. ex., Selden, 2012 ; Selden et Selden, 2003). Ainsi, iels ne sont pas « prêt·es » aux attentes en termes de symbolisme à l'entrée de l'université.

Par ailleurs, au niveau international, les synthèses (celles citées par exemple par Stylianides, 2016 ; Selden, 2012 ; Gueudet et Vandebrouck, 2022) convergent sur les difficultés des élèves et leurs causes : une connaissance insuffisante des concepts mathématiques, des notions abstraites soulevant des difficultés de conceptualisation, des attentes renvoyant aux pratiques expertes des mathématicien·nes, un manque de méta-connaissances sur la preuve, une différence de « culture » institutionnelle entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, un manque d'articulation entre les approches

sémantique, syntaxique et pragmatique (Deloustal et al., 2020) et, enfin, des difficultés à rédiger une preuve. Toujours d'après ces travaux, les étudiant·es de début d'université utilisent des raisonnements inappropriés, souvent basés sur la logique du quotidien (p. ex., Selden et Selden, 2003 ; Selden et al., 2010 ; Selden, 2012). Par ailleurs, on ne sait pas vraiment comment les élèves valident leurs preuves, tant lorsqu'ils les construisent que lorsqu'ils les lisent, à l'exception des résultats qualitatifs des travaux de Weber (2001). Il existe d'autres facteurs, tel que « le manque de cohérence des efforts de réforme » (voir la discussion pertinente, toujours d'actualité, de Harel et Fuller [2009]).

Prenant en compte l'ensemble de ces difficultés, nous faisons le choix, pour étudier les conceptions sur la preuve d'étudiant·es de première année d'université, avant et après apprentissage avec des AP, de prendre appui sur des contenus mathématiques :

- *a priori* non problématiques pour les étudiant·es ;
- permettant la rédaction de preuves « simples », c'est-à-dire possibles dans différents registres de représentation et non complexes en termes de formalisme mathématique.

III. CONCEPTION DE DEUX TESTS : CHOIX ET MÉTHODE

1. Contexte de l'expérimentation

Notre mise en œuvre expérimentale s'appuie sur l'UE de Fondement du Calcul et du Raisonnement en première année de licence mathématique - informatique à l'Université de Strasbourg suivie par 153 étudiant·es réparties en 6 groupes. À la suite de 24 heures de cours intégré réparties sur 7 semaines, un premier test a été réalisé, puis les 6 groupes ont réalisé 10 heures de TP étalées sur 3 mois, 3 groupes ont utilisé l'AP D $\exists\forall$ duction (point and click, développé par F. Le Roux), 3 groupes Verbose L $\exists\forall$ n (textuel, développé par P. Massot). Nous n'avons pas participé au niveau didactique à la conception des TP. Un second test a été réalisé à la suite de ces TP par 47 des 141 étudiant·es présentes au premier test.

Les TP avaient pour objectif de travailler quelques notions mathématiques au programme de la première année de licence et de découvrir et manipuler les environnements des deux AP cités plus haut. Ainsi, ont été mobilisés : des notions de théories des ensembles pour les TP d'introduction, puis les bornes supérieure et inférieure, la notion de limite sur les réels et finalement, les applications, l'injectivité, la surjectivité et les ensembles image directe et image indirecte.

2. Présentation des tests

Les énoncés des tests que nous avons conçus sont composés de trois exercices. L'exercice 1, porte sur la somme et le produit de deux nombres impairs. Dans l'exercice 2, il s'agit de formaliser un énoncé écrit en langue naturelle sans le démontrer, et l'exercice 3 propose une question ouverte sur ce que les étudiant·es utilisent lorsqu'ils écrivent des preuves. Les énoncés choisis sont pertinents à la transition secondaire – supérieur et ont déjà été utilisés dans deux études internationales à grande échelle (Healy et Hoyles, 1998 ; Stylianou et al., 2015).

Au Royaume-Uni (Healy et Hoyles, 1998), il a été demandé à des élèves de 14/15 ans de choisir la preuve la plus proche de celle qu'ils auraient écrite, parmi cinq preuves, s'ils avaient dû prouver l'énoncé « *When you add any 2 even numbers, your answer is always even* ». Cette partie est suivie d'une série de questions sur les preuves proposées. Il s'agit ensuite d'écrire la preuve de l'énoncé « *When you add any 2 odd numbers, your answer is always even* ».

Aux États-Unis (Stylianou et al., 2015), il n'a pas été demandé aux étudiant·es de première année d'université d'écrire la preuve, mais de choisir, parmi quatre preuves (énoncés identiques à Healy et Hoyles), la plus proche de celle qu'ils auraient écrite, de celle qu'ils identifient comme la plus rigoureuse d'un point de vue mathématique, et de celle qu'ils auraient choisie pour expliquer le problème à un de leur pair.

Exercice 1 : Démontrer l'énoncé suivant :
"La somme de deux entiers impairs est paire".

Exercice 2 : Formaliser en langage mathématique, de manière la plus rigoureuse possible, l'énoncé suivant :
"Le produit de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 6".

Exercice 3 : Qu'utilisez-vous quand vous faites une démonstration (votre "boîte à outils") ? Vous pouvez répondre par une liste de mots, donner des exemples, etc.

Figure 1 – Test 1 (avant enseignement avec AP)

Exercice 1 : Démontrer l'énoncé suivant :
"Le produit de deux entiers impairs est impair".

Exercice 2 : Formaliser en langage mathématique, de manière la plus rigoureuse possible, l'énoncé suivant :
"Le nombre qui précède le carré d'un nombre impair est divisible par 8".

Exercice 3 : Qu'utilisez-vous quand vous faites une démonstration (votre "boîte à outils") ? Vous pouvez répondre par une liste de mots, donner des exemples, etc.

Figure 2 – Test 2 (après enseignement avec AP)

3. *Justifications et cohérence des tests*

Pour réaliser les deux tests, au regard de la littérature présentée dans la section précédente, de nos questions de recherche, et des contraintes matérielles imposées par l'organisation des cours et TD à l'université, nous avons fait les choix suivants :

- des énoncés utilisables à la transition secondaire-supérieur, courts, en langue naturelle, avec des contenus mathématiques a priori non problématiques pour les étudiant·es car anciens et supposés stabilisés ;
- des notions mathématiques non mobilisées pendant les TP et actuellement non disponibles dans les AP ;
- de récupérer des productions d'étudiant·es qui puissent nous permettre d'observer la rédaction d'une preuve simple (exercice 1), la formalisation d'un énoncé donné en langue naturelle (exercice 2) et quelques éléments de discours des étudiant·es sur leurs propres pratiques de la preuve en mathématiques (exercice 3) ;
- une durée courte (car l'expérimentation s'est déroulée sur le temps de classe).

Pour finir, il fallait que ces tests soient pertinents dans une optique de comparaison des effets éventuels des AP. Dans ce cadre, pour une étude exploratoire, nous ne recherchions pas dans la rédaction de preuve demandée aux étudiant·es un enjeu de vérité ou la construction d'un nouveau concept, c'est pourquoi nous nous sommes limités à la rédaction d'une preuve simple et à la formalisation d'énoncés mathématiques. Ainsi, les énoncés retenus nous permettent :

- de s'affranchir au maximum d'obstacles liés aux contenus notionnels (exercice 1) : pour analyser comment les étudiant·es formalisent et organisent une preuve simple, nous faisons

l'hypothèse que les propriétés liées à la parité placent les étudiant·es dans un environnement favorable pour qu'ils se concentrent sur la rédaction de la preuve ;

- différentes formalisations possibles (exercice 1 et 2) : les énoncés sont proposés en langue naturelle et permettent différentes formalisations, dans le domaine algébrique. Ce domaine est dans le prolongement des types d'écritures utilisés dans les AP sans que, ni les contenus mathématiques, ni le type de formalisation n'aient été traités en TP.

IV. FONDEMENTS ET MÉTHODES DES ANALYSES DES DONNÉES

1. *Fondements théoriques de la grille d'analyse*

La grille d'analyse présentée ici cherche à répondre à deux contraintes :

- être généralisable : elle se veut indépendante des contenus mathématiques et du niveau scolaire de passation ;
- être pertinente pour mesurer d'éventuels impacts de l'utilisation d'AP sur le rapport des étudiant·es à la preuve.

Nous avons commencé par mobiliser la typologie proposée par Balacheff (1987) et les registres de représentation (Duval, 1993). Une analyse préalable nous a permis de montrer la nécessité de faire une analyse en trois sections :

- l'introduction des objets mathématiques et les indicateurs de quantification ;
- la mobilisation de propriétés mathématiques sur les objets ;
- la formulation d'arguments et la conclusion.

L'enjeu de la première section est de regarder les objets introduits par les étudiants d'une part, et la quantification d'autre part. Cette approche fait écho au « contexte » de la preuve que l'on trouve systématiquement dans les AP qui permet de suivre l'évolution des objets et les propriétés disponibles (Kerjean et al., 2022). Concernant la quantification, nous avons décrit les mots qui accompagnent les objets introduits sans toujours chercher à caractériser si elle était universelle ou existentielle. En effet, l'utilisation de certaines expressions ne permet pas toujours d'interpréter si l'étudiant a mobilisé une quantification existentielle ou universelle. L'expression « avec » en est un bon exemple (Hache, 2015) : on la retrouve, par exemple, dans la phrase « tout entier impair s'écrit de la forme $2k+1$, avec $k \in \mathbb{Z}$ ».

La deuxième section nous permet de mettre en évidence les propriétés mathématiques disponibles et/ou mobilisables des étudiants.

Concernant la troisième section, nous avons utilisé le modèle de Toulmin (p. ex., Pedemonte, 2002) en utilisant les indicateurs « permis d'inférer » et « énoncé conclusion ». Nous avons codé si des arguments étaient présents dans la preuve, et si oui, lesquels. Puis, nous avons distingué l'énoncé conclusion, atteignable d'un point de vue mathématique au vue des objets introduits, de l'énoncé conclusion écrit par les étudiant·es.

2. *Premiers résultats du pré-test*

Les 130 productions complètes récupérées au premier test montrent les éléments suivants. Une large majorité (70 %) sont à la fois :

- de l'ordre de l'expérience mentale ;

- écrites dans un registre algébrique mixte (modélisation algébrique avec présence de langue naturelle) ;
- utilisant un raisonnement déductif ;
- mobilisant ce que nous appellerons la « division euclidienne formelle » pour caractériser les entiers impairs. C'est-à-dire l'ensemble des constructions d'entiers impairs mobilisant l'écriture « $2k+1$ ».

Ainsi, en prenant en compte la grille d'analyse précédente, les éléments qui nous permettent de discriminer les productions entre elles sont les modalités d'introduction et de quantification des objets, les permis d'inférer et les énoncés conclusions.

Soit n et p 2 entiers impairs s'écrivant sous la forme de $2k+1$
 $n+p = 2k+1 + (2k+1)$
 $= 4k+2$
 $= 2(2k+1)$
 Posons $K = 2k+1$
 un entier d'où $n+p = 2K$
 Sachant que un entier pair s'écrit $2k$ on peut en conclure que la somme de 2 entiers impairs est paire.

Figure 1 – Non-distinction des entiers dans l'énoncé « somme de deux entiers impairs »

Nous souhaitons attirer l'attention sur une erreur observée dans 29 % des 130 productions : démontrer l'énoncé « la somme d'un entier avec lui-même est paire » et non « la somme de deux entiers impairs est paire ». Elle est dans la majorité des cas causée par la non-distinction entre k et k' dans la caractérisation des entiers impairs par la division euclidienne formelle comme dans l'extrait ci-dessous.

Par ailleurs, dans leur étude, Healy et Hoyles (s. d.) observent que 22 % des élèves sont capables de produire une « preuve complète ». Considérant nos données et les critères suivants, nous observons 18,3 % de « preuve complète » dans nos productions :

- selon la connaissance mobilisée, la présence de l'argument « un facteur de 2 est pair » ou des propriétés sur la somme des congruences ;
- les objets introduits rendent atteignable la preuve de l'énoncé « la somme de deux entiers impairs est paire » ;
- le calcul sur la somme est abouti ;
- présence de la quantification universelle.

3. Premiers résultats de comparaison pré/post

On observe dans le post-test une baisse de la présence des énoncés conclusions (de 85,1 % dans le pré-test à 74,5 % dans le post-test). Cette baisse n'est pas corrélée à une plus grande difficulté des étudiant-es à finaliser le calcul du produit par rapport à celui de la somme. Nous pouvons formuler l'hypothèse : « l'utilisation d'AP peut causer la disparition des énoncés conclusion dans les preuves

rédigées par les étudiant·es et, plus généralement, de l'explicitation de la démarche en langue naturelle ». En effet, dans les deux AP l'acte de conclure est pris en charge par la machine.

Tableau 1 – Marqueurs de la quantification universelle sur les 47 couples pré/post complets

	Pré-test	Post-test
Aucun	17,8 %	6,4 %
Avec le symbole « $\forall$ »	2,2 %	12,8 %
Avec l'expression « Soit »	42,2 %	72,3 %
Avec la langue naturelle autre que « Soit » (avec, on pose, prenons, etc.)	26,7 %	6,4 %
Domaine de définition uniquement	11,1 %	2,1 %

Le tableau 1 montre une normalisation du bloc d'introduction des objets après les TP avec AP. Cette normalisation s'observe notamment dans la quantification, on a une augmentation de l'utilisation du symbole « $\forall$ » et environ deux fois moins de productions où il n'y a aucune quantification. Nous attirons l'attention sur l'abandon de la catégorie « langue naturelle autre que “Soit” » au profit d'un usage plus important de l'expression « Soit » et du symbole « $\forall$ ». Les figures 2a, 2b et 3a, 3b illustrent ce phénomène :

On sait que $a = 2k+1$ $b = 2k'+1$ $k, k' \in \mathbb{Z}$
sont des entiers impaire
 $a+b = 2k+1 + 2k'+1$
 $= 2(k+k'+1)$
La somme de a et b est divisible par deux donc
elle est paire

Figure 2a – Pré-test production 34

Soit $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $\exists q, q' \in \mathbb{Z}$ $n = 2q+1$ $m = 2q'+1$
 $n \times m = (2q+1)(2q'+1)$
 $= 4q'q + 2q + 2q' + 1$
 $= 2(2q'q + q + q') + 1$
On note $k = 2q'q + q + q'$
donc $n \times m = 2k + 1$
Donc $n \times m$ est impair

Figure 2b – Post-test production 34

Lemme : un nombre est pair si le reste de la division euclidienne vaut 0.
 Ainsi, un nombre peut être vu comme un sac dans le nombre est représenté avec le nombre de pierre.
 Exemple :
 2 (1 pierre), 5 (2 pierres), 8 (4 pierres), ...
 Or, on remarque que si on compte 2 pierre par 2 pierre alors le sac sera vide et dans le ... donc il y a un nombre pair. En mathématique, on veut de faire un raisonnement.
 → Si le reste vaut 0, le nombre est pair.
 → Si le reste vaut 1, le nombre est impair.
 Donc, si on prend 2 nombres pairs, on a 2 sacs. Si on les met dans un nouveau sac, il y a 2 pierres et on peut le diviser par 2. Donc, si on a 2 nombres pairs, leur somme est pair.
 En mathématique, de manière la plus rigoureuse possible, l'énoncé suivant : "La somme de deux entiers pairs est toujours un multiple de 2".

Figure 3a – Pré-test production 55

Soit a et b deux entiers impairs tel que
 $\exists k, l, a = 2k + 1, b = 2l + 1$
 Ainsi
 $(2k + 1) \cdot (2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1$
 $= 2(2kl + k + l) + 1$
 $= 2n + 1$ avec $n = 2kl + k + l$

Figure 3b – Post-test production 55

La figure 4 montre une persistance de l'erreur prédominante évoquée plus haut. Elle illustre aussi l'évolution du registre de représentation : une forte prédominance de la langue naturelle reste, mais le marqueur langagier devient « Soit ».

Nous savons qu'un entier impair s'écrit $2k + 1$.
 $2k + 1 + 2k + 1 = 4k + 2$, et $4k + 2$ est divisible par 2. La somme de deux entiers impairs est donc paire.

Figure 4a – Pré-test production 138

Soit $m, k \in \mathbb{N}$,
 $m = 2k + 1$ un entier impair.
 $(2k + 1)(2k + 1) = 2k \times 2k + 2k + 2k + 1$
 $= 4k^2 + 4k + 1$
 $= 2(2k^2 + 2k) + 1$ de la forme $2k + 1$
 Donc le produit de deux entiers impairs est impair.

Figure 4b – Post-test production 138

Nous observons aussi une structuration spatiale de l'écrit qui évolue : le retour à la ligne et une indentation. Nous pouvons ici formuler deux hypothèses : « les AP permettent une évolution de la formalisation des énoncés en langue naturelle » et « cette évolution n'est pas corrélée à une meilleure compréhension des concepts mathématiques en jeu ».

V. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous cherchions dans cet article à proposer des premiers éléments de réponses aux questions : Comment décrire et analyser une preuve rédigée par des étudiant·es de manière systématique pour

conduire une étude à grande échelle ? Est-il possible d'appréhender, dans un test écrit, une évolution significative du rapport des étudiant·es à la preuve avant/après des séances mobilisant des AP ?

Les premiers résultats de notre étude montrent que les trois sections proposées pour la grille d'analyse sont opérationnelles et permettent de discriminer les productions écrites des étudiant·es. Cela nous permet de mettre en évidence qu'une seule erreur conceptuelle est identifiée dans les productions : celle de la figure 4 dont l'origine réside, soit dans la maîtrise du formalisme et de la quantification, soit dans la compréhension de la propriété à démontrer. De plus, nous notons une grande diversité dans l'utilisation des registres de représentation dans le pré-test qui se lisse dans le post-test. Nous avons formulé trois hypothèses qui restent à mettre à l'épreuve :

- i. L'utilisation d'AP peut causer la disparition des énoncés conclusion dans les preuves rédigées par els étudiant·es et plus généralement de l'explicitation de la démarche en langue naturelle.
- ii. Les AP permettent une évolution de la formalisation des énoncés en langue naturelle.
- iii. Cette évolution n'est pas corrélée à une meilleure compréhension des concepts mathématiques en jeu.

Bien que nous ayons observé une évolution de la rédaction de preuve entre le pré-test et le post-test, nous ne pouvons que formuler des hypothèses quant à l'impact des TP mobilisant des AP sur les écrits des étudiants. Seuls des entretiens pourraient nous renseigner sur la portée sémantique des symboles que les étudiant·es utilisent souvent par mimétisme (Gueudet et Vandebrouck, 2022) et, plus généralement, sur les choix qu'ils font face à une rédaction de preuve, notamment en termes d'introduction des objets, de choix de formalisme et de structuration de l'écrit. Il serait alors approprié de proposer des entretiens d'explicitation à des binômes d'étudiants en parallèle d'un apprentissage avec des AP qui serait intégrer au protocole expérimental.

RÉFÉRENCES

- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176. <https://doi.org/10.1007/BF00314724>
- Bartzia, E., Meyer, A. et Narboux, J. (2022). Proof assistants for undergraduate mathematics and computer science education: elements of a priori analysis. Dans R. Hochmuth (dir.), *INDRUM 2022 Proceedings, Leibniz University Hannover, Germany* (p. 253-262).
- Battie, V. (2009). Proving in number theory at the transition from the secondary level to the tertiary level: Between organizing and operative dimensions. Dans F. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna et M. De Villiers (dir.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (p. 71-76). National Taiwan Normal University Taipei Taiwan.
- Dawkins, P. C. et Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 123–142. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9740-5>
- Deloustal-Jorrand, V., Gandit, M., Mesnil, Z. et Da Ronch, M. (2020). Utilisation de l'articulation entre les points de vue syntaxique et sémantique dans l'analyse d'un cours sur le raisonnement. Dans T. Hausberger, M. Bosch et F. Chellougui (dir.), *INDRUM 2020 Proceedings, University of Carthage, Tunisia* (p. 378-387).
- Gregorio, F., Di Martino, P. et Iannone, P. (2019). The secondary-tertiary transition in mathematics successful students in crisis. *EMS Newsletter*, 113, 45-47. <https://www.doi.org/10.4171/NEWS/113/10>

- Duval, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.
- Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 237-254. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9100-6>
- Gueudet, G. et Vandebrouck, F. (2022). Transition secondaire-supérieur : ce que nous apprend la recherche en didactique des mathématiques. *EpiDEMES*, 1. <https://doi.org/10.46298/epidemes-7486>
- Hache, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec ». *Petit x*, 97, 27-43.
- Hanna, G. et Knipping, C. (2020). Proof in mathematics education, 1980-2020: An overview. *Journal of Educational Research in Mathematics*, (Special Issue), 1-13.
- Hanna, G. et De Villiers, M. (dir.). (2012). *Proof and proving in mathematics education*. Springer.
- Harel, G. et Fuller, E. (2009). Current contributions toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. Dans D. A. Stylianou, M. L. Blanton et E. J. Knuth (dir.), *Teaching and learning proof across the grades – A K-16 perspective*. Routledge.
- Healy, L. et Hoyles, C. (s. d.). *Technical report on the Nationwide Survey*.
- Healy, L. et Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics*. Institute of Education, University of London.
- Kerjean, M., Le Roux, F., Massot, P., Mesnil, Z., Modeste, S., Narboux, J. et Rousselin, P. (2022). Utilisation des assistants de preuves pour l'enseignement en L1. *La Gazette de la société mathématique de France*, 174, 35-55.
- Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l'apprentissage des mathématiques* [Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier].
- Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. Dans G. Hanna et M. De Villiers (dir.), *Proof and proving in mathematics education* (p. 391-420). Springer.
- Selden, A., McKee, K. et Selden, J. (2010). Affect, behavioral schemas, and the proving process. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 199–215. <https://doi.org/10.1080/00207390903388656>
- Selden, A. et Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Mathematics Education Research*, 34, 4-36.
- Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L. et Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1, 91-134. <https://doi.org/10.1007/s40753-015-0003-0>
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101-119. <https://doi.org/10.1023/A:1015535614355>