

ÉTUDE DES PROXIMITÉS DISCURSIVES POUR ENSEIGNER LES LIMITES DE FONCTIONS EN L1 : QUELLE VARIABILITÉ ENTRE LES COURS ET LES MANUELS ?

| GRENIER-BOLEY* NICOLAS ET BRIDOUX** STÉPHANIE

Résumé | Nous étudions ici l'enseignement des limites de fonctions en première année universitaire. Nous comparons ce qui peut se jouer en termes d'apprentissages des étudiants dans un cours magistral d'une part, et dans deux manuels d'autre part. Le relief de la notion nous permet de déterminer les occasions de proximités discursives dans le discours de l'enseignant et dans celui des manuels. Les résultats donnent à voir une grande variété de choix et des occasions de proximités de natures différentes.

Mots-clés : limites de fonctions, texte du savoir, apprentissages des étudiants, proximités discursives, relief sur les notions à enseigner

Abstract | We study the teaching of limits of functions in the first year of university. We compare what can be achieved in terms of student learning in a lecture on the one hand and in two textbooks on the other hand. The relief allows us to identify opportunities for discursive proximities in the discourse of the teacher and in that of the textbooks. The results show a variety of choices and opportunities for different kinds of proximities.

Keywords: Limits of functions, text of knowledge, student learning, discursive proximities, relief on the concepts to be taught

I. ÉLÉMENTS DE CONTEXTE

Dans cette communication, nous présentons une recherche en cours visant à étudier les pratiques enseignantes en première année d'université lors de l'introduction de la définition formelle de limite de fonction. Cette recherche s'inscrit dans un projet plus vaste d'étude des pratiques enseignantes à l'université dans le contexte des cours magistraux (Bridoux et al., 2023). Le choix de cibler la notion de limite de fonction tient d'une part au fait qu'elle a été beaucoup moins étudiée en didactique des mathématiques que celle de limite de suite (voir par exemple Oktaç et Vivier [2016] pour une synthèse), et d'autre part au fait qu'elle pourrait, comme les suites, être source de difficultés chez les étudiants. De plus, cette notion a été peu étudiée en portant une attention spécifique au discours de l'enseignant, ce qui est le cas ici.

Pour mieux apprécier ce qui peut se jouer dans un cours magistral sur les limites de fonctions, nous nous proposons ici de comparer le cours d'un enseignant en amphithéâtre en première année d'université avec le cours délivré dans deux manuels. Le discours de cet enseignant pendant le cours a déjà fait l'objet d'une étude (Bridoux & Grenier-Boley, 2024). Cette comparaison entre deux modes d'introduction différents (cours magistral et manuels) nous permet d'inférer des éléments sur la conceptualisation possible de la notion chez les étudiants. Elle nous amène également à apprécier différentes manières d'introduire la définition en repérant différents types de leviers qui sont utilisés pour introduire le formalisme de celle-ci.

* Univ Rouen Normandie, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, F-76000 Rouen – France – nicolas.grenier-boleyn@univ-rouen.fr

** Université de Mons – Belgique – stephanie.bridoux@umons.ac.be

Dans un premier temps, nous présenterons notre positionnement théorique et la problématique de recherche qui en découle. Nous présentons ensuite les résultats de cette comparaison à l'aune d'analyses des différentes spécificités de la notion étudiée. Nous terminons par une discussion et quelques éléments de perspectives.

II. APPUIS THÉORIQUES

Nous ancrons nos recherches en Théorie de l'Activité, ce qui nous amène à considérer les activités mathématiques des étudiants comme un indicateur de leurs apprentissages (Bridoux et al., 2016). Suivant Vygotsky, nous faisons l'hypothèse que les apprentissages des étudiants résultent pour partie des choix de l'enseignant en termes de scénarios ou de contenus d'enseignement et des déroulements en classe qu'il organise (modalités de travail, aides de l'enseignant,...). Dans ce contexte, une manière de faire progresser les connaissances des étudiants est de tenir un discours aussi proche que possible de ce qu'ils ont déjà fait, de ce qu'ils font et de leurs connaissances anciennes, ce qu'on opérationnalise ici au moyen de la notion de Zone Proximale de Développement (Vandebrouck, 2008). S'agissant de la notion de limite de fonction, qui a déjà été étudiée dans les classes de première et de terminale au lycée (élèves âgés de 15-17 ans), il s'agit pour nous d'apprécier dans quelle mesure les modes d'introduction choisis par l'enseignant et par les manuels sont proches ou non, et prennent appui ou non sur les connaissances anciennes des étudiants.

Les rapprochements que nous évoquons ici sont appelés « proximités discursives » (Robert & Vandebrouck, 2014). Nous reprenons ici telle quelle la présentation que nous en faisons dans un autre texte soumis dans ce même groupe (à propos de l'enseignement des équations différentielles ordinaires) :

Nous distinguons trois types de proximités (Bridoux et al., 2016) : les proximités ascendantes se situent entre ce que l'enseignant fait et l'introduction d'un nouvel objet (passage du contextualisé au décontextualisé), les proximités descendantes se situent entre ce qui a été exposé et des exemples ou des exercices (passage du décontextualisé au contextualisé). Enfin, les proximités horizontales n'amènent pas de changement entre le contextualisé et le décontextualisé. Elles consistent en des reformulations, des explications sur des liens entre les notions, des commentaires sur la structure du cours.

Pour étudier le discours de l'enseignant ou des manuels, nous prenons comme référence le « relief » de la notion de limite, qui consiste en un croisement d'études de natures épistémologique et didactique, curriculaire et cognitive (Bridoux et al., 2016). Ce relief nous permet de préciser les spécificités de la notion pour ensuite étudier la manière dont elles sont prises en compte ou non dans le cours ou dans les deux manuels.

Au regard de ces éléments, notre problématique peut se formuler de la manière suivante : quels éléments de relief sont pris en compte dans le cours et les deux manuels et comment les choix qui y sont faits permettent-ils de tenter différents types de proximités ?

III. RELIEF DE LA NOTION DE LIMITE DE FONCTION ET RÉSULTATS

Le cours magistral étudié est proposé par un enseignant au second semestre de la première année d'université à environ 200 étudiants d'une filière mathématique : lorsque nous évoquerons ce cours magistral dans la suite, nous nous appuierons implicitement sur Bridoux et Grenier-Boley (2024). Dans un souci de comparaison, il nous a semblé pertinent de choisir deux manuels d'époques et de traditions différentes : le manuel de Swokowski (1993) s'inscrit plutôt dans une tradition anglo-saxonne quand le manuel Tout-en-un (Ramis et al., 2014) est plutôt l'héritier d'une tradition francophone.

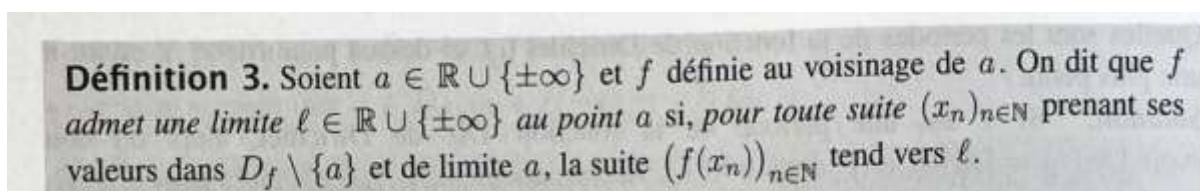
En France, la première rencontre avec la notion de limite de fonction s'effectue en classe de première (élèves de 15-16 ans). Celle-ci est introduite de manière intuitive avec des formulations telles que « $f(x)$ est proche de l lorsque x est proche de a ». En classe de terminale (élèves de 16-17 ans), une formulation en termes d'intervalles est proposée aux élèves. Cependant, les tâches proposées n'utilisent pas les deux types de formulations et sont souvent réduites à des aspects algébriques et opératoires avec de nombreux calculs de limites à réaliser.

Dans la suite de cette section, nous présentons les résultats de nos analyses en nous appuyant sur différents éléments de relief, que nous rappelons à l'occasion.

Des ingénieries didactiques ont été élaborées par des didacticiens pour introduire la notion de limite (Bloch, 2003 ; Lecorre, 2016) mais, à notre connaissance, elles ont été peu reprises par les enseignants. Celles-ci s'appuient souvent sur une articulation entre différents registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993) ou sur des « exemples emblématiques » propres à créer certains besoins chez l'étudiant, tels que la nécessité de construire une définition formelle de la notion. Dans le cours magistral, l'enseignant part d'une formulation géométrique en langue naturelle qui s'appuie sur un graphique :

On essaie de regarder un schéma pour approfondir cette notion. Donc x se rapproche de x_0 , le point M se rapproche du point M_0 , $f(x)$ est l'ordonnée de M se rapproche de l là, d'accord ?

Il prend ensuite l'exemple de la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $\frac{p}{q}$ est irréductible, pour montrer l'ambiguïté de la définition géométrique et faire sentir le besoin d'une définition formelle. En cela, il nous semble que des proximités horizontales entre le graphique et la définition géométrique sont tentées par l'enseignant, mais que l'exemple choisi ensuite n'est pas propice à permettre une proximité ascendante avec la définition ultérieure, en raison de sa complexité et du fait que les étudiants n'ont probablement pas rencontré ce type de fonction dans leurs études antérieures. Dans le manuel Tout-en-un, il n'y a pas de situation d'introduction mais la définition choisie pour la notion de limite de fonction s'appuie sur les suites et sur l'étude des limites de suites présentées dans un chapitre précédent (voir figure 1).



(Ramis et al., 2022, p. 622)

Figure 1 – Définition de limite de fonction

Dans le manuel de Swokowski, il y a d'abord un appui sur une notion intuitive de limite similaire à celle du cours magistral qui émerge cependant à partir d'un exemple davantage accessible aux étudiants (fonction fraction rationnelle polynomiale), plus proche des fonctions rencontrées au lycée. Après le traitement d'un certain nombre d'exemples qui s'appuient sur des calculs de limites et interprétations graphiques, la définition formelle de limite va se construire autour d'un exemple issu de la physique (voir annexe). Le vocabulaire issu de la physique permet d'introduire la notion de tolérance- ε pour y en l et celle de tolérance- δ pour x en a , et ainsi introduire les inégalités présentes dans la définition. Le manuel traduit le fait de « rester proche de » en termes de « contraindre la pression à rester proche de l » et amener ainsi l'idée d'intervalle. Selon nous, il y a ici des tentatives de proximités horizontales.

Une autre spécificité de la notion de limite de fonction est la complexité de sa structure logique, que ce soit la nature des quantificateurs, de leur ordre ou la présence d’une implication. La manipulation d’inégalités comprenant des valeurs absolues s’appuie en outre sur des connaissances sur les nombres réels. Dans le cours magistral, l’enseignant va construire cette définition pas à pas en mettant en parallèle les éléments de la définition intuitive en langage courant et les « blocs » correspondants dans la définition logique formelle (voir table 1 dans l’article) (voir table 1 dans Bridoux et Grenier-Boley, 2024), comme à la figure 2.

Ce qui est écrit au tableau	Ce qui est dit par l’enseignant
$ f(x) - l \varepsilon$	<i>Qu’est-ce que c’est que la distance de $f(x)$ à l ? [réponse d’un étudiant] Oui c’est la valeur absolue de $f(x) - l$ d’accord. Alors on veut que $f(x) - l$ soit aussi petit qu’on veut, $f(x)$ va se rapprocher autant qu’on veut de l, qu’est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire que valeur absolue de $f(x) - l$ est inférieur à epsilon, pour epsilon aussi petit qu’on veut, on est d’accord.</i>

Figure 2 – Construction de la définition (cours magistral)

Ce faisant, il tente aussi des proximités horizontales mettant en lien la notion de distance et des inégalités contenant des valeurs absolues. Dans le manuel Tout-en-un, la définition est donnée sans recourir à des exemples et un commentaire sur le quantificateur présent dans la définition est formulé (voir figure 3).

Il est bon d’insister sur la condition « *pour toute suite* » dans la définition de la limite. Bien évidemment, il ne suffit pas de vérifier que la limite existe pour une suite particulière.

(Ramis et al., 2022, p. 622)

Figure 3 – Commentaire sur le quantificateur présent dans la définition

Dans le manuel de Swokowski, le besoin de la définition est amené par une question qui va permettre une formalisation supplémentaire par rapport à la notion de tolérance présente dans la situation d’introduction (voir figure 4).

Examinons maintenant la question suivante.

Question : Étant donné un $\epsilon > 0$ quelconque, y a-t-il un $\delta > 0$ tel que
si x satisfait à la tolérance- δ en a , alors y satisfait à la tolérance- ϵ en L ?

Si la réponse à cette question est oui, nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow a} y = L.$$

Insistons : si $\lim_{x \rightarrow a} y = L$, quelque petit que soit le nombre ϵ , il y a toujours moyen de trouver un $\delta > 0$ tel que si x est compris dans l'intervalle $]a - \delta, a + \delta[$ sur le manomètre de pression interne (et $x \neq a$), alors y se trouvera dans l'intervalle $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ sur le manomètre de pression à l'étranglement.

(Swokowski, 1993, p. 52)

Figure 4 – Formalisation de la notion de limite

Après la définition, ce manuel propose une articulation entre la notion de tolérance formelle et son interprétation graphique formulée en langue naturelle, ce qui est pour nous aussi une tentative de proximité horizontale (voir figure 5).

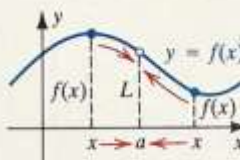
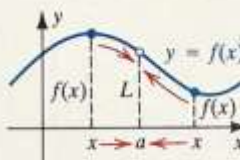
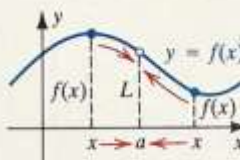
Tolérance	Interprétation graphique
$f(x)$ satisfait à une tolérance- ϵ en L	$P(x, f(x))$ se trouve entre les droites horizontales $y = L \pm \epsilon$
x satisfait à une tolérance- δ en a	x est dans l'intervalle $]a - \delta, a + \delta[$ sur l'axe des x et $x \neq a$

(Swokowski, 1993, p. 54)

Figure 5 – Notions de tolérance

Dans ce manuel, l'introduction globale de la définition s'appuie sur différentes formulations successives avec un vocabulaire qui évolue et ce processus est selon nous propice à une occasion de proximité ascendante.

L'introduction de la définition de limite de fonction est propice à la présence d'articulations entre certains de ses registres de représentation sémiotique. Ces articulations nous semblent de nature à favoriser la présence d'occasions de proximités horizontales pour traduire les liens entre deux registres. Dans le cours magistral, certains registres sont présents à différents moments de la construction de la définition. Par exemple, dans la figure 2, l'enseignant met en lien la notion de distance dans un registre géométrique et sa traduction avec une inégalité contenant une valeur absolue dans son registre algébrique. Pour nous, cet enseignant tente ainsi différentes proximités horizontales dont nous questionnons la portée, dans la mesure où certains de ces registres sont cités oralement sans être écrits d'une part, et où ces connaissances sont très peu travaillées au lycée d'autre part. Dans le manuel Tout-en-un, la notion de limite de fonction et les concepts associés sont présentés dans le registre algébrique et dans celui de la langue naturelle, sans que ceux-ci soient articulés au moyen de proximités horizontales. De plus, il y a absence du registre graphique, ce qui minore la présence de proximités horizontales. Comme nous l'avons déjà évoqué, le manuel de Swokowski propose lors de la construction de la définition de limite de fonction une articulation plus forte entre différents registres au moyen de proximités horizontales qui prennent la forme de reformulations (voir par exemple la notion de tolérance dans les registres de la langue naturelle et graphique dans la figure 5). Dans ce manuel, certaines proximités horizontales liées à des articulations entre registres nous semblent être de meilleure qualité dans la mesure où ces articulations sont plus étroites et davantage associées selon nous aux connaissances anciennes des étudiants (voir par exemple figure 6).

Limite d'une fonction (2.1)	<table><tr><th>NOTATION</th><th>SIGNIFICATION INTUITIVE</th><th>ILLUSTRATION GRAPHIQUE</th></tr><tr><td>$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$</td><td>Nous pouvons rendre $f(x)$ arbitrairement proche de L en choisissant x suffisamment proche de a et $x \neq a$.</td><td></td></tr></table>	NOTATION	SIGNIFICATION INTUITIVE	ILLUSTRATION GRAPHIQUE	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	Nous pouvons rendre $f(x)$ arbitrairement proche de L en choisissant x suffisamment proche de a et $x \neq a$.	
NOTATION	SIGNIFICATION INTUITIVE	ILLUSTRATION GRAPHIQUE					
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	Nous pouvons rendre $f(x)$ arbitrairement proche de L en choisissant x suffisamment proche de a et $x \neq a$.						

(Swokowski, 1993, p. 46)

Figure 6 – Articulation entre différents registres

Dans notre travail antérieur sur le cours magistral (Bridoux et Grenier-Boley, 2024), nous avons anticipé dans le relief de la notion de limite la possibilité de trouver après la définition des exemples propices à des proximités descendantes. Le cours magistral dont il est question ici n'en contient pas.

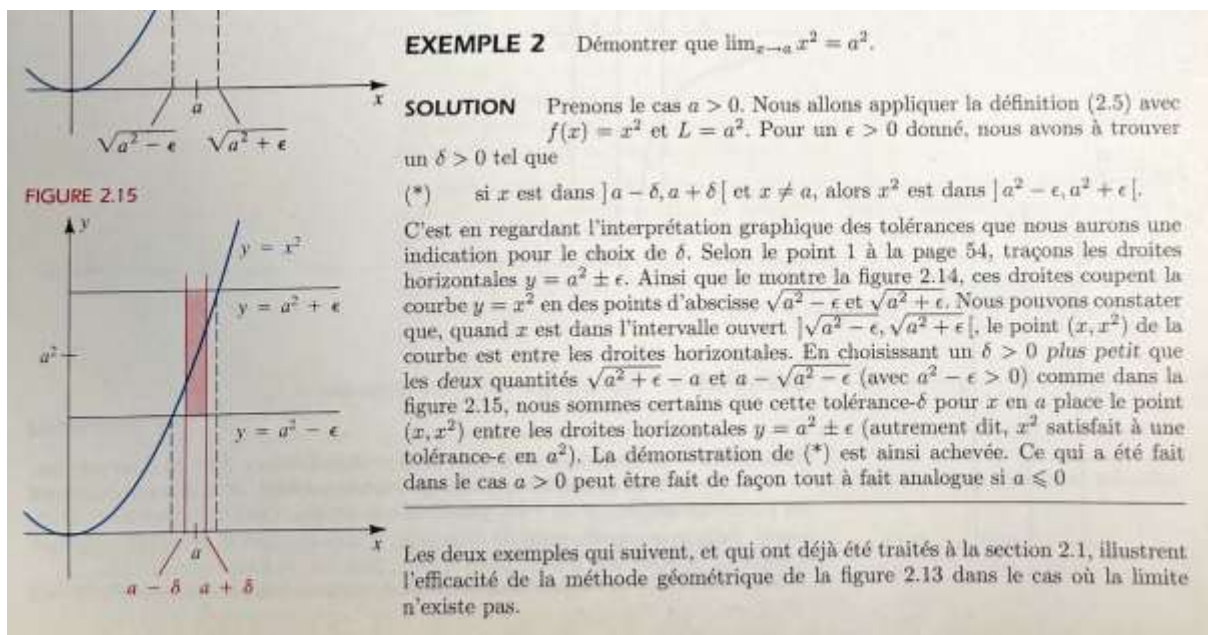
Dans le manuel Tout-en-un, des calculs de limites sont proposés après la définition qui témoignent de la présence d'une proximité descendante pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un certain point. Pour ce faire, le manuel propose un commentaire méthodologique sur la négation de la définition, qu'il met ensuite en œuvre dans l'exemple proposé à la figure 7.

3. Partant de la formule $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, on définit $D_f := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f : x \in D_f \mapsto \sin \frac{1}{x}$. On considère les deux suites $(x_n := \frac{1}{(n+1)\pi})$ et $(y_n := \frac{2}{\pi+4n\pi})$ de D_f . Elles tendent vers 0 et l'on a $f(x_n) = \sin(n+1)\pi = 0$ et $f(y_n) = \sin(\pi/2 + 2n\pi) = 1$, donc la suite $(f(x_n))$ est constante et égale à 0 et la suite $(f(y_n))$ est constante et égale à 1. Par suite f n'a pas de limite en 0. À titre d'exercice le lecteur pourra vérifier que, pour tout $u \in [-1, 1]$, il existe une suite (z_n) de D_f telle que la suite $(f(z_n))$ soit constante et égale à u et il essaiera de dessiner le graphe de f .

(Ramis et al., 2022, p. 623)

Figure 7 – Illustration de la proximité descendante

Dans le manuel de Swokowski, la définition est suivie de quatre exemples dans lesquels les fonctions traitées sont proches de celles travaillées par les étudiants au lycée. Ces exemples sont assortis de commentaires qui montrent différents aspects de l'utilisation de la définition, et constituent donc des tentatives de proximités descendantes (voir figure 8). Le raisonnement est également accompagné d'un graphique qui permet de visualiser certaines manipulations algébriques que requiert la définition.



(Swokowski, 1993, p. 55)

Figure 8 – Traitement d'un exemple

IV. DISCUSSION

Ce travail montre d'abord une grande variété de choix dans les modes d'introduction de la définition de la notion de limite de fonction en termes de registres, de la prise en compte de la structure logique de la définition et de la présence d'exemples. Nous avons repéré dans les trois types de supports les

registres que nous avons identifiés dans nos éléments de relief. La qualité des liens entre ces différents registres varie par contre d'un support à l'autre, empêchant ainsi parfois des tentatives de proximités horizontales (cours magistral, Tout-en-un) ou les favorisant lorsque ceux-ci sont accompagnés de commentaires mettant en jeu des connaissances proches de celles étudiées au lycée (Swokowski). Pour la structure logique de la définition, le manuel de Swokowski nous semble être le seul qui l'explicite à travers de commentaires à visée méthodologique. Sur la présence d'exemples, les deux manuels s'appuient sur des connaissances anciennes différentes. Dans le manuel Tout-en-un, la définition de limite de fonction en termes de suites amène à mobiliser des connaissances anciennes liées aux propriétés des suites, ce qui permet de tenter des proximités descendantes dont il est difficile de se prononcer sur la qualité car il s'agit de connaissances en cours d'acquisition. Le manuel de Swokowski porte une attention sur la nature des fonctions présentes dans les exemples, dans la mesure où celles-ci sont proches de fonctions étudiées au lycée. Les proximités descendantes qui sont tentées à cet égard offrent à l'étudiant des techniques algébriques et graphiques. Elles permettent selon nous de passer des conceptions dynamiques développées au lycée, où la notion de limite est associée à l'idée de « s'approcher de », à des conceptions statiques, où la notion de limite est associée à l'idée de « être aussi proche que l'on veut de » (Mamona-Downs, 2001).

Nous envisageons maintenant de compléter ce travail par d'autres observations in situ et par l'analyse d'autres manuels ou cours magistraux, pour ainsi affiner ces premiers résultats à différents égards.

RÉFÉRENCES

- Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu : What forms of knowledge enable students to conjecture and prove. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 3-28.
- Bridoux, S. et Grenier-Boley, N. (2024). What teaching practices should be used to introduce the limits of functions in the first year of university? A case study. Dans *Proceedings of the Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*, juin 2024, Barcelone, Espagne (p. 791-800). <https://hal.science/hal-04937710v1>
- Bridoux, S., Grenier-Boley, N. et Leininger-Frézal, C. (dir.). (2023). *Les recherches en pédagogie universitaire, vers une approche disciplinairement située*. ISTE.
- Bridoux, S., Grenier-Boley, N., Hache, C. et Robert, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances. Analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 187-233.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Lecorre, T. (2016). Rationality and concept of limit. Dans *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM2016)*, 31 mars au 2 avril 2016, Université de Montpellier, France (p. 83-92). Université de Montpellier et INDRUM. <http://erme.site/wp-content/uploads/2021/06/indrum2016proceedings.pdf>
- Oktaç, A. et Vivier, L. (2016). Conversion, change, transition... in research about analysis. Dans B. Hodgson, A. Kuzniak et J.-B. Lagrange (dir.), *The didactics of mathematics: Approaches and issues* (p. 87-121). Springer.
- Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288.

Ramis, J.-P., Warusfel, A., Buff, X., Garnier, J., Halberstadt, E., Moulin, F., Ramis, M. et Sauloy, J. (2022). *Mathématiques. Tout-en-un pour la Licence 1* (4^e éd.). Dunod.

Robert, A. et Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2-3), 239-285.

Swokowski, E. W. (1993). *Analyse* (5^e éd., M. Citta, trad.). De Boeck Université.

Vandebrouck, F. (dir.). (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octares.

ANNEXE : SITUATION D'INTRODUCTION PROPOSÉE DANS LE MANUEL DE SWOKOWSKI (1993)

