

DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES TUNISIENS À CONVERTIR LES EXPRESSIONS SYMBOLIQUES EN LANGAGE NATUREL : ÉGALITÉ, INÉGALITÉ ET INTERSECTION ENTRE ENSEMBLES

| KILANI* IMED ET CHELLOUGUI** FAÏZA

Résumé | Dans l'enseignement des mathématiques, il est important de développer la capacité des élèves à convertir les expressions symboliques en langage naturel et vice versa (Pólya, 1989 ; Delavault, 1977 ; Duval, 1993, 1995 ; Bronckart, 2007 ; Hache, 2013). Cet article présente une partie d'une étude réalisée avec des élèves tunisiens de 17 à 18 ans ayant une formation scientifique, visant à évaluer leur aptitude à convertir en français des expressions symboliques basiques impliquant des relations d'égalité, d'inégalité et d'intersection entre ensembles. Les résultats révèlent que de nombreux élèves éprouvent des difficultés dans cette conversion, en particulier pour expliciter la quantification implicite.

Mots-clés : expression symbolique, langage naturel, conversion, quantification, symboles mathématiques

Abstract | In mathematics education, it is important to develop students' ability to convert symbolic expressions into natural language and vice versa (Pólya, 1989; Delavault, 1977; Duval, 1993, 1995; Bronckart, 2007; Hache, 2013). This article presents a part of a study conducted with Tunisian students aged 17 to 18 with a scientific background, aimed at assessing their ability to convert basic symbolic expressions involving equality, inequality, and intersection relations between sets into French. The results reveal that many students struggle with this conversion, especially in clarifying implicit quantification.

Keywords : Symbolic expression, natural language, conversion, quantification, mathematical symbols

I. INTRODUCTION

En mathématiques, les symboles sont essentiels pour représenter des concepts et des relations souvent abstraits, pouvant exprimer des significations complexes et multiples (Kline, 1980 ; Bloch, 2008 ; Leng, 2010). Contrairement au langage naturel, intuitif par nature, le langage symbolique nécessite une compréhension approfondie. Les élèves, encore non experts, peuvent éprouver des difficultés à interpréter les symboles et expressions mathématiques en raison de leur manque d'expérience, de leur niveau de compétence mathématique actuel, et de la complexité syntaxique et sémantique des symboles. Ils doivent comprendre non seulement chaque symbole individuellement, mais aussi l'ensemble de l'expression symbolique, en tenant compte des interactions entre les différents symboles. L'accompagnement du langage symbolique par des explications verbales constitue une stratégie efficace pour soutenir les élèves, notamment ceux qui éprouvent des difficultés avec les symboles mathématiques (Delavault, 1977 ; Duval, 1993 ; Duval et Pluvinaud, 2016 ; Chesnais et Coulange, 2022). Ces explications verbales apportent un éclairage complémentaire, aidant à dissiper les ambiguïtés liées aux symboles et à faciliter une meilleure compréhension des concepts mathématiques.

Dans ce texte, nous présentons les résultats d'une partie d'une recherche menée avec des élèves tunisiens de formation scientifique, âgés de 17 à 18 ans, dans laquelle nous avons étudié leur capacité à convertir en langage naturel français¹ des expressions mathématiques symboliques simples, mettant

* Université virtuelle de Tunis – Tunisie – kilani2006@yahoo.fr

** Université de Carthage – Tunisie – chellouguifaiza@yahoo.fr

¹ En Tunisie, le français est une langue seconde privilégiée enseignée dans les écoles publiques à partir de la troisième année de l'école primaire.

en jeu des relations basiques d'égalité, d'inégalité et d'intersection entre des ensembles et incluant l'ensemble vide. L'expérimentation porte sur un cas concret d'application directe de la notion de « partition »² d'un ensemble en trois sous-ensembles.

Cet article est structuré en deux sections principales. La première explore la complexité du passage du langage symbolique au langage naturel et introduit une classification des différents types de conversion des expressions symboliques impliquant des relations simples entre ensembles finis. La seconde présente une partie d'une expérimentation menée auprès de soixante-dix-huit élèves tunisiens, suivi d'une analyse détaillée de leurs réponses et des résultats obtenus. L'article se termine par une discussion générale sur les conclusions de l'étude.

II. DU LANGAGE SYMBOLIQUE AU LANGAGE NATUREL

La conversion du langage symbolique au langage naturel est un aspect fondamental de l'enseignement des mathématiques (Duval, 1993, 1995, 2006). Ce processus est essentiel pour rendre les concepts abstraits plus accessibles et compréhensibles. En effet, bien que le langage symbolique permette d'exprimer des relations mathématiques complexes de manière concise et précise, il peut être difficile à interpréter, notamment pour les élèves qui ne maîtrisent pas pleinement ce registre. À l'inverse, le langage naturel, en raison de sa familiarité et de son accessibilité, offre une opportunité de relier les idées mathématiques formelles à des contextes plus concrets et intuitifs. La conversion entre ces deux registres exige des élèves qu'ils convertissent des symboles mathématiques en descriptions verbales tout en préservant la signification des relations exprimées. Cependant, cette opération ne peut se limiter à une simple traduction mécanique : elle nécessite une compréhension profonde des concepts mathématiques sous-jacents (Duval, 1995). Cela est d'autant plus vrai que les symboles concentrent souvent une grande quantité d'informations implicites. Par exemple, comprendre les implications logiques d'une écriture symbolique peut être difficile, surtout lorsque celles-ci ne sont pas explicitées ou clairement mises en évidence.

Le langage naturel, qui désigne les langues humaines utilisées dans la communication quotidienne (anglais, français, arabe, etc.), se distingue par sa richesse, sa polyvalence et son ambiguïté, résultant d'une évolution historique et sociale (Chomsky, 1965 ; Wittgenstein, 2004). Sa nature parfois imprécise peut engendrer des confusions, notamment lorsque certains termes du langage courant, comme *ou* ou *implique*, diffèrent de leur interprétation en logique formelle. Malgré ces défis, le langage naturel reste un outil crucial pour plusieurs raisons. D'abord, il est accessible et familier, ce qui en fait un point de départ privilégié pour introduire de nouveaux concepts. Ensuite, il soutient la métacognition en aidant les élèves à réfléchir sur leurs processus de pensée et de résolution de problèmes (Sfard, 2008 ; Duval, 1995). Il facilite également la communication, la réflexion et la conceptualisation des idées mathématiques, et relie verbalement les différentes représentations (Sfard, 2008 ; Duval, 1995).

Cependant, la conversion entre langage symbolique et langage naturel peut s'avérer complexe (Duval et Pluvineau, 2016), en particulier lorsque l'expression symbolique implique des informations implicites. Par exemple, une expression comme $A \cup B = C$ met en jeu des connaissances mathématiques qui peuvent passer inaperçues si l'on se contente d'une simple description verbale de l'ensemble C . Cette expression symbolique implique que « l'ensemble C contient tous les éléments de A ou de B », et cela se traduit par une quantification explicite qui est cachée dans l'expression symbolique. Ainsi, les élèves peuvent interpréter $A \cup B = C$ comme une simple égalité entre deux ensembles, sans saisir la relation dynamique entre les éléments de ces ensembles. Une conversion interprétative correcte de cette

² Une partition d'un ensemble E en trois sous-ensembles est une décomposition de cet ensemble en trois parties distinctes U_1 , U_2 et U_3 telles que $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$ et $U_3 \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \emptyset$, et $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = E$.

expression en langage naturel nécessite de préciser que chaque élément de C doit appartenir à A ou à B , et réciproquement. Cette explicitation de la quantification est cruciale pour une compréhension mathématique correcte de la signification de l'expression symbolique. Des difficultés similaires sont parfois observées même chez des étudiants scientifiques (Durand-guerrier, 1996 ; Chellougui, 2009). Certaines études en didactique (Najar, 2010 ; Mesnil, 2014) montrent également que les étudiants, à leur entrée à l'université, peinent souvent à démontrer l'égalité entre ensembles. Par exemple, Najar (2010) souligne que les notions ensemblistes et logiques sont fréquemment introduites de manière ad hoc, sans qu'une réflexion approfondie sur leur sens ne soit menée. De même, Mesnil (2014) observe que la relation d'intersection est souvent mal comprise, notamment en raison de sa relation avec la conjonction logique *et*, ce qui peut induire des confusions. Ces difficultés mettent en évidence l'importance d'une compréhension préalable du langage symbolique pour aborder efficacement les raisonnements mathématiques formels. Pólya (1989) insiste sur la nécessité de comprendre en profondeur un problème, son contexte, les relations entre ses éléments et l'objectif à atteindre avant de se lancer dans des démarches formelles. Une fois cette compréhension bien établie, les raisonnements mathématiques peuvent être appliqués avec davantage de clarté et de réussite. La conversion du langage symbolique en langage naturel joue un rôle clé dans ce processus, en enrichissant la compréhension et en facilitant la transition de l'intuition vers un raisonnement rigoureux.

Pour une expression impliquant des ensembles et des symboles mathématiques tels que $\cup$ (union), $\cap$ (intersection), $-$ (différence), $=$ (égalité), $\neq$ (inégalité), et $\emptyset$ (ensemble vide), on peut distinguer deux niveaux de conversion en langage naturel :

- **Niveau littéral.** L'expression est convertie directement en langage naturel en utilisant les termes des symboles présents. Par exemple, l'expression $V \cap F = \emptyset$ se converti littéralement par « L'intersection de l'ensemble V et de l'ensemble F est égale à l'ensemble vide ». Cette conversion reste centrée sur la syntaxe mathématique sans approfondir le sens contextuel ou implicite.
- **Niveau interprétatif.** L'expression est convertie en termes concrets pour révéler la signification sous-jacente des symboles. Par exemple, « Il n'y a pas d'élèves qui pratiquent à la fois le volley et le foot » est une conversion interprétative contextualisée de $V \cap F = \emptyset$ qui clarifie que les ensembles V et F n'ont aucun élément en commun, en intégrant la quantification implicite et les relations entre les ensembles. Cette conversion montre une compréhension plus profonde, ce qui est crucial pour guider le raisonnement mathématique (Schoenfeld, 1994).

Les conversions en langage naturel peuvent être correctes ou incorrectes, ce qui permet de distinguer quatre types de conversion, chacun représentant un niveau de compréhension :

- **Conversion Littérale Correcte (CLC) :** Utilise une terminologie mathématique appropriée mais ne révèle pas la signification implicite de l'expression, notamment la quantification implicite. Par exemple, « L'intersection des ensembles V et F est égale à l'ensemble vide » est une conversion littérale correcte de $V \cap F = \emptyset$, mais elle reste superficielle.
- **Conversion Littérale Incorrecte (CLI) :** Utilise une terminologie incorrecte, reflétant une confusion des symboles mathématiques. Dans cette conversion rien ne montre qu'il y a une tentation de dévoiler la signification profonde ou les concepts sous-jacents de l'expression.
- **Conversion Interprétative Correcte (CIC) :** Va au-delà de la reformulation littérale en clarifiant la signification globale de l'expression et en explicitant correctement les concepts

sous-jacents, notamment la quantification implicite. Elle montre une compréhension approfondie des concepts et des relations entre les symboles mathématiques. Par exemple, « Il n'y a pas d'élèves qui pratiquent à la fois le volley et le foot » ou « Tous les élèves pratiquent soit le volley, soit le foot, mais aucun ne pratique les deux sports simultanément. » sont des conversions interprétatives correctes de $V \cap F = \emptyset$.

- **Conversion Interprétative Incorrecte (CII)** : Fournit une interprétation erronée de l'expression symbolique, révélant des lacunes dans la compréhension des concepts mathématiques sous-jacents et des difficultés d'interprétation des symboles. Par exemple, elle pourrait mal quantifier les éléments implicites dans l'expression.

Ces distinctions entre les niveaux de compréhension des expressions symboliques, notamment celles impliquant les concepts d'égalité, d'inégalité et d'intersection d'ensembles, serviront à évaluer la capacité des élèves à convertir ces expressions en langage naturel, de manière littérale et interprétative. Un questionnaire a été élaboré pour explorer comment les élèves effectuent cette conversion. Les expressions en jeu dans ce questionnaire sont intégrées dans une situation courante décrivant une enquête portant sur les habitudes sportives des élèves.

Ce texte présente une partie des résultats de l'expérimentation. La méthodologie et l'analyse complète des réponses seront détaillées dans le paragraphe suivant.

III. Présentation de l'expérimentation et analyses des résultats

À l'aide d'un questionnaire individuel soumis à 78 élèves tunisiens de 17 à 18 ans poursuivant un parcours scientifique, cette étude vise à évaluer leur capacité à convertir en langage naturel des expressions symboliques impliquant les opérations et relations fondamentales d'égalité, d'inégalité et d'intersection entre ensembles finis, y compris l'ensemble vide. Duval et Pluvineau (2016) soulignent que les programmes scolaires ne mettent souvent pas en avant l'importance de telles activités. Selon eux, cette omission révèle un manque de reconnaissance des difficultés que certains élèves peuvent rencontrer pour comprendre le langage symbolique, difficultés qui se manifestent lorsqu'ils doivent convertir ces expressions en langage naturel. Les expressions symboliques utilisées dans le questionnaire dissimulent une quantification implicite. Une Conversion Interprétative Correcte (CIC) de ces expressions dans le langage naturel exige l'explicitation de cette quantification. Une telle conversion montre que les élèves ont saisi le contenu conceptuel et logique des expressions, notamment les relations universelles ou existentielles entre les éléments.

Le questionnaire est rédigé en français, langue d'enseignement des mathématiques en Tunisie, tandis que la langue maternelle des élèves est l'arabe. Des études, telles que celles de Touati (2011) et Souilah (2018), montrent que les élèves tunisiens ont des difficultés à s'exprimer en français. En plus des défis liés à la conversion des expressions symboliques en verbales, la barrière linguistique due à l'utilisation du français pourrait compliquer leur compréhension et leurs réponses. Ben Nejma (2020) et Ben Kilani (2005) indiquent que les tâches mathématiques sont plus complexes pour les élèves tunisiens lorsque l'énoncé n'est pas en arabe.

Le questionnaire présente une situation basée sur une enquête réalisée dans une classe (C) sur les sports pratiqués par les élèves, désignés par les lettres suivantes : V pour volley, F pour football, et B pour basket. Il comprend deux questions, mais nous nous concentrons dans cet article sur la première. Cette question demande aux élèves de convertir en français les significations des expressions mathématiques suivantes : $V \neq \emptyset$, $F \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $V \cap F = \emptyset$, $V \cap B = \emptyset$, et $B \cap F = \emptyset$. Les trois premières expressions indiquent que les sous-ensembles V, F, et B ne sont pas vides, ce qui est une condition nécessaire pour qu'ils puissent former une partition de l'ensemble C. Les trois dernières

expressions montrent que ces sous-ensembles sont disjoints deux à deux, ce qui est également nécessaire pour une partition. Plus précisément, $V \neq \emptyset$, $F \neq \emptyset$, et $B \neq \emptyset$ signifient que chaque ensemble (V , F , et B) contient au moins un élément. En revanche, $V \cap F = \emptyset$, $V \cap B = \emptyset$, et $B \cap F = \emptyset$ indiquent que ces ensembles sont mutuellement exclusifs, c'est-à-dire qu'aucun élément n'est partagé entre eux. Par exemple, $V \cap F = \emptyset$ signifie que les ensembles V et F sont disjoints, ce qui implique qu'aucun élève ne pratique à la fois le volley (V) et le football (F). Ainsi, cette expression symbolique représente une négation universelle.

Nous analyserons les réponses des élèves en nous basant sur les quatre types de conversion expliqués ci-dessus : Conversion Littérale Correcte (CLC), Conversion Littérale Incorrecte (CLI), Conversion Interprétative Correcte (CIC), et Conversion Interprétative Incorrecte (CII). En raison de la grande diversité des réponses des élèves et pour simplifier l'analyse, nous nous concentrerons uniquement sur les réponses les plus fréquentes.

Les expressions $V \neq \emptyset$, $F \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ ayant une syntaxe identique ont été converties de manière similaire par tous les élèves. Ainsi, nous examinerons principalement la conversion de « $V \neq \emptyset$ ». De même, pour les expressions $V \cap F = \emptyset$, $V \cap B = \emptyset$ et $B \cap F = \emptyset$, nous nous concentrerons sur « $V \cap F = \emptyset$ ». Il convient de préciser que les réponses sont présentées telles qu'elles figurent dans les copies des élèves, y compris avec d'éventuelles erreurs linguistiques.

1. *Analyse des réponses relatives à l'expression symboliques $V \neq \emptyset$*

Ci-dessous, nous présentons un aperçu détaillé des principaux résultats en analysant les différents types de conversions relatives à l'expression symbolique $V \neq \emptyset$ fournies par les élèves.

a-Conversion Littérale Correcte (CLC)

Environ 36% des élèves (28 sur 78) ont donné une Conversion Littérale Correcte pour l'expression « $V \neq \emptyset$ », indiquant une bonne utilisation de la terminologie mathématique pour exprimer que l'ensemble V n'est pas vide. Les deux types de réponses observées étaient : « L'ensemble des élèves qui pratiquent le volley est différent de l'ensemble vide » (16) et « V est différent du vide » (12). La première réponse démontre une contextualisation appropriée, intégrant le contexte de la situation, tandis que la deuxième réponse se contente d'une conversion littérale, sans prise en compte du contexte. Cependant, ces conversions ne garantissent pas une compréhension complète de l'implication plus profonde de l'expression, en particulier la quantification implicite qui signifie qu'il y a au moins un élément dans V .

b-Conversion Littérale Incorrecte (CLI)

Environ 12 % des élèves (9 sur 78) ont fourni une Conversion Littérale Incorrecte pour « $V \neq \emptyset$ », révélant des malentendus significatifs sur cette expression. Par exemple, des réponses comme « V n'appartient pas à l'ensemble vide » (2) ou « V est l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley » (2) illustrent une confusion entre les notions d'appartenance et de non-vacuité des ensembles. La première réponse montre une incompréhension fondamentale, car l'expression « $V \neq \emptyset$ » ne concerne pas l'appartenance à l'ensemble vide, mais plutôt la non-vacuité de V . La seconde réponse, en définissant V comme un ensemble spécifique sans indiquer qu'il n'est pas vide, se limite à une description partielle et erronée. Ces erreurs mettent en lumière des difficultés chez les élèves à utiliser correctement la terminologie des ensembles, suggérant un manque de compréhension des concepts de base tels que la notion d'ensemble vide et la signification de la non-vacuité.

c-Conversion Interprétative Correcte (CIC)

Environ 38 % des élèves (30 sur 78) ont fourni une Conversion Interprétative Correcte pour l'expression « $V \neq \emptyset$ ». Ils ont converti cette expression par des phrases telles que « Il y a des élèves qui pratiquent le volley » (21) ou « V contient des élèves qui jouent au volley » (4). Ces réponses révèlent une compréhension de la quantification implicite sous-jacente à l'expression symbolique, montrant que l'ensemble V contient au moins un élément. En formulant leurs réponses ainsi, ces élèves montrent leur capacité à exprimer précisément et de manière appropriée que V n'est pas vide. Cette conversion interprétative indique une maîtrise avancée des concepts de quantification et de non-vacuité dans le contexte des ensembles.

d- Conversion Interprétative Incorrecte (CII)

Environ 14 % des élèves (11 sur 78) ont fourni une Conversion Interprétative Incorrecte pour l'expression « $V \neq \emptyset$ ». Par exemple, des réponses telles que « Il n'y a pas d'élèves qui pratiquent le volley dans cette classe » (5) ou « Les élèves qui pratiquent le volley n'appartiennent pas à les élèves de cette classe » (2), ainsi que « Tous les élèves pratiquent le volley » (1), montrent des malentendus significatifs. Ces réponses vont à l'encontre de l'idée que V n'est pas vide ou introduisent des généralisations incorrectes. Ces erreurs révèlent des difficultés majeures dans la compréhension de la quantification implicite que l'expression « $V \neq \emptyset$ » implique. Plutôt que de reconnaître que V contient au moins un élément, certaines réponses incorrectes suggèrent des situations opposées ou des généralisations qui ne sont pas représentatives de l'expression symbolique donnée. Par exemple, affirmer qu'il n'y a pas d'élèves qui pratiquent le volley contredit directement la signification de non-vacuité, tandis que les généralisations comme « Tous les élèves pratiquent le volley » vont au-delà de ce que l'expression implique. Ces erreurs soulignent des problèmes dans l'interprétation correcte de la quantification et des relations entre les ensembles, mettant en lumière des lacunes importantes dans la compréhension des concepts fondamentaux de la théorie des ensembles.

En résumé, bien que la majorité des élèves (74%) aient fourni des réponses correctes à l'expression « $V \neq \emptyset$ », qu'elles soient littérales ou interprétatives, un peu plus d'un quart a rencontré des difficultés. Les réponses correctes ont majoritairement montré une maîtrise appropriée de la terminologie mathématique et, pour celles interprétatives, une compréhension approfondie de la présence d'au moins un élément dans V. Cependant, parmi les élèves en difficulté, certains ont donné des conversions littérales incorrectes en confondant appartenance et non-vacuité, tandis que d'autres ont proposé des conversions interprétatives incorrectes, avec des généralisations ou des erreurs de compréhension de « $V \neq \emptyset$ ».

2. *Analyse des réponses relatives à l'expression symboliques $V \cap F = \emptyset$*

Concernant l'expression $V \cap F = \emptyset$, nous avons également observé une diversité dans les réponses des élèves. Voici une synthèse des résultats obtenus, mettant en lumière les réussites et les difficultés rencontrées. Cette expression indique que les ensembles V (les élèves pratiquant le volley) et F (ceux pratiquant le foot) n'ont aucun élément en commun. En d'autres termes, aucun élève ne pratique à la fois le volley et le foot, ce qui correspond à une phrase universelle négative.

a-Conversion Littérale Correcte (CLC)

Environ 14 % des élèves (11 sur 78) ont fourni une Conversion Littérale Correcte pour « $V \cap F = \emptyset$ », convertissant l'expression par « L'intersection de l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley et de ceux qui pratiquent le foot est vide ». Bien que cette conversion soit correcte sur le plan littéral, elle ne garantit pas une compréhension approfondie de la quantification implicite, notamment l'absence de

chevauchement entre les deux ensembles. Certains élèves peuvent avoir compris la signification immédiate sans saisir pleinement l'absence totale d'élèves dans l'intersection ou sans exprimer cette absence en termes mathématiques appropriés. Ainsi, une conversion littérale correcte ne reflète pas toujours une maîtrise complète des concepts sous-jacents.

b-Conversion Littérale Incorrecte (CLI)

Environ 42 % (33 sur 78) des élèves ont donné une Conversion Littérale Incorrecte pour « $V \cap F = \emptyset$ », montrant des confusions notables tant dans l'usage de la terminologie mathématique conventionnelle que dans la compréhension des concepts fondamentaux de la théorie des ensembles. Certaines réponses, comme « l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley est inclus dans l'ensemble des élèves qui pratiquent le foot et est égal à l'ensemble vide » (5), confondent inclusion et intersection. D'autres réponses, telles que « l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley = l'ensemble des élèves qui pratiquent le foot » (4), ignorent la notion d'intersection vide et convertissent l'absence de chevauchement par une égalité entre ensembles. De plus, des erreurs comme « V inter F appartient à l'ensemble vide » (4) et « L'ensemble des élèves qui pratiquent le volley inter l'ensemble des élèves qui pratiquent le foot est égal à 0 » (3) montrent une confusion entre appartenance et égalité, ou utilisent incorrectement le nombre "0" pour désigner l'ensemble vide. La réponse « V inter F est égal au milieu vide » (3) utilise une terminologie non standard « milieu vide », tandis que « L'ensemble des élèves qui pratiquent le volley inclus dans l'ensemble des élèves qui pratiquent le foot et différent de l'ensemble vide » (3) illustre une confusion entre inclusion et intersection et une mauvaise utilisation du terme « différent » pour une situation qui devrait être décrite par une égalité. Toutes ces erreurs soulignent des difficultés importantes chez beaucoup d'élèves dans la compréhension des concepts de base en théorie des ensembles.

c-Conversion Interprétative Correcte (CIC)

Environ 26 % (20 sur 78) des élèves ont fourni une Conversion Interprétative Correcte pour « $V \cap F = \emptyset$ », montrant une bonne compréhension que les ensembles V et F n'ont aucun élément en commun. Les réponses telles que « Il n'y a pas d'élèves qui pratiquent à la fois le volley et le foot » (12) et « Aucun élève ne pratique à la fois les deux sports » (6) indiquent que ces ensembles sont totalement disjoints. Ces conversions vont au-delà de la simple signification littérale en reflétant une compréhension de la nécessité d'explicitier la quantification implicite. Cette capacité à saisir les implications plus subtiles de l'expression montre une bonne maîtrise des concepts d'intersection et de disjonction en théorie des ensembles.

d-Conversion Interprétative Incorrecte (CII)

Environ 18 % des élèves (14 sur 78) ont fourni des Conversions Interprétatives Incorrectes pour « $V \cap F = \emptyset$ », révélant des difficultés notables avec la quantification implicite. Par exemple, des réponses telles que « Il y a des élèves qui pratiquent foot et volley dans cette classe » (8) et « Au moins un élève qui pratique le volley et le foot » (1) supposent à tort une intersection non vide entre les ensembles V et F, contredisant directement l'énoncé. D'autres réponses, comme « Il y a un élève ou plus d'un élève qui pratique le volley » (2) illustre des difficultés d'interprétation de l'expression $V \cap F = \emptyset$. D'une part, cette formulation est inappropriée, car pour indiquer qu'un ensemble n'est pas vide, on utilise des expressions comme « il y a au moins un élève », qui expriment une quantification existentielle. D'autre part, elle omet l'ensemble F, représentant les élèves pratiquant le football, ce qui entraîne une interprétation erronée de $V \cap F = \emptyset$. En négligeant de considérer ces deux ensembles conjointement, les élèves ne peuvent saisir le sens d'une intersection vide. Ces erreurs témoignent ainsi d'une incompréhension fondamentale de cette expression mathématique.

D'autres réponses, comme « Il y a un ou plus d'un élève qui pratiquent le volley » (2), confondent la quantification sur les éléments de chaque ensemble avec la notion d'intersection vide. En effet, l'énoncé $V \cap F = \emptyset$ indique seulement qu'il n'existe aucun élève commun aux deux ensembles, sans fournir d'informations sur les éléments qui composent chacun des ensembles individuellement. La réponse « L'ensemble V existe dans l'ensemble F et les deux égale à l'ensemble vide, donc il n'y a pas des élèves qui pratiquent ni le basket ni le foot » (1) contient des maladresses et des imprécisions dans l'utilisation du langage naturel, nuisant à la clarté et à la justesse de l'interprétation mathématique. Par exemple, l'expression « exister dans » est incorrecte, car elle ne décrit pas adéquatement une relation entre ensembles et ne respecte pas le vocabulaire mathématique approprié. Ces maladresses révèlent une inadéquation entre le langage employé et les concepts qu'il tente de décrire. Par ailleurs, cette réponse confond l'absence d'intersection entre deux ensembles avec l'absence totale d'éléments dans les ensembles eux-mêmes, ce qui amène l'élève à conclure à tort que les ensembles sont vides, au lieu de reconnaître simplement qu'ils n'ont aucun élément commun.

En résumé, bien que certains élèves aient correctement interprété l'expression « $V \cap F = \emptyset$ », près de 60 % des réponses étaient incorrectes, qu'elles soient littérales ou interprétatives. Environ 56 % des élèves ont opté pour des conversions littérales, dont la majorité étaient erronées. Cette tendance indique une difficulté à dépasser une simple conversion littérale pour saisir les nuances plus profondes de l'expression. Les erreurs fréquentes révèlent une confusion sur la quantification implicite et les relations entre ensembles, incluant une mauvaise interprétation de l'intersection, de l'inclusion, et de l'absence d'éléments communs. Ces difficultés montrent un manque de compréhension des concepts fondamentaux des ensembles.

IV. CONCLUSION

Les expressions symboliques mathématiques véhiculent des concepts abstraits qui nécessitent une compréhension approfondie. Certains élèves peuvent rencontrer des difficultés à les interpréter, en raison de la densité d'informations qu'elles renferment et de la complexité des relations qu'elles impliquent. Cette recherche a exploré la capacité des élèves tunisiens à convertir des expressions mathématiques symboliques simples en langage naturel, en se concentrant sur les notions d'égalité, d'inégalité et d'intersection entre ensembles. Les résultats mettent en lumière des variations significatives dans leur aptitude à réaliser ces conversions. La majorité des élèves démontrent une certaine compétence dans la compréhension des expressions liées à la non-vacuité des ensembles, telles que « $V \neq \emptyset$ », où ils parviennent généralement à fournir des conversions correctes. Cependant, une part notable de ces réponses correctes est de nature littérale, sans explorer la quantification implicite que requiert une conversion interprétative. En revanche, les expressions plus complexes, telles que « $V \cap F = \emptyset$ », posent des difficultés considérables. Ces difficultés révèlent des lacunes dans la compréhension de l'absence d'intersection entre ensembles et une confusion entre les notions d'inclusion et d'intersection. Les erreurs fréquemment observées indiquent une insuffisance dans la maîtrise des concepts fondamentaux de la théorie des ensembles, en particulier en ce qui concerne la quantification implicite et les relations entre ensembles.

Pour approfondir la compréhension des causes de ces difficultés et améliorer l'enseignement des concepts mathématiques, il serait pertinent d'enrichir cette recherche par des entretiens détaillés avec les élèves. De plus, réaliser cette expérimentation en arabe, langue maternelle des élèves, pourrait fournir des perspectives supplémentaires sur l'impact de la langue sur la compréhension des expressions symboliques. Une telle démarche permettrait de déterminer si les difficultés observées sont liées à la langue d'enseignement ou reflètent des défis plus profonds dans la compréhension des

concepts mathématiques, en particulier ceux concernant la quantification et les relations complexes entre ensembles.

RÉFÉRENCES

- Ben Kilani, I. (2005). *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique* [Thèse de doctorat, Universités Lyon 1 et Tunis].
- Ben Nejma, S. (2020). L'impact de la langue de formulation d'un énoncé sur les démarches mises en œuvre par des élèves dans une activité de modélisation algébrique. *Petit x*, (112), 54-76. <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/IPX/IGR20007/IGR20007.pdf>
- Bloch, I. (2008). Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétatif. *Les sciences de l'Education, Pour l'ère nouvelle* [Numéro spécial], 41(1), 91-114.
- Bronckart, J.-P. (2007). L'activité langagière, la pensée et le signe, comme organisateurs du développement humain. *Langage et société*, (121-122), 57-68.
- Chellougui, F. (2009). L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29(1), 123-154.
- Chesnais, A. et Coulange, L. (2022). Rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Synthèse et perspectives en didactique des mathématiques. *Revue Française de Pédagogie*, (214), 85-121. <https://doi.org/10.4000/rfp.11357>
- Chomsky, N. (1965). *Aspects of the theory of syntax*. MIT Press.
- Delavault, H. (1977). De l'importance du langage dans l'enseignement des mathématiques. *Cahiers de Fontenay*, (6), 89-107. <https://doi.org/10.3406/cafon.1977.1114>
- Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication* [Thèse de doctorat, Université Lyon 1].
- Duval, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, (5), 37-65. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Duval, R. et Pluvineau, F. (2016). Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (21), 117-152. <https://doi.org/10.4000/adsc.789>
- Duval, R. (2006). Une analyse cognitive des problèmes de compréhension dans un apprentissage des mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Hache, C. (2013). *Langage mathématique à la transition primaire/ collège* [Communication]. XXXIX^e colloque COPIRELEM, Quimper 2012 « Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève ». ARPEME. <https://hal.science/hal-00870111v1>
- Kline, M. (1980). *The loss of certainty*. Oxford University Press.
- Leng, M. (2010). *Mathematics and reality*. Oxford University Press.

- Mesnil, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'enseignement* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot].
- Najar, R. (2010). *Effets des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants. Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire-Supérieur* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot-Paris 7].
- Pólya, G. (1989). *Comment poser et résoudre un problème* (C. Mesnage, trad.). Éditions Jacques Gabay. (Ouvrage original publié en 1945)
- Schönefeld, A-H. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Souilah, E. (2018). L'enseignement du français en Tunisie est-il en décalage avec la demande sociale ? *Synergies Europe*, (13), 27-37. <https://gerflint.fr/Base/Europe13/souilah.pdf>
- Touati, Z. (2011). Le statut et la place du français dans l'enseignement et la société en Tunisie. PURH Dans F. Laroussi et F. Liénard (dir.), *Plurilinguisme, politique linguistique et éducation : quels éclairages pour Mayotte* (p. 465-473). Presses universitaires de Rouen et du Havre. <https://doi.org/10.4000/books.purh.5261>
- Wittgenstein, L. (2004). *Recherches philosophiques* (F. Dastur, M. Élie, J.-L. Gautero, D. Janicaud et É. Rigal, trad.). Gallimard. (Ouvrage original publié en 1953)