Connaissances mathématiques et manuels d'enseignement : Quelle(s) influence(s) sur l'action du professeur dans une situation d'enseignement et d'apprentissage ?[1]

Mohamed Sagayar Moussa, *Université de Rennes 2 France*

Résumé : Ce papier présente un travail d'analyse des connaissances mathématiques des enseignants et de l'usage qu'ils font des manuels mis à leur disposition dans le cadre de leurs enseignements. Nous tentons de comprendre le lien entre ces connaissances et les pratiques de classes, et le rôle des manuels dans la constitution de ces connaissances. Ce travail est basé sur l'examen du contenu des manuels de mathématiques et sur l'analyse didactique de l'action du professeur *in situ* dans des classes filmées de l'école élémentaire.

I. Introduction

Au Niger la politique éducative précise les orientations et l'organisation du système éducatif à travers un cadre légal de pilotage des actions définies dans le PDDE[2]. Ces actions visent entre autres objectifs, l'amélioration des pratiques pédagogiques et des conditions dans lesquelles elles se déroulent. Ainsi la formation des enseignants et le renforcement de l'encadrement pédagogique sont au cœur des préoccupations majeures des autorités éducatives. Pour développer le secteur de la scolarisation primaire, les enseignants sont formés dans les écoles normales d'instituteurs pour ensuite exercer dans les écoles. Une part importante de l'accompagnement institutionnel proposé aux professeurs repose sur des livres qui décrivent et présentent le programme et le contenu des enseignements : ce sont les bases mathématiques et les guides du maître. Ces livres servent à la fois, de complément à la formation initiale, mais aussi et surtout de ressources pour fournir aux enseignants les connaissances mathématiques de base et l'organisation didactique nécessaires à leurs enseignements.

Pour tenter de comprendre ce que le professeur met en œuvre dans sa classe et l'usage qu'il fait des manuels mis à sa disposition, nous allons préciser nos outils théoriques pour voir comment le professeur construit ou produit l'objet du savoir (connaissances mathématiques et choix didactiques) proposé dans les manuels. Ainsi, nous aurons recours à plusieurs ensembles de références théoriques :

- un premier ensemble pour caractériser l'action du professeur et ses interactions avec les élèves dans les situations d'enseignement et d'apprentissage. En didactique des mathématiques, nous nous référons à Chevallard (1991), à propos de la construction du temps et du partage des responsabilités par rapport aux tâches didactiques, et aux catégories proposées par Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni (2000) pour l'analyse de l'action professorale et des transactions au sein desquelles se transmettent les savoirs ;
- le deuxième ensemble pour caractériser l'usage des manuels par le

[1] Ce projet bénéficie du soutien financier de la région de Bretagne.
[2] PDDE : Programme Décennal de Développement de l'Education

professeur et leur influence sur son travail. Nous allons utiliser les travaux de Ball et Cohen (1996) qui posent la question du manuel comme accompagnement des réformes, et ceux plus récents de Margolinas et Wozniak (2008) qui questionnent l'usage des documents par des professeurs du premier degré dans leurs enseignements de mathématiques, et de Gueudet et Trouche (2008) qui proposent une approche documentaire pour étudier l'activité du professeur. Ces deux dernières approches permettent en particulier d'étudier la place des ressources d'enseignement comme *outils* dans les pratiques d'enseignements et situations mathématiques ;

- enfin, un troisième ensemble de travaux auxquels nous nous réfèrerons est relatif aux connaissances mathématiques des enseignants. Ainsi Ball, Hill et Bass (2005) cherchent à identifier des connaissances mathématiques spécifiques de la profession enseignante.

Ce dernier ensemble de références rejoint directement le thème du groupe de travail n°1 qui porte sur les connaissances mathématiques des enseignants, sur le lien entre ces connaissances et les pratiques, et sur le rôle de la formation dans la constitution de ces connaissances. Dans le cadre de notre participation à ce colloque de réflexion et d'échange, nous présentons un texte qui abordera d'abord dans une première partie l'analyse des manuels du point de vue de leur contenu et des modalités de formation qu'ils offrent. Puis nous présenterons dans la partie deux, le cadre de l'étude empirique et la démarche d'analyse. Dans la troisième partie enfin, à partir d'épisodes signifiants que nous avons repérés comme étant révélateurs de phénomènes didactiques, nous nous pencherons sur la caractérisation de l'action du professeur et ses rapports avec les manuels. Notre but est d'étudier les connaissances mathématiques proposées et l'usage que le professeur en fait dans ses pratiques de classe.

II. **Les ressources pour se former et enseigner :** analyse des manuels fournis par l'institution comme modalité de formation

II.1 Des outils de référence : les bases mathématiques (BM) et le guide du maître (GM)

Edités en deux tomes[3], les BM[4] sont les manuels de référence où sont décrits l'essentiel du contenu des enseignements mathématiques du niveau élémentaire. On peut les considérer comme des *documents* au sens de Margolinas et Wozniak (2008) : « *chose qui enseigne ou renseigne* » Sur la couverture on peut lire : « ***uniquement pour la formation des maîtres, ce manuel ne doit pas être enseigné aux élèves du primaire*** », et voir une image d'un instituteur à la lumière d'une lampe à pétrole étudiant les BM, équipé d'un crayon et d'un bloc notes. Une indication et une image qui doivent inciter les instituteurs à un travail d'appropriation de ces manuels, afin de mieux appréhender les connaissances mathématiques nécessaires à leurs

[3] Tome 1 : programmes et contenus des matières Mesure et Géométrie ; Tome 2 : Arithmétique, Logique et Raisonnement

[4] Les BM sont destinées à compléter votre formation générale. Ce document vous donnera, pour chaque chapitre à enseigner, un aperçu des principales notions mathématiques sous-jacentes, de leur importance ; et aussi la progression prévue pour l'acquisition de ces notions par les élèves, tout au long du primaire (BM T1, p 13).

enseignements. Avec le point de vue introduit par Gueudet et Trouche (2008), on peut considérer ces manuels comme des *ressources*, qui peuvent ou non donner lieu au développement par les professeurs de *documents*, au terme d'un processus qui comporte en particulier la nécessaire appropriation de la *ressource* par le professeur.

II.2 Les BM : réservoir des connaissances et choix mathématiques nécessaires aux enseignants dans la pratique de leurs enseignements

Dans cette partie nous allons présenter quelques exemples de contenu des BM T1 qui structurent et organisent les connaissances mathématiques. Selon Ball et Cohen (1996): « *Teachers' guides could help teachers to learn how to listen and interpret what students says, and to anticipate what learners may think about or do in response to instructional activities* »[5]. Cette citation décrit bien les objectifs des auteurs des BM.

Les BM (BM T1, 1992, p16) stipulent : « un des objectifs de l'enseignement des mathématiques est d'acquérir des connaissances ; c'est celui qui apparaît comme le plus évident : apprendre à compter, à faire des opérations, à résoudre un problème. Mais un autre objectif, pas directement mesurable mais au moins aussi important, est d'apprendre à réfléchir et à raisonner. Mais si cet objectif paraît tout aussi évident que le premier, il n'est pas toujours atteint car il demande une méthode d'enseignement qui est rarement maîtrisée ». Ainsi les BM proposent d'apporter aux enseignants des connaissances mathématiques qui devraient permettre à ceux-ci de surmonter la difficulté évoquée, et de maîtriser la méthode d'enseignement adéquate. Cependant, le contenu des BM semble difficilement à même de remplir un tel objectif, car les concepts mathématiques et le langage utilisés sont très complexes. Illustrons ces propos par deux exemples donnés dans les BM T2 sur la notion mathématique de l'addition et étudions les difficultés que les professeurs et les élèves peuvent rencontrer. Ces deux petits problèmes sont proposés aux professeurs pour comprendre la notion mathématique de l'addition à travers des problèmes modélisables par une équation du type (**a + b = c**) dans lesquels il faut calculer soit **a**, soit **b**, soit **c**. Ils sont ensuite proposés en classe pour une mise en œuvre collective avec le professeur.

<u>Exemple 1</u>[6] : Un problème de P.M.I[7]

Un infirmier de la P.M.I Poudrière a distribué, lundi, 304 comprimés de Nivaquine à 152 personnes ; le lendemain, il en a distribué 710 à 355 personnes. Combien cet infirmier a-t-il distribué de Nivaquine ? A combien de personnes ?

<u>Exemple 2</u>[8] : Les portes d'un bâtiment

[5] « Les guides des professeurs peuvent aider les professeurs à apprendre comment écouter et interpréter ce que disent les étudiants, et anticiper sur ce que peuvent penser ces apprenants, ou faire en réponse aux activités éducatives. »

[6] BM T2, page 98

[7] Protection Maternelle et Infantile, institution chargée du suivi et de l'accompagnement de la santé des enfants et de leur processus de croissance

[8] BM T2, page 98

Un bâtiment comporte 2 pièces, 3 portes sur la première pièce, et 2 portes sur la seconde pièce. Combien faudra t-il acheter de portes pour construire ce bâtiment ?

De l'observation de l'exemple 1, que doit comprendre le professeur ? Que doit-il expliquer aux élèves ?

Le nombre total de comprimés de Nivaquine est obtenu par l'addition : « 307 + 710 = 1014 ». On explique ici le recours à l'addition en disant qu'il faut compter les 304 comprimés du lundi et les 710 du mardi d'ou le résultat 1014. En revanche, si pour trouver le nombre de personnes ayant reçu des comprimés, on effectue l'addition : « 152 + 355 = 507 », alors des personnes venues le lundi et le mardi sont comptées deux fois.

Le traitement du deuxième exemple montre plus clairement où se place l'enjeu des BM. Sa résolution est illustrée par le schéma ci-dessous extrait des BM :

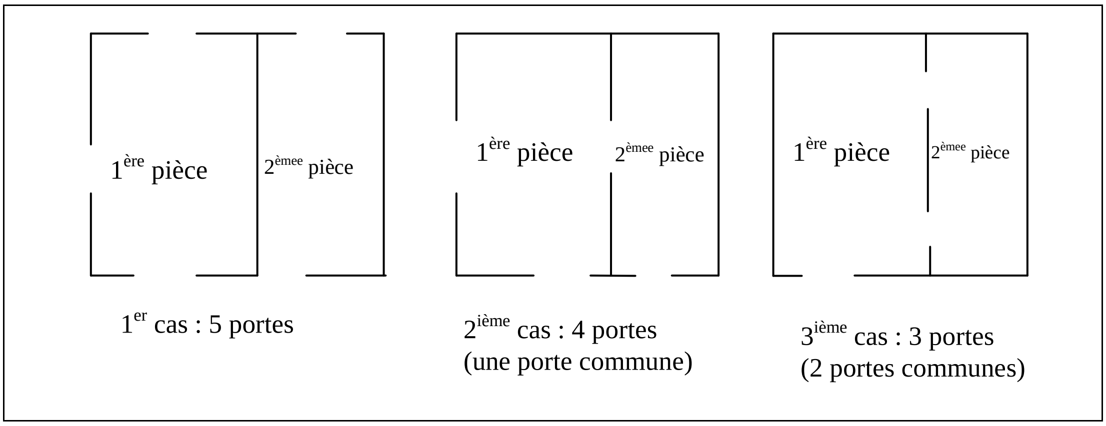


Figure 1. Schéma illustratif de l'exercice 2.

Dans le premier cas, on voit bien les 3 portes qui donnent sur la première pièce, et 2 portes sur la seconde. Dans le deuxième cas si on répond, « il faut 5 portes, car 3 + 2 = 5 », on se trompe car la porte commune est comptée deux fois. Dans le troisième cas enfin, les portes communes sont comptées deux fois. Mais les solutions dans les cas 3 et 4 sont correctes (3 portes sur la première pièce, et 2 portes sur la 2 pièce). Pourtant, il n'y a pas 5 portes en tout. L'addition 3 + 2 ne donne pas le nombre de portes : les portes communes sont comptées 2 fois. Seul le premier cas relève donc d'une addition, puisqu'on a en tout 5 portes. Les BM invitent à une interprétation ensembliste de la situation. On considère p1 représenté par l'ensemble A à 3 éléments, et p2 représenté par l'ensemble B à 2 éléments. Cherchons le nombre total d'éléments. C'est-à-dire qu'il s'agit de trouver le cardinal AU*B*, il faut donc connaître le cardinal de A, celui de B, mais aussi celui de leur intersection. Si A et B sont 2 ensembles sans élément commun, leur intersection est vide et on obtient le nombre d'éléments de AU*B* en faisant l'addition des cardinaux respectifs de A et de B.

Que peut-on tirer comme enseignements suite à l'observation des deux exemples ?

Deux axes d'analyse sont nécessaires selon nous, pour comprendre le contenu des BM, l'usage qui en est attendu, et les conséquences possibles sur les pratiques de classe.

- Premier axe : les connaissances mathématiques proposées aux élèves

La notion mathématique de l'addition est expliquée par deux petits problèmes qui tentent de montrer qu'une addition ne permet pas de trouver le cardinal d'une réunion de deux ensembles A et B connaissant seulement le nombre d'éléments de A et de B. Dans les BM, le langage mathématique utilisé détonne avec certains termes de la vie courante (la notion d'*ensemble ou d'éléments communs)* pour savoir si on peut trouver la solution d'un problème en effectuant une addition. Ces problèmes qui devraient permettre de travailler le sens de l'addition sont en fait difficiles pour les professeurs, et encore plus pour les élèves.
Ainsi pour effectuer des activités de ce genre, le professeur ne laisse souvent aucune initiative à l'élève, puisqu'il prend en charge l'essentiel de l'activité : la topogénèse[9] Sensevy (2004), bascule du côté du professeur.

- Deuxième axe : Structuration et exploitation des BM

Se référer aux BM est une exigence des nouveaux programmes en vigueur au Niger. Regardons la synthèse des indications d'usage pour s'en rendre compte :

- Lire les *17 pages* de la partie introductive BM T1 ;
- Lecture intégrale d'un chapitre selon les besoins avant d'aborder les enseignements liés aux séances ;
- Lire les sommaires des 2 tomes ;
- Lire les sommaires plus détaillés en début de chacune des 5 grandes parties : partie introductive – Mesure – Géométrie – Logique et Raisonnement – Arithmétique ;
- Prendre des notes au cours des lectures, et faire tous les exercices et activités proposés dans le texte ;
- Consulter un collègue sur ce qui fait difficulté si des points obscurs restent encore.

Cette synthèse, on le voit bien, ne laisse pas l'ombre d'un doute sur le caractère obligatoire de lire et de relire les BM pour avoir d'une part, un aperçu du contenu et l'organisation des enseignements, et d'autre part, identifier pour chacune des séances les connaissances mathématiques des enseignants nécessaires et les choix mathématiques et didactiques associés. Ce sont donc des informations diffuses et éparpillées qu'il faut chercher dans les BM. Ce type de travail demande des va-et-vient incessants, et bien entendu, une disponibilité matérielle des BM. Celle-ci n'est pas toujours assurée comme le montre cet extrait d'interview d'un professeur : « *mais des fois on n'arrive pas à voir tout ceux dont à besoin,….Des fois on dit dans la leçon de consulter d'abord les bases mathématiques, alors si il n'y a pas les bases mathématiques, où est-ce qu'on va consulter, donc on est obligé de préparer la leçon sans les bases mathématiques, surtout que dans les guides ce n'est pas bien détaillé*.»[10]

Les BM et GM sont les outils essentiels et uniques destinés aux enseignants dans l'enseignement des mathématiques, Gueudet et Trouche (2008) précisent que

[9] La topogénèse décrit les comportements du professeur (ou des élèves) dont la fonction se trouve dans la partition des rôles et des places dans les pratiques du savoir. C'est donc la coopération professeur/élève pour construire les places, les rôles et responsabilités par rapport aux tâches didactiques

[10] Extrait de l'entretien mené dans le cadre de mes travaux de recherche avec quatre professeurs.

les documents du professeur, engendrés au cours d'un travail documentaire : « constituent à la fois des objets de travail et des outils pour l'action du professeur ». Mais ceci suppose que l'enseignant a choisi des ressources, les a modifiées, combinées pour construire un document. Dans ce cas, l'activité professionnelle de l'enseignant a évolué, on peut considérer qu'il y a eu formation. Pour les BM et GM, lire, relire ou étudier ces manuels est-il la manière adéquate de se former ou de former les enseignants ? Nous allons tenter d'apporter des éléments de réponse à cette question en examinant l'influence de ces ressources sur les pratiques en classe.

III. Cadre de l'étude empirique et démarche :

Dans le cadre de cet article, nous avons travaillé sur un recueil empirique constitué par une unité de mathématique (8 séances de classe[11] présentées par quatre professeurs, deux entretiens avant et après les séances).

- Les séances de classe : elles ont porté sur deux leçons d'arithmétique, l'addition sans retenue (4 séances, 1 séance par professeur) et l'addition avec retenue (4 séances, 1 séance par professeur) ;
- Les entretiens : un entretien « préséance » pour amener les professeurs à exposer la manière dont ils vont s'y prendre pour conduire les séances (quelles sont leurs intentions ?), et un entretien « post-séance » pour amener les professeurs à donner leurs impressions à la suite de la présentation des séances.

Dans le cadre de notre démarche, nous avons procédé pour chacune des séances de la manière suivante :

- une première étape d'élaboration de synopsis larges pour donner une vision dans un même espace, l'ensemble du déroulement de la leçon ;
- une deuxième étape d'analyse des synopsis, pour rendre compte du récit des évènements didactiques (liés au savoir) qui ont fait le déroulement de la leçon ;
- une troisième étape de repérage d'épisodes révélateurs de phénomènes didactiques qui sous-tendent le choix des professeurs de rester fidèle aux BM et au GM, de s'en écarter, ou d'utiliser des connaissances mathématiques des enseignants insuffisamment explicitées Le cadre et la démarche d'analyse sont maintenant définis, nous allons procéder à la présentation et à l'analyse des épisodes signifiants pour mieux comprendre ce qui s'est passé objectivement dans les classes.

IV. Présentation et analyse empirique d'épisodes signifiants

Le travail d'analyse va tenter de caractériser l'action des quatre professeurs filmés (P1, P2, P3, P4) et les techniques didactiques utilisées pour traiter et comprendre le sens mathématique de la retenue. Nous allons en même temps faire une analyse des choix didactiques des professeurs, et des conséquences de leurs choix, en les comparant avec ce que préconisent les BM et le GM, et interroger les connaissances mathématiques des professeurs dans la pratique de leurs enseignements. Nous regardons en particulier si les professeurs s'éloignent ou pas du contenu du GM, et de ce que préconisent les BM, quelles sont les conséquences de ces choix ?

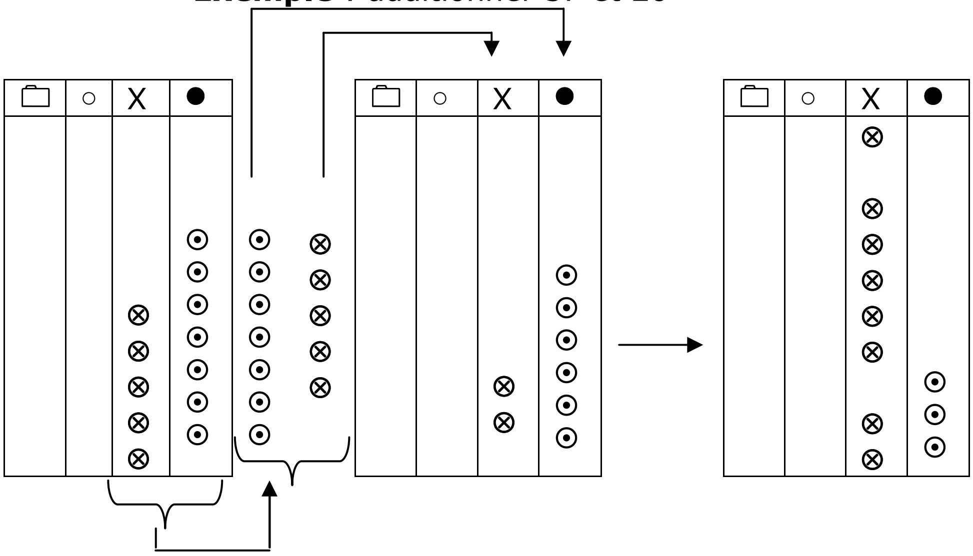
[11] Quatre classes de CP avec une moyenne de 46 élèves par classe.

IV.1 ***Episode 1 (E1) addition avec retenue*** : traitement et sens mathématique de la retenue

Nous donnons ci-dessous un extrait du guide du maître, qui correspond aux indications de mise en œuvre aux professeurs pour enseigner l'addition avec retenue :

Manipulation au boulier

Exemple : additionner 57 et 26



Disposer 57 sur le boulier Disposer 26 sur le boulier Résultat après échange

Puis retirer les 5 capsules ⊗ puis ajouter les 12 capsules de 10 capsules ⊙

et les 7 capsules ⊙du nombre 57 contre une capsule ⊗

- En ajoutant les 12 capsules du nombre 57 (5 ⊗ et 7 ⊙) aux 8 du nombre 26, la colonne des unités se remplit très vite et l'échange à 10 contre 1 est nécessaire (10 capsules ⊙ contre une capsule ⊗)
- Lire le résultat : 8 dizaines, 3 unités, soit 83.

* puis cette activité sera schématisée sur un tableau à 2 colonnes :

X	●
$\boxed{1}$	
5	7
2	6
8	$\boxed{1}$3

Et enfin avec la disposition usuelle

```
    1
   5 7
+  2 6
------------
  8 3
```

*le maître traite (collectivement, avec ses élèves) 2 ou 3 exercices d'addition, puis leur demander de travailler individuellement sur leur ardoise (PLM[12])

```
  3 6      5 9      2 8      4 4      3 3      3 6
+ 1 7    + 2 4    + 5 5    + 1 6    + 4 8    +   7
------   ------   ------   ------   ------   ------
```

NB : pour les élèves défaillants, faire recours à l'addition sous forme de tableaux à 2 colonnes

[12] PLM : Procédé Lamartinière

Exercices de contrôle :
Le maître propose aux élèves une série d'additions (avec ou sans retenue).
C'est aussi l'occasion d'une révision sur lecture et dictée de nombres. Par exemple le maître dicte les deux nombres (en langue maternelle ou en français).
Les élèves écrivent sur les ardoises et effectuent l'addition (PLM)
Le maître peut faire lire le résultat (en français, ou en langue maternelle) par certains élèves.

Figure 2. Extrait du guide du maître, addition avec retenue (p 114).

Cette mise en œuvre propose de manipuler un boulier[13] pour traiter l'exemple : additionner 57 et 26.

Six étapes caractérisent la démarche :

- manipulation au boulier en disposant 57 et 26 représentés sur le boulier par des capsules (⊗) et (⊙). Le GM propose une manipulation du professeur devant toute la classe et demandera aux élèves de faire une série de manipulations par groupes et si possible des manipulations individuelles ;
- schématisation de l'activité sur un tableau à deux colonnes (voir encadré) ;
- disposition usuelle (opération verticale) ;
- exercices collectifs (traitement collectif d'exercices au tableau avec les élèves)
- exercices individuels sur les ardoises par PLM ;
- exercices de contrôle (le professeur dicte des nombres, les élèves effectuent les opérations par PLM.

Les connaissances mathématiques pour les élèves introduites à travers cette mise en œuvre concernent l'échange à 10 contre 1 en utilisant la configuration au boulier pour représenter le nombre d'objets. On voit qu'après échange de 10 capsules (⊙) contre une capsule (⊗), on a 8 capsules (⊗) et 3 capsules (⊙). Les élèves découvriront davantage la nécessité de constituer une dizaine prélevée sur le total des treize unités. Le nombre total d'unités dépasse 9, il est donc suffisant pour avoir une dizaine. La retenue dans l'opération vient de dix unités qu'on transfère dans la colonne de gauche, sous forme d'une dizaine. On invitera les élèves à lire 8 dizaines, 3 unités, soit 83. La figure 2 donne à voir des connaissances mathématiques pour enseigner au sens défini par, Ball, Hill et Bass (2005). Mais sont-elles suffisamment explicitées pour que les professeurs se les approprient ?

On voit bien que l'exemple proposé est « additionner 56 et 27 » et non effectuer l'opération (56 + 27) en manipulant sur le boulier. Le professeur invite un élève à manipuler le boulier en classe entière. Cette procédure a été l'occasion pour les élèves de découvrir concrètement la nécessité d'échanger des « unités » contre une « dizaine ». Dans la mise en œuvre de cette séance, le professeur a introduit la technique opératoire dans le cas des nombres ayant plus de deux chiffres, avec une retenue. Il a ensuite abouti à la disposition en colonnes, et à la retenue qui symbolise l'échange de dix unités pour une dizaine.

[13] Au Niger, le boulier est un support utilisé dans la numération de position. Il est introduit dans la classe quand les élèves pratiquent le jeu de tiges (voir page 9) qui rend obligatoire l'échange à 10 contre 1.C'est donc un auxiliaire du jeu des tiges présenté sous 4 colonnes (de la gauche vers la droite, la colonne des unités, des dizaines, des centaines et des millièmes). Il est utilisé pour dénombrer un ensemble d'objets et surtout pour marquer la notion de dizaine et de la retenue dans des situations d'addition.

Le boulier qui adopte la forme de tableau a constitué le support central dans ce mouvement (ce n'est pas le cas de tous les bouliers). Avec le boulier, l'échange est fait concrètement. Ceci prépare donc l'échange symbolisé par la retenue. Ensuite, on voit que pour l'étape introductive, les élèves doivent essentiellement observer, même si c'est un élève qui manipule. Le boulier sert pour montrer le processus, pas pour effectuer des opérations. Mais comme le jeu des tiges (voir p 9) est connu, on peut supposer que les élèves se sont déjà approprié le boulier, et que c'est bien un support utile. La responsabilité des élèves se réduit à l'application de la technique apprise.

Il y a dans les intentions des auteurs, une volonté de prégnance du guide du maître en tant que support pour préparer la leçon. Il influe également sur la chronogénèse, responsabilités par rapport au savoir. Il influe également sur la chronogénèse, sur l'avancée du temps didactique au sens de Chevallard (1991). Nous le verrons plus précisément avec les observations que nous allons réalisées dans les classes.

IV.2 ***Les vidéos de classes*** *: connaissances mathématiques des enseignants et leurs rapports avec les pratiques d'enseignement. Que s'est-il concrètement passé dans les classes ?*

Avant d'aborder la séance sur l'addition avec retenue, les élèves savent : dénombrer un lot d'objets avec ou sans boulier, additionner deux nombres avec ou sans retenue (vue au C.I[14]), l'échange à 10 contre 1, et les deux propriétés de l'addition (si on échange les 2 nombres, le résultat ne change pas, si on ajoute 0, on obtient à un nombre, le résultat ne change pas). Toutes ces séances vues au C.I ont été l'occasion de revoir sous forme de révision les particularités qu'elles offrent.

<u>Tableau de spécification des activités</u> (séances addition avec retenue) :

<table>
<tr><th colspan="2">Enseignements de la retenue par les 4 professeurs</th></tr>
<tr><th>P 1</th><th>P 2</th></tr>
<tr><td>Opération proposée par le professeur : 15 + 5. C'est le premier exemple. P1 désigne un élève avec des bûchettes au tableau. L'élève désigné compte des bûchettes 5 puis 5. Il trouve 10 et l'écrit au tableau. P1 demande ce qu'il faut faire. L'élève écrit le chiffre 0 dans la colonne des unités. P 1 demande ce qui reste, un élève répond : « 1 » P1 demande si le chiffre 1 représente les unités ou les dizaines. Un élève répond : « le chiffre des dizaines ». P 1 demande là où le chiffre 1 doit être ajouté. Le chiffre 1 est reporté dans la colonne des dizaines comme retenue.
<table>
<tr><th>X</th><th>°</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>+ 1</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td></tr>
</table></td>
<td>Opération proposée par le professeur : 16 + 6. C'est le premier exemple. P2 écrit 16 puis 6 au tableau et demande à un élève de les écrire dans le tableau à deux colonnes en veillant bien à ce qu'il respecte les dizaines et les unités. Aucun objet n'est utilisé à ce niveau du déroulement de la leçon. L'élève ne parvient pas à effectuer l'opération. P 2 demande d'utiliser une autre technique. Un autre élève est envoyé, il bute et un troisième élève écrit :
<table>
<tr><th>X</th><th>°</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>+ 1</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>6</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

[14] Cours d'Initiation correspondant à la première année de l'école primaire au Niger

<table>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><th colspan="2">P 3</th><th colspan="2">P4</th></tr>
<tr><td colspan="2">Opération proposée par le professeur : 57 + 26. C'est le premier exemple. L'élève dispose sur le boulier (placé sur une table) les capsules unités et dizaines. P 3 demande à l'élève combien d'unités. L'élève répond 10 unités. P3 demande ce qu'il y a lieu de faire avec les 10 capsules unités. L'élève répond qu'il faut les échanger contre un âne. L'élève dit qu'il faut échanger les 10 chèvres contre 1 âne. Il rajoute donc 1 âne et place les 3 capsules unités.
<table>
<tr><th>□[15]</th><th>O[16]</th><th>⊗[17]</th><th>⊙[18]</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>⊗</td><td>⊙</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>⊗</td><td>⊙</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>⊗</td><td>⊙</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>⊗</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>⊗</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>⊗</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>⊗</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>⊗</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td>
<td colspan="2">Opération proposée par le professeur : 57 + 26. C'est le premier exemple. Après 5 élèves désignés pour effectuer l'opération dans le boulier (dessiné au tableau) sans succès, P 4 reprend les choses en main et explique le mécanisme de l'addition avec retenue en langue haoussa. P 4 effectue d'abord 7+6 = 13, P 4 écrit 3 et dit je retiens 1 qu'elle écrit en haut et à droite de l'opération. P 4 explique ensuite le principe de la dizaine (1dizaine = 10 unités) en dessinant (IIIIIIIIII) P1 écrit ensuite 13 – 10 = 3 P1 explique qu'il faut écrire 3 dans la colonne des unités et on retient 1. P1 explique que le chiffre 1 est reporté dans la colonne des dizaines puisqu'on ne peut écrire la dizaine dans la partie des unités. P 4 effectue 1+5+2 avec les élèves et obtient 8.</td></tr>
</table>

On voit dans ces séances l'importance du matériel et des symboles utilisés. Plus précisément, nous retenons les points suivants :

- P1 désigne un élève pour effectuer l'opération proposée, et utilise les bûchettes avant l'écriture en colonnes. P2 procède presque de la même manière que P1, mais le troisième élève désigné a trouvé le résultat en additionnant mentalement les unités d'abord, puis les dizaines. Le report de la retenue dans la colonne des dizaines s'est fait automatiquement. P1 introduit un autre type de matériel : les bûchettes. Celles-ci permettent de matérialiser les échanges, mais elles sont éloignées de la représentation en tableau.
- On trouve chez P3 et P4 le recours au boulier. Ces deux professeurs prennent exactement l'opération proposée dans le GM (partie *IV.1*). Cependant pour P4, le support du boulier ne suffit pas. Dans tous les cas, on aboutit à la schématisation en tableau à deux colonnes : cette focalisation a permis de préciser deux principes de l'addition des nombres. Les unités sont rangées sous les unités, ce qui est valable pour les dizaines également. On effectue les opérations en commençant par la droite (additionner les unités d'abord). L'idée du tableau à deux colonnes n'est que la représentation de l'échange à dix contre 1 qui correspond à l'échange de 10 chèvres (⊙) contre un âne

[15] Colonne des unités ou la colonne des chèvres (**⊙**)
[16] Colonne des dizaines ou la colonne des ânes (⊗)
[17] Colonne des centaines ou la colonne des vaches (**O**)
[18] Colonne des milliers ou la colonne des chameaux (**□**)

(⊗). Ce principe a permis de traiter les exercices en utilisant une disposition verticale par exemple :

```
      5 7
+       2 6
     ------------
```

P3 manipule un boulier avec un élève désigné. L'élève a su avec l'aide de P3 effectuer l'opération en plaçant les capsules correspondantes et l'idée de l'échange (10 chèvres contre 1 âne)[19]. P3 ne fait pourtant pas le lien entre ce procédé et la retenue. Elle dit lors de l'entretien post séance : *« C'est à cause de l'échange de 10 contre 1, avec le boulier ça ne cause pas problème puisque les élèves vont manipuler avec le boulier. Quand ils ont 10 chèvres, ils voient que automatiquement on échange contre 1seul âne, mais quand c'est au tableau ce n'est plus que le cas des chèvres et des ânes, donc maintenant quand par exemple c'est 12, ils doivent écrire 2 et retenir 1 alors que si c'est avec le boulier les 10 chèvres on les emmène au niveau des ânes pour échanger et avoir 1 seul âne et retenir les deux chèvres, donc ce n'est pas la même chose au tableau avec la réalité »*[20]. Pour P4, par contre, une difficulté est survenue. La somme des unités dépassant la dizaine, les trois élèves désignés successivement ont pratiquement tous écrit (13) dans la colonne des unités. Pour les quatre professeurs, le sens mathématique est plutôt compris comme un automatisme : « j'ai 13, j'écris 3 et je retiens 1, 1 de la retenue placé au dessus la colonne précédente est additionné aux autres chiffres ». Dans tous les cas, une connaissance mathématique centrale dans cette leçon est l'échange de dix unités contre une dizaine. Les élèves ont normalement déjà cette connaissance. Ici, il s'agit pour les professeurs qu'ils puissent la mobiliser pour effectuer une addition, et la réactiver, en particulier à l'aide du matériel. Puis ils doivent montrer comment cette connaissance fonde la technique opératoire de l'addition. Le guide du maître a été la référence pour les quatre professeurs. P3 et P4 ne s'en sont pas du tout écartés. On voit bien qu'il y a eu quand même des choix différents. Les enjeux mathématiques forts sont bien sous la responsabilité des professeurs avec la construction du milieu[21]Sensevy (2001) à la place des élèves. P3 a souvent aidé les élèves interrogés à trouver les bonnes réponses, quand elle dit par exemple : « *on a vu les capsules (unités) et les capsules (dizaines), il y a*

---

[19] Un peu partout au Niger, les enfants pratiquent un jeu traditionnel. Si ce jeu est nommé et pratiqué différemment suivant les régions, par commodité pédagogique, une version simplifiée et uniformisée en a été créée, on l'appelle le "JEU DE TIGES". C'est un auxiliaire pédagogique très précieux, grâce à la grande diversité d'exercices de numération qu'il permet. Dans le jeu, en effet, une corrélation est faite entre certains animaux domestiques selon leur valeur financière dans le marché de bétail. Ainsi la chèvre coûte moins cher que l'âne, l'âne moins cher que la vache, et la vache moins cher que le chameau.
Dans cet ordre de valeurs, on obtient la classification suivante :

Jeu	Numération
10 chèvres s'échangent contre un âne	10 unités s'échangent contre une dizaine
10 ânes s'échangent contre une vache	10 dizaines s'échangent contre une centaine
10 vaches s'échangent contre un chameau	10 centaines s'échangent contre un millier

Pour bien comprendre ces interrelations, l'introduction d'une règle du jeu, rend obligatoire cet échange dès qu'on a plus de neuf animaux d'une même espèce. Ainsi pour illustrer ces échanges prenons l'exemple d'une équipe qui se retrouve avec 275 chèvres, elle remplacera par 27 ânes et 5 chèvres (en échangeant 27 fois dix chèvres) ; puis par 2 vaches, 7 ânes et 5 chèvres (en échangeant 2 fois dix ânes). Pour les mêmes raisons, ce jeu pourra être utilisé plus tard pour faire comprendre aux enfants les mécanismes de la retenue dans les additions.

[20] Extrait de l'entretien mené dans le cadre de mes travaux de recherche avec quatre professeurs.

[21] « Tout ce qui entre dans l'environnement d'apprentissage de l'élève, tout ce avec quoi l'élève se trouve en relation au moment de l'apprentissage »

également la colonne des unités et des dizaines ». L'élève interrogé est guidé d'une manière ou d'une autre. Il y a eu donc *effet Topaze* puisque ce type d'aide permet à l'élève de construire le bon comportement sans qu'il n'y ait de la connaissance. La topogénèse est en grande partie du côté des professeurs qui organisent la séance.

IV.3 ***Episode 2 (E2) :*** (9 + 3 = 12), une opération effectuée en exemple d'addition sans retenue

L'analyse de cet épisode tient à un choix didactique de P1 et P2 d'enseigner (9 + 3 = 12) comme une addition sans retenue. C'est un évènement didactique qui questionne les connaissances mathématiques des enseignants et leurs conséquences sur les pratiques d'enseignement.

P1 : « Les élèves disposent les bûchettes sur les tables. Un élève est désigné pour compter 9 bûchettes puis 3 devant ses camarades. Comptage de l'ensemble. L'élève désigné compte et trouve 12 bûchettes. Un élève est désigné pour schématiser au tableau 9 puis 3 bûchettes. Des petits traits verticaux sont dessinés au tableau.
(**IIIIIIIII+III =**). L'élève trouve 12 en faisant (**IIIIIIIII III = IIIIIIIIIIII).** P 1 demande à un élève de passer au tableau pour représenter la situation en chiffres. (**IIIIIIIII III = IIIIIIIIIIII).**
9 3 12
P 1 vérifie et demande à un élève de passer compléter les signes (**IIIIIIIII + III = IIIIIIIIIIII)**
9 + 3 = 12
P 1 demande aux élèves d'écrire sur les ardoises : 9 + 3 = 12. Un élève passe au tableau pour écrire l'opération

P2 : Les élèves disposent les bûchettes sur les tables. Un élève est désigné pour compter 9 bûchettes puis 3 devant ses camarades. Comptage de l'ensemble. L'élève désigné compte et trouve 12 bûchettes. Les élèves sont invités chacun à compter 9 puis 3 bûchettes Un élève est désigné pour schématiser au tableau 9 puis 3 bûchettes. Des petits traits verticaux sont dessinés au tableau : **IIIIIIIII+III = IIIIIIIIIIII**. P2 demande le nombre de bûchettes représenté et à chaque fois l'élève répond et écrit les chiffres : **IIIIIIIII + III = IIIIIIIIIIII**
9 3 12
P2 demande le signe de l'addition. Un élève répond le signe (+). P2 demande de passer au tableau mettre les signes. Des élèves sont désignés pour placer les signes + au niveau des deux schémas :
IIIIIIIII + III = IIIIIIIIIIII. P2 demande à un élève de lire l'opération : 9 + 3 = 12
9 + 3 = 12

On observe dans ces deux séances que, les raisonnements portent sur l'addition de deux nombres à un chiffre (9 + 3). La possibilité de former aisément une dizaine à partir de 9 n'est pas exploitée. Ce principe ne ressort pas dans les deux cas et aucune référence n'est faite à la notion de dizaine. En fait le matériel utilisé ici, les bûchettes, n'incite pas à effectuer un échange. Au contraire, puisqu'il est très simple d'obtenir le résultat simplement en

dénombrant les bûchettes une à une. C'est sans doute pour cette raison que les enseignantes considèrent qu'il s'agit d'une addition sans retenue.
Les exemples utilisés par P1 et P2 ne peuvent pas :

- Permettre d'expliquer les connaissances mathématiques relatives à la constitution de la dizaine si la somme dépasse 9 (échange à dix contre 1) ;
- Permettre d'expliquer, le fait que dans le cas d'une addition sans retenue, il n'est pas nécessaire de faire l'opération de gauche à droite puisqu'on peut bien commencer par les dizaines si on additionne deux nombres de deux chiffres par exemple.

Mais additionner 9 et 3 doit plutôt permettre d'expliquer aux élèves qu'il est possible d'emprunter 1 à 3 pour le donner à 9 (on complète ainsi la dizaine) : 9 + 1 + 2 = 10 + 2. P1 et P2 peuvent demander aux élèves de constituer deux tas avec les bûchettes. Les élèves pourraient dénombrer chaque tas (en faisant un paquet de dix) et se rendre compte qu'il y a un tas de dix unités réunies (une dizaine) et deux unités à part. Ceci correspondrait bien à la technique opératoire usuelle. P1 et P2 ne font pas de référence au GM qui préconise pour cette séance d'additionner deux nombres (24 + 45), ils ont probablement et délibérément choisi des nombres qui leur paraissaient plus simples. Mais ces choix mathématiques et didactiques n'ont pas permis la mise en œuvre des connaissances mathématiques attendues.

Conclusions et perspectives :

Nous avons tenté de montrer à travers cette présentation, en quoi les manuels « bases mathématiques » et « guide du maître » en vigueur au Niger pouvaient influencer les pratiques d'enseignement et apporter les connaissances mathématiques nécessaires aux enseignants. Nous avons pour cela analysé le contenu de ces manuels en ce qu'ils préconisent comme organisation mathématique pour ensuite étudier les interactions des professeurs et des manuels. Du point de vue des connaissances mathématiques pour les élèves apportées par les BM, ce qui semble évident, c'est le caractère non explicite de certaines connaissances qui ne précisent pas les types de tâches à réaliser et ne facilitent pas souvent les choix didactiques adéquats. Les tâches présentées dans les GM, généralement accompagnées d'une ou plusieurs consignes suivies d'un temps dévolu aux élèves et d'indications sur un matériel spécifique à utiliser(le cas du boulier), constituent un matériau privilégié pour que l'enseignant puisse comprendre comment s'y prendre pour traiter de l'objet avec ses élèves. L'articulation entre les connaissances mathématiques des BM et les tâches des GM est rarement évidente.

Les guides du maître sont une référence pour l'ensemble de l'organisation mathématique et influencent les pratiques d'enseignement. Quand les enseignants s'en écartent, nous avons pu observer un risque de « dérapage » didactique. Si on essaie de les suivre à la lettre, il faut néanmoins des connaissances mathématiques suffisantes pour ne pas conduire à une mise en œuvre où tous les enjeux mathématiques sont sous la responsabilité du professeur.

On peut alors s'interroger sur deux pistes d'évolution pour la formation continue des enseignants :

- L'élaboration d'autres ressources plus adaptées qui explicitent les connaissances mathématiques destinées aux professeurs et les mettent en lien avec les tâches proposées aux élèves pour permettre aux enseignants de mieux appréhender les savoirs en jeu. *Ces ressources dans leur conception doivent proposer des connaissances mathématiques nécessaires aux professeurs d'une part, et prendre en compte les capacités mathématiques des élèves où les cultures et coutumes sont fortement à tradition orale d'autre part. Il faut également comprendre le système de numération traditionnel dans les langues nationales, certains procédés de calcul mental et les mécanismes opératoires utilisés en soustraction, addition, multiplication et division pour les intégrer dans les manuels*.

- La mise en place d'une stratégie de formation permettant d'accompagner l'appropriation des ressources disponibles. Elle doit être instaurée dans les CAPED sous la forme d'un système de préparation et d'étude collective de leçons. Un formateur doit être désigné pour aider à réaliser des séquences sur la base d'un travail collectif réalisé à partir de l'exploitation des BM et GM, pour construire et étudier une leçon dans ses détails, afin de mieux cerner les connaissances mathématiques proposées et les interactions didactiques qui s'y déroulent.

  Il faut donc mettre en place un dispositif (ingénierie didactique) à faire fonctionner dans les CAPED dans lequel les professeurs travaillent vraiment les mathématiques pour eux-mêmes pour permettre aux élèves d'écrire les mathématiques et d'apprendre à représenter des situations qu'ils vont exploiter entre eux.

  Cette ingénierie peut se décliner comme suit :
- *Mise en place d'un collectif pour étudier et analyser les savoirs liés aux mathématiques (travail au plan individuel sur les manuels de mathématiques en vigueur au Niger et d'autres documents complémentaires) ;*
- *Réflexion commune, échanges et mutualisation des savoirs et enjeux par le collectif ;*
- *Mise en commun et élaboration des dispositifs d'enseignement à tester dans une classe ;*
- *Analyse par le collectif de la mise en œuvre et identification des pistes d'aménagement des dispositifs ;*
- *Nouvelle mise en œuvre des dispositifs réaménagés dans une autre classe du même niveau ;*
- *Analyse de la nouvelle mise en œuvre liée « aux manières de faire du professeur ».*

REFERENCES

Ball, D. L. and Cohen, D. (1996), Reform by the book: what is –or might be- the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? *Educational researcher* 25(9), 6-8, 14.

Ball, D. L., Hill, H.C. and Bass, H. (2005), Knowing mathematics for teaching. Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American educator*, fall 2005, 14-46.

Bases Mathématiques, arithmétique, logique et raisonnement Tome 2, INDRAP, République du Niger, Ministère de l'Education Nationale, 1992.

Bases Mathématiques, mesure-géométrie Tome 1, INDRAP, République du Niger, Ministère de l'Education Nationale, 1992.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
Gueudet, G., Trouche, L. (2008) Vers de nouveaux systèmes documentaires pour les professeurs de mathématiques ? In Bloch, I. et Conne, F. Actes de la XIV^{e} école d'été de didactique des mathématiques, Saint-Livrade 2007.
Margolinas, C. Wozniak, F. (2008) Place des documents dans l'élaboration d'un enseignement de mathématiques au primaire In Bloch, I. et Conne, F. Actes de la XIV^{e} école d'été de didactique des mathématiques, Saint-Livrade 2007.
Mathématiques, guide de l'instituteur (deuxième année), INDRAP, Rép. du Niger, 2001.
Sensevy. G, (2004), *Approche didactique et apprentissage collaboratif assisté par ordinateur. Quelques remarques. Version 1 de travail. 18-11-04.*
Sensevy.G, (2004), *Approche didactique et apprentissage collaboratif assisté par ordinateur, quelques remarques et questions*, Technologies de communication et formation des enseignants, INRP, *53*, 81-100.
Sensevy.G, Mercier. A, Schubauer-Leoni. M-L, (2000), Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la course à 20*, Recherches en didactiques des mathématiques, 20 (3) ,*263-304*.*
Sensevy.G, (2001), Des catégories pour l'analyse comparée de l'action du professeur : un essai de mise à l'épreuve*, Etudes des pratiques effectives,* 25-46.