La démonstration en algèbre : ruptures et continuités dans la transition entre le collège et le lycée

Myriam ALOULEN
Sophie PINTO-AMOEDO
Professeures de mathématiques stagiaires IUFM de Lyon (France)

Au cours de notre stage en responsabilité, nous avons pu constater qu'en classe de seconde (élèves de 15-16 ans), plusieurs élèves avaient des difficultés en algèbre, notamment en ce qui concerne les activités de preuve et de démonstration : par exemple, pour démontrer une formule générale, ils ne mobilisaient pas le calcul algébrique et se contentaient de vérifier sur des exemples. Certains d'entre eux affirmaient même qu'il n'y a pas de démonstration en algèbre et que cette activité ne concerne que la géométrie. Nous nous sommes alors interrogées sur l'origine de ces représentations ainsi que sur les difficultés qu'elles peuvent engendrer.

Plusieurs questions se sont alors posées :

- Quelles sont les difficultés que rencontrent les élèves face à la démonstration en algèbre ?
- Cette idée selon laquelle il n'y aurait pas de démonstration en algèbre ne serait-elle pas liée à l'enseignement que ces élèves ont reçu au collège concernant la démonstration ? Cette activité n'a-t-elle pas été réservée au cadre de la géométrie ?
- Quel a été le travail effectué par les élèves en algèbre au collège ?
- Et dans la caractérisation même d'une démonstration algébrique, qu'est ce qui la distingue d'une démonstration géométrique ?

Pour notre étude, nous nous sommes placés dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique développée par Chevallard. Nous avons utilisé les notions de rapports institutionnels/personnels à des objets de savoir. En considérant l'institution « Enseignement de l'algèbre au collège » et l'institution « Enseignement de l'algèbre en classe de seconde », nous avons ainsi précisé notre question en nous demandant s'il y a rupture ou continuité dans les rapports institutionnels et personnels des élèves face à la démonstration en algèbre dans la transition entre le collège et le lycée.

Pour étudier des éléments des rapports institutionnels à l'objet « démonstration en algèbre », nous avons étudié les textes officiels des programmes ainsi que des manuels scolaires qui sont dans une certaine mesure le reflet de la pratique enseignante. Nous avons également proposé un questionnaire aux professeurs de collège et de lycée afin d'approcher la pratique enseignante sur la démonstration en algèbre.

Pour étudier des éléments des rapports personnels des élèves de collège et de seconde sur les preuves en algèbre, nous avons proposé deux exercices de démonstration en algèbre à des élèves de quatrième et de seconde.

Les élèves qui sont en seconde en 2007/2008 ont suivi les programmes mis en place en 1998 (en quatrième) et en 1999 (en troisième). Ces derniers ne mentionnent pas explicitement qu'il faut faire des démonstrations en algèbre (alors que les programmes suivants le font). Cependant, on peut penser que pour donner du sens aux outils algébriques, il est intéressant de le faire. En revanche, les programmes de seconde mettent l'accent sur l'activité de démonstration en algèbre en insistant sur l'importance de ce travail pour développer le raisonnement et faire progresser les élèves dans la maîtrise du calcul algébrique. On peut donc repérer ici une certaine rupture dans les textes officiels.

Nous avons ensuite analysé des manuels des classes de quatrième, troisième et seconde correspondant aux mêmes programmes, en repérant les types de tâches relatifs à la démonstration en algèbre ainsi que les techniques nécessaires pour réaliser ces types de tâches. Nous nous sommes intéressées aux exercices des manuels traitant de la démonstration en algèbre, se trouvant dans la partie « Travaux numériques » pour le collège et « Calculs et fonctions » pour le lycée.

Au collège, les exercices se prêtant à l'activité de démonstration en algèbre ne représentent qu'une minorité de la totalité des exercices du manuel, alors que dans les manuels de seconde, la proportion d'exercices demandant des démonstrations en algèbre est plus importante. Ceci dit, cette proportion est très variable selon les manuels considérés et certains chapitres se prêtent effectivement plus à l'activité de démonstration en algèbre. Ce résultat est donc conforme à ce que nous avions supposé avant de réaliser cette analyse et en étudiant les programmes.

Le type de tâche « démontrer une égalité » est présent aussi bien en quatrième et en troisième qu'en seconde. En revanche, pour les classes de quatrième et de troisième, l'activité de démonstration en algèbre se résume essentiellement à ce type de tâche (on trouve aussi quelques types de tâches « démontrer une inégalité » et « démontrer que des affirmations sont vraies ou fausses », mais très peu) alors qu'en classe de seconde, c'est le type de tâche « démontrer une inégalité » qui est privilégié.

Cette rupture dans les types de tâches demandés aux élèves s'explique par l'introduction de nouveaux objets mathématiques en classe de seconde, notamment les fonctions. En effet, le travail réalisé au collège sur la démonstration en algèbre n'a que peu ou pas de finalité. Bien souvent, il est demandé de démontrer une égalité sans que celle-ci ne soit utilisée par la suite, alors qu'en seconde, ce type de tâche constitue une étape intermédiaire pour parvenir à d'autres résultats dans l'analyse de l'objet fonction, notamment pour les types de tâches « démontrer qu'une fonction est strictement monotone sur un intervalle I » et « démontrer qu'un nombre b est l'extremum d'une fonction f sur un intervalle I ».

De plus, les techniques que doivent employer les élèves de seconde pour résoudre ces nouveaux types de tâches sont plus complexes que celles employées au niveau du collège. En classe de seconde, la démonstration en algèbre devient un véritable outil, mis au service de nouveaux types de tâches, eux-mêmes induits par l'introduction d'un nouvel objet : la fonction.

A travers les questionnaires proposés aux professeurs, il ressort une certaine convergence des réponses en ce qui concerne les difficultés rencontrées par les élèves ainsi que sur le travail réalisé au collège qui selon eux, n'a que peu de finalité. Une difficulté que tous les professeurs ont citée est celle de l'utilisation des lettres : certains élèves se contentent de vérifier avec quelques exemples et ne comprennent pas toujours la nécessité d'une preuve. Enfin il y a une mise en avant importante des techniques de calcul algébrique (notamment l'utilisation des identités remarquables) et des types de tâches associés.

En classe de seconde, l'utilisation des identités remarquables a moins d'importance et ne sont qu'une base du calcul algébrique. En effet, à la question qui demandait l'avis des professeurs sur le travail réalisé au collège sur la démonstration en algèbre, nous avons obtenu comme réponse tout ce qui concerne la notion d'égalité, d'équation ainsi que les compétences associées au calcul algébrique (développement, simplification, réduction, etc.). Les professeurs interrogés pensent qu'au collège les exercices proposés consistent majoritairement à la démonstration d'égalités, à l'aide de développements ou de factorisations. En classe de seconde, l'accent est mis sur l'introduction des fonctions, de la monotonie et de l'extremum d'une fonction : le travail sur les identités remarquables est placé au second plan. Là encore on peut noter une évolution (qui peut constituer une rupture pour certains élèves) dans les objectifs fixés à l'enseignement de l'algèbre dans les deux niveaux et dans les types de tâches.

Enfin, nous avons réalisé une expérimentation en proposant différents exercices de démonstration en algèbre à des élèves de quatrième et de seconde. Notre objectif était d'observer les rapports personnels des élèves face à la démonstration en algèbre, de savoir s'ils évoluaient lors de la transition collège/lycée

Nous avons constaté une difficulté chez des élèves de quatrième mais également chez des élèves de seconde en ce qui concerne le caractère de généralité de la notation littérale. Ainsi, lorsqu'il leur est demandé de démontrer qu'une égalité est vraie pour tout nombre, ils se contentent de le vérifier sur un ou plusieurs exemples. Une autre difficulté que nous avons relevée concerne la confusion entre les différents statuts du signe « = ». Certains élèves ne font pas de différence entre la « dénotation » et le « sens » des expressions algébriques qu'ils manipulent. Ce sont des « calculateurs aveugles » qui ne font pas référence à la signification de leurs calculs. Il y a donc peu d'évolution entre le collège et le lycée.

A partir de nos différentes analyses, nous avons pu dégager plusieurs ruptures en ce qui concerne la démonstration en algèbre. Cette activité est peu présente au collège et plus présente au lycée. Au lycée, de nouveaux types de tâches apparaissent et l'algèbre devient un outil important pour l'étude des fonctions, tandis qu'au collège, les élèves font des exercices de démonstration sans finalité. Enfin, le travail réalisé au collège se base essentiellement sur le type de tâche « démontrer une égalité », tandis qu'en seconde, presque toutes les tâches se ramènent à la démonstration d'une inégalité, ce qui constitue une autre rupture. Concernant les procédures mises en place par les élèves pour résoudre un problème de démonstration en algèbre, elles suggèrent une certaine continuité notamment dans les difficultés mais avec quelques évolutions pour les élèves de seconde.

Il semblerait que les nouveaux programmes indiquent de nouvelles directives en ce qui concerne notre sujet : l'accent est mis sur l'activité de preuve en général, qu'elle relève du cadre géométrique ou du cadre algébrique.

De l'intérêt des dessins et des objets lors de la résolution de problèmes

Sophie KANMACHER BELAIDI et Nicolas BIQUE
Ecole de Culture Générale Henry Dunant, Genève (Suisse)

Travail de Fin de Formation Initiale (TFFI) en Mathématiques, finalisé pour juin 2008, partie intégrante du diplôme de Certificat d'Aptitude à la fonction d'Enseignant du Secondaire (CAES) délivré par le canton de Genève en Suisse.

Intention de départ

Aider les élèves à résoudre des problèmes mathématiques « simples » en favorisant des explorations à l'aide de dessins et/ou d'objets manipulables en relation avec les énoncés.

Publics : élèves de l'étude

Environ 150 élèves répartis sur 8 classes d'ordres, de filières et de niveaux différents :

- 2 classes de dernière année du secondaire I (élèves ayant entre 14 et 16 ans), niveau « fort » en maths
- 6 classes de première année du secondaire II (élèves ayant entre 15 et 18 ans) :
  - Cinq classes de l'Ecole de Culture Générale (ECG), filière « professionnelle » :
    - Une classe de Complément de Formation (CF) : élèves non promus du secondaire I désirant intégrer les filières ECG ou Ecole de Commerce (EC)
    - Trois classes de première année de certificat ECG, niveau B « moyen » en maths
    - Une classe de première année de certificat ECG, niveau A « fort » en maths
  - Une classe de « Maths fort » du Collège[1], filière d'études « générales et classiques » menant à la maturité (baccalauréat général).

Problématique

Comment agir au niveau de la construction des représentations pour que les élèves parviennent à dépasser leurs difficultés à modéliser et résoudre des problèmes mathématiques?

Hypothèses

Nous avons supposé que les supports visuels et sensoriels faciliteraient les opérations mentales chez les élèves. Mais aussi, que les bénéfices des dessins et de la manipulation du matériel seraient plus marqués chez un public rencontrant des difficultés en mathématiques. Et enfin, que l'utilisation de dessins et d'objets matériels comme aide au passage à l'abstraction nécessiterait une phase d'adaptation des élèves à ce nouveau mode de fonctionnement inhabituel pour nombre d'entre eux.

Protocoles de la recherche

Nous avons soumis aux élèves des problèmes de mathématiques de type « texte rédigé », avec une situation initiale, des données et un but à atteindre, qu'ils devaient résoudre seuls dans la

[1] Cycle d'étude sensiblement équivalent à celui du lycée français.

presque totalité des cas, selon des modalités différentes lors de quatre études distinctes:

Etude « 3 couleurs »

Dans la première étude, au début des tests les élèves ne disposaient que du texte de l'énoncé et devaient rédiger leur démarche d'exploration/résolution avec un stylo de couleur bleue. Après les sept premières minutes, ils disposaient d'un dessin représentant la situation et devaient rédiger avec un stylo de couleur verte. Après quatorze minutes, ils disposaient d'un objet comme complément de présentation du problème et devaient rédiger avec un stylo de couleur rouge.

Etude « Témoin/pilote »

Dans la seconde étude, les élèves d'une classe pilote travaillaient avec des problèmes agrémentés d'un objet manipulable. Les élèves d'une seconde classe pilote disposaient d'un dessin comme complément de présentation du problème. Enfin, les élèves de la classe témoin n'avaient que l'énoncé du problème, sans dessin ni objet.

Etude « Enregistrement d'élèves »

Dans la troisième étude, quelques élèves ont réfléchi à voix haute et ont été enregistrés lors de leur recherche de solution. Le problème était accompagné d'un schéma et de matériel.

Etude à « Permutations »

Dans la quatrième étude, des élèves de quatre classes d'ordres, de filières et de niveaux différents ont travaillé sur les mêmes problèmes avec dans chaque classe pour chacun d'entre eux soit le texte de l'énoncé seul, soit une représentation en plus, soit un objet en plus, soit les deux supports en plus. Les résultats aux sept tests pour un échantillon de six élèves par classe, les trois moins performants et les trois plus performants, ont été compilés sous la forme d'une « matrice colorimétrique des performances » qui a permis de faire ressortir visuellement des comportements et des tendances de performance par catégories d'élèves.

Résultats et interprétations

Bilan des études « 3 couleurs », « Témoin/pilote » et « Enregistrement d'élèves »

Apports de l'utilisation de dessins

Nous avons constaté que les dessins constituent une aide précieuse pour pallier aux difficultés de compréhension des énoncés et de modélisation. Ainsi, l'intérêt de l'illustration est sans conteste pour les problèmes de type géométrique. Globalement, les dessins facilitent l'imagerie mentale tant au niveau des évocations que des représentations fixes ou animées.

Dessins produits par les élèves

Nous avons noté que la production volontaire de dessins avait un réel effet structurant sur la représentation et aidait les élèves à résoudre le problème. Ainsi, les élèves en difficulté qui ont produit des dessins sont souvent allés plus loin dans la démarche de résolution.

Apports de l'utilisation d'objets

La manipulation d'objets a permis à des élèves de mieux comprendre certains problèmes et d'identifier la nature de l'inconnue. Elle a permis une évolution des représentations au niveau de la structuration et de l'interprétation chez une majorité des élèves.

Au final, les bénéfices des dessins et de la manipulation d'objets ont été plus marqués pour les élèves ayant un bon niveau scolaire. En outre, nous avons constaté que nombre d'élèves en difficulté ont perçu les activités de manipulation comme infantilisantes.

Bilan de l'étude à « Permutations »

Apports de l'utilisation de dessins et d'objets

Les objets et les dessins ont constitué une aide pour de nombreux élèves, sans que ce soit pour autant décisif pour chacun d'entre eux durant leur processus de résolution.

Dessins produits par les élèves

Les élèves très performants en résolution de problèmes ont fait bien plus de dessins de leur propre chef que les élèves qui ont de grandes difficultés. Pour les problèmes qui s'y prêtent, la formation d'images mentales se traduit par « *des images géométriques réalisables sur le papier »* car *« le dessin fournit une image globale de la situation »*[2]. Il constitue, ainsi, un excellent révélateur du degré de progression dans la construction des représentations.

Apports de la manipulation d'objets en fonction des publics

L'usage d'objets matériels ne semble pas avoir facilité immédiatement et de façon significative la construction de représentations mentales chez les élèves qui ont le plus de difficultés en résolution de problèmes, qu'ils fassent partie des classes « test » du Cycle, de l'ECG ou du Collège. Lors d'un questionnaire rempli à l'issue des tests, plusieurs élèves de Compléments de Formation ont exprimé le fait que les objets, contrairement aux dessins, les « embrouillaient » plus qu'autre chose. Il faut cependant préciser que les élèves de l'étude « à Permutations » n'ont pas bénéficié d'une sensibilisation et d'une préparation à l'exploitation des objets en situation de résolution de problèmes.

Les élèves d'un niveau moyen en résolution de problèmes seraient ceux qui pourraient avoir le plus bénéficié de l'aide des objets et des représentations.

Pour leur part, les élèves très performants en résolution de problèmes réussissent ou réussiraient certainement sans l'aide des représentations ou des objets. Ils semblent même moins bien réussir lorsqu'ils disposent d'une représentation accompagnant l'énoncé. Ces élèves disposent surtout de compétences techniques élevées et robustes. De plus, ils contrôlent leurs résultats, consolidant ainsi la validité de leur production. Ils savent aussi, si nécessaire, « remonter » dans leurs calculs et leurs raisonnements pour traquer les erreurs ou prendre de nouveaux chemins de résolution. Le doute et la vérification de la solution contribuent à leur succès.

L'objet comme aide à la modélisation nécessite un temps d'apprentissage de plusieurs semaines. En effet, il n'a pas été possible de mettre en évidence des courbes d'apprentissage durant les tests qui se sont étalés sur une dizaine de semaines de cours.

Difficultés rencontrées, constats et perspectives

En début d'étude, l'utilisation des objets était très marginale. A l'issue des trois mois de l'étude, le matériel et la méthode étaient perçus favorablement par la majorité des élèves.

Les mathématiques constituent un langage et un mode de pensée avec ses codes, ses concepts, ses techniques, ses pratiques et ses gestes mentaux. Les élèves qui maîtrisent ces savoirs ont atteint un stade où les apprentissages, les méthodes et les situations de recherche de problèmes s'enrichissent et se renforcent mutuellement. Avec eux, il suffit de travailler sur les choix des opérateurs et des algorithmes de calcul en fonction des structures des problèmes. Le recours aux objets matériels n'est plus nécessaire.

Avec d'autres élèves, il faudrait d'abord œuvrer pour qu'ils ne rebondissent plus contre le plafond de verre des calculs numériques et algébriques. Le passage à l'abstraction est un cheminement intellectuel lent nécessitant un temps de gestation et de maturation. Il faut donner à l'élève le temps d'entreprendre cette démarche qui change son rapport au monde. Aussi, l'utilisation ou la production de dessins et l'introduction du matériel comme aide à la représentation devrait s'envisager sur le long terme pour que les élèves en difficulté puissent

[2] « Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes » Guy Noël, Frédéric Pourbaix, Philippe Tilleuil, Jean-Pierre Cazzaro, De Boeck, 2001

en tirer des bénéfices.

Les interactions orales dans la classe de seconde lors des phases de correction d'exercices

Véronique BERGER
Victor FRANGIN
Professeurs de mathématiques stagiaires IUFM de Lyon (France)

Etant en début de carrière, nous étions particulièrement soucieux d'améliorer le plus rapidement possible notre enseignement, afin d'optimiser l'apprentissage des élèves. Notre objectif principal était de repérer les éléments importants qui peuvent permettre aux élèves d'apprendre dans les meilleures conditions. Nous avons tout de suite remarqué dans nos classes que l'oral joue un rôle important dans l'acquisition des connaissances des élèves, autant par les explications, que par les reformulations ou encore la verbalisation des pensées des élèves. De plus, les interactions orales sont le moteur de la vie de la classe, et quand elles sont bien menées, elles développent un environnement propice au travail et à la socialisation des élèves. Or, le professeur tient un rôle central dans la gestion de la communication dans la classe, mais il n'est pas seul puisque les élèves répondent non seulement aux questions du professeur mais posent aussi à leur tour des questions. Nous avons donc choisi d'étudier les interactions professeur-élèves pendant les phases de correction d'exercices. Nous avons choisi de nous placer dans le cas particulier du chapitre « Equations et mise en équation ».

De cette problématique découlent alors plusieurs questions de recherche :

- Comment peut-on classifier les interactions orales ?
- Quels types d'interactions sont favorisés ? Qui dirige ces interactions et comment ? Quelle est la participation de chacun ?
- Y a-t-il des régularités dans l'action du professeur et si oui lesquelles?
- Quelles sont ces régularités pour la validation des réponses des élèves et pour la gestion des passages au tableau ?

Pour étudier les interactions orales dans la classe nous avons filmé deux séances dans deux classes (une pour chaque professeur) pendant des phases de correction d'exercices à l'aide de deux caméras, une placée au fond de la classe et une devant les élèves.

Pour analyser les vidéos nous avons élaboré, à partir d'un article de Bouchard et Rolet, (2003) puis de la thèse de El Mouhayar (2007), une grille d'analyse nous permettant de classer les différentes interactions. La grille est divisée en plusieurs catégories :

- la tâche mathématique demandée,
- la catégorie d'intervention (sur le fond ou sur la forme),
- la personne qui intervient (le professeur, un élève ou les élèves ensemble)
- le contenu des interventions.

Nous avons alors séparé les interactions selon des questions ou des réponses avec plusieurs sous catégories, par exemple, si c'est une question (ou réponse) sur la compréhension de la tâche en cours, sur la procédure de résolution, sur la reformulation, la solution de l'exercice ou bien encore si l'intervention concerne les mathématiques enseignées, la compréhension des consignes ou l'organisation du travail.

Un premier résultat est que les interactions reliées directement au contenu mathématique représentent la quasi-totalité des interactions lors des séances. Par ailleurs, il apparaît que les questions initiées par le professeur représentent la moitié de ces interventions. C'est donc en grande partie par le questionnement que le professeur structure l'organisation des interventions orales dans sa classe, ce qui montre que le professeur sollicite fortement les élèves. Le professeur alterne donc continuellement entre les questions et les affirmations, afin de faire participer les élèves en les questionnant essentiellement sur leurs résultats, leurs procédures et leurs méthodes, pour les entraîner à reformuler et expliciter ce qu'ils ont fait et utilisé.

Nous avons également retrouvé un résultat (déjà mis en avant par El Mouhayer) sur les phases de correction : non seulement le professeur donne (ou fait donner) la bonne réponse, mais il demande aussi la procédure de résolution. Le professeur questionne donc l'élève qui a contribué à la résolution sur ses choix et ses méthodes et il renvoie ensuite à la classe les questions pour résoudre certains points délicats. D'autre part, il s'applique à répondre aux questions des élèves ou à énoncer une explication ou un rappel de cours lorsque cela lui semble nécessaire. En contrepartie, les élèves s'investissent dans cette dynamique de classe en prenant la parole autant de fois que le professeur, même si leurs interventions sont plus concises et nécessairement composées de moins de questions, car c'est finalement bien le professeur qui dirige les interactions. Ce dernier essaie d'anticiper au maximum, afin de garantir le contrôle des interactions, même si celui-ci n'est pas total, puisqu'il faut prendre en compte les demandes des élèves.

Pour compléter, nous avons étudié deux caractéristiques particulières des phases de correction d'exercices, à savoir la gestion du tableau et celle de la validation. Nous avons exploité les vidéos pour observer les régularités des professeurs face à leur utilisation du tableau et au système de validation mis en place. Pour cela, nous avons utilisé la classification proposée par Robert et Vanderbrouck (2003) pour l'utilisation du tableau en trois « lieux » : un lieu de travail, de savoir ou d'écriture intermédiaire) et pour la validation, nous avons repris la distinction de Margolinas (1992) en phase d'évaluation et la phase de validation.

Nous avons pu mettre en avant que la gestion du tableau, et en particulier de l'oral lors les passages au tableau, était liée à une logique d'enseignement personnelle et routinière des professeurs, mais aussi et surtout, selon nous, aux types d'exercices et aux types de tâches mathématiques associés. On peut donc remarquer chez chaque professeur, une ligne de conduite que les élèves semblent connaître, et qui est donc habituelle pour le professeur, dans l'utilisation du tableau comme lieu de travail ou encore comme lieu de savoir. Cependant cette utilisation est tout de même beaucoup modelée par les types d'exercices proposés, et en particulier, leur difficulté et leur importance par rapport à l'évaluation à venir.

Enfin, pour ce qui est de l'organisation de la validation publique dans la classe durant les phases de correction d'exercices, nous avons conclu qu'elle est finalement non seulement liée à l'exercice en lui-même, mais aussi à la personnalité du professeur, tout comme la gestion du tableau. Plus encore, la validation dans la classe paraît même liée à la façon dont est utilisé le tableau, c'est-à-dire, par exemple, que s'il est utilisé comme un lieu de savoir, la validation va avoir plus tendance à venir du professeur. On remarque donc que chaque enseignant a une gestion de la validation qui diffère, même si on peut voir que la même difficulté apparaît dans tous les cas. En effet, la validation publique est majoritairement de l'évaluation, même si le professeur tente parfois de la déguiser en validation, c'est-à-dire qu'il essaie d'amener la validation par la classe et non par lui-même. Les élèves sont donc peu mis à contribution et quand ils le sont, ils sont trop guidés et l'objectif du professeur est souvent non atteint, même si cela sert tout de même à ce que les élèves se sentent actifs dans l'élaboration de la solution et que cela favorise la communication dans la classe.

Comment développer l'éducation à la citoyenneté à travers l'enseignement de la statistique ?

Mehdi HAMMOUCHE
Professeur de mathématiques stagiaire IUFM de Lyon (France)

Lorsque j'ai commencé à enseigner les mathématiques, j'ai été amené à m'interroger sur les notions que j'allais avoir à enseigner et, notamment, sur la place qu'occupent les mathématiques dans notre société. La géométrie ou encore l'algèbre sont des domaines importants au collège et au lycée, mais c'est la statistique qui a attiré mon attention. En effet la statistique (domaine des mathématiques qui est la science de la variabilité) ne peut pas être simplement considérée comme un chapitre de mathématiques, c'est une discipline "ouverte" sur le monde : elle concerne aussi bien la santé que l'économie, l'environnement, ou encore la politique... C'est une science qui influence le développement des sciences expérimentales et des sciences humaines. C'est un outil de décision, de description, d'anticipation, un moyen d'argumentation.
Tous ces aspects font que, dans la vie de tous les jours, la compréhension et l'utilisation simple de statistiques (les statistiques sont les données que traitent la statistique) constituent un enjeu majeur dans la vie des citoyens. Aux questions telles que : *Combien d'objets faudrait-il commander ? Quelle est la proportion d'objets défectueux à prévoir dans un stock de marchandise ? A quel pourcentage de risque s'expose-t-on ? Quelle(s) information(s) avons-nous lorsque l'on dispose du salaire moyen d'une entreprise ? Quelles conclusions peut-on tirer d'une information ? Quelle influence certains chiffres peuvent-ils avoir sur nos propres perceptions ? Etc.,* les outils de la statistique permettent de donner des éléments de réponses.
Pour comprendre le monde actuel, un minimum de culture statistique me semble indispensable. Or en même temps, on observe que de nombreux adultes (et élèves) ne possèdent pas les clefs pour interpréter correctement ces informations chiffrées. On peut penser que la manière de présenter ces notions à l'école contribue à cette relation apparemment difficile avec les statistiques.
En France, depuis une quinzaine d'années, les programmes successifs ont introduit progressivement des notions de statistique et affichent la volonté d'accorder une place de plus en plus importante à cet enseignement. Ainsi depuis 2000, le nouveau programme de 2^{nde} (élèves de 15-16 ans) comporte trois grandes parties dont une est « Statistique » (les deux autres sont Calcul et fonctions, Géométrie) et recommande de consacrer à la partie statistique un huitième du temps disponible sur l'année.
Lors de mon année de stage dans un lycée de la région lyonnaise où j'avais la responsabilité d'une classe de seconde (de 31 élèves), j'ai choisi d'élaborer une séquence de classe portant sur la réflexion et le choix des indicateurs statistiques pour résumer une série ou interpréter une série de résultats.
J'ai supposé que les élèves se poseraient des questions sur les statistiques à partir d'exercices où je tenterais de déstabiliser des « évidences » comme, par exemple, l'utilisation de phrases

comme « *ils font beaucoup de sport* ». Dans cet exemple, il convient d'abord de mettre en relief le flou qui accompagne le terme de sport : La danse est-elle du sport ? Faut-il comptabiliser la gymnastique scolaire ? Etc. Ce premier étonnement des élèves face à la difficulté à s'entendre entre eux était renforcé par le « beaucoup » qui s'avérait encore plus difficile à cerner. J'ai fait l'hypothèse que l'enseignement de ce chapitre gagnerait à être conçu dans cette perspective de « déstabilisation » pour favoriser le regard critique indispensable à la citoyenneté. Il s'agissait donc d'intéresser les élèves par le « démontage » d'aspects qu'ils ne remettaient pas en question et ce, pour favoriser l'apprentissage de cette forme de mesure qu'est la statistique.
J'ai choisi d'adopter un point de vue constructiviste de construction des connaissances. Le constructivisme est axé sur l'activité du sujet, car selon Vergnaud, c'est l'activité du sujet «*qui lui permet de créer des relations stables entre les actions et leurs résultats, et entre les objets.*». Je me suis référé également à la théorie anthropologique du didactique développée par Chevallard. Dans cette théorie, Chevallard (1999) situe « *L'activité mathématique et donc l'activité d'étude en mathématique, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales.*» et utilise un modèle unique, la *praxéologie*, applicable à toute autre activité humaine. La *praxéologie* est une modélisation des objets de savoir qui se décompose en : *praxis* (type de tâches à accomplir, techniques à mettre en œuvre), et *logos* (discours technologique et théorie qui justifient la praxis). La séquence d'enseignement est alors divisée en différents moments d'étude.
Dans ma démarche d'élaboration de la séquence j'ai effectué deux choix importants. Le premier a été de confier la réalisation de l'enquête aux élèves eux-mêmes (formulation des questions, détermination de la population, interrogation effective de la population, etc). La classe a préparé l'enquête en commun : les questions portaient sur les pratiques des adolescents entre 15 et 20 ans (la tranche d'âge des élèves qui fréquentent le lycée) autour de 6 thèmes : cinéma, sport, radio, télévision, livres et musique. Chaque élève de la classe interrogeait 6 personnes (ce qui permettait d'obtenir un échantillon de 186 personnes) sur leurs loisirs : Combien de films avez-vous vu au cinéma ces 3 derniers mois ? Combien de livres avez-vous lu ces trois derniers mois ? Etc. Une fois l'enquête réalisée les élèves ont été répartis à leur tour en 6 groupes. Chaque groupe travaillait ainsi sur un seul thème.
Le second choix a été d'analyser le développement du discours technologique par rapport au choix des indicateurs statistiques, dans lequel j'ai souhaité privilégier l'argumentation par une participation active des élèves. Par exemple je leur demandais d'observer la distribution des réponses plutôt qu'une valeur unique comme la moyenne pour répondre à des questions ; de prendre du recul sur les informations apportées par le salaire moyen et le salaire médian dans une entreprise, etc.
L'enquête a rencontré un vif succès au niveau de la participation de la classe, il y a eu de nombreux débats à propos du sens des mots (les nomenclatures), et les élèves se sont bien organisés pour se répartir les tâches. Néanmoins, les thèmes abordés se sont révélés plus complexes que prévu et il a fallu recentrer les choses régulièrement. Lors de la détermination de la population à interroger concernant les fréquentations de cinéma par exemple, certains élèves souhaitaient tenir compte de la distance entre domicile et cinéma, des programmes des

salles, etc. A chaque fois, leurs remarques étaient pertinentes, mais dans un souci de réalisme je me trouvais dans l'obligation de clore les discussions.

Au sujet du développement du discours technologique sur le choix des indicateurs, dans un premier temps, la possibilité de choisir librement les indicateurs à utiliser a perturbé les élèves. Ils n'ont pas eu les réactions espérées et ils se sont accrochés à leurs premières impressions : la moyenne constitue l'indicateur le plus naturel et ces, en toutes circonstances. Un groupe seulement a défendu l'idée que la réponse la plus donnée serait intéressante à observer selon la question posée. Dans un second temps, une fois la présentation du cours effectué ainsi que celles de quelques exemples judicieusement choisis, certains élèves ont développé un certain sens critique. Pour d'autres en revanche, il a simplement été question d'échanger un indicateur pour un autre sans en percevoir le sens.

Il ressort de cette enquête et de l'analyse que les présupposés (les « évidences ») sont tenaces et résistent aux multiples exercices de déstabilisation. Il est manifeste qu'il faut persévérer et que l'acquisition du regard critique évoqué plus haut nécessite d'organiser les leçons en laissant une bonne place à la répétition mais sans tomber dans l'identique.

La réflexion sur ma pratique d'enseignant, notamment la manière d'obtenir l'attention des élèves et l'animation ordonnée des échanges entre eux pour faciliter leur cheminement m'a particulièrement captivé. Cette forme de discussion n'est pas sans rappeler les difficultés propres au débat citoyen qui suppose argumentation, écoute, et synthèse. La rédaction de ce mémoire et les analyses que j'ai pu effectuer m'ont permis de me rendre compte à quel point j'avais sous-estimé certains obstacles liés à l'enseignement de la statistique. La présence de statistiques dans les médias influence fortement les comportements des élèves ; le choix des thèmes sur lesquels j'ai travaillé aurait nécessité d'être plus approfondi, ainsi que la formulation des questions à poser (ne pas poser de questions dites "impossibles" qui sollicitent la mémoire d'événements par exemple). L'analyse a également fait ressortir le fait que j'avais ajouté des contraintes à l'organisation de la séquence : par exemple tous les cours ont logiquement eu lieu dans l'enceinte scolaire et sans doute aurait-il fallu se « déplacer » ou au moins explorer la possibilité d'amener les élèves dans d'autres lieux de la « cité » comme la mairie où il aurait été peut-être possible de trouver d'autres exemples tout aussi parlant que l'état civil, ou les données démographiques par exemple. Un tel déplacement aurait eu le mérite de mettre en contact les élèves, même très modestement, avec des aspects comme les administrations ayant un lien avec la « citoyenneté ». Par ailleurs, l'étude de ce mémoire m'a amené à m'interroger plus profondément sur la statistique et son histoire : comment se sont construits les indicateurs ? Quelles ont été les oppositions entre les savants au sujet des échantillons représentatifs ?) Où se situe la frontière entre un caractère qualitatif et un caractère qualitatif ? Quels sont les phénomènes de la vie quotidienne qui ne suivent pas une loi de Gauss ?

Résumé du mémoire de spécialité portant sur le thème activité d'introduction de l'arithmétique en classe de terminale S1 et S3

Abdou KANDJI, Maodo FALL et Bathie GAYE,
Professeurs de mathématiques, stagiaires à la Faculté des Sciences et Technologies de l'Education et de la Formation (Sénégal)

Introduction
Longtemps considéré comme une science trop abstraite, l'arithmétique connaît aujourd'hui une révolution sur le plan des applications du numérique. C'est ainsi que dans le nouveau programme l'arithmétique est réintroduite à travers l'étude des entiers naturels et des entiers relatifs, approfondie par la notion de congruence et de système de numération. Dans ce mémoire, nous proposons, pour chaque thème, une approche par des activités qui sera suivie *d'une fiche élève, d'un scénario d'usage et enfin d'une fiche professeur* (Sokhna 2006). Ceci dans le but d'aider les collègues qui n'ont eu la chance d'avoir des manuels qui traitent ces parties du programmes et qui en plus n'ont pas eu de formation professionnelle, d'avoir des ressources qui leur permettront de documenter leur enseignement.

THEMES
Thème 1 : Multiple et diviseur
On introduit la notion de diviseur par un problème de choix de points pour la représentation graphique d'une fonction homographique. L'ensemble des points choisis permet d'énumérer l'ensemble des diviseurs d'un nombre donné.
L'objectif est d'étendre la notion de diviseur à Z.

Thème 2 : Nombre de diviseur d'un entier
Aucune difficulté pour ce thème, l'objectif est d'amener l'élève à conjecturer sur la formule donnant le nombre de diviseur positif d'un entier donné

Thème 3 : Division euclidienne dans Z
Dans cette partie l'activité vise une exploitation du reste de la division euclidienne dans la démonstration de l'existence d'une divisibilité d'une somme consécutif par une constante donnée. Par ailleurs le principe des tiroirs est appliqué pour établir l'égalité de deux restes ; ce qui sera fondamental pour mener à bien cette activité

Thème 3 : PPCM
Le carrelage d'une pièce permet d'introduire, sous un angle pratique, le PPMC qui est une notion déjà connue des élèves du point de vue théorique.

Thème 4 : PPCM et PGCD de plusieurs entiers
L'extension des notions de PPCM et PGCD à plus de deux entiers sera introduite par des problèmes ludiques (concours d'événements à périodicité différente, optimisation d'une caisse de savons)

Thème 5: Nombre premier
Dans cette activité d'introduction du cours sur les nombres premiers nous ferons usage du test de primalité pour vérifier la véracité de la conjecture de Fermat à savoir que pour tout n entier naturel 2n+1 est premier. La seule difficulté pour cette activité réside dans la démonstration du test.

Thème 6 : Système de numération
L'activité introduit la numération sur une base quelconque b avant de traiter les cas particuliers où b =10, b =5 et b =12. L'objectif étant d'amener l'élève à connaître le principe de base de la numération, l'algorithme de détermination des chiffres de l'écriture d'un entier naturel.

Thème 7 : Congruence
L'activité est une application du reste de la division euclidienne pour la validation d'un numéro INSEE. Elle est suivie d'une généralisation du cas à tout élément de Z ayant même reste dans la division euclidienne. La seule difficulté dans cette activité est l'étude effectuée au cas par cas pour la détection de l'erreur commise sur un chiffre du code INSEE

Thème 8 : Equation de Diophante
Nous visons ici l'organisation de résultats issus de tâtonnement des élèves face à un problème de transvasement. Il s'agira ensuite de concevoir un modèle graphique et d'en déduire un modèle algébrique pour formaliser mathématiquement l'expérience. Le modèle algébrique ainsi conçu sera une équation de Diophante dont la résolution fera l'objet du cours.

Conclusion
En concevant chacune des ressources avec une fiche élève, un scénario d'usage et une fiche professeur nous avions espéré pouvoir placer l'élève dans un contexte d'apprentissage motivant avec comme levier l'organisation d'activité ludique à la pratique de l'arithmétique. Nous avions espéré faciliter le travail des enseignants qui utiliseraient ces ressources par une proposition *d'organisation didactique* (Chevallard 1999) contenue dans la fiche professeur. Quand nous avons fini ce mémoire, nous nous sommes rendu compte que ce travail était aussi profitable pour nous même car il nous à permis de beaucoup travailler les mathématiques que nous enseignons, de développer une certaine culture mathématique, de s'interroger sur nos pratiques d'enseignant et de vivre la genèse d'une *communauté de pratique* (Wenger 1998).

Bibliographie

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19(2), p. 221-266.

Sokhna M. (2006) Formation continue des enseignants de mathématiques du Sénégal: genèse instrumentale de ressources pédagogiques, Thèse de didactique des mathématiques. Thèse de Doctorat. Université de Montpellier II

Wenger E. (1998) *Communities of Practice : Learning, Meaning and Identity*. Cambridge: University Press.

Comment exploiter des énoncés de type vrai/faux en classe

Christelle Künzi et Amandine Dudler
Genève (Suisse)

Notre travail porte sur les activités vrai/faux utilisées en cours de mathématiques. Ces activités proposent plusieurs affirmations aux élèves qui doivent se positionner sur la véracité de celles-ci et justifier leur réponse. Il y a généralement une phase où les élèves travaillent individuellement, puis ils se mettent en groupe pour comparer leurs réponses et tenter de les défendre. Suivent ensuite un vote et un débat en classe entière où chaque argument est noté par le professeur jusqu'à ce que presque toute la classe soit convaincue. C'est seulement à la fin que l'enseignant institutionnalise ce qui a été débattu.

Nous avons donc testé un certain nombre d'activités, et avec des élèves d'âges et de niveaux assez variés : cycle d'orientation, Ecole de commerce et Ecole de culture générale. Le cycle d'orientation regroupe les élèves de 12 à 15 ans, ce sont les trois dernières années d'école obligatoire. Ensuite les élèves ont le choix entre plusieurs filières, entre autres l'Ecole de commerce (filière commerciale) et l'Ecole de culture générale (certificat et maturité spécialisée permettant d'entrer dans une Haute école spécialisée, mais pas à l'université). Les élèves de ces deux écoles sont donc âgés de 16 à 20 ans environ.

Notre problématique de départ était la suivante :

De quelle manière créer des activités vrai/faux pour que le déroulement en classe corresponde à nos objectifs de départ ?

Précisons que ces objectifs concernent le raisonnement, l'attitude réflexive, la gestion des erreurs, l'apprentissage de la justification. Ils ne concernent jamais le comportement des élèves.

Pour pouvoir traiter cette problématique, nous avons ciblé notre recherche sur les questions suivantes :

1) *Qu'implique le choix des variables didactiques ?*
2) *Combien d'assertions choisir pour une activité ?*
3) *Sur quoi les élèves vont-ils (peuvent-ils) baser leur validation ?*
4) *Quelle est la portée, l'efficacité de l'activité pour les élèves ?*

Nous avons donc cherché quelles devaient être les caractéristiques de ces activités pour qu'elles puissent remplir au mieux les objectifs spécifiques fixés au départ de chaque activité, dont voici quelques exemples : se convaincre d'un énoncé mathématique, éviter les confusions et mettre en évidence des erreurs typiques, apprendre à justifier et expliquer un énoncé, mettre en évidence des propriétés, mettre en garde les élèves contre leur intuition, introduire un nouveau chapitre, faire survenir le besoin d'une nouvelle connaissance, mettre en pratiques des connaissances acquises, etc. Au fil des activités, nous avons pu mettre en évidence deux thèmes principaux émergeant de ces objectifs : l'argumentation et l'erreur.

Le premier thème consiste à inciter nos élèves à argumenter et justifier ce qu'ils apprennent, ce qui leur permet souvent de mettre un sens aux formules que nous leur enseignons et de se rendre compte qu'elles ne tombent pas du ciel. Le second thème, quant à lui, vise à mettre en évidence des erreurs fréquentes chez les élèves, ce qui leur donne l'occasion d'y réfléchir, de se rendre compte par eux-mêmes qu'il y a une erreur et de la corriger. Cette démarche participe donc à la conceptualisation ou à la consolidation de la notion étudiée. L'argumentation est un objectif principalement transversal, tandis que l'erreur est un objectif plus spécifique au domaine enseigné. Néanmoins, les élèves apprennent à accepter que l'erreur fait partie du processus d'apprentissage, ce qui donne également une vision transversale à l'erreur.

Notre travail contient donc un aperçu théorique sur nos deux objectifs principaux, à savoir l'erreur et l'argumentation, puis une synthèse des activités testées avec nos élèves.

En effet, pour chaque activité passée dans nos classes, nous avons effectué une analyse préalable et a posteriori. Dans l'analyse préalable qui s'effectue avant de passer l'activité, nous avons défini les objectifs spécifiques de l'activité, réfléchi aux différentes procédures que pourraient utiliser les élèves et choisi les variables didactiques les plus appropriées à nos objectifs. Tous ces points sont détaillés dans chaque analyse, en particulier la réflexion approfondie sur le choix des variables didactiques. Cette analyse préalable nous a permis de créer un énoncé en adéquation avec nos objectifs spécifiques. Lors de l'analyse a posteriori, nous avons recueilli les différentes méthodes des élèves pour comparer avec les procédures attendues. Finalement, chaque analyse comporte une conclusion faisant un lien avec nos objectifs spécifiques (atteints ou non) et contenant également nos remarques personnelles sur le déroulement en classe et des propositions d'amélioration de l'activité.

Analyse d'une intervention en classe visant la construction de sens aux fractions chez les jeunes du début du secondaire (12-13 ans)

Caroline Laplante
École secondaire Marcellin-Champagnat, St Jean (Québec)

La réponse fournie par un élève de secondaire 1 à un problème classique, mettant en jeu un travail sur les fractions, servira de point de départ à l'énoncé du questionnement à l'origine de notre projet, centré sur l'élaboration et l'analyse d'une séquence d'enseignement, visant à construire un sens aux fractions chez les élèves.

> *Léa remplit un verre d'eau aux 5/7 de sa capacité. Après qu'elle aura versé les 3/5 du contenu du verre dans l'évier, quelle fraction du verre sera occupée par l'eau ?*
>
> Réponse erronée d'un élève de 1e secondaire :
>
> 5/7 - 3/5 = 25/35 - 21/35 = 4/35

En fait, cet exemple introduit des raisonnements centraux à développer sur les fractions, plus particulièrement dans le cas du sens partie-tout : percevoir le tout de référence, la relativité de la fraction en regard du tout, et pouvoir reconstruire ce tout. La difficulté à prendre en considération le tout de référence qui donne un sens aux fractions dans un contexte mène les élèves à commettre bien des erreurs dans les problèmes impliquant des multiplications ou encore des divisions. Cela dit, ce constat a induit un questionnement plus global sur mon enseignement des fractions de manière à améliorer la compréhension qu'en ont les élèves.

Quelques données sur l'apprentissage des fractions par les élèves

L'apprentissage des fractions est un domaine qui pose d'importantes difficultés aux élèves, et ce à différents niveaux scolaires. Selon certains auteurs, « learning fractions is probably one of the most serious obstacles to the mathematical maturation of children » (Behr et al., cité par Charalambos et Pitta-Pantazi, 2007, p.293). Au primaire et au secondaire, ces difficultés se retrouvent d'abord en arithmétique (Streenfland, 1978, 1982; Haseman, 1981; Pitkethly, Hunting, 1996; Boulet, 1998; Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2007), puis ont des répercussions en algèbre dans la manipulation d'expressions algébriques et la résolution d'équations. Ces mêmes difficultés s'observent également au collégial (17-19 ans) dans la manipulation de fractions algébriques (Antonius et al., 2008). Les élèves évitent d'opérer sur les fractions dès qu'ils en ont l'occasion en les transformant en nombres décimaux.

Étant donné que le calcul fractionnaire constitue un préalable à l'apprentissage de notions plus complexes (ex.: probabilités, statistiques, fonctions, exponentiation, simplifications algébriques, etc.), Rosar, Van Nieuwenhoven, et Jonnaert (2007) vont même jusqu'à dénoncer la précocité de l'enseignement du calcul fractionnaire au profit de l'exploration de tous les sens de la fraction. Cela dit, dans ce qui précède, nous constatons bien que les fractions sont un concept clé en mathématiques. La construction du sens de la fraction et des opérations sur les fractions apparaît donc centrale, c'est sur ces significations que vont s'appuyer les apprentissages ultérieurs « celles-ci pouvant soit servir de pont dans la construction de nouvelles connaissances, soit s'instituer en obstacles à cet apprentissage » (*Ibid., p.4*). *C'est avec cette intention en tête que nous avons entrepris une recherche-action visant l'élaboration et la mise à l'épreuve d'une séquence d'enseignement centrée sur le développement d'un sens plus riche de la fraction et des opérations sur les fractions.*

L'enseignement des fractions au début du secondaire : un savoir au cœur de la transition primaire-secondaire

Dans le programme d'études, l'apprentissage des fractions est amorcé à la fin du primaire (9-11 ans) et se poursuit au début du secondaire. Au primaire, l'élève est amené à interpréter et produire des représentations variées d'une fraction, à comparer des fractions, à trouver des équivalences, à additionner et soustraire des fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre ainsi qu'à multiplier un nombre naturel par une fraction (MELS, 2001, p.134 à 137). Les opérations se limitent donc à certains cas et sont abordées avec du matériel concret. L'accent est mis sur la construction du sens partie-tout de la fraction. En ce qui concerne le secondaire, il semble que l'apprentissage des algorithmes de calcul soient au cœur du curriculum et ce, en mettant à profit les expressions équivalentes et les propriétés des opérations (MELS, 2004, p.250) Selon le programme, il faut également préconiser des situations qui développent le sens des opérations et des nombres, incluant la fraction. Dans les faits, on peut toutefois se questionner sur la prééminence accordée à l'exécution de procédures de calcul versus le développement du sens de la fraction.

Fondements de l'intervention : les principes didactiques qui nous ont guidée

Nous avons conçu des situations didactiques permettant une entrée par la signification et non le formalisme, induisant des échanges entre les apprenants et l'enseignant, et ce, dans des contextes variés. En nous basant sur la théorie de la compréhension mathématique de Kieren (1994), nous avons cherché à amener les élèves à se construire des images visuelles des fractions, puis des représentations mentales pour qu'ils en dégagent par eux-mêmes des propriétés et qu'ils soient en mesure de résoudre des problèmes impliquant des fractions.

Sur la base d'une analyse conceptuelle mettant en évidence les sens du concept, les raisonnements clés à travailler, une analyse des difficultés et erreurs des élèves, des activités de manipulation, d'exploration et de discussion ont été élaborées. Dans le tableau ci-dessous, nous présentons les différents sens de la fraction abordés ainsi que le matériel utilisé.

L'équivalence et la comparaison de fractions	
Principes didactiques qui guident/intentions	A. Donner une signification à l'équivalence de fractions pour les sens partie-tout, mesure et rapport de la fraction ; B. Faire percevoir aux élèves qu'il y a différentes stratégies possibles (et pas seulement le recours à un même dénominateur) ; C. Développer un contrôle par les élèves sur l'activité de comparaison ; D. Faire percevoir aux élèves l'influence du référent.
Raisonnements clés	A. Situer l'ordre de grandeur des fractions en référence à des fractions connues ; B. Reconstruire l'entier à partir de la fraction ; C. Comprendre l'influence du dénominateur pour des fractions ayant même numérateur ; D. Comprendre l'influence du numérateur pour des fractions ayant même dénominateur ; E. Voir la pertinence de passer au dénominateur commun dans les cas obligés ; F. Ordonner plusieurs fractions en utilisant une combinaison de stratégies.
La séquence	Mises en situation impliquant la manipulation, résolution de problèmes, recours à la droite numérique et questions ouvertes sur le sens de la fraction.
Les opérations sur les fractions en général	
Principes didactiques d'ordre général	A. Comprendre les opérations sur les fractions nécessite le développement de différents sens de la fraction ; B. Développer le sens des opérations à partir de contextes signifiants et en s'appuyant sur la manipulation avant de passer aux règles et algorithmes formels.

L’addition et la soustraction de fractions	
Principes didactiques	A. Voir la pertinence de passer au dénominateur commun ; B. Construire le sens partie-tout de cette opération à partir des fractions équivalentes et d’expressions mathématiques équivalentes tirées de représentations visuelles.
Raisonnements clés	A. Additionner et soustraire des fractions et nombres fractionnaires ; B. Faire percevoir aux élèves l’influence du référent ; C. Comprendre la signification d’une fraction lorsque le numérateur est supérieur au dénominateur (représentation visuelle, transformation en nombre fractionnaire); D. Une partie d’un tout étant donnée, pouvoir reconstruire le complément.
La séquence	Mises en situation impliquant la représentation variée de fractions, résolution de problèmes et questions ouvertes sur le sens de la fraction.
La multiplication et la division de fractions	
Principes didactiques	A. Donner une signification à la multiplication de fractions pour les sens partie-tout et opérateur (puzzle à agrandir) B. Donner une signification à la division de fraction pour le sens mesure ; C. Développer un contrôle par les élèves sur les opérations (problème d’origine)
Raisonnements clés	A. Voir le changement de référent lorsqu’on opère (exemple du problème de départ) B. Anticiper le résultat de l’opération en rapport avec les fractions données dans le problème ; C. Voir la pertinence de simplifier les fractions ; D. Comprendre les liens d’inverse qui unissent la multiplication à la division.
La séquence	Mises en situation impliquant la manipulation d’objets, la représentation graphique et le questionnement en rapport au référent ; résolution de problèmes.

Tout comme le suggère le modèle de Berl et al. (cité par Charalambos et Pitta-Pantazi, 2006), nous espérons que le développement de plusieurs sens de la fraction, de raisonnements clés avec les élèves, aura des répercussions sur leur habileté à résoudre des problèmes comportant des fractions.

Méthodologie

L’expérimentation a été conduite dans 4 classes de 36 élèves âgés de 12 à 13 ans sur une période de 6 semaines. Au fil des cours, les productions des élèves ont été conservées et photocopiées. Un test écrit sera également expérimenté auprès des élèves à la fin de la séquence pour dégager la compréhension que les élèves ont construit de la fraction, notamment dans la résolution de problèmes impliquant des fractions. De courtes entrevues seront réalisées pour apporter des précisions si nécessaire.

Au colloque EMF 2009, nous présenterons donc les réflexions ayant conduit au choix des situations, quelques situations expérimentées et reviendrons sur ce qui ressort de l'analyse des productions des élèves dans ces situations et au test écrit.

Conception et conduite d'activités d'introduction sur les droites des milieux et sur le théorème de Thalès

Mamadou Bamba NDAO, Cheikh El Bou DIAGNE et Dame GUEYE
Professeurs de mathématiques, stagiaires à la Faculté des Sciences et Technologies de l'Education et de la Formation (Sénégal)

La place qu'occupent les mathématiques est reconnue comme étant primordiale pour le développement de l'homme. Or, aujourd'hui au Sénégal, nous avons de faibles effectifs dans les filières mathématiques dans l'enseignement supérieur au Sénégal et tout le monde l'attribue à une baisse de niveau des élèves en mathématiques. Il remarquer au même moment il y a eu un recrutement régulier de professeurs de mathématiques sans formation professionnelle et avec un niveau de formation académique en mathématiques faible (les vacataires). Nous pensons que ceci n'est pas sans conséquence dans cette baisse de niveau. Au Sénégal nous n'avons pas de manuels pour les enseignants de mathématiques, on peut se demander comment des enseignants sans formation et sans document de travail peuvent faire correctement leur enseignement. Nous avons estimé que, pour aider ces enseignants, notre mémoire pouvait s'appuyer sur le modèle de ressources ci-dessous pour concevoir des fiches de cours.

Description des différentes fiches du modèle de ressources

Le modèle de ressources proposé par (Sokhna 2006) pour la formation des enseignants en difficultés se présente avec une *fiche d'identification, une fiche élève, un scénario d'usage, une fiche professeur et une fiche de formation*

La fiche d'identification :

Elle fait une description brève de la ressource. Dans cette fiche, doit figurer les objectifs d'apprentissage des élèves et les *objectifs de formation* pour l'enseignant. Ce champ sur les objectifs de formation est très important car il permet à l'enseignant à partir de la *fiche de formation* ci-dessous d'adapter une ressource par rapport à ses besoins de formation.

La fiche élève:
La fiche élève est un document destiné aux élèves et qui est le support de leurs activités au cours de la séance (une activité d'introduction d'une notion à enseigner par exemple).

Le scénario d'usage :
Le scénario d'usage est une fiche qui fait une description du déroulement de l'activité en classe en indiquant, pour chaque phase, sa durée approximative, les tâches à réaliser et les outils utilisés. Il a pour rôle de faciliter l'intégration de la ressource dans la classe. Ainsi, un scénario prend en charge les *organisations didactiques relatives aux organisations mathématiques à partir des types de tâches contenus dans la fiche élève* (Chevallard 1999).

La fiche professeur :
La fiche professeurs doit contenir des énoncés d'objectifs pédagogiques, des compétences exigibles et des commentaires extraits du programme et des solutions de l'activité proposée. Elle doit contenir des approches différentes de résolution de l'activité proposée aux l'élève.

La fiche de formation :
L'objectif visé est d'améliorer le niveau de formation théorique de l'enseignant utilisateur de la ressource. Elle doit contribuer à relever le niveau de formation théorique en mathématiques

et en didactique. La conception de la fiche sera étroitement liée aux objectifs de formation de l'enseignant et aux objectifs d'apprentissage de l'élève qui sont assignés à la ressource.

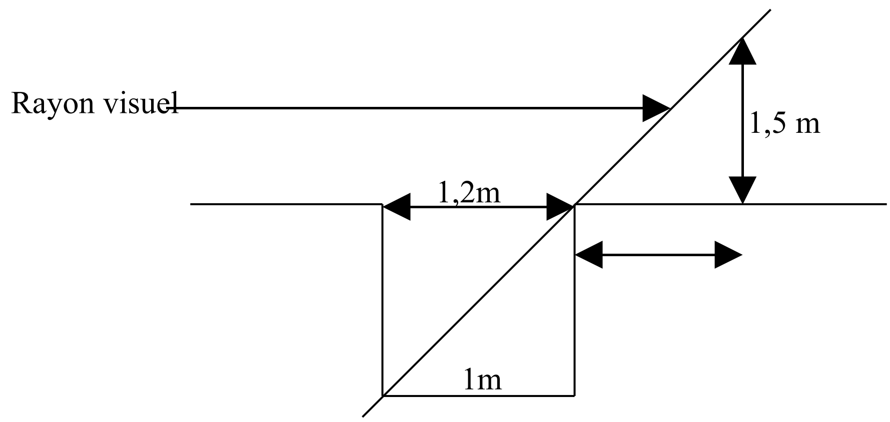
A travers les chapitres sur les droites des milieux en classe de 4[e] (14 ans) et sur le théorème de Thalès en classe de 3[e] (15 ans). Nous avons a choisi de concevoir un document de cours qui doit permettre à un professeur de mathématiques d'introduire ces notions dans sa classe et de prendre en charge sa propre formation sur des notions qu'il enseigne. Pour chaque sous thème nous avons confectionné les différentes fiches.

Par exemple, pour le sous thème théorème de Thales en classe de 3[e], dans la fiche élève on a comme activité introductive :

Voici une technique utilisée dans l'antiquité pour mesurer la profondeur d'un puits.

Un observateur est situé à 1m du bord d'un puits de 1,2m de diamètre. En plaçant son œil à 1,5m de hauteur, son rayon visuel rasant le bord supérieur du puits, passe par l'extrémité inférieure de l'autre bord du puits

Quelle est la profondeur du puits ?



Comme scénario nous proposons une démarche méthodologique à adapter en classe pour favoriser le dialogue, vertical et horizontal. Ici les élèves travailleront en groupe ce qui les permettra d'être beaucoup plus proche les uns des autres et d'avoir l'esprit de partage des idées et des pensés.

C'est au niveau de la fiche professeur, au-delà du corrigé de l'activité, que nous avons énoncé des difficultés éventuelles que pourraient rencontrer les élèves et des mises en garde aux professeurs utilisateurs de cette ressource.

La fiche de formation nous a posé beaucoup de problèmes. En effet, au Sénégal, la formation des professeurs collège de mathématiques se fait deux ans après le Baccalauréat (18-19 ans). La première année nous avons suivi des cours théoriques en mathématiques du niveau de la première année d'université et en deuxième année, nous suivons une formation à la pratique par la pratique ; ce mémoire est fait en deuxième année. Cette fiche nous obligeait à faire le lien entre le cours théorique de première année et les mathématiques scolaires. Nous avons repris des notions sur les homothéties et les figures homothétiques pour concevoir cette partie de la ressource.

Conclusion

L'objectif visé lorsque nous travaillions à la conception des ressources était d'aider des vacataires à concevoir une activité d'introduction d'une notion donnée ou à adapter une activité connue puis de la mettre en œuvre en classe. Mais nous nous sommes rendu compte que ce travail était aussi important pour notre formation. La conception des champs sur les difficultés nous a permis de mieux comprendre des conceptions qui sont à l'origine de certaines fausses solutions proposées par les élèves. Le travail de spécification des rôles des élèves et de l'enseignant dans le scénario est très formateur pour nous car il nous a offert l'occasion de planifier un enseignement comme si nous étions nous même en situation. Il est vrai que nous n'avons pas beaucoup avancé sur le plan de la méthodologie de recherche mais nous pensons qu'il est important d'encourager ce travail de conception de ressources.

Bibliographie

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19(2), p. 221-266.

Sokhna M. (2006) Formation continue des professeurs de mathématiques au Sénégal : analyse de la transmutation d'un dispositif de formation. In Bednarz N., Mary C. (dir.) L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2006 (cédérom). Sherbrooke: Éditions du CRP 2007

Exploration de situations d'apprentissage et d'évaluation (SAE) en mathématiques auprès d'élèves de secondaire IV (15-16 ans) à des fins d'évaluation diagnostique

Isabelle Simard
École Cavallier de la Salle, Montréal (Québec)

Introduction

Le programme de formation de l'école québécoise (MELS, 2003) met l'accent sur le développement de trois compétences inter-reliées en mathématiques : la compétence à résoudre une situation-problème, à déployer un raisonnement mathématique et à communiquer à l'aide du langage mathématique. En vigueur depuis 2000 (pour le primaire), en cours d'implantation pour la fin du secondaire (sec 4 et 5), ce programme rompt de manière importante avec les orientations des programmes précédents (MEQ, 1980, MEQ, 1994) fondés davantage sur un découpage en termes de savoirs. Si les savoirs y sont en effet toujours présents, à travers la liste de savoirs essentiels énoncés dans chacun des domaines, ces derniers y sont intégrés au développement plus large de compétences. Dans ce contexte, les évaluations doivent se faire dans ce cadre plus large, posant un défi important aux enseignants (quant au choix, à la conception de situations pertinentes permettant de juger à la fois du développement de compétences et de l'acquisition de savoirs, de manière interreliée). L'élaboration de situations d'apprentissage et d'évaluation (SAE), selon la terminologie utilisée par le MELS dans sa politique d'évaluation, est donc actuellement un objet majeur d'attention de la part de l'enseignant dans sa pratique.

Le projet que nous présentons ici vient d'un souci, d'une part, de travailler à l'élaboration de SAE signifiantes et riches, qui puissent permettre de faire un diagnostic des connaissances et compétences des élèves dans un domaine donné et, d'autre part, d'une volonté de mieux comprendre cette notion de SAE, d'en cerner le potentiel mais aussi les limites.

Pour ce faire, nous reviendrons, dans un premier temps, sur ce concept de SAE et ses origines, à travers notamment les travaux des didacticiens des mathématiques. Une telle analyse nous permettra de dégager la transposition qui en est faite dans le programme.

Le concept de SAE

Les SAE, nous dit le programme, « s'articulent autour des préoccupations sous-jacentes à l'activité mathématique : interpréter le réel, généraliser, anticiper, prendre des décisions… » (MELS, 2006, p 14). Elles renvoient à différents types de situations, des situations-problèmes, des situations dites d'application et des situations de communication, et ce en lien avec les trois compétences visées par ce programme. Ces situations rompent par ailleurs avec les modalités usuelles d'évaluation utilisées en mathématiques, souvent associées aux tests écrits papier-crayon « elles peuvent être réalisées individuellement ou en équipe, en classe ou à l'extérieur de l'école… » (ibid., p 15). Nous nous centrerons dans ce qui suit plus spécifiquement sur certaines de SAE, ie. les situations problèmes et les situations d'application. Qu'entend-on par situation problème ? En quoi la notion de situation-problème se différencie t-elle de celle de problème ? Quelle distinction fait-on entre situation-problème et situation d'application ?

Quelques clarifications conceptuelles

La notion de problème et la résolution de problèmes ont de tout temps fait partie des programmes de mathématiques au Québec (Landry, 1999). Pour les didacticiens ayant travaillé à la rédaction du fascicule sur la résolution de problèmes en mathématiques (MEQ, 1988), un problème est défini comme une situation dans laquelle l'élève tente de répondre à une question posée ou une tâche donnée, à la lumière de son expérience, ainsi que des informations qui lui sont fournies explicitement ou non; où il lui faut réellement chercher pour trouver un moyen de répondre à cette question; et où il doit faire appel à des mathématiques ou à des habilités intellectuelles fréquemment utilisées en mathématiques pour y arriver. Plusieurs auteurs *ont éclairé, pour aller plus loin, cette notion de problème en la distinguant de celle d'exercice*. Ainsi pour Lemoyne (2003), un problème renvoie à une activité qui amène l'élève non pas à appliquer des procédures, des connaissances déjà établies, mais à générer des connaissances pour trouver une solution viable à la situation proposée. Hitt (2004) précise davantage ce qui précède, un exercice renvoie à un énoncé qui « fait appel à une procédure déjà établie par un individu », alors qu'un problème oblige un individu à « la construction d'une représentation particulière interne qui fera la liaison entre différentes représentations de ce qui est en jeu, qui va promouvoir l'articulation entre ces différentes représentations et qui va aussi nous permettre de produire des représentations sémiotiques particulières liées à l'énoncé» (p.353). Les fonctions que joue le problème dans l'enseignement des mathématiques nous aident à pousser plus loin cette distinction. Charlot (1976) voit le problème en amont de l'explication d'une notion. Dans le même ordre d'idée, Lunkenbein (1984-1985) fait une distinction entre la notion conventionnelle de problème et une conception « dynamique » du problème. Dans le premier cas (les problèmes ponctuels d'application), ces derniers se placent à la fin d'une unité d'enseignement; alors que les problèmes conçus comme continuellement en développement se placent souvent au début d'une unité d'enseignement en tant que mise en situation, stimulant un processus de questionnement. De nombreux auteurs ont tenté de caractériser davantage ce concept de problème, en mettant en évidence différents types de problèmes et le potentiel qu'ils présentent pour l'apprentissage : problèmes ouverts (Arsac, 1991), problèmes à données contradictoires, manquantes ou superflues forçant une réflexion de la part des élèves (Bednarz, 1996), problèmes avec différents types de contextes, contextes réels, contextes réalistes, contextes fantaisistes et contextes purement mathématiques (MEQ, 1988).

Mais qu'en est-il du concept *de situation-problème*? La notion de situation-problème, qui a fait son apparition dans le nouveau programme au secondaire (MEQ, 2000) se distingue t-elle de la notion de problème? Selon Pallascio (2005), la notion de situation-problème se distingue de celle de problème d'application selon sept caractéristiques :

	Situations-problèmes	Problèmes d'application
Temps didactique	Au début de la séquence d'apprentissage	À la fin de la séquence d'apprentissage
But	Introduire de nouvelles connaissances	Utiliser et entraîner les nouvelles connaissances
Démarche	Conception d'une stratégie	Application d'une stratégie
Rôle de l'élève	Chercheur	Exécutant
Qualités requises	Créativité, intuition, analyse, synthèse, etc.	Rigueur, précision
Capacités visées	Capacités globales (ex.: détecter les informations pertinentes)	Capacités disciplinaires
Occasion pour...	Agir sur les compétences transversales: questionnement, doute, pensée critique, réflexion, autonomie, etc.	Agir sur les compétences spécifiques: renforcement des compétences disciplinaires...

Le concept de situation-problème (SP) a été repris et clarifié par plusieurs didacticiens des mathématiques. Ainsi, Douady (1984) aborde celui-ci dans le cadre de la dialectique outil-objet, de sorte que la présentation possible de la situation problème dans deux cadres différents apparaît pour elle une caractéristique importante. Astolfi et al. (1997) et Brousseau (1998) lient le concept de situation-problème à la notion d'obstacle. Selon eux, une situation-problème est organisée autour du *franchissement d'un obstacle* par la classe, obstacle préalablement *bien identifié*. La résolution de la situation problème engage ainsi l'élève dans la construction de connaissances nouvelles associées au dépassement de cet obstacle. L'analyse précédente fait ressortir sur le plan didactique plusieurs distinctions importantes sur lesquelles nous reviendrons dans la présentation.

Ce cadre conceptuel nous servira d'assise dans l'analyse de la notion de SAE telle qu'elle est reprise dans le programme d'études : quelle conception de la notion de SAE (sous l'angle des notions de situation problème et problème d'application) y retrouve t-on ? Quelles caractéristiques y sont reprises ? Pour mieux cerner par ailleurs le potentiel et les limites de telles situations, une expérimentation sera réalisée auprès d'élèves de secondaire 4.

L'expérimentation : Trois SAE ont été élaborées en s'appuyant sur le cadre de référence suivant :

	Type de situations	Les compétences visées	Les savoirs mobilisés
La montagne russe Vanish	Problème d'application	Compétence à résoudre une situation problème (composantes : interpréter l'énoncé et modéliser en passant au graphique, résoudre et interpréter)	Fonction (Faire l'étude complète d'une fonction)
Enfin libre ?	Situation problème	Compétence à résoudre une situation problème : s'organiser, aller chercher les données pertinentes, anticiper, prendre des décisions, argumenter…	Réseau de concepts mobilisés : opérations sur les nombres, pourcentage, fonction.
Nom de la situation	exercice	Déployer un raisonnement	Fonction (passage d'un registre de représentation à l'autre ; travail à l'intérieur d'un même registre de représentation)

Les situations précédentes ont été expérimentées auprès de quatre groupes d'élèves (135 élèves) provenant des deux profils : culture, société et technique et technico-sciences. Les trois situations ont été réalisées individuellement (pour les 1ère et 3ème), en équipe en classe et à l'extérieur de l'école (pour la 2ème). Dans la présentation, nous reviendrons sur ces situations expérimentées à des fins d'évaluation diagnostique : que mettent-elles en évidence sur les élèves, leurs connaissances, leur mode de fonctionnement, leurs compétences ? Que nous révèle en retour cette analyse sur le potentiel et les limites de ces situations ?

Construire un sens aux formules d'aire en secondaire I (12-13 ans)

Marie-Pier Venne
École l'horizon, Le Gardeur (Québec)

Introduction

La présence des formules est particulièrement importante dans l'enseignement de l'aire au secondaire. Ceci a comme conséquence, comme l'explique Janvier (1994), que l'enseignement réduit souvent le travail sur cette notion à la connaissance par les élèves de formules, et à la reconnaissance de laquelle savoir utiliser dans un problème impliquant un calcul d'aire (le même constat s'applique pour le volume). La conséquence d'une telle approche d'enseignement est que les élèves voient le travail sur la mesure, et indirectement par celui-ci sur les mathématiques, comme attaché à une démarche de calcul, sans percevoir les raisonnements géométriques importants qui sont sous-jacents, et sans non plus voir la puissance de ces formules (exprimant de manière générale un lien entre certaines grandeurs). Nous avons été confrontée comme enseignante aux résultats néfastes d'une telle approche, en observant les erreurs que font les élèves dans l'utilisation de ces formules et le peu de sens qu'ils leur accordent.

Le point de départ de notre projet vise donc à contrer cette tendance à associer le travail sur l'aire à une simple mémorisation/ utilisation de formules, et « remet en question la pratique qui consiste à fournir aux élèves de longues listes de formules avec l'intention ambiguë qu'ils les mémorisent, les questionnaires d'examen rappelant souvent les formules à savoir » (Janvier, 1997, p 29)

Il s'agit pour nous de construire une séquence d'enseignement poursuivant les objectifs majeurs suivants : 1) faire raisonner les formules d'aire de figures planes ; 2) travailler le concept d'aire, construire un sens à celui-ci, en prenant en considération les difficultés majeures des élèves.

Pour construire une telle séquence, nous nous sommes appuyée sur une analyse conceptuelle du concept d'aire (sens du concept, raisonnements clés), incluant une analyse des principales difficultés rencontrées par les élèves.

Une analyse préalable à la base de l'élaboration de la séquence

La notion d'aire renvoie au concept de grandeur dont nous dégagerons les caractéristiques et propriétés pour cerner les éléments à prendre en compte dans la séquence (cette dimension n'est pas explicitée ici pour des raisons d'espace). Les recherches en didactique des mathématiques mettent par ailleurs en évidence des difficultés/ conceptions à prendre en compte chez les élèves dans la construction du concept d'aire : confusion entre l'objet (la surface) et l'aire ; effet de l'apparence (une comparaison entre l'aire de différentes figures influencée par leur apparence/étendue); confusion entre le périmètre et l'aire (les deux grandeurs sont souvent confondues par les élèves dans des problèmes à la fin du primaire) ; variation des deux grandeurs : les élèves sont portés à penser que deux figures ayant le même périmètre ont la même aire et inversement ; une certaine conception de l'unité (les élèves ont de la difficulté à accepter par exemple que 1 cm carré puisse se retrouver dans des formes différentes et pas seulement un carré) ; effet de la variation des dimensions linéaires sur l'aire (une erreur courante consiste à penser que si je multiplie chacune des dimensions linéaires par n, l'aire est aussi multipliée par n)

La séquence d'enseignement dans ses grandes lignes : les principes qui nous ont guidé

Comparaison d'aires de figures	
Principes	E. Contrer l'effet de l'apparence de la figure chez les élèves (prendre en compte le conflit

didactiques qui guident/intentions	apparence de la surface/ aire) F. Permet de voir entre autres de dissocier l'unité de mesure de sa forme (le centimètre carré par exemple n'est pas juste associé à un carré de 1cm par 1 cm) G. Dissocier l'aire et le périmètre/ et leur variation (prendre en compte le conflit périmètre/aire) H. Dissocier le concept d'aire d'un calcul uniquement associé à des mesures numériques (faire raisonner la comparaison d'aires sans passer par un calcul ; en ayant recours à un travail géométrique)
Raisonnements clés	F. Des formes d'apparence différentes peuvent avoir la même aire (invariance de l'aire sous certaines transformations de la surface : découpage, recomposition) G. Une forme d'apparence plus grande/plus étendue (versus plus petite/ moins étendue) n'a pas nécessairement une plus grande aire (plus petite aire) H. Des courbes fermées dont on fait varier la forme tout en maintenant le périmètre fixe n'ont pas pour autant la même aire. Inversement, des courbes fermées dont on fait varier la forme tout en maintenant l'aire fixe n'ont pas pour autant le même périmètre. I. Il est possible de construire pour un même périmètre une forme ayant une plus petite aire (ou plus grande aire) et inversement (il est possible de construire pour une même aire une forme ayant un plus petit périmètre/ ou un plus grand périmètre) J. Principe de Cavalieri : « si entre deux droites parallèles, deux figures planes sont construites, et si chacune des droites (d'une famille de droites parallèles à ces deux droites) coupe les deux figures en deux segments qui ont la même longueur, les figures planes obtenues ont la même aire » : certaines transformations appliquées à des surfaces conservent leur aire (les transformations de Cavalieri se présentent comme des glissements de bandes que l'on imagine aussi minces que possible)
Effet d'un changement de dimension linéaire sur l'aire	
Principes didactiques	C. Voir l'effet d'un changement de dimension des longueurs sur l'aire (contrer une erreur courante à l'effet par exemple que si la longueur double et la large double, l'aire est doublée) D. À la base d'une compréhension du changement d'unité (relation entre mètre carré, centimètre carré…etc)
Raisonnements clés	E. Si une des dimensions linéaires (exemple la longueur dans le rectangle, une base dans le triangle, le parallélogramme..) est multipliée par 3, et l'autre dimension linéraire (la largeur, la hauteur,…etc) est multipliée par 2, alors l'aire devient 6 fois plus grande
Construction d'une formule de base pour le rectangle	
Principes didactiques	D. Aborder la formule avec les élèves comme une systématisation du dénombrement des unités dans le rectangle considéré (une manière de calculer le nombre d'unités couvrant la surface) E. Verbaliser cette formule de base en mots de manière à garder un sens aux actions effectuées
Raisonnements clés	E. Visualiser la décomposition du rectangle en bandes, chaque bande étant composée d'un certain nombre de tuiles (une manière d'organiser le dénombrement des unités) F. Voir que cette systématisation du dénombrement peut être étendue à des dimensions linéaires fractionnaires G. une manière systématique de calculer le dénombrement des unités couvrant la surface: Aire du rectangle = Nombre d'unités par bande x nombre de bandes H. Le passage de la formule de base à la formule standard (formulée en mots comme longueur de la base x hauteur) s'appuie sur un autre raisonnement : une correspondance numérique entre le nombre de cm carrés dans une bande et le nombre de cm sur la longueur de la base (à visualiser) ; entre le nombre de bandes et le nombre de cm sur la hauteur.
	Une formule qui s'applique à une famille de quadrilatères (parallélogramme, losange)
Principes/ intentions	A. Visualiser le fait que l'on peut toujours à partir d'un rectangle situé entre deux parallèles, en gardant la même base, et gardant toujours la même hauteur, obtenir différents parallélogrammes plus ou moins inclinés de même aire (principe de Cavalieri) B. Dans la famille infinie de parallélogrammes que l'on peut obtenir (entre les deux parallèles, ayant la même base et la même hauteur), voir qu'il est possible d'obtenir un losange (ainsi tout losange appartient à une famille de parallélogrammes et peut être associé à un rectangle de même aire)
Raisonnements clés	A. Principe de Cavalieri repris ici et permettant de visualiser une famille de quadrilatères de même aire à laquelle s'applique la formule de base
	Les triangles en relation avec les rectangles ; les trapèzes en relation avec les

	rectangles
Principes/intentions	A. Développer chez les élèves leur habileté à retrouver une autre figure à partir d'une figure de base B. Déduire la formule à partir de la formule de base
Raisonnements clés	A. Décompostion/ reconstruction d'une figure dont on connaît l'aire à partir du triangle/ du trapèze B. Déduire la manière de calculer l'aire pour ces figures (formulée en mots) à partir de la formule de base C. Voir que cette formule s'applique à toute une famille de trapèzes -parmi lesquels le trapèze rectangle (principe de Cavalieri) D. Voir que la même formule s'applique à toute une famille de triangles-parmi lesquels le triangle rectangle (principe de Cavalieri)
	Aire de figures décomposables et résolution de problèmes réinvestissant le travail antérieur)
Principes/intentions	A. Étendre le travail précédent au calcul de l'aire de toute surface décomposable
Raisonnements clés	A. La mesure de la surface globale est égale à la somme des mesures des surfaces qui la composent (propriété additive)

L'expérimentation

L'expérimentation sera conduite dans 4 classes de 22 à 25 élèves âgés de 12 à 13 ans (2 groupes forts/concentration sports; 1 groupe fort/concentration langues; 1 groupe régulier) sur une période de 4 semaines. Un test écrit sera expérimenté auprès des quatre groupes à la fin de la séquence pour dégager la compréhension que les élèves ont construit du concept d'aire. Nous ciblerons de plus pour entrer sur une analyse plus approfondie un des 4 groupes d'élèves. À cette fin, les productions des élèves seront recueillies tout au long de l'intervention, et certaines séances en classe seront enregistrées. Nous ferons une analyse de l'évolution de quelques élèves de la classe en lien avec les situations (2 élèves forts, 2 élèves moyens, 2 élèves faibles). Au colloque EMF 2009, nous présenterons les analyses préalables ayant conduit au choix de la séquence, quelques situations expérimentées et reviendrons sur ce qui ressort de l'analyse des productions des élèves dans ces situations et au test écrit.

Références.

Janvier, C. (1992). Le volume comme instrument de conceptualisation de l'espace. *Topologie structurale*, 18, 63-75

Janvier, C. (1994). *Le volume, mais où sont les formules*? Montréal : Éditions Modulo

Janvier, C. (1997). Grandeur et mesure : la place des formules à partir de l'exemple du volume. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, 37 (3), 28-41.

Proulx, J. & Pim, D. (2008). Algebraic formulas, geometric awareness and Cavalieri's principle. *For the Learning of mathematics*, 28 (2), 17-24.

Introduction d'une dimension historique dans l'enseignement des mathématiques : Exemple des équations en quatrième et seconde

Filipe De Freitas, Ghenima Zentar,
Professeurs de mathématiques, Stagiaires IUFM de Lyon (France)

Les professeurs français estiment que les élèves qui arrivent en classe de seconde (élèves de 15-16 ans) ont des difficultés dans le domaine algébrique, et plus particulièrement dans le champ des équations. Ils ont notamment des difficultés dans la mise en équation d'un problème donné, lorsque l'inconnue est spécifiée et davantage encore lorsqu'ils doivent eux-mêmes la choisir. De plus, une fois le problème modélisé, des erreurs récurrentes sont observées lorsqu'il s'agit de résoudre l'équation induite. Dans le programme français, les équations étant étudiées en quatrième (élèves de 13-14 ans), nous y avons légitimement situé la source des difficultés. Nous avons ainsi décidé de travailler en parallèle dans les niveaux de quatrième et de seconde en nous demandant si l'histoire des mathématiques en général, et des équations en particulier, pouvait contribuer à remédier à ces difficultés. En effet, une manière de comprendre les difficultés des élèves est de retourner à la source pour y repérer les obstacles, et surtout, d'avoir conscience que certaines notions ont été difficilement acceptées, parfois à la suite de violentes controverses. Il est donc naturel que les élèves se confrontent à ce type de difficultés et en conséquence, il est nécessaire que le professeur en ait conscience. L'histoire permet ainsi de dégager les étapes importantes dans la construction et l'évolution d'un concept, la connaissance d'éléments historiques pouvant être de fait très utile à l'enseignant.

Voici nos principales questions. Tout d'abord, connaître certains éléments d'histoire des mathématiques peut-il aider à une meilleure compréhension de la notion d'inconnue ? Est-ce utile dans la traduction sous forme d'équation d'une situation donnée? Est-ce d'un quelconque apport dans la résolution de ladite équation? Ou bien l'histoire n'est-elle présente qu'au titre de curiosité mathématique, intéressante pour l'élève dans l'immédiat, mais éphémère et sans but réel dans le processus d'apprentissage ?

Pour répondre à cette problématique, nous avons tout d'abord effectué une analyse approfondie des derniers programmes officiels et documents d'accompagnement de toutes les classes de collège et lycée. Le résultat de cette étude est que les textes officiels ne font qu'une timide incitation à l'utilisation de l'histoire des mathématiques au collège, alors que les références sont plus nombreuses au lycée. Pour ce qui est du cas particulier de l'histoire des équations, les indications quant à son intérêt ou utilisation sont inexistantes.

Nous avons ensuite construit un questionnaire posé à quarante-deux professeurs de collège et de lycée, afin de les interroger sur l'utilisation qu'ils font de ces injonctions, certes peu précises, mais présentes à plusieurs reprises dans les textes officiels. Le constat général, prévisible, est que les enseignants ne pensent pas, ou très peu, à utiliser l'histoire des mathématiques pour accompagner l'introduction d'une nouvelle notion ou mener un véritable travail mathématique. Les raisons qu'ils donnent sont diverses et variées.

- Près d'un professeur sur deux évoque « le manque de temps », que ce soit en classe ou pour la préparation d'un tel type de séance. De plus, des programmes trop chargés (préparation de séances TICE…), et la conscience du temps et de l'énergie nécessaires pour la création d'activités avec un contexte historique pertinentes découragent beaucoup d'entre eux.
- Un deuxième argument est le peu de connaissances qu'estiment avoir les enseignants dans le domaine de l'histoire des mathématiques. Ils ne se sentent ainsi pas suffisamment armés

pour faire face à des questions trop pointues des élèves.

- Enfin, la tâche de transposition didactique, qui consiste à trier et choisir les informations historiques les plus intéressantes et pertinentes, puis à les rendre accessibles aux élèves, est complètement laissée à la charge de l'enseignant, sans qu'une aide particulière ne soit donnée dans les textes officiels : « Liberté est laissée au professeur pour l'intégration de cette composante historique et épistémologique », en classe de première scientifique.

Nous avons ensuite dirigé notre attention vers les manuels scolaires, qui constituent la production didactique la plus utilisée par les professeurs et les élèves. Nous avons ainsi voulu évaluer plus particulièrement la place accordée à l'histoire des mathématiques dans les chapitres concernant les équations. Notre objectif était de savoir comment l'histoire des équations et de leur résolution est abordée dans les manuels, sous quelle forme, dans quelle quantité et surtout dans quel but. Nous avons étudié l'évolution sur une trentaine d'années environ, du contenu d'une vingtaine de manuels de collections différentes, et ceci dans chacun des niveaux quatrième et seconde.

Dans une première partie, nous avons décidé d'évaluer les choix d'organisation adoptés par les différents manuels scolaires pour présenter les équations. Un chapitre est-il entièrement consacré à cette seule notion ou celle-ci est-elle abordée parmi d'autres ? Par la suite, nous avons ciblé les activités introductives à la notion d'équation : nous avons, dans un premier temps, évalué les différentes approches proposées par les manuels, puis recensé celles préconisant une approche historique en étudiant plus en détail leur intérêt didactique. Dans une troisième partie, nous avons listé les types d'exercices proposés par les manuels, dans le champ des équations. Concernant la modélisation de problèmes, nous avons évalué la proportion de ceux laissant l'initiative du choix de l'inconnue à l'élève puis, comme précédemment, avons ciblé notre étude sur les exercices ayant trait à l'histoire. Pour ce faire, nous avons relevé l'époque concernée, ainsi que le type de tâche demandé à l'élève. Enfin, dans une dernière partie, nous nous sommes intéressés à la présence ou non de frises historiques, notes biographiques et étymologiques, ainsi que de textes historiques et portraits de mathématiciens. Par ailleurs, la place des entrées historiques dans les chapitres a été prise en compte pour compléter cette étude.

Les résultats de cette étude des manuels fait apparaître un contraste entre les ouvrages de collège et de lycée : il y a d'une part, une présence peu significative de l'histoire des mathématiques dans les livres de collège (une seule activité à contexte historique, quatre exercices au total, inadaptés, et des notes historiques peu mises en valeur). D'autre part, la proportion d'exercices et activités à contexte historique en lycée est plus importante, avec une amélioration notable en terme de qualité. En revanche, nous avons observé une baisse globale du nombre de problèmes laissant le choix de l'inconnue à l'élève, ceci pouvant expliquer en partie les confusions liées à la notion d'inconnue et les difficultés à modéliser, par une équation, une situation donnée que rencontrent les élèves.

Par la suite, pour combler certains manques de ces productions didactiques (textes officiels et manuels) et afin d'aider nos collègues désireux d'utiliser l'histoire des mathématiques dans leur enseignement, nous avons élaboré plusieurs séances didactiques, en quatrième et en seconde. Au fil de notre réflexion lors de la phase de construction et de réalisation, ces expérimentations nous ont conduits à distinguer deux finalités que l'on peut donner à l'utilisation de l'histoire : d'une part, sensibiliser les élèves à la culture mathématique, aidant à donner du sens et à les motiver ; et d'autre part, faire véritablement des mathématiques en étudiant plus en profondeur les points qui posent problème, depuis la modélisation des situations, jusqu'à la résolution finale des équations précédemment établies.

Dans l'idée de poursuivre le premier objectif, une recherche documentaire abordable a été réalisée autour de la vie et de l'œuvre d'Al-Khawarizmi dans le domaine des équations du premier degré, en petits groupes, en classe de quatrième. En seconde, un travail a été mené autour de la méthode de Diophante et de l'équation de Pell, dans le but de travailler l'importance du choix de l'inconnue, les contraintes et la méthode de résolution d'une équation.

Dans l'ensemble, le bilan de ces expérimentations est plutôt positif. Nous avons réussi à construire des activités à contexte historique, nous permettant de travailler les notions mathématiques souhaitées (notion d'inconnue, modélisation d'un problème et résolution d'une équation). De plus, une fois l'effet de surprise passé, les élèves se sont montrés très enthousiastes, et particulièrement motivés par cette nouvelle approche de la discipline. Cette démarche originale a ainsi marqué les esprits et a permis à certains de mieux retenir les notions abordées.

En parallèle, un bémol peut être émis quant à l'importance du temps nécessaire à la mise en place de telles activités en classe et encore plus, à leur préparation par l'enseignant. Par ailleurs, le niveau réel des élèves doit être pris en compte et les activités proposées, ainsi que les informations historiques qu'elles contiennent, doivent véritablement être adaptées à ce niveau.

Pour prolonger ce travail, on pourrait, d'une part, étudier plus en profondeur la validité historique des données présentes dans les manuels scolaires. Nous n'avons eu de cesse, tout au long de notre mémoire, d'insister sur l'importance de cet aspect et nous pensons que la donnée d'éléments historiques parfois incomplets, ou plus grave encore, faux, dans les manuels, dénote un certain défaut d'articulation entre la recherche en histoire et les rédacteurs d'ouvrages destinés aux élèves.

D'autre part, des recherches plus poussées pourraient être menées sur l'évolution de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en terme de support. En effet, les enseignants disposent essentiellement de quelques manuels et certaines ressources informatiques pour établir les informations d'ordre historique qu'ils peuvent dispenser à leurs élèves. Pour le reste, la transposition didactique de ces connaissances est totalement laissée à leur charge. Nous pensons que celle-ci mériterait, au contraire, d'être généralisée pour faciliter la tâche aux professeurs et les encourager à utiliser l'histoire dans leur enseignement. Enfin nous pensons qu'une étude sérieuse de la manière de mener cette transposition pourrait s'avérer très utile.