

COLLOQUE

ESPACE MATHÉMATIQUE FRANCOPHONE

EMF 2025

26-30 mai 2025



Design graphique: Eva Knoll

Montréal, Québec, Canada

L'éducation mathématique face à un monde en accélération

enjeux, défis
et opportunités



UQAM Département d'éducation
et formation spécialisées
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION
Université du Québec à Montréal

UQAM Faculté des sciences
de l'éducation
Université du Québec à Montréal

VECSM

UQAR
Université du Québec
à Rimouski



Atlantic Association
for Research in the
Mathematical Sciences

UQAM Faculté des sciences
Université du Québec à Montréal

CENTRE
DE RECHERCHES
MATHÉMATIQUES

Calcul Québec

UQO
UNIVERSITÉ
DU QUÉBEC
EN OUTAOUAIS

International Commission on
Mathematical Instruction

UQAM

unesco
Centre mondial
de développement
mathématique

UQAM Département de mathématiques
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

Canadian Mathematical Society
Société mathématique du Canada

CRIFPE CRIFPE-02



Social Sciences and Humanities
Research Council of Canada

Conseil de recherches en
sciences humaines du Canada

Canada

UQAT
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC
À TROIS-RIVIÈRES

ADEESE

ISM
Institut de mathématiques
de la Sorbonne

L'éducation mathématique face à un monde en accélération : enjeux, défis et opportunités

ACTES DU COLLOQUE EMF 2025

Édités par
Fabienne Venant et Stéphanie Dumont

*En collaboration avec
Mathieu Thibault
avec l'appui des membres du comité scientifique et
des responsables des groupes de travail et projets spéciaux*

Montréal – 26 au 30 mai 2025

<https://sites.google.com/view/emf2025>

Comité scientifique

Fabienne Venant – Présidente

Université du Québec à Montréal, Canada

Valériane Passaro – Coprésidente

Université du Québec à Montréal, Canada

Adolphe Adihou – Président sortant

Université de Sherbrooke, Canada

Jean-Luc Dorier - Représentant de l'ICMI

Université de Genève, Suisse

Claudia Corriveau - Représentante de l'Association Mathématique du Québec

Université Laval, Canada

Gervais Affognon

Université d'Abomey-Calavi, Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, Bénin

Aderrahmane Benrherbal

Université Mohammed VI Polytechnique, ISE, Maroc

Stéphanie Bridoux

Université de Mons, Belgique

Maud Chanudet

Université de Genève, Suisse

Nadine Grapin

Université Paris-Est-Créteil, LDAR, ESPE de l'Académie de Créteil, France

Virginie Houle

Université du Québec à Montréal, Canada

Imed Kilani

Institut Supérieur de l'éducation et de la formation continue, Tunis, Tunisie

Samia Mehadenne

Association algérienne pour le développement de l'enseignement des mathématiques et des technologies de l'information, Algérie

Eugène Oké

Université d'Abomey-Calavi, Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, Bénin

Julia Pilet

Université Paris Diderot, LDAR, France

Eric Roditi

Université Paris Cité, Laboratoire EDA, France

Mireille Saboya

Université du Québec à Montréal, Canada

Timbila Sawadogo

École Normale Supérieure, Burkina Faso

Hassane Squalli

Université de Sherbrooke, Canada

Fabrice Vandebrouck

Université Paris-Diderot, LDAR, France

Comité local d'organisation

Valériane Passaro - Présidente

Université du Québec à Montréal

Laurie Bergeron

Université du Québec à Montréal

Nathalie Bisaillon

Université de Montréal

Myriam Boucher-Pinard

Université du Québec à Montréal

Khoi Mai Huy

Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

Vincent Martin

Université de Sherbrooke

Sandrine Michot

Université du Québec à Montréal

Raymond Nolin

Université du Québec à Trois-Rivières

Mireille Saboya

Université du Québec à Montréal

Virginie Robert

Université Laval

Mathieu Thibault

Université du Québec en Outaouais

Mélanie Tremblay

Université du Québec à Rimouski

Fabienne Venant

Université du Québec à Montréal

Avec le soutien ponctuel de

Camille Arseneau

Université du Québec à Rimouski

Sabrina Héroux

Université du Québec à Montréal

Eva Knoll

Université du Québec à Montréal

Laurent Souchard

Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

Alex St-Onge

Université du Québec à Montréal

Isabelle Deblois

Université du Québec à Rimouski

Nelly Julien

Université de Montréal

Espace Mathématique Francophone

L'Espace Mathématique Francophone (EMF) s'est constitué pour promouvoir réflexions et échanges au sein de la francophonie sur les questions vives de l'enseignement des mathématiques dans nos sociétés actuelles, aux niveaux primaire, secondaire et supérieur, ainsi que sur les questions touchant aux formations initiale et continue des enseignants. L'EMF contribue au développement d'une communauté francophone riche de ses diversités culturelles, autour de l'enseignement des mathématiques au carrefour des continents, des cultures et des générations. La langue de travail de l'EMF est le français. Les rencontres scientifiques de l'EMF, qui ont lieu tous les trois ans depuis 2000, sont reconnues comme conférences régionales de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM). Elles s'adressent aux différents intervenants préoccupés par les questions qui touchent à l'enseignement des mathématiques : mathématiciens, didacticiens des mathématiques, chercheurs, formateurs, enseignants de différents niveaux. Les lieux des conférences sont choisis pour respecter un équilibre géographique et favoriser la participation d'une communauté francophone la plus large possible.

Les colloques de l'EMF visent à :

- permettre les échanges d'idées, d'informations, d'expériences, de recherches autour des questions vives en enseignement des mathématiques, en particulier en lien avec le thème retenu pour chacun d'entre eux ;
- renforcer la coopération entre des chercheurs, formateurs, enseignants, vivant dans des contextes sociaux et culturels différents, et ayant des préoccupations communes quant aux questions touchant à l'enseignement des mathématiques ;
- susciter la participation de jeunes enseignants et chercheurs aux débats sur l'enseignement des mathématiques, ainsi que leur contribution à l'élaboration de perspectives d'avenir ;
- favoriser la prise de conscience chez les enseignants, formateurs, chercheurs de leur rôle dans l'élaboration de la culture mathématique de leurs pays respectifs ;
- contribuer au développement, dans la communauté francophone, de la recherche en didactique des mathématiques et de ses retombées, notamment sur les formations initiale et continue des enseignants.

Les précédents colloques ont eu lieu à Grenoble (2000), Tozeur (2003), Sherbrooke (2006), Dakar (2009), Genève (2012), Alger (2015) et Cotonou (2022). Les actes de ces colloques sont disponibles à cette adresse : <http://emf.unige.ch>

COLLOQUE EMF 2025

L'éducation mathématique face à un monde en accélération : enjeux, défis et opportunités

Montréal – 26 au 30 mai 2025

Les sociétés modernes sont actuellement aux prises avec une dynamique d'accélération. Tout devient plus rapide : les transports, les communications, la diffusion d'information, les rythmes de vie.... Cette accélération se traduit par des progrès techniques et des innovations, mais aussi par des exigences de rentabilité et une sensation générale de manquer de temps. Le milieu éducatif n'échappe pas à cette densification des activités. Le temps, celui des enseignants comme celui des élèves, est de plus en plus encadré. Les contenus d'enseignement, de plus en plus standardisés, obéissent avant tout à des objectifs d'efficacité. Les technologies numériques jouent le double rôle d'outils facilitateurs et d'agents d'aliénation. Elles rendent d'innombrables services pédagogiques et organisationnels tout en imposant la cadence du rythme scolaire et professionnel. Les notions d'accompagnement, de collaboration, de créativité se noient de plus en plus dans les tutoriels, les capsules en ligne et autres tuteurs intelligents. L'élève apprend à penser selon des balises bien définies. Cette situation est d'autant plus sensible en mathématiques, lieu traditionnel de la réflexion et du raisonnement. Une vision utilitaire du domaine et de son enseignement vient de plus en plus à l'encontre des fondements culturels et épistémologiques de développement du raisonnement et de la pensée mathématiques. La formation des enseignants n'échappe pas non plus à ce phénomène. Il faut former plus d'enseignants, dans un temps plus court et à coût moindre. Or, pour les élèves comme pour les enseignants, construire le sens des savoirs mathématiques, apprendre à raisonner, envisager différentes stratégies et solutions sont des processus qui s'inscrivent dans une temporalité longue, difficilement compatibles avec les exigences sommatives à court terme.

Dans ce contexte, l'édition 2025 du colloque EMF se propose d'être un moment de pause et de réflexion, une occasion de sortir de la course. Un des moyens de ne pas simplement se laisser entraîner dans le tourbillon de l'accélération consiste, en effet, à prendre le temps et les moyens de redéfinir notre façon d'être au monde, d'effectuer un retour vers les fondements de ce qui fait sens, de questionner nos rapports aux savoirs, dans un esprit d'ouverture aux autres. Des questions émergent alors pour l'avenir de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques :

- Quelles sont les missions et les finalités de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et quelle place donner à une véritable activité mathématique ?
- Peut-on concevoir un enseignement des mathématiques plus inclusif, laissant la place aux expériences, au rapport à soi et à l'environnement, dans une visée holistique, ouvert aux approches portées par les communautés qui nous entourent ?
- Peut-on envisager des évaluations à visage humain, prenant en compte la véritable nature des mathématiques ?
- La recherche, l'enseignement et l'apprentissage en mathématiques peuvent-ils (doivent-ils) se positionner entre les attentes de la société et l'urgence de former des citoyens lucides, critiques et créatifs.
- Face à ces nouveaux enjeux contemporains, la didactique des mathématiques devrait-elle adopter de nouvelles perspectives critiques ? Lesquelles ?
- Comment penser la place des technologies numériques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques pour en faire des instruments au service du développement des connaissances mathématiques ? Comment sortir d'une logique de consommation et devenir acteurs et producteurs de contenus numériques à notre image ?

En particulier, comment la didactique des mathématiques peut-elle prendre une place active, en collaboration avec les informaticiens, dès la conception des outils.

C'est à travers toutes ces questions, et bien d'autres, que nous proposons d'aborder et de (re)définir les enjeux, les défis et les opportunités qu'offrent nos sociétés actuelles à l'enseignement, l'apprentissage ainsi qu'à la formation des enseignants en mathématiques.

Table des matières

LES COLLOQUES EMF : PASSÉ, PRÉSENT ET FUTUR — LA PAROLE AUX GRANDS TÉMOINS.....	1
La parole aux grands témoins DURAND-GUERRIER Viviane, HODGSON Bernard R., MOHAMED SAGAYAR Moussa et NDIAYE Faguèye	3
CONFÉRENCE PLÉNIÈRE	13
Le temps en mathématiques : efficacité, beauté et complexité des résultats mathématiques LAFRENIÈRE Nadia et SADJA-NJOMGANG Judith.....	15
CONTRIBUTIONS DES GROUPES DE TRAVAIL	19
GT1 DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL ET TRAVAIL COLLABORATIF	21
Bilan du groupe de travail 1 Développement professionnel et travail collaboratif KEBBOUCHE-MEHADDENE Samia et SAGAYAR Mohamed Moussa	23
Une étude de l'évolution des pratiques enseignantes suite aux changements curriculaires cas de l'algèbre élémentaire au collège en Algérie KEBBOUCHE-MEHADDENE Samia.....	27
Travail collaboratif pour réduire l'écart entre les tâches attendues d'une enseignante et d'une chercheuse lors de la généralisation algébrique ANTOUN Zita	39
Regards sur deux boucles itératives d'un dispositif d'intervention-recherche visant à soutenir le développement professionnel d'enseignantes faisant l'enseignement-apprentissage des probabilités à l'école primaire MARTIN Vincent et HOMIER Marianne	51
Mise au jour de savoirs transparents au sein d'un dispositif de formation collaborative. Que se passe-t-il quand formateurs et enseignants sont amenés à développer l'intelligence du calcul ? BATTON Agnès	61
Recherche collaborative et développement professionnel : le cas d'une recherche en informatique au primaire en France COUDERETTE Michèle	73
Travail collaboratif entre chercheurs et enseignants : de la circulation entre connaissances didactiques pour la recherche et connaissances didactiques pour enseigner MATHÉ Anne-Cécile, RIVIÈRE Olivier et ROUX Aurélie.....	83
Analyse de la pratique enseignante pour le développement de la symbolisation algébrique chez les élèves du secondaire au Maroc ABOUHANIFA Saïd	93
La circulation des savoirs au sein de groupes de travail collaboratif : étude de cas NECHACHE Assia et ROLLINDE Emmanuel	105
Se construire dans la durée, au gem : perceptions des participants à l'un de ses groupes de travail collaboratif NINOVE Laure.....	115

Types de dialogue et connaissances mathématiques pour l'enseignement de la résolution de problèmes : analyse dialogique d'une leçon study CLIVAZ Stéphane, BATTEAU Valérie, DAINA Audrey, PRESUTTI Sara, BUNZLI Luc-Olivier et PELLET Jean-Philippe	127
Développement professionnel et travail collaboratif au Niger : analyse de la cartographie des programmes de mathématiques sur les apprentissages fondamentaux SAGAYAR Mohamed Moussa	137
Développement professionnel des enseignants dans un Lieu d'Éducation Associé DREAM.....	147
Se construire une identité mathématique professionnelle en formation initiale : leviers et obstacles FLORES GONZALEZ Macarena et ABOUD Maha.....	157
GT2 DISPOSITIFS, CONTEXTES DE FORMATION ET ACTIVITÉ DU FORMATEUR.....	167
Bilan du groupe de travail 2 Dispositifs, contextes de formation et activité du formateur MARCHAND Patricia, COULANGE Lalina et ADIHOU Adolphe.....	169
Former à l'égalité en mathématiques, un enjeu crucial pour la réussite de tous en mathématiques SAYAC Nathalie	175
Formation des enseignants à l'enseignement des mathématiques par une approche en pédagogie universelle – accessibilité au savoir pour tous dans une école inclusive PRATALI Laurent, EYSSERIC Pierre et GOMBERT Anne.....	185
Design de matériel de manipulation en formation initiale : agentivités mathématique et didactique NICOLAS-NOIR Benjamin, CORRIVEAU Claudia et JEANNOTTE Doris	195
Une situation de formation continue en géométrie élémentaire par la résolution de problèmes ARAB HADJ-MOUSSA Mériem et COMBY Hélène.....	205
Processus de coconstruction axé sur les besoins des personnes enseignantes en mathématiques à l'éducation préscolaire ; changements de pratique et réussite des enfants DESHAIES Isabelle, GONNY Juliette et FLIBOTTE Isabelle.....	217
Les variables didactiques de formation dans une situation de formation de type Jeu de Rôles – le cas de la mise en commun MILI Ismaïl et GUILLE-BIEL WINDER Claire.....	227
Les mathématiques dans le parcours accéléré Go Teaching : choix de la formatrice et pistes d'amélioration au départ de l'impact perçu par les instituteurs.trices novices MOUSSET Céline	239
Les aides didactiques dans la détermination de la limite d'une suite numérique convergente dans l'enseignement secondaire ABBY-M'BOUA Parfait.....	249
Transition formation initiale – formation continue en enseignement des mathématiques au primaire : l'exemple des processus personnels de calcul GREFEM et FOREST Mylène	257
La formation mathématique des enseignants du primaire : Entre les objectifs des programmes et la réalité de la formation initiale HAMZAOUI Houria et ADIHOU Adolphe.....	269

GT3 DIFFÉRENTES PENSÉES MATHÉMATIQUES	281
Bilan du groupe de travail 3 Différentes pensées mathématiques BEN NEJMA Sonia, GBAGUIDI Ahonankpon Florent, JEANNOTTE Doris et SQUALLI Hassane.....	283
La notion d'aire comme outil dans la preuve mathématique : quelques cas historiques EL IDRISSE Abdellah, AIT OUNEJJAR Lahoussaine et ROUAN Omar.....	289
Approche anthropologique de la pensée algébrique CHAACHOUA Hamid et DEWYSPELAERE Stéphanie.....	299
Pour une pensée fonctionnelle ancrée dans l'action LAURENCE-ROULEAU Vincent.....	311
Une analyse didactique des démarches mobilisées par des élèves du primaire pour résoudre des problèmes de proportionnalité HRAIMI Hend et BEN NEJMA Sonia.....	315
Analyse de raisonnements d'élèves de 4 ^e année du primaire lors d'une activité de logique mathématique impliquant le langage courant BISAILLON Nathalie, DUFOUR Sarah et JEANNOTTE Doris.....	325
Développement de la pensée relationnelle : étude des activités au début du primaire POLOTSKAIA Elena, FREIMAN Viktor, BANKOUSSOU-MABIALA Edward et SAVARD Annie	335
Égalité de quantités et développement d'une pensée structurale en arithmétique CONSTANTIN Céline, COULANGE Lalina et THEIS Laurent.....	347
Décrire et comprendre la pensée relationnelle : analyse des stratégies des enfants du préscolaire dans un contexte non numérique de situations d'équivalence ANWANDTER CUELLAR Nathalie, POLOTSKAIA Elena, DUFOUR Raphaëlle, ROBERT Virginie et ABDALLAH Élise.....	357
Le rôle des pratiques mathématiques dans l'évolution de l'activité collective de résolution de tâches mathématiques routinières BARABÉ Geneviève.....	369
Les suites non numériques dans le programme d'étude et le potentiel de développement de la pensée algébrique chez les élèves de la maternelle à la deuxième année du primaire au nouveau-brunswick BANKOUSSOU-MABIALA Edward et FREIMAN Viktor.....	375
Étude du développement de la pensée fonctionnelle au collège tunisien OUESLATI Samia et KOUKI Rahim	385
GT4 DIMENSIONS HISTORIQUE, CULTURELLE ET LANGAGIÈRE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES	397
Bilan du groupe de travail 4 Dimensions historique, culturelle et langagière dans l'enseignement des mathématiques BAT'TIE Véronique, BOUZARI Abdelmalek, GUILLEMETTE David et KILANI Imed	399
Conceptualisation des mathématiques chez les élèves dans un contexte multilinguistique HAJBY Achraf	405
Impact des variations grammaticales des énoncés mathématiques sur les réponses des élèves. Étude exploratoire ROBO Eléda, DURAND-GUERRIER* Viviane, NGUALA Jean-Berky, AUGER Nathalie, CHALIER Marc, CHESNAIS Aurélie, FARGE Sylvain, MERON-MINUTH Sylvie, SALONE Jean-Jacques, SAUVAGE Jérémie.....	415

Difficultés des élèves Tunisiens à convertir les expressions symboliques en langage naturel : égalité, inégalité et intersection entre ensembles KILANI Imed et CHELLOUGUI Faïza	425
Étude exploratoire des raisonnements d'élèves et étudiants autour de la négation dans un contexte bilingue français-malagasy à Madagascar ANDRIANARIVONY Fidy, CORTELLA Anne, SALONE Jean-Jacques, DURAND-GUERRIER Viviane	435
Discours enseignants et discours élèves sur des tâches de développement d'expressions algébriques BARTHES-GARNIER Cécile	447
Analyse didactique de l'intégration de la culture locale dans l'enseignement de l'arithmétique à mayotte : le cas des fractions au cycle 3 NGUALA Jean-Berky, TCHONANG YOUKAP Patrick et GUILLON Colette	457
L'enseignement des nombres relatifs au gré de leur histoire GLIERE André-Jean	467
GT5 MODÉLISATION ET INTERDISCIPLINARITÉ	477
Bilan du groupe de travail 5 Modélisation et interdisciplinarité ALPHA Ousmane, YVAIN-PRÉBISKI Sonia, WEISS Laura et BENRHERBAL Abderrahmane	479
Les unités de mesure comme moyen de contrôle lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique ALLARD Amélie	485
L'équation à la croisée des mathématiques et de la chimie HENRY Valérie, BOU ABDO Abir, DUBUSSY Christophe et DEHON Jérémy	495
Évaluer la modélisation informatique avec une approche interdisciplinaire LECOMPTE Gabriel	505
Le processus de mathématisation dans l'élaboration d'un problème extra-mathématique pour l'école primaire YVAIN-PRÉBISKI Sonia	515
Le processus de dévolution d'un problème extra-mathématique et ses influences sur l'entrée dans la situation par les élèves : deux études de cas DE SIMONE Marina, LACEK Yana et WEISS Laura	527
Étude du rapport personnel à l'interdisciplinarité entre les mathématiques et la chimie : le cas des enseignants de lycée au cameroun AMBOMO Nicole Aimée, TCHONANG YOUKAP Patrick et NGUALA Jean-Berky	537
Les défis de l'enseignement-apprentissage de la physique face à l'interdépendance entre les concepts physiques et mathématiques HIDOÛSSI Mouna et AKROUTI Inen	545
Interdisciplinarité dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques : analyse des difficultés MESSOU Désirée Bethel	557
GT6 ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU POST-SECONDAIRE, AU SUPÉRIEUR ET DANS LES FILIÈRES PROFESSIONNELLES	567
Bilan du groupe de travail 6 Enseignement des mathématiques au post-secondaire, au supérieur et dans les filières professionnelles GONZÁLEZ-MARTÍN Alejandro S., PLANCHON Gaëtan et BRIDOUX Stéphanie	569
Étude de la connaissance de la théorie des groupes de futurs enseignants du secondaire français ROLLAND Agathe	575

Formation mathématique universitaire des futurs enseignants au secondaire : discontinuités dans les techniques de résolution relatives à la combinatoire MORCOS Jonathan et GONZÁLEZ-MARTÍN Alejandro.....	585
L'équation fonctionnelle de Cauchy : un outil pour rendre visible l'ordre en analyse ? PLANCHON Gaëtan et DURAND-GUERRIER Viviane.....	597
Enseigner les équations différentielles en première année d'université : quels liens entre les pratiques enseignantes et les apprentissages des étudiants ? BRIDOUX Stéphanie et GRENIER-BOLEY Nicolas.....	607
Impact d'un dispositif de formation initiale des enseignants du secondaire sur les pratiques d'enseignants débutants : une étude de cas en Belgique francophone BRIDOUX Stéphanie.....	617
Étude des proximités discursives pour enseigner les limites de fonctions en L1 : quelle variabilité entre les cours et les manuels ? GRENIER-BOLEY Nicolas et BRIDOUX Stéphanie.....	629
Vitesse en calcul et en mécanique, est-ce vraiment la même chose ? Une étude de praxéologies dans les deux disciplines HITIER Mathilde et GONZÁLEZ-MARTÍN Alejandro.....	637
Analyse des contenus liés au concept d'intégrale enseignés au cours de calcul qui sont mobilisés dans les pratiques professionnelles des ingénieurs électriciens KOUASSI Kouadio Denis.....	649
Les usages du registre graphique par les étudiants futurs enseignants de mathématiques : un chemin à tracer TRAIN Grégory et COULANGE Lalina.....	653
Difficultés et conceptions sur la preuve d'étudiant.e.s du supérieur : filières générales et professionnelles, formation des enseignant.e.s OUVRIER-BUFFET Cécile et DE VLEESCHOUWER Martine.....	663
La preuve en mathématiques : difficultés d'étudiants et apports potentiels des assistants de preuve SISCO Clara et OUVRIER-BUFFET Cécile.....	667
GT7 LES RESSOURCES POUR DE NOUVEAUX DÉFIS	677
Bilan du groupe de travail 7 Les ressources pour de nouveaux défis FREIMAN Viktor, WOZNIAK Floriane, SOKHNA Moustapha et SAWADOGO Timbila.....	679
L'enseignement de l'estimation computationnelle au Québec : la question des ressources didactiques RIOUX Miranda et BENRHERBAL Abderrahmane	685
Conditions et contraintes sous-jacentes à l'utilisation du matériel de manipulation au primaire : une étude théorique AGBATCHI Babatoundé Maurice, CORRIVEAU Claudia et JEANNOTÉ Doris	695
Usage de la grille d'observation de leçon de mathématiques pour la formation initiale et continue au Burkina Faso : réalités et perspectives SAWADOGO Timbila	701
Usage de ressources basées sur les données massives en enseignement de mathématiques : quel sens y donnent des enseignants FREIMAN Viktor, YARO Kwesi, LOUIS Natacha, LÉGER Michel, CHIASSEON Mario, KAMBA Jacques et ERAZO Atilio.....	711

Explorer le rôle de la compréhension des concepts mathématiques dans le contexte du <i>débogage</i> dans le design en ingénierie associé à l'informatique physique et au <i>codage</i> informatique KAMBA Jacques et FREIMAN Viktor.....	721
Analyse du processus itératif d'une Design-based Research impliquant la création d'une banque d'activités visant le raisonnement spatial au primaire FOREST Mylène, MARCHAND Patricia et SINCLAIR Nathalie.....	733
Ressource et besoins praxéologiques du professeur WOZNIAK Floriane.....	745
Expérimentation ergonomique et didactique d'une ressource documentaire : course fractionnée, proportionnalité et vitesse moyenne GEORGET Jean-Philippe et DELATTRE Benjamin	755
GT8 LES TECHNOLOGIES POUR L'APPRENTISSAGE, L'ENSEIGNEMENT ET LA FORMATION.....	763
Bilan du groupe de travail 8 Les technologies pour l'apprentissage, l'enseignement et la formation BUTEAU Chantal, NOUHOU Abdoul Massalabi, SOURY-LAVERGNE Sophie et VANDEBROUCK Fabrice.....	765
Modélisation et impression 3D en soutien à l'apprentissage de la géométrie : une expérimentation avec l'impression 3D au primaire MAI HUY Khoi et OUELLETTE Jean-François.....	769
Avantages et défis didactiques liés à l'usage de l'environnement virtuel de Minecraft Education pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques THIBAUT Mathieu, MICHOT Sandrine, RIOUX Stéphanie, ROY Mélanie et PHILIBERT Shanie	781
L'apport des logiciels de calcul numérique : cas des approximations via l'Analyse Numérique dans une école d'ingénieurs tunisienne MERJANE Chiraz, IBEN HAJ ALI Najoua et KOUKI Rahim	793
Exploration des défis et des pratiques déclarées dans l'intégration des médias numériques en géométrie : état des lieux, avec une perspective sur le cycle 3 MEGHERBI Djamila	803
Utilisation des outils graphiques interactifs dynamiques pour favoriser le développement de la pensée mathématique : une étude des pratiques enseignantes KHALLOUFI-MOUHA Faten.....	813
L'IA dans l'évaluation en mathématiques : défis et perspectives dans l'analyse des erreurs MOUSSITOU Ronald R.....	823
Émergence de schèmes professionnels de deux futures enseignantes au travers d'un cours d'investigation mathématique avec programmation ST-CYR Marie-Frédéric, FOJCIK Martyna K., BUTEAU Chantal, MULLER Eric et MGOMBELO Joyce.....	833
Renseigner l'enseignant·e de l'activité des élèves dans une ville virtuelle COUTAT Sylvia, DORIER Jean-Luc et MATRI Sabrina.....	843
Apports de modèles didactiques pour concevoir des parcours adaptatifs dans un environnement numérique GRUGEON-ALLYS Brigitte, LESNES Elann, JOLIVET Sébastien et VANDEBROUCK Fabrice.....	855
GT9 LIENS ENTRE PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGES... 865	
Bilan du groupe de travail 9 Liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages ALLARD Cécile, PILET Julia et ROBERT Virginie.....	867

Une analyse quantitative des apprentissages mathématiques des élèves : vers une mise en relation avec les pratiques d'enseignement CHANUDET Maud, FANJAT Juliette, METTOUCHI Micha et RODITI Éric.....	873
Caractériser et suivre les apprentissages des élèves en algèbre au collège en lien avec leur appartenance à une classe GRUGEON-ALLYS Brigitte et PILET Julia.....	883
Des pratiques d'enseignement de la résolution de problèmes qui se distinguent : quels impacts sur l'habileté des élèves de sixième année du primaire (11-12 ans) à résoudre des situations-problèmes mathématiques ? GOULET Marie-Pier, FOREST Marie-Pier et VERVONDEL Émilie.....	895
Impact de l'enseignant sur les procédures des élèves dans un jeu LUDIER Isabelle.....	907
Caractéristiques des exercices proposés dans deux classes de fin d'école primaire au regard des connaissances des élèves TEMPIER Frédérick et KIWAN-ZACKA Michella.....	917
Caractérisation d'une pratique dite « exemplaire » en mathématiques au secondaire : proposition d'une grille d'analyse ALLOUTI Sarra, SABOYA Mireille et JEANNOTTE Doris.....	929
Le jeu des bandes : une ressource collaborative pour l'école Maternelle ALLARD Cécile.....	935
L'éthique communautaire : son rôle sur le déploiement de la pensée fonctionnelle et sur les pratiques enseignantes dans une activité d'enseignement-apprentissage ROBERT Virginie et GARNEAU Audrey.....	949
Caractérisation de la nature des aides suggérées par les enseignant·es en résolution de problèmes : le cas des problèmes de type essais et ajustements FAVIER Stéphane.....	959
La construction de la définition du cerf-volant : une pratique enseignante pour développer le raisonnement chez des élèves de 6 ^e année du primaire au Québec MICHOT Sandrine.....	967
Situations engageant un travail de communication en algèbre en 2 ^e secondaire : des apports pour l'élève comme pour l'enseignant ? LABROSSE Philippe.....	979
Catégorisation de quelques problèmes de proportionnalité MRABET Slim et OUNI Mohamed Wardi.....	991
GT10 ENSEIGNEMENT AUPRÈS DE PUBLICS SPÉCIFIQUES OU DANS DES CONTEXTES PARTICULIERS.....	1001
Bilan du groupe de travail 10 Enseignement auprès de publics spécifiques ou dans des contextes particuliers DUPRÉ Frédéric, KOUDOGBO Jeanne, THEIS Laurent et HOULE Virginie.....	1003
Interactions didactiques entre une enseignante, une aide en classe et un élève autiste minimalement verbal ATKINS Isabelle.....	1009
Analyse de la motivation d'enfants à profils autistiques en situation d'apprentissage du graphisme KOUAMÉ Koffi Pierre.....	1019
Pratiques d'enseignement-apprentissage des activités prénumériques à des apprenants présentant des troubles du spectre autistique DIOMANDE Mariame et BOA Ekora Hélène (épouse Djoué).....	1029

Regard sur l'effet de deux régulations dans l'adaptation de tâches mathématiques proposées à des élèves en difficultés langagières DUPUIS BROUILLETTE Marilyn, THEIS Laurent et MILLON-FAURÉ Karine.....	1037
Analyse de la mise en œuvre d'une séquence à visée inclusive sur la symétrie axiale au cycle 3 LESNES Elann et PETEERS Florence.....	1047
L'hexagone : un objet d'exploration pour concevoir des jeux de tâches à l'intention des élèves de l'enseignement spécialisé VENDEIRA Céline, CANGE Christian, CONNE François, FAVRE Jean-Michel et MONOD Jean-Daniel	1059
État des lieux en vue de la conception d'une ressource inclusive pour former à l'enseignement de la géométrie PETITFOUR Édith	1071
Mise en œuvre de la situation voitures/garages dans une classe à sous-effectif d'un établissement spécialisé DUPRÉ Frédéric	1083
Situations mathématiques en coenseignement enseignante-orthopédagogue au premier cycle du primaire HOULE Virginie et GHAILANE Oumama	1093
Les potentialités et défis d'une recherche partenariale visant à favoriser l'accessibilité didactique dans le contexte d'une démarche de coenseignement de tâches visant le développement de la pensée algébrique BERGERON Laurie, DEVEAULT Audrey, BOILY Andrée, BARALLOBRES Gustavo et LAUZÉ Stéphanie	1103
Co-enseigner en résolution de problèmes arithmétiques : quel impact sur les pratiques des enseignants ? PETEERS Florence.....	1113
Un usage de robots de sol dans une visée inclusive ATHIAS Francine, VERGON DARTOIS Aurélie et PERRAUD Caroline	1125
Articulation entre systèmes didactiques auxiliaires et principal dans un dispositif d'aide préventif GUILLE-BIEL WINDER Claire	1133
Un parcours différencié inclusif s'appuyant sur des résultats en didactique concernant l'aire du rectangle DE VARENT Charlotte.....	1143
Difficultés spécifiques d'élèves avec MLD sur les fractions GARDES Marie-Line, BARROCA-PACCARD Fabienne, DERUAZ Michel, GREGORIO Francesca, LEMRICH Chloé, OUVRIER-BUFFET Cécile, PETEERS Florence et ROBOTTI Elisabetta.....	1157
Éléments de réflexion à propos de l'utilisation du matériel de manipulation en mathématiques auprès d'élèves d'adaptation scolaire BÉLANGER-FORTIN Ariane	1167
GT11 ÉVALUATION DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES	1177
Bilan du groupe de travail 11 Évaluations dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques HOROKS Julie, OURAHAY Mustapha, RUMINOT Carolina et CHANUDET Maud	1179
Gestes évaluatifs en résolution de problèmes au début de l'école élémentaire : étude de cas auprès d'un élève en grande difficulté BEYLOT David, BLANCHOUIN Aline et GRAPIN Nadine.....	1183

Mise à l'épreuve de pistes visant à soutenir les pratiques d'évaluation formative dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques CHANUDET Maud et FAVIER Stéphane	1195
Regard didactique sur la conception d'un outil de diagnostic en mathématiques CHENEVOTOT Françoise, GRAPIN Nadine, GRUGEON-ALLYS Brigitte, MOUNIER Éric et PILET Julia	1207
PISA 2022 : analyse du lien entre les démarches sollicitées en mathématiques et les perspectives curriculaires en Belgique francophone DEMONTY Isabelle	1213
Étude de l'activité de correction des épreuves en mathématiques : éléments théoriques BILODEAU Jeanne, BARALLOBRES Gustavo et ROINÉ Christophe	1221
Étude du dispositif évaluatif québécois pour les épreuves uniques de mathématique au 2 ^e cycle du secondaire : analyse de la compétence à raisonner BÉNARD Chloé, TREMBLAY Mélanie et DELOBBE Anne-Michèle	1231
Mobilisation des conceptions des futurs enseignants en évaluation des mathématiques RUMINOT Carolina.....	1241
Partir des représentations sur l'évaluation en formation initiale des enseignant.e.s : quels leviers pour enrichir les pratiques ? HOROKS Julie	1251
Évaluation sommative des acquis d'apprentissage en mathématiques des futurs enseignants du cycle primaire MORTAQI Khaoula et OURAHAY Mustapha	1261
Genre et évaluation en mathématiques : étude comparative de gestion d'épisodes évaluatifs BRISMONTIER Chloé.....	1273
Différence de performance garçons-filles à l'entrée au primaire : complémentarité d'une approche didactique et psychosociale GRAPIN Nadine et SAYAC Nathalie	1283
CONTRIBUTION DES PROJETS SPÉCIAUX	1293
PROJET SPÉCIAL 1 LA PAROLE AUX JEUNES ENSEIGNANTS	
FRANCOPHONES : FORMATION ET ENTRÉE DANS LE MÉTIER	1295
Bilan du projet spécial 1 La parole aux jeunes enseignants francophones : formation et entrée dans le métier CHERIKH Ouahiba, FAVIER Stéphane, GRAPIN Nadine, HOMIER Marianne, NJOMGANG Judith et SABOYA Mireille.....	1297
Enseigner la résolution de problèmes pour favoriser l'appropriation et la modélisation par les élèves BOCCALARI Chiara et MARÉCHAL Fanny.....	1301
Comment dévoluer aux élèves le travail de mathématisation horizontale ? CHANET Pierre.....	1311
Vers une éducation inclusive : analyse de la pratique enseignante et de ses gestes professionnels. Le cas d'un enseignant du primaire DEBLOIS Isabelle.....	1319
« Mais pourquoi on écrit plus en maths qu'en français ? » : enjeux langagiers en cours de mathématiques DIALLO Shana.....	1329
Articuler l'algèbre et l'analyse pour enseigner le second degré : une étude des pratiques enseignantes DUMONCEAU Pauline	1339
L'apprentissage de la preuve en géométrie FAYAD Micheline.....	1349

Le rapport des élèves à la fonction affine au secondaire LAZRI-ABDI Samia	1359
Apprentissage de la construction des bissectrices des angles d'un triangle à l'aide de la règle et du compas, en s'aidant du logiciel Geogebra en classe de 5 ^e au Cameroun NGOMPE Karell	1369
Place du raisonnement par analogie dans les raisonnements des élèves du secondaire à travers des tâches de résolution de problèmes NHIRY Meryem, HANINI Mohamed et ABOUHANIFA Said	1379
Le jeu mathématique comme levier pour la motivation en classe PERRAULT Lea et SAMSON Juliette	1389
Évaluation de l'impact d'intégration de la robotique sur le développement des compétences des élèves dans l'enseignement interdisciplinaire des mathématiques en projet lié aux STEM RAIHANE Asmaa, ELHAROUSSI Mustapha et ABOUHANIFA Said.....	1395
Valorisation des mathématiques dans l'enseignement post-primaire et secondaire au Burkina Faso SAWADOGO Salif.....	1405
Représentation graphique des fonctions : analyse des difficultés courantes des élèves de la terminale D au Burkina Faso SIMBRE Alassane.....	1413
Introduction de l'algèbre par le calcul littéral au Cameroun TETSOPGUIM GUIMEYA Brandelle	1423
La logique et l'apprentissage de la démonstration à la transition secondaire-université TILMAN Ève	1433
La dévolution de la linéarité de l'espérance mathématique en classe de terminale en Algérie ZEDEK-LEDJIAR Nacima	1439
PROJET SPÉCIAL 2 MATHÉMATIQUES ET SOCIÉTÉS.....	1449
Bilan du projet spécial 2 Mathématiques et sociétés SINCLAIR Nathalie, SALONE Jean-Jacques et BELBACHIR Hacène.....	1451
Comment des enseignants de Guadeloupe conçoivent-ils la contextualisation didactique lors d'activités de résolution de problèmes ? HAJBY Achraf, RAMSAMY Priscilla, FORISSIER Thomas et LE PALLEC Maëlle	1455
Une réflexion conjointe sur les enjeux sociaux et politiques de l'enseignement des mathématiques GUILLEMETTE David, ABTAHI Yasmine, BARWELL Richard, HAJBY Achraf, SABOYA Mireille et ST-CYR Marie-Frédéric.....	1465
Comparaison de deux dispositifs de recherche mathématique : stage ludique et travail de master FIORELLI Shaula et RAPHAEL Elise.....	1475
Usages et stratégies des élèves en langues de première socialisation en mathématiques à Mayotte. Étude statistique et didactique NGUALA Jean-Berky, MANOU-ABI Solym et TCHONANG YOUKAP Patrick.....	1485
Contextualisation forte et développement professionnel : expérience d'un dispositif de formation à Mayotte NGUALA Jean-Berky et TOURNÈS Dominique.....	1495

Contextualisations didactiques de problèmes mathématiques par les étudiants en formation au métier d'enseignant en Guadeloupe SALONE Jean-Jacques et RAMSAMY Priscilla	1499
PROJET SPÉCIAL 3 NEUROSCIENCES ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES	1511
Bilan du projet spécial 3 Neurosciences et didactique des mathématiques RODITI Éric, BARALLOBRES Gustavo, GARDES Marie-Line et MAHEUX Jean-François.....	1513
Travaux sur le système nerveux et didactique des mathématiques, le cas du concept de « représentation » et de l'énaction MAHEUX Jean-François	1517
Articuler des méthodes de recherche en didactique des mathématiques et en sciences cognitives : un exemple de conception et validation d'un test GARDES Marie-Line, CROSET Marie-Caroline, PRADO Jérôme et SAMSON Adeline	1527
Interrogations didactiques à propos de la ligne numérique mentale FANJAT Juliette et RODITI Éric	1539
Compter, c'est prendre en compte : le défi de l'apprentissage de l'unité et de la multiplicité pour les sciences cognitives SILVA David.....	1549
Troubles de la coordination et visualisation en géométrie : le cas d'une collaboration entre sciences cognitives et didactique des mathématiques GOMEZ Alice, MITHALAL Joris et HANSSEN Ludvine.....	1559
La notion de conception sous l'angle de la didactique des mathématiques et de la psychologie du développement. Un exemple sur le concept de fraction LEMRICH Chloé, GARDES Marie-Line et SANDER Emmanuel.....	1569
Évaluations nationales au CP en mathématiques en France : biais et impacts sur le traitement des données issues du dispositif ÉvalAide GUENAIIS Mélanie.....	1579
DISCUSSIONS PROGRAMMÉES.....	1591
Plurilinguisme et mathématiques expériences, enjeux et pistes d'action ANDRIANARIVONY Fidy Heritiana, BARWELL Richard, CHELLOUGUI Faiza, DURAND-GUERRIER Viviane, KILANI Imed, ROBO Eléda, SADJA-NJOMGANG Judith et SALONE Jean-Jacques	1593
Le réseau des IREM, une opportunité pour la formation des professeurs et pour l'enseignement des mathématiques dans les pays francophones ? BAHEUX Carole, FRETIGNE Patrick, MEGHERBI Djamila et VANDEBROUCK Fabrice	1603
L'ethnomathématique et ses liens avec l'histoire et la didactique des mathématiques, des parcours de recherche aux questionnements éthiques SALONE Jean-Jacques, VANDENDRIESSCHE Eric, TOURNES Dominique et DA SILVA Alban	1611

**LES COLLOQUES EMF :
PASSÉ, PRÉSENT ET
FUTUR — LA PAROLE AUX
GRANDS TÉMOINS**

LA PAROLE AUX GRANDS TÉMOINS

| DURAND-GUERRIER* VIVIANE, HODGSON** BERNARD R., MOHAMED SAGAYAR***

MOUSSA ET NDIAYE**** FAGUÈYE

Résumé | Ce texte rend compte des observations et analyses faites par les quatre auteurs et autrices sur l'organisation et le déroulement du colloque EMF 2025 à l'Université du Québec à Montréal (Canada).

Mots-clés : enseignement et apprentissage des mathématiques, formation des enseignants, diversité linguistique, culturelle et géographique, inclusion, francophonie

Abstract | This text reports on the observations and analyses made by the four authors on the organisation and running of the EMF 2025 conference in Montreal (Canada).

Keywords: Teaching and learning mathematics, teacher education, linguistic, cultural and geographical diversity, inclusion, Francophonie

I. INTRODUCTION

Dans le cadre du colloque EMF 2025 qui s'est déroulé du 26 au 30 mai 2025 à l'Université du Québec à Montréal, nous avons eu l'honneur, sur l'invitation de M. Adolphe Adihou que nous remercions chaleureusement, de jouer le rôle de *Grands témoins* tout au long de l'évènement. Cette mission s'est conclue par une présentation en séance plénière, le vendredi 30 mai 2025, animée par M. Vincent Martin. Ce dispositif, introduit pour la première fois lors d'EMF 2022 à Cotonou, a pour objectif de susciter une réflexion sur le contenu du colloque, d'offrir une synthèse des activités scientifiques qui l'ont nourri, et de proposer un regard réflexif et critique. Il s'inscrit dans une démarche visant à interroger la place de l'activité mathématique au regard du thème central du colloque. Pour remplir cette mission, nous nous sommes organisés de sorte que, dans toute la mesure du possible, chacun des groupes de travail et chacun des projets spéciaux soit visité au moins une fois par l'un ou l'une d'entre nous. Chacun de nous a assisté aux deux conférences plénières, aux deux tables rondes et à la conférence grand public. Nous avons aussi participé à certaines des autres activités. Notre petit groupe reflète la diversité géographique entre le Nord et le Sud, la raison d'être d'EMF, ainsi que la diversité en genre (une brève présentation de chacun et chacune d'entre nous se trouve en annexe 1). En complément de notre compte-rendu du déroulement du colloque, nous proposons un aperçu sur l'histoire d'EMF (voir annexe 2).

II. LE PROGRAMME : LES CLASSIQUES ET LES NOUVEAUTÉS

Le programme du colloque EMF 2025 illustre une fois de plus la richesse interculturelle et intergénérationnelle de cet événement incontournable. Fidèle à sa vocation de favoriser la circulation des savoirs au sein de la francophonie éducative, l'EMF rassemble une diversité de contributions ancrées dans les contextes éducatifs du primaire, du secondaire et du supérieur. Le colloque reste solidement arrimé à ses axes classiques : l'échange d'expériences entre pays francophones, la réflexion sur les pratiques d'enseignement, et la valorisation de la pluralité des approches pédagogiques. Cette édition poursuit cette tradition tout en intégrant des thématiques

* Université de Montpellier, IMAG CNRS, UM – France – viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

** Département de maths et de stat. – Université Laval (Québec) – Canada – bernard.hodgson@mat.ulaval.ca

*** Département des sciences de l'éducation, UAM, Niamey – Niger – mmsagayar@gmail.com

**** Département de mathématiques – FASTEF, UCAD – Sénégal – fagueye.ndiaye@ucad.edu.sn

novatrices qui viennent enrichir le dialogue scientifique et professionnel, comme les relations entre mathématiques et sociétés, d'une part, neurosciences cognitives et didactique des mathématiques, d'autre part. Par ailleurs, on retrouve dans cette édition des axes émergents tels que le développement professionnel et le travail collaboratif, les dimensions historique, culturelle et langagière dans l'enseignement des mathématiques, ou encore l'intégration des technologies numériques dans l'apprentissage, l'enseignement et la formation. Ces thématiques témoignent d'une volonté de répondre aux défis actuels et futurs de l'enseignement des mathématiques. Le programme met également en lumière une évolution significative vers des approches contextuelles, interrogeant les modalités d'adaptation des méthodes d'enseignement aux réalités locales tout en maintenant un lien avec les standards internationaux. C'est cette capacité à conjuguer ancrage local et ouverture globale qui fait la force et l'originalité de l'EMF. Depuis l'origine, les conférences plénières, les tables rondes, les groupes de travail thématiques et les projets spéciaux constituent l'armature des colloques EMF, complétée par d'autres dispositifs. L'EMF 2025 a proposé une grande diversité des formats : conférences plénières (3), tables rondes (2), groupes de travail (11), projets spéciaux (3), discussions programmées (9), discussion spontanée (1), 5@7connexions (2), Maths en action (8), sans oublier les activités récréatives (3). Ce qui a suscité des réflexions, des échanges et discussions pertinents, riches et fructueux.

1. Les groupes de travail thématiques et les projets spéciaux

La question de la formation des enseignants sur les savoirs à enseigner, le genre, le soutien des élèves en difficulté, l'équité, le choix des situations-problèmes, l'initiation des élèves à la modélisation et à la résolution de problèmes, l'autonomisation de l'élève ou l'utilisation d'outils numériques se pose avec acuité lors des échanges dans les groupes de travail thématiques. Il y avait à Montréal onze groupes de travail thématiques couvrant les questions qui se posent aujourd'hui dans le monde éducatif, et ceci pas seulement dans le monde francophone. D'une manière générale, la participation était équilibrée du point de vue du nombre d'hommes et de femmes parmi les responsables et les participants, mais on a observé dans pratiquement tous les groupes une proportion relativement faible de participants de pays du Sud, notamment de participants travaillant en Afrique de l'Ouest, cela étant un reflet de la répartition géographique des participants et participantes au colloque. Plusieurs responsables de groupe et plusieurs collègues ayant des communications acceptées n'ont pas pu venir à Montréal, soit pour des raisons économiques, soit pour n'avoir pas pu obtenir de visa d'entrée au Canada. C'est le cas par exemple pour le GT8 (Technologies numériques pour l'apprentissage, l'enseignement et la formation). La plupart des thématiques sont reliées à des questions travaillées dans le cadre de recherches en didactique des mathématiques. Un enjeu fort des groupes de travail est de représenter la diversité des participants du point de vue de leurs positions institutionnelles : enseignants, formateurs, chercheurs, inspecteurs, etc., et de permettre la circulation de la parole afin de favoriser des échanges riches et fructueux. L'organisation des échanges par les responsables est ainsi un élément important, pour lequel nous avons pu observer des pratiques variées. Par exemple, la première séance du GT5 (Modélisation et interdisciplinarité) démarre par une activité *brise-glace*, qui contribue à créer une bonne ambiance de travail dans ce groupe. Les responsables rappellent ensuite les règles d'organisation, puis indiquent le nombre total de contributions dans le groupe. Les trois présentations observées dans cette première séance ont donné lieu à de nombreuses interactions. Dans le GT8 les règles d'organisation sont établies comme suit : 20 minutes de présentation, une réaction invitée de 2 à 3 minutes, suivie de 5 à 7 minutes de questions-réponses. Lors de la séance observée, il y a eu trois présentations. Les deux premières portent sur une recherche de type collaboratif et la troisième, de type qualitatif. Il y a eu beaucoup d'échanges dans ce groupe, notamment autour des questions relatives aux interactions entre outils numériques et méthodes classiques d'enseignement-apprentissage. Un autre enjeu important pour les colloques EMF est la

diversité du type de contributions proposées dans les groupes de travail. Nous n'avons pas eu l'opportunité de faire un relevé exhaustif, mais dans les séances observées, nous avons assisté à une majorité de présentations de recherche. C'est le cas par exemple dans le GT6 (Enseignement des mathématiques au post-secondaire, au supérieur et dans les filières professionnelles). C'est aussi le cas dans le GT9 (Liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages) : les deux premières recherches présentées étant de type qualitatif et la troisième, de type collaboratif. Il y avait une bonne circulation de la parole dans ce groupe et les échanges ont été très riches. Dans le GT11 (Évaluations dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques), les trois présentations observées étaient des activités de recherche de type qualitatif ou mixte (qualitatif et quantitatif), dont l'une proposait une innovation pédagogique et une révision de curriculum.

Il y avait à Montréal trois projets spéciaux. Le premier est le traditionnel projet *Jeunes enseignants* présenté dans la section IV. Les deux autres projets spéciaux portaient sur des questions vives de l'enseignement des mathématiques : *Mathématiques et sociétés* d'une part, *Neurosciences cognitives et didactique des mathématiques* d'autre part. Ce dernier projet faisait suite à une discussion programmée sur le même thème organisée à Cotonou en 2022 ; nous avons dû faire des choix prenant en compte nos propres disponibilités et nous n'avons pas pu l'observer. Lors de la séance observée du projet spécial *Mathématiques et sociétés*, le groupe était composé de six hommes et de cinq femmes, dont l'une a participé en ligne. Les participants venaient de la France, incluant la Guadeloupe et Mayotte¹, du Canada, de la Suisse, de l'Algérie et du Congo. Dans la séance observée, les présentations faites sont des activités de recherche de type qualitatif. Il y a eu beaucoup d'interactions sur les productions. Le premier thème abordé concernait la contextualisation d'activités de résolution de problèmes, les difficultés à les mettre en œuvre et les besoins de formation. La deuxième présentation était un compte-rendu de la mise en œuvre d'activités et de camps de découvertes à l'intention des jeunes filles.

2. Les conférences plénières et les tables rondes

Les trois conférences plénières, riches en analyses théoriques et en visions d'ensemble, nous ont permis de voir comment les participants et les participantes prennent de la hauteur. La première conférence, intitulée « *De l'accélération à la résonance : donner vie à l'éducation et aux mathématiques* » a été présentée par Fabien Torres (Canada), qui a apporté le point de vue d'un sociologue sur le thème de ce colloque « L'éducation mathématique face à un monde en accélération : enjeux, défis et opportunités ». Le concept de résonance présent dans le titre fait écho de travaux de Hartmut Rosa, un sociologue et philosophe de l'école de Francfort qui prône, dans un ouvrage de 2018, que si l'accélération constitue le problème central de notre temps, la résonance peut être la solution. Nous étions sans doute nombreux et nombreuses à n'avoir jamais entendu parler des travaux de ce sociologue et de ce concept de résonance, et quoique le conférencier nous ait proposé une conférence très vivante, il n'était pas toujours facile de comprendre ce que cela pouvait apporter à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques. Ceci fait écho à une question du public : « Comment nos pratiques d'enseignement peuvent-elles favoriser la création d'axes de résonance ? »

La seconde conférence donnée par Louise Poirier (Canada) avait pour titre « Les mathématiques et leur enseignement pour atteindre une responsabilité sociale et culturelle », avec comme mots-clés *diversité, équité et inclusion*. La conférencière affirme que tous les élèves peuvent faire des mathématiques, mais pas toujours au même rythme, au même niveau et dans la même langue. Elle se pose la question de savoir « Comment développer des activités d'enseignement qui seraient *culturellement justes* pour faire le pont entre la culture de la famille et la culture de l'école ? » Elle pense que le jeu permet d'approprier

¹ La Guadeloupe et Mayotte font partie des douze territoires ultramarins de la France.

l'erreur et permet aux enseignants d'établir un dialogue fécond avec les familles. La fin de sa conférence est axée sur la formation des enseignants et ce que ces derniers doivent connaître pour enseigner. Les questions posées par le public sont relatives à la formation des enseignants, afin qu'ils puissent amener les élèves à faire la différence entre leur représentation mentale et les savoirs à acquérir, et à être autonomes, et aussi aux défis auxquels sont confrontés les enseignants eux-mêmes, lorsqu'ils évoluent dans un milieu qui n'est pas le leur. Toutes ces interactions soulignent la nécessité d'une formation initiale et continue de qualité.

Parmi les séances plénières au programme de l'EMF 2025 se trouvait une conférence annoncée comme destinée au « grand public ». Le thème était on ne peut plus attrayant : « *Le temps en mathématiques : efficacité, beauté et complexité des résultats mathématiques* ». Les deux conférencières, Nadia Lafrenière (Canada) et Judith Sadjia-Njomgang (Cameroun), sont toutes deux des chercheuses expérimentées qui ont présenté des exposés de haut niveau. Judith, s'étant vu refusé son visa d'entrée au Canada, a dû faire sa présentation à distance et en direct. Le Comité local d'organisation avait mis en place le nécessaire et tout s'est bien passé. Malheureusement le public en salle n'était pas aussi nombreux qu'on aurait pu le souhaiter pour un tel événement. Il est difficile de dire combien parmi ce public appartenaient à la catégorie *grand public*. Nous avons été surpris de la faible participation des congressistes de l'EMF. Parmi les raisons de cette faible participation, on peut penser à la place de cette activité dans le programme, la toute première journée en soirée après le cocktail de bienvenue. Ou encore à la mention du grand public dans la dénomination de cette activité, qui a pu conduire de nombreux participants à l'EMF 2025 à considérer que cette conférence était un événement hors colloque.

Les tables rondes ont offert des espaces d'échanges de qualité où la parole circule librement, révélant la pluralité des points de vue, l'intelligence collective des participants et participantes, leur générosité intellectuelle et le respect dans les interventions, veillant à construire ensemble plutôt qu'à démontrer. Lors de la première table ronde modérée par Eva Kroll, Richard Barwell (Canada), Jeanne Koudogbo (Canada), Judith Sadjia-Njomgang (Cameroun) et Nathalie Sayac (France) ont abordé de différents points de vue la question cruciale posée dans le titre : « Quelle éducation mathématique aujourd'hui pour les citoyens et citoyennes de demain ? » Les enjeux sont nombreux, tant en ce qui concerne les questions de genre, l'accélération des enjeux environnementaux et du rôle des données et des statistiques dans les prises de décision, la grande hétérogénéité de nombreux contextes d'enseignement, notamment en raison des phénomènes migratoires à l'intérieur et à l'extérieur des frontières, etc. Des pistes variées de solutions ont été proposées pour la prise en compte de la dimension du genre dans l'apprentissage des mathématiques, du soutien des élèves en difficulté aujourd'hui pour une participation citoyenne active demain, des enjeux environnementaux de l'enseignement des mathématiques et de la formation des enseignants à des pratiques de classe équitables. Le maître-mot dans cette table ronde est la formation des enseignants pour un enseignement écoresponsable des mathématiques faisant preuve de créativité, et un enseignement équitable prenant en compte la diversité culturelle et l'hétérogénéité des élèves.

La deuxième table ronde, « Espaces de collaboration pour le développement professionnel des enseignant·es de mathématiques », rassemblait Sonia Ben Nejma (Tunisie), Stéphane Clivaz (Suisse), Houria Hamzaoui (Canada) et Jean-François Maheux (Canada). La table ronde propose un espace de réflexion et de dialogue sur les enjeux, les pratiques et les perspectives du développement professionnel des enseignants de mathématiques. Les participants ont échangé sur les orientations et les leviers d'action pour renforcer la qualité et l'efficacité de l'enseignement des mathématiques dans des contextes variés.

3. *Discussions programmées, ateliers Maths en action et 5@7 connexion*

Les neuf discussions programmées pendant l'EMF 2025 ont fait l'objet d'un appel à proposition et ont été validées par le Comité scientifique. Elles visent à traiter des thèmes ou des questions vives qui ne sont pas abordés de front dans les groupes de travail ou les projets spéciaux. Ce sont des occasions d'échanges et de réseautage entre des petits groupes de personnes (enseignantes, formatrices, chercheurs) qui s'intéressent à un même sujet bien circonscrit. Elles jouent à ce titre un rôle essentiel pour élargir et enrichir les échanges pendant la conférence. Nous donnons en annexe 3 quelques éléments sur deux discussions programmées, celle sur le plurilinguisme et celle sur le réseau des IREM.

Les ateliers Maths en action sont une nouveauté de ce colloque. Huit ateliers se sont déroulés en parallèle sur des thématiques en lien avec l'ethnomathématique (Flécher avec les maths, Jeux traditionnels, Tapis mendiants, Jeux de ficelle), le plurilinguisme (Influence des traductions d'énoncés), les pratiques artistiques (L'esthétique en lien avec l'exposition arts-mathématiques), l'espace (Balade mathématique) et la magie (Abracadabra). Ces ateliers reposaient sur un principe de participation active, et ont rencontré leur public.

5@7 connexion est un nouveau dispositif élaboré par le Comité local d'organisation en collaboration avec École en réseau et offert en comodal pendant la conférence, visant à favoriser les échanges entre praticiens, praticiennes, chercheurs et chercheuses, en croisant les expertises. Toute personne intéressée par les enjeux touchant l'évaluation des apprentissages et les activités mathématiques dans ce monde en accélération, du primaire à l'université, y était la bienvenue.

III. ÉQUILIBRE ENTRE LES DIFFÉRENTS ACTEURS

Participer à un colloque EMF, c'est pouvoir s'immerger dans une communauté francophone riche de ses diversités culturelles, linguistiques et géographiques sur l'enseignement des mathématiques au carrefour des continents, des cultures et des générations, aux niveaux primaire, secondaire et supérieur, et sur la formation initiale et continue des enseignants. Ce qui est principalement attendu, c'est le partage des questionnements, ainsi que des modalités de mise à l'étude de ces questionnements selon les contextes et les acteurs concernés (enseignants, chercheurs, inspecteurs, conseillers pédagogiques, etc.). Il s'agit également de mettre en discussion les résultats obtenus et les pistes de solution envisagées ou proposées par les différents acteurs. Notons que la diversité géographique vaut pour les pays eux-mêmes ; c'est le cas notamment de la France avec douze territoires d'outre-mer (Réunion, Mayotte, Guadeloupe, Guyane, etc.). Nous notons cependant qu'il existe aujourd'hui un risque de voir les colloques EMF évoluer vers un format essentiellement centré sur la recherche. Une telle orientation irait à l'encontre de leur vocation initiale, qui est d'offrir à la communauté francophone des acteurs de l'enseignement des mathématiques, à tous les niveaux, y compris universitaire, un espace de partage d'outils méthodologiques, de résultats et de pistes de réflexion. En effet, on observe que les coresponsables des groupes de travail et de projets spéciaux sont très majoritairement des chercheuses et chercheurs en didactique des mathématiques. Il est bien entendu légitime et nécessaire que les travaux de recherche en didactique des mathématiques soient présents dans les groupes de travail et les projets spéciaux. Cependant, nous invitons les responsables scientifiques des futurs colloques EMF à être vigilants lors des choix des coresponsables afin que la diversité des acteurs y soit représentée. Cela est nécessaire tant pour le processus d'évaluation des contributions et les échanges au sein des groupes et des projets, que pour la diversité des participants pendant les colloques EMF.

IV. LA FORMATION DES ENSEIGNANTS ET LE PROJET JEUNES ENSEIGNANTS

Depuis sa création, le colloque de l'Espace Mathématique Francophone (EMF) accorde une place centrale à la formation des enseignants, considérée comme un levier essentiel pour le développement de l'enseignement des mathématiques dans l'espace francophone. En cohérence avec sa richesse interculturelle et intergénérationnelle, l'EMF offre un cadre unique où formateurs, chercheurs et praticiens échangent sur les enjeux de la professionnalisation des enseignants, dans une diversité de contextes éducatifs allant du primaire au supérieur. Cette orientation se traduit par la présence régulière de thématiques dédiées à la formation initiale et continue des enseignants, intégrées au cœur des programmes du colloque. L'EMF s'attache à valoriser les pratiques de terrain, à confronter les approches pédagogiques et à favoriser la mutualisation des expériences entre les pays de la francophonie. La pluridisciplinarité du colloque permet d'aborder la formation des enseignants sous plusieurs angles – didactique, culturel, institutionnel et technologique –, tout en prenant en compte les spécificités locales. L'EMF agit ainsi comme un espace d'échange et de co-construction des savoirs professionnels, contribuant activement à une formation contextualisée, sensible aux enjeux socioculturels, linguistiques et aux besoins des différents publics enseignants. Fidèle à son objectif initial de faire circuler les savoirs dans l'espace francophone, l'EMF s'impose donc comme un lieu privilégié de renforcement des compétences enseignantes, dans une perspective inclusive, collaborative et ouverte sur le monde.

Comme nous le soulignons dans l'annexe 2, le projet *Jeunes enseignants* est une activité récurrente des colloques EMF. Il s'agit d'une composante essentielle des EMF qui s'impose comme un espace formateur, stimulant et structurant pour de futurs enseignants francophones. Il insuffle aux colloques EMF énergie, renouveau et perspectives d'avenir, tout en renforçant les liens entre pratique enseignante, formation initiale et recherche en didactique. Ce projet vise ainsi à donner au colloque une bouffée d'air frais et à capitaliser sur l'avenir quant à l'investissement des jeunes enseignants pour essaimer autour d'eux l'attrait pour la collaboration au sein de la francophonie et pour développer une meilleure connaissance des différents systèmes éducatifs et des questions d'enseignement. L'expérience a montré que la plupart des jeunes enseignants qui se sont rencontrés lors des différents projets sont restés en contact entre eux, et d'une manière ou d'une autre, avec l'EMF et le monde académique de la recherche en didactique. À en juger par les communications présentées lors des séances de ce projet spécial et par le rapport des responsables à la fin du colloque, l'EMF 2025 a su garder bien vivante cette tradition. Il était frappant, lors de ces séances, d'être témoin tant de la qualité des présentations elles-mêmes que de la richesse des questions et des échanges qui s'ensuivaient. Il y a lieu de se réjouir du succès du projet *Jeunes enseignants*, malgré la complexité et les obstacles inhérents à l'organisation et au bon déroulement d'une telle activité, notamment les aspects financiers et les difficultés d'obtention des visas : quatre jeunes enseignants venant de pays du Sud n'ont pas obtenu leur visa d'entrée au Canada.

V. DIVERSITÉ GÉOGRAPHIQUE ET CULTURELLE

L'EMF 2025 s'inscrit dans la continuité des EMF précédents, dans l'atteinte de ses objectifs et dans la mise en œuvre de ses modalités établies en 2003 à Tozeur : Conférences, Groupes de Travail et Projets spéciaux. Le premier jalon pour une diversité culturelle et géographique des colloques a été posé en 2006 à Sherbrooke avec le choix d'une thématique générale intitulée *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*. Le colloque EMF 2009 favorise l'inclusion de toute la communauté francophone par son ancrage dans le contexte d'une société en pleine évolution avec des enjeux sociétaux forts autour d'un enseignement des mathématiques pour tous. La thématique du

colloque EMF 2015, *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*, met en exergue l'un des objectifs du colloque EMF visant à renforcer la coopération entre chercheurs, formateurs, enseignants, vivant dans des contextes sociaux et culturels différents, et ayant des préoccupations communes quant aux questions touchant à l'enseignement des mathématiques. Le colloque EMF 2022, tenu à Cotonou au Bénin, a été marqué par une participation importante des pays de l'Afrique francophone subsaharienne. Il est important de noter que les EMF précédents ont beaucoup contribué au développement de la recherche en didactique des mathématiques et de la didactique au service de l'enseignement des mathématiques dans plusieurs pays africains subsahariens, avec la mise en place de Masters d'enseignement et l'affluence des doctorants en didactique des mathématiques ; c'est le cas notamment au Sénégal. Nous sommes néanmoins préoccupés par la faible présence de l'Afrique de l'Ouest francophone dans cette édition 2025. Cette situation met ainsi en péril l'un des objectifs majeurs de l'EMF.

Lors des conférences plénières, nous constatons un certain déséquilibre dans l'équité de genre avec le choix de trois conférencières sur les quatre. Du point de vue de la composition physique et géographique des conférenciers, une conférencière sur les quatre vient du Sud. Quant aux tables rondes, nous notons une équité de genre mais nous observons un déséquilibre dans la composition physique et géographique, deux panélistes sur les huit venant du Sud. Dans les groupes de travail, parmi les trente-trois coresponsables, onze seulement sont du Sud. Mais un déséquilibre hommes/femmes est noté dans certains groupes où les femmes sont majoritaires. Cette organisation ne favorise pas la contribution de l'ensemble de la communauté francophone, sans exception, au développement de la recherche en didactique des mathématiques et de ses retombées sur les formations initiale et continue des enseignants dans tous les pays francophones. Le colloque Espace Mathématique Francophone, cadre de réflexions et d'échanges sur les questions vives de l'enseignement des mathématiques, doit être renforcé avec la participation effective et efficiente de toutes les communautés francophones, du nord au sud, impliquées dans l'enseignement des mathématiques dans les différents niveaux.

VI. CONCLUSION

Les colloques EMF représentent une composante fructueuse et importante de la mission de la CIEM², sous le volet des conférences régionales. La présence de telles activités qui se déroulent en français sous les auspices de la Commission recèle en soi une grande valeur, et ce en particulier en lien avec la portée de la dimension Nord/Sud au cœur même des activités de l'EMF. Il est essentiel de prendre les mesures nécessaires afin d'assurer le développement et la pérennité des colloques EMF, face aux nombreux problèmes — notamment financiers et organisationnels — auxquels les responsables ont à faire face, tant au sein du Comité scientifique que du Comité local d'organisation. Pour cela, il est nécessaire : d'améliorer la représentativité et l'équilibre dans le Comité scientifique, et dans les équipes de responsables des groupes de travail et des projets spéciaux ; de renforcer la coopération entre chercheurs, formateurs, enseignants, vivant dans tous les pays francophones, dans des contextes sociaux et culturels différents, et ayant des préoccupations communes quant aux questions touchant à l'enseignement des mathématiques ; d'éviter de mettre en parallèle certains types de session (par exemple SPÉ et discussions programmées) ; d'organiser des plages de visualisation et des plages d'analyse de pratiques d'enseignants afin de partager des réflexions sur la manière de les améliorer (formation initiale et continue). Il est également nécessaire de se donner les moyens de garantir une diversité des participants en termes de positions institutionnelles (enseignants, chercheurs, formateurs, inspecteurs, conseillers pédagogiques, décideurs,...) et de contextes culturels, linguistiques et géographiques. Il faut également veiller à un équilibre dans les contributions entre résultats des

² Commission internationale de l'enseignement mathématique, ICMI pour l'acronyme anglais.

travaux de recherche en didactique et leurs applications d'une part, questionnements, analyses et innovations issues des différents acteurs d'autre part. Par ailleurs, il nous semble souhaitable que les colloques EMF accordent une place plus importante à la question vive du plurilinguisme dans les activités officielles du colloque, par exemple sous la forme d'un projet spécial, afin d'avancer collectivement sur les défis, les enjeux, et les opportunités pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

L'EMF 2025 a montré que l'enseignement des mathématiques n'est pas un terrain neutre : c'est un lieu de tensions, de choix, de cultures, d'histoire, qui invite à penser l'enseignement des mathématiques, non pas seulement comme un corpus de savoirs à transmettre, mais aussi comme un langage, une culture, un levier de justice sociale. De très nombreux échanges ont mis en lumière l'importance cruciale de la formation des enseignants, initiale et continue, et la nécessité d'un dialogue constant entre recherche et pratique, entre le local et l'international pour la mise en dialogue entre cultures, générations et contextes d'enseignement. Il s'agit là d'un objectif ambitieux qui se heurte aujourd'hui à un contexte international pas toujours favorable aux relations Nord/Sud. Le Comité local d'organisation de l'EMF 2025 a fait face à une difficulté considérable, peut-être plus présente que dans le passé et qui risque d'occuper une place de plus en plus grande au sein de l'EMF : l'obtention d'un visa de visiteur dans le pays d'accueil du congrès, en particulier, on peut s'en douter, dans le cas de participants du Sud lorsque le congrès se déroule au Nord. Même si le nombre total de participants potentiels qui n'ont finalement pas pu obtenir à temps leur visa pour le Canada n'est pas très élevé, il n'en demeure pas moins que cette question demeure à la fois difficile et fondamentale. C'est là une situation profondément troublante et problématique, dont on peut craindre qu'elle ne se reproduise à l'avenir. Il est toujours troublant, dans le cadre de rencontres scientifiques internationales, de voir de telles questions prendre le dessus sur l'esprit de collaboration et d'échange qu'on souhaiterait y voir régner. Et ce sans compter le poids important que les problèmes de visa mettent forcément sur les épaules du Comité local d'organisation, en plus du stress, de la frustration et des risques financiers pour les participants concernés. Nous recommandons que pour les prochains colloques une équipe aguerrie sur la question des visas soit mise en place en lien avec l'Agence Universitaire de la Francophonie (AUF). Par ailleurs, le nouveau Comité exécutif de l'EMF, dont Faguëye, Moussa, et Viviane font partie, va prendre contact avec l'Organisation Internationale de la Francophonie (OIF) pour faire connaître les colloques EMF et voir quels sont les soutiens possibles³.

ANNEXE 1

PRÉSENTATION DES QUATRE GRANDS TÉMOINS

Bernard est professeur titulaire au Département de mathématiques et de statistique de l'Université Laval (Québec), où il intervient entre autres dans la formation mathématique des enseignants du primaire et du secondaire. Il a été Secrétaire général de la CIEM de 1999 à 2009. Il a participé à la rencontre Espace Mathématique 2000 à Grenoble, qui a initié le processus de mise en place des colloques connus par la suite sous le sigle EMF, le suivant s'étant tenu à Tozeur (Tunisie) en 2003. Il a participé à tous les colloques EMF, sauf celui de 2022.

Faguëye est professeure assimilée de Mathématiques au Département de mathématiques de la Faculté des Sciences et Technologies de l'Éducation et de la Formation (FASTEF) de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar (UCAD) (Sénégal). Elle est Inspectrice générale de l'éducation et de la

³ AUF, <https://www.auf.org/> et OIF, <https://www.francophonie.org/>

formation en Mathématiques et Présidente de la Commission nationale de mathématiques. Elle a participé aux colloques EMF de 2009 à Dakar et de 2022 à Cotonou.

Moussa a un doctorat en sciences de l'éducation, option didactique des mathématiques, qu'il a préparé au CREAD (Centre de Recherches sur l'Éducation, les Apprentissages et la Didactique) de l'Université Rennes 2 (France). Il est Maître de Conférences en Sciences de l'Éducation à l'École Normale Supérieure de l'Université Abdou Moumouni de Niamey (Niger). Il occupe actuellement les fonctions de Directeur de la Formation à Distance à l'ENS/Université Abdou Moumouni de Niamey. Il est membre associé du laboratoire CREAD.

Viviane est professeure émérite en didactique et épistémologie des mathématiques de l'Université de Montpellier, membre de l'Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck – IMAG, CNRS-UM (France). Elle est vice-présidente pour les actions internationales de la Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques (CFEM⁴) et membre du bureau exécutif d'EMF. Elle a participé à tous les colloques EMF depuis 2003.

ANNEXE 2 UN PEU D'HISTOIRE

L'édition 2025 des rencontres de l'Espace Mathématique Francophone marque les vingt-cinq ans de cette série de conférences, organisées sous les auspices de la CIEM, la première s'étant déroulée dans le cadre de l'*Année mathématique mondiale 2000*, telle que proclamée par l'Union mathématique internationale et se tenant sous le parrainage de l'UNESCO. Sous l'impulsion de son président Bernard Cornu, la CFEM avait proposé au Comité exécutif de la CIEM, comme contribution aux diverses activités organisées dans le cadre de cette année d'exception, de tenir à Grenoble une rencontre internationale portant sur l'enseignement des mathématiques et réunissant mathématiciens et didacticiens des mathématiques de la francophonie. Cet événement (d'abord appelé Espace Mathématique 2000) fut officiellement accepté en novembre 1998 comme « conférence régionale » lors de la dernière rencontre du Comité Exécutif 1995-1998 de la CIEM, présidé par Miguel de Guzmán et dont Mogens Niss était le Secrétaire général. La particularité d'une telle rencontre était que la « région » en cause reposait non pas sur une base géographique, comme c'était le cas pour les autres conférences régionales de la CIEM se déroulant alors notamment en Amérique latine ou en Asie du Sud-Est, mais plutôt sur une base linguistique⁵. Les colloques EMF se sont depuis tenus à un rythme régulier, l'EMF 2025 étant la neuvième rencontre de cette série, après celles de 2003 (Tozeur), 2006 (Sherbrooke), 2009 (Dakar), 2012 (Genève), 2015 (Alger), 2018 (Paris) et 2022 (Cotonou). Cette longévité et cette régularité sont en soi remarquables et reflètent incontestablement la pertinence d'œuvrer dans un tel cadre international francophone. Les lieux des conférences respectent une alternance Nord/Sud afin de garantir un équilibre géographique et de favoriser la participation d'une communauté francophone la plus large possible. A l'occasion du colloque EMF 2012 à Alger a été mis en place un Bureau exécutif dont la fonction première est de favoriser la réalisation des colloques EMF dans un esprit conforme à la vocation initiale de ces colloques, à savoir promouvoir, au sein de la communauté francophone des enseignants, des formateurs et des chercheurs, les échanges et les réflexions sur les questions vives de l'enseignement des mathématiques aux niveaux primaire, secondaire et supérieur.

⁴ La CFEM est l'organisme représentant la France au sein de la CIEM.

⁵ Lors de son entrée en fonction comme Secrétaire général de la CIEM en 1999, Bernard Hodgson est devenu de facto membre du Comité de programme de l'EMF 2000.

C'est dès le tout premier colloque de Grenoble en 2000 que le volet *Projet Jeunes enseignants* a vu le jour et a été intégré aux rencontres EMF. L'inspiration première est venue des actions menées alors depuis plus de trente ans, dans le cadre des relations bilatérales entre la France et le Québec, par l'Office franco-québécois pour la jeunesse (OFQJ). Un projet a été soumis à l'OFQJ par Bernard Hodgson conjointement avec Frédéric Gourdeau, son collègue à l'Université Laval, permettant ainsi à douze jeunes enseignants formés dans les diverses universités du Québec (étudiants finissants ou enseignants en tout début de carrière) de prendre part à la rencontre de Grenoble. Le projet Jeunes enseignants a tout de suite été perçu comme une trame riche et féconde de l'EMF et a été repris et enrichi lors des EMF suivants — sauf en deux occasions (2003 et 2015).

ANNEXE 3

ÉLÉMENTS DE DEUX DISCUSSIONS PROGRAMMÉES

La discussion programmée « Plurilinguisme et mathématiques : expériences, enjeux et pistes d'action » faisait suite à celle programmée lors de l'EMF 2022 à Cotonou. Lors de la première session, deux exemples de contextes plurilingues très différents (le Canada et Madagascar) ont été présentés, ainsi qu'une recension des communications concernant le plurilinguisme dans l'ensemble des colloques EMF. La deuxième session a été consacrée à des échanges en petits groupes sur des thèmes touchant la question du plurilinguisme. L'équipe organisatrice a décidé de préparer un texte pour les Actes. Les participants représentaient une grande diversité géographique et linguistique. Une suite est prévue sous la forme d'un séminaire en ligne pour faire vivre cette thématique entre deux colloques EMF.

La discussion programmée « Le réseau des IREM⁶, une opportunité pour la formation des professeurs et pour l'enseignement des mathématiques dans les pays francophones » a rassemblé deux hommes et neuf femmes dont une en ligne. Les participants de ce groupe venaient de la France hexagonale et de Mayotte, du Canada, de l'Algérie et de la Tunisie. La première présentation portait sur l'utilisation de la base de données Publimath. Des questions sur le mode de recherche de documents spécifiques ont été posées. La deuxième présentation portait sur la Commission internationale inter-IREM et sur le Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques en Afrique (GREMA). Le format de cette présentation était différent des autres : il était interactif, sans modérateur. La présentation a duré environ trois quart d'heure, et les discussions étaient foisonnantes. Par ailleurs, les travaux dans les IREM sont valorisés à travers des publications.

⁶ Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (<https://www.univ-irem.fr/>)

CONFÉRENCE PLÉNIÈRE

LE TEMPS EN MATHÉMATIQUES : EFFICACITÉ, BEAUTÉ ET COMPLEXITÉ

DES RÉSULTATS MATHÉMATIQUES

| LAFRENIÈRE* NADIA ET SADJA-NJOMGANG** JUDITH

Résumé | Quel lien entre les mathématiques et le temps ? On explore la notion de temps nécessaire à la découverte, la pratique et l'apprentissage des mathématiques. On aborde ensuite la complexité en temps, une notion mathématique qui permet d'étudier le temps. Enfin, on se questionne sur les vitesses du raisonnement mathématique. Tout au long, on présente nos points de vue croisés d'enseignantes des mathématiques en Afrique et en Amérique du Nord.

Mots-clés : apprentissages, pratique des mathématiques, complexité en temps, vitesse de la pensée

Abstract | What are the connections between mathematics and time? We explore the notion of the necessary time to discover, practice and learn mathematics. We then discuss time complexity, a mathematical concept used to study computation time. Finally, we compare various speeds for thinking about mathematics. All along, we present our points of view as math educators from Africa and North America.

Keywords: Learning, math practice, time complexity, slow thinking

I. LE TEMPS EN MATHÉMATIQUES

Les mathématiques représentent une conquête millénaire. De la géométrie à la théorie des nombres, différents peuples ont raffiné depuis très longtemps les notions qui sont aujourd'hui enseignées, les simplifiant et les enrichissant au passage. Si les mathématiques semblent immuables aujourd'hui, c'est bien parce qu'elles sont un échafaudage d'idées élaboré sur une longue période de temps. On pourrait donc croire qu'elles changent très peu.

Pourtant, plusieurs centaines d'articles scientifiques sont publiés chaque jour en mathématiques, un nombre en forte croissance au cours des dernières décennies (Dunne, 2019, p. 227). C'est notamment parce que nombre de mathématicien.ne.s consacrent beaucoup de temps à la découverte de mathématiques nouvelles.

II. LE TEMPS POUR LA PRATIQUE DES MATHÉMATIQUES

Dans la pratique des mathématiques, on peut observer deux types d'acteurs : les experts et les apprenants. Les experts vont surtout se centrer sur la recherche qui est très exigeante en termes de temps, sur l'application des mathématiques aux métiers d'ingénieur.e, de la finance, à la chimie, la physique... Les apprenants se concentrent sur l'utilisation des concepts de façon contextualisée, dans le cadre scolaire d'une part et au cours d'activités de tous les jours d'autre part. Les mathématiques permettent dans ces cas de figure de construire des modèles ; elles apparaissent alors comme des outils au service de la pensée et de l'action. Or, ceci ne va pas de soi car il faut déjà se familiariser avec ces outils pour pouvoir les manipuler avec dextérité.

* Université Concordia – Canada – nadia.lafreniere@concordia.ca

** Université de Yaoundé 1 – Cameroun – judithnjomg@yahoo.fr

III. LA PRATIQUE DES MATHÉMATIQUES EXIGE DU TEMPS POUR LES APPRENTISSAGES

Dans le cadre de l'école élémentaire, le programme aborde quatre grandes thématiques : les nombres, le calcul, la géométrie et les grandeurs et mesures. Pour chacune de ces thématiques, des concepts sont enseignés et leur complexité peut être appréhendée à partir des quatre composantes du concept (langage, problème, technique et propriété). À ces niveaux d'étude, l'accent est surtout mis sur les composantes problème, technique et langage.

L'apprentissage de la multiplication à l'école élémentaire est complexe et se fait avec une variété de situations :

- La multiplication avec les nombres entiers : l'apprentissage commence avec des opérations où le multiplicateur a un chiffre, puis au moins deux chiffres. Pour ces deux activités, les techniques ne sont pas les mêmes et les éléments théoriques mobilisés sont distincts.
- La multiplication avec les nombres décimaux où la gestion des parties décimales est souvent une source de difficulté chez l'apprenant du fait des représentations erronées provenant des opérations avec les nombres entiers...
- La multiplication avec les fractions : des objets nouveaux s'ajoutent, le numérateur, le dénominateur, la barre de fraction.

Concernant la multiplication avec les nombres entiers, l'algorithme est connu. Mais on peut faire mieux.

IV. LE TEMPS NÉCESSAIRE POUR FAIRE LES CALCULS

Peut-on définir *mathématiquement* ce qu'est un résultat beau ? Ou rapide ? Dans le premier cas, il s'agit certes d'une notion subjective : on aime une idée parce qu'elle est originale, parce qu'elle nous permet de connecter des notions mathématiques qu'on croyait sans lien particulier ou encore parce qu'elle s'exprime simplement. S'il existe plusieurs notions de simplicité en mathématiques – pas toutes liées entre elles –, on retient la définition suivante de son antonyme, la *complexité*. La théorie de la complexité est le domaine des mathématiques qui étudie formellement le temps de calcul (ou l'espace mémoire) nécessaire pour résoudre un problème algorithmique. On calcule ainsi la complexité (en temps) par le nombre d'étapes à accomplir pour résoudre un problème. De ce point de vue, un problème *simple* est un problème qui admet une solution efficace, une solution qui prend peu de temps.

Pour un même problème, on peut trouver des solutions de complexités différentes. Prenons l'exemple bien connu de la multiplication de deux nombres entiers positifs. La méthode apprise à l'école demande de multiplier chaque chiffre du premier nombre avec chaque chiffre du deuxième nombre, pour un total de n^2 multiplications élémentaires pour multiplier deux nombres de n chiffres. Si cette méthode a l'avantage d'être *simple à expliquer*, c'est une méthode d'une grande complexité au sens mathématique, c'est-à-dire qu'elle demande un grand nombre d'opérations élémentaires. Une quête pour simplifier la multiplication a donc été lancée en 1960. En seulement une semaine, Anatoli Karatsuba a trouvé une méthode de multiplication plus rapide, basée sur la technique diviser pour régner. Concrètement, cela veut dire qu'on ramène la multiplication de nombres à n chiffres à trois multiplications de $n/2$ chiffres, ce qui fait que la méthode demande en tout de faire $n^{1.58}$ multiplications élémentaires. Une course était lancée ! On croit aujourd'hui connaître la méthode optimale pour qu'un ordinateur multiplie deux grands nombres ensemble : elle ne requiert que $n \log(n)$ multiplications élémentaires. Et pourquoi sait-on que cette méthode est optimale ? Il est conjecturé qu'une opération aussi élémentaire que la multiplication devrait avoir une expression *simple* pour sa complexité... Encore

une fois, ici, l'intuition des mathématiciennes et mathématiciens est guidée par des considérations esthétiques !

Enfin, pourquoi faisons-nous des calculs aussi précis ? Lorsque l'on multiplie 2457×6819 , est-ce qu'on souhaite vraiment la réponse précise, ou pouvons-nous nous contenter de savoir que c'est entre une et deux dizaines de millions. Cela dépend bien entendu du contexte. Nous faisons l'hypothèse que, bien souvent, on applique des procédures complexes pour vérifier la validité de notre intuition, pourtant beaucoup plus rapide.

$$\begin{array}{r}
 2457 \\
 6819 \\
 \hline
 22113 \\
 + 2457 \\
 19656 \\
 14742 \\
 \hline
 16754283
 \end{array}$$

Figure 1 – L’algorithme de multiplication longue nécessite de multiplier chaque chiffre des deux nombres entre eux.

V. MATHÉMATIQUES, APPRENTISSAGE ET BEAUTÉ

Les recommandations dans les programmes vont entraîner la mise sur pied de nouvelles pédagogies dans le but de développer la créativité : l'apprentissage coopératif, l'apprentissage par projet, les classes inversées, les classes-ateliers...

Pour cela il faut du temps : le temps d'élaborer les leçons, le temps de l'exercisation, le temps pour des ateliers de formation des enseignants aux activités de développement personnel (activités manuelles, créatives, ludiques, le temps pour entraîner les élèves à l'intégration).



Figure 2– *La Grande Vague de Kanagawa*, par l'artiste Hokusai, suit la forme de la spirale de Fibonacci.

Les mathématiques permettent de produire de nombreuses réalisations artistiques « justifiées » qui donnent du sens aux concepts ; des graphiques, des dessins, des plans des ouvrages architecturaux, la musique, la liste n'étant pas exhaustive. Bien appréhendées, elles rendent l'esprit fécond. Leur beauté réside entre autres dans la capacité à décrire les motifs de la nature ; c'est le cas par exemple de l'art fractal ou de la suite de Fibonacci qui décrit la Grande Vague de Kanagawa, imaginée par Hokusai.

VI. LE TEMPS DES APPRENTISSAGES, CELUI POUR RÉFLÉCHIR

Puis, il y a le temps nécessaire à la réflexion. Tou.te.s les mathématicien.ne.s aimeraient avoir plus de temps pour la réflexion ! Cela dit, on peut penser mathématiquement à différentes vitesses. Souvent, la pensée rapide est associée à une pensée plus superficielle, alors que la pensée lente correspondrait à

une étude méthodique. Cela dit, on peut entraîner notre cerveau à développer des réflexes mathématiques, qui nous permettraient de penser rapidement avec la certitude des longs calculs.

VII. LES TROIS VITESSES DE LA PENSÉE DE BESSIS

Dans *Mathematica : une aventure au cœur de nous-mêmes*, David Bessis présente le problème du temps de calcul différemment, en comparant les résultats de notre intuition et de calculs précis, exécutés en suivant une procédure établie, comme un des algorithmes de multiplication décrits plus haut. Il décrit trois vitesses :

Le système I, rapide, qui correspond à notre intuition. C'est celui qu'on active lorsqu'on doit donner une réponse très rapide ou une approximation. C'est une image mentale qui peut être imprécise et, puisqu'on réfléchit peu, mène souvent à la mauvaise réponse. Elle serait donc peu fiable.

Le système II, lent, nous donne le résultat d'une procédure algorithmique déjà apprise, puis exécutée. C'est notre « capacité de raisonnement rigoureux » (Bessis, p. 167). Dans l'exemple de la multiplication, on exécute soit la multiplication longue ou l'algorithme de Karatsuba, et on aura le bon résultat à l'unité près, pas seulement un ordre de grandeur. C'est un système mécanique dont les avantages sont la précision et la reproductibilité, mais qui a le défaut d'être un peu inhumain.

Le système III, vraiment très lent, établit le dialogue entre les deux autres systèmes. Il est responsable de la mise à jour du système I, grâce aux données obtenues du système II. Ainsi, lorsque l'on confirme notre intuition à l'aide du résultat d'un long calcul, on prend confiance en sa capacité de faire des mathématiques. Si les résultats obtenus avec le système II ne correspondent pas à ce qu'on avait imaginé rapidement avec le système I, on se questionne sur la raison de notre mauvaise intuition, puis on corrige notre intuition.

Enfin, ce système III n'est-il pas vraisemblablement ce que c'est, faire des mathématiques ? Développer une compréhension assez profonde des objets en question pour les manipuler sans avoir à suivre des procédures étape par étape. Comprendre d'où proviennent ces procédures pour trouver des raccourcis – des simplifications – et créer ses propres algorithmes de calcul. C'est grâce à leur système III que les mathématiciennes et mathématiciens peuvent à la fois avoir une intuition souvent correcte, parce qu'il les force à constamment aligner les images mentales et les résultats précis.

RÉFÉRENCES

Bessis, D. (2023). *Mathematica : une aventure au cœur de nous-mêmes*. Points.

Dunne, E. (2019). Looking at the mathematics literature. *Notices of the American Mathematical Society*, 66(2), 227-230.

Contributions des groupes de travail

**GT1 | DÉVELOPPEMENT
PROFESSIONNEL ET
TRAVAIL COLLABORATIF**

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL 1

DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL ET TRAVAIL COLLABORATIF

| KEBBOUCHE-MEHADDENE* SAMIA ET SAGAYAR** MOHAMED MOUSSA

I. INTRODUCTION

Le Groupe de Travail 1 (GT1) s'est inscrit dans la thématique générale du colloque, en interrogeant plus spécifiquement les enjeux du développement professionnel abordé sous l'angle du travail collaboratif en didactique des mathématiques. Le thème du développement professionnel abordé sous l'angle du travail collaboratif est une thématique qui a gagné en importance dans la recherche récente en didactique des mathématiques. Ce domaine, en constante évolution, s'interroge sur ses propres fondements et perspectives (Artigue, 1998), cherchant à mieux comprendre les processus d'enseignement et d'apprentissage. Bien que le travail en collectif d'enseignant·e·s pour le développement professionnel ne soit pas une idée nouvelle, comme en témoignent des pratiques établies telles que les :

- ***Lesson Studies*** originaires du Japon, ce qui est considéré comme une évolution récente est la mise en place de véritables communautés d'apprentissage professionnelles (DuFour, 2004).

Cette évolution se caractérise par l'implication plus étroite des chercheur·e·s dans des cadres de travail collaboratif déjà existants. On observe également l'émergence de dispositifs de :

- **Recherche collaborative** (Bednarz, 2013), dont l'orientation principale est le développement professionnel des participant·e·s

Ce type de travail collaboratif est devenu un puissant levier didactique et un objet de recherche en soi (Roditi, É. et Trgalova, J, 2016). Il met en évidence la manière dont les savoirs circulent, les pratiques se transforment, et les compétences professionnelles se développent. Plus spécifiquement, cette dynamique se manifeste à travers les axes suivants :

- ***Axe 1 : L'évolution des pratiques et des conceptions*** : Le travail collaboratif permet aux enseignants de revisiter leur rapport au savoir et leur épistémologie pratique. En collaborant sur l'introduction d'une nouvelle discipline comme la programmation, les enseignants novices peuvent s'approprier la matière et construire les connaissances nécessaires
- ***Axe 2 : Le développement de compétences spécifiques*** : La recherche collaborative peut aider les enseignants à développer des "gestes professionnels" essentiels pour la mise en œuvre de situations didactiques complexes, comme les situations de recherche de problèmes. L'étude montre que la collaboration soutient la transformation des pratiques enseignantes vers une pédagogie centrée sur la recherche.
- ***Axe 3 : L'analyse et la transformation des savoirs didactiques*** : Des dispositifs comme la "Clinique didactique de l'activité" agissent comme un levier pour aider les enseignants à

* Responsable du groupe de travail 1 – LDAR, Université Paris-Cité – France – smehaddene@gmail.com

** Correspondante du comité scientifique – École Normale Supérieure, Université Abdou Moumouni Niamey – Niger – mmsagayar@gmail.com

transformer leur relation au savoir mathématique, en particulier dans des domaines où leurs propres conceptions peuvent être fragiles, comme les probabilités. La collaboration entre didacticiens et enseignants permet de faire émerger des "savoirs transparents" et d'enrichir l'intelligence du calcul.

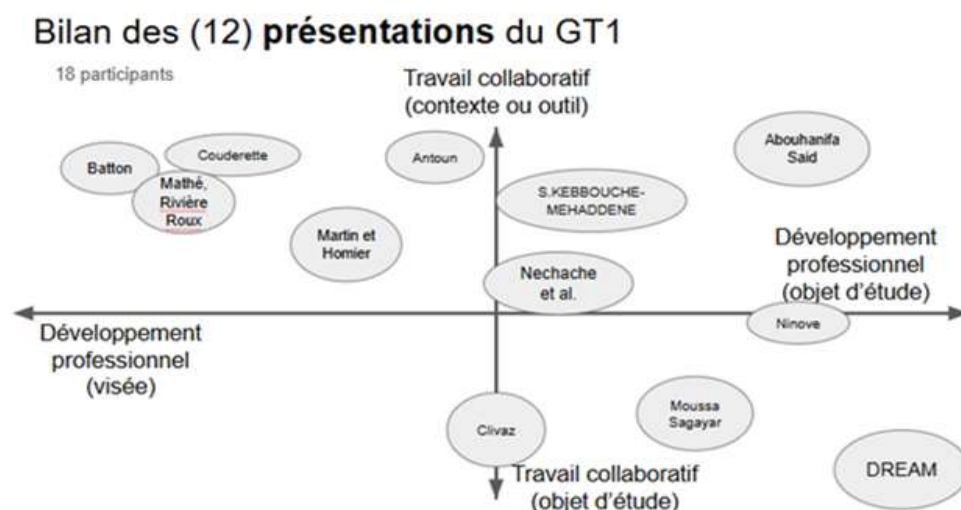
- **Axe 4 : La fluidité des savoirs :** Les *Lesson Studies* et autres groupes de travail collaboratif favorisent la circulation entre les "connaissances didactiques pour la recherche" et les "connaissances didactiques pour enseigner". Ce processus de confrontation des points de vue et de réflexion partagée crée des ponts essentiels entre la théorie et la pratique, contribuant ainsi au développement des connaissances professionnelles de tous les acteurs. La relecture de cadres existants comme les *Lesson Studies* implique de manière plus étroite les chercheurs (Batteau et Clivaz, 2016).

II. BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL 1 (GT1) : TRAVAIL COLLABORATIF ET DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL

Le Groupe de Travail 1 (GT1) s'est penché sur les dynamiques du travail collaboratif et du développement professionnel en didactique des mathématiques. Ce bilan s'appuie sur l'analyse de **douze communications** et les échanges entre **dix-huit participants**. Les discussions ont mis en lumière la richesse et la complexité de ces sujets, et les communications ont été organisées et synthétisées en fonction de **deux dimensions principales**, telles que représentées dans la figure d'analyse du GT1 :

- **Dimension 1 :** La visée du développement professionnel (Développement professionnel visé vs. Développement professionnel objet d'étude).
- **Dimension 2 :** La nature du travail collaboratif (Travail collaboratif contexte/outil vs. Travail collaboratif objet d'étude).

Ces deux dimensions définissent **quatre quadrants**, permettant ainsi de catégoriser les communications du GT1 en fonction des différentes manières dont le travail collaboratif et le développement professionnel sont conceptualisés et étudiés.



Dans le premier quadrant, où le **travail collaboratif agit comme un contexte ou un outil pour un développement professionnel**, plusieurs études mettent en lumière les bénéfices directs de ces interactions. **Kebbouche-Mehaddene** explore une collaboration entre chercheuse et trois enseignant(e)s en Algérie sur la généralisation algébrique, montrant comment l'équipe affine les pratiques pédagogiques et enrichit la compréhension de la chercheuse sur la complexité de l'enseignement. De même, **Antoun** analyse un dispositif de formation collaborative sur le calcul mental qui révèle des "savoirs transparents" essentiels. **Martin et Homier** observent l'impact de la collaboration sur l'épistémologie pratique d'enseignants novices en programmation, tandis que **Batton** décrit comment un groupe de l'IREM favorise la circulation des connaissances en didactique de la géométrie. Enfin, **Couderette, Mathé, Rivière Roux** se penchent sur les *Lesson Studies* comme catalyseurs du développement des connaissances professionnelles.

Le deuxième quadrant met en scène le **travail collaboratif comme contexte/outil, mais avec le développement professionnel comme objet d'étude** principal. **Abouhanifa** analyse la pertinence des conceptions collectives de leçons (cellules d'animation pédagogique au Niger) comme levier du développement professionnel des enseignants, favorisant le passage d'une logique de "prescription" à une logique de "conception". **Nechache et al.** explorent, à travers une recherche collaborative, le développement de "gestes professionnels" spécifiques chez les enseignants. Enfin, **Ninove** utilise la "*Clinique didactique de l'activité*" comme dispositif d'intervention-recherche pour accompagner une enseignante du primaire dans son développement professionnel sur l'enseignement des probabilités, en se focalisant sur l'évolution de son "projet didactique" et sa relation au savoir.

Le troisième quadrant s'attache spécifiquement au **travail collaboratif comme objet d'étude, visant un développement professionnel**. **Clivaz** mène une analyse croisée des connaissances mobilisées par un enseignant de mathématiques lors de l'introduction de l'algèbre au collège, en comparant son "script" et sa pratique réelle, avec une visée claire d'amélioration des pratiques.

Enfin, le quatrième quadrant s'intéresse aux situations où **le travail collaboratif et le développement professionnel sont tous deux au cœur de l'objet d'étude**. **Sagayar** explore un travail collaboratif d'enseignants et de chercheurs au Niger sur l'alignement des contenus, les savoirs mathématiques et les possibilités de développer des compétences fondamentales en mathématiques des élèves en analysant le processus collaboratif pour identifier les décalages entre les attentes institutionnelles et les pratiques effectives. **DREAM**, quant à lui, examine la perception des participants d'un groupe de travail collaboratif sur l'impact à long terme de leur engagement sur leur développement professionnel, en soulignant la mixité des rôles et l'ingénierie didactique coopérative, et inclut une analyse du dialogue dans les *Lesson Studies* et le développement des connaissances pour la résolution de problèmes.

III. QUESTIONS ET RÉFLEXIONS POUR L'EMF 2029

Les échanges du GT1 ont dépassé le cadre des communications pour faire émerger des interrogations nouvelles. Les participants ont souligné l'importance de construire ensemble et ont identifié des questions clés pour la suite des travaux de l'EMF 2029, abordant trois points essentiels :

1. *Le travail collaboratif*

- Qu'est-ce que c'est et quelles sont les raisons de le faire ou de ne pas le faire ?
- Qui participe à cette collaboration et comment les savoirs y circulent-ils ?

2. *Le développement professionnel*

- Qui se développe et comment ?
- Comment documenter le développement professionnel de tous les acteurs impliqués dans ce travail ?

3. *La pérennité*

- Comment s'assurer de la pérennité de ce développement professionnel ?
- Comment valoriser les modèles de développement professionnel qui demandent un engagement durable, alors que les systèmes éducatifs privilégient souvent des formations plus courtes et plus fragmentées ?



Les discussions et le travail mené au sein du groupe ont mis en évidence la nature intrinsèquement collaborative de l'approche adoptée. L'esprit de ce collectif se caractérise par la volonté de chacun de contribuer, favorisant ainsi un enrichissement mutuel. Le bilan souligne que, au-delà des thématiques spécifiques à chaque recherche, ces échanges ont permis de faire émerger des questionnements plus profonds et essentiels pour le champ de la didactique.

RÉFÉRENCES

- Artigue, M. (1998). Didactique des mathématiques : quel avenir ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(3), 297-310.
- Batteau, M. et Clivaz, S. (2016). Les Lesson Study en France et en Suisse romande : état des lieux et perspectives. *Éducation et didactique*, 10(3), 11-26.
- Bednarz, N. (2013). Recherche collaborative et développement professionnel des enseignants. *Revue Éducation et francophonie*, 41(1), 1-19.
- DuFour, R. (2004). What is a "Professional Learning Community"? *Educational Leadership*, 61(8), 6-11.
- Roditi, É. et Trgalova, J. (2016). Le travail collaboratif des enseignants de mathématiques : un levier didactique et un objet de recherche en soi. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 36(3), 321-351. (Référence potentielle basée sur l'idée du travail collaboratif comme objet de recherche.)

UNE ÉTUDE DE L'ÉVOLUTION DES PRATIQUES ENSEIGNANTES SUITE AUX CHANGEMENTS CURRICULAIRES CAS DE L'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE AU COLLÈGE EN ALGÉRIE

| KEBBOUCHE-MEHADDENE* SAMIA

Résumé | Cet article s'inspire de mon travail de thèse (Kebbouche, 2022), il s'articule autour de l'enseignement de l'algèbre élémentaire pendant les quatre années de l'enseignement moyen en Algérie (collège en France) suite aux changements de programmes réalisés au fil des réformes de 2003 et de 2016. C'est un domaine qui nécessite l'agrégation des praxéologies régionales relatives aux expressions algébriques et aux équations, ce qui peut être l'origine des difficultés que les élèves rencontrent. Dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999), nous définissons des organisations mathématiques de référence relatives aux expressions algébriques et aux équations, et nous caractérisons les organisations à enseigner, mathématiques et didactiques, au fil des réformes. L'enjeu est d'interroger les décalages entre-elles qui peuvent engendrer des perturbations dans les pratiques enseignantes. Ensuite, en deuxième année du cycle moyen, nous étudions les pratiques déclarées de soixante-seize enseignants concernant le chapitre relatif aux expressions algébriques et aux équations et les pratiques effectives de trois enseignants (vidéos) afin de caractériser leur prise en compte des recommandations institutionnelles suite au changement du programme en 2016. En particulier, nous catégorisons les pratiques déclarées. Nous nous penchons sur la présence ou non des types de tâches relevant des deux OMR_{exp} et OMR_{eq} en appui sur les organisations mathématiques de référence, leur chronogénèse et leur agrégation. Cette étude met en évidence l'importance du travail collaboratif et du développement professionnel pour accompagner efficacement l'évolution des pratiques enseignantes face aux changements curriculaires.

Mots-clés : rapport institutionnel, algèbre élémentaire, théorie anthropologique du didactique, référence épistémologique, pratiques enseignantes

Abstract | This article is inspired by my thesis work (Kebbouche, 2022), it focuses on the teaching of elementary algebra during the four years of middle school in Algeria (collège in France) following the curricular changes achieved through the 2003 and 2016 reforms. This is an area that requires the aggregation of regional praxeologies relating to algebraic expressions and equations, which may be the origin of the difficulties students encounter. Within the framework of the anthropological theory of didactics (Chevallard, 1999), we define the mathematical organizations of reference relating to algebraic expressions and equations, and characterize the mathematical and didactic organizations to be taught over the course of the reforms. The aim is to examine the discrepancies between them, which can lead to disruptions in teaching practices. Then, in the second year of junior cycle, we study the declared practices of seventy-six teachers concerning the chapter on algebraic expressions and equations and the actual practices of three teachers (videos) in order to characterize their consideration of institutional recommendations following the change in the curriculum in 2016. In particular, we categorize declared practices. We look at the presence or absence of task types falling under both OMR_{exp} and OMR_{eq} in support of the reference mathematical organizations, their chronogenesis and their aggregation. This study highlights the importance of collaborative work and professional development to effectively support the evolution of teaching practices in the face of curricular change.

Keywords: Institutional relationship, elementary algebra, anthropological theory of didactics, epistemological reference, teaching practices.

* LDAR, Université Paris-Cité – France – smehaddene@gmail.com

I. INTRODUCTION

Notre contribution s'inscrit dans le cadre du premier groupe de travail 01 : « **Développement professionnel et travail collaboratif** », en se focalisant sur le parcours et l'adaptation des pratiques enseignantes en Algérie au gré des réformes des programmes scolaires. Cette recherche vise ainsi à éclairer comment le développement professionnel et les dynamiques collaboratives peuvent influencer l'évolution et l'adaptation des pratiques enseignantes aux évolutions curriculaires, particulièrement en algèbre élémentaire. Les résultats de cette étude, qui analyse les pratiques déclarées et effectives d'enseignants du cycle moyen face aux réformes de 2003 et 2016, permettront de contribuer à la mise en œuvre de futures actions de formation. Dans cette perspective, nos questions de recherche principales sont les suivantes : Quels sont les mécanismes d'adaptation et de résistance des pratiques enseignantes face aux réformes curriculaires en algèbre ? Et, dans un système soumis à de multiples contraintes, quelles conditions peuvent favoriser l'évolution des pratiques enseignantes vers les apprentissages visés ? Pour aborder ces questions, nous présentons d'abord nos choix théoriques sur lesquels notre étude s'est appuyée."

1. Contexte de l'étude

Le secteur éducatif Algérien a vécu dès l'entame de ce vingt-unième siècle au rythme soutenu des réformes opérées à tous les niveaux. Décrite par l'ensemble de la société, aussi bien civile que politique, l'école Algérienne n'offrait plus suffisamment aux élèves les moyens d'apprendre et l'Algérie était classée en avant dernière place dans les résultats de Pisa 2017 et à la 92^e place aux olympiades internationales des mathématiques 2018. C'est ainsi qu'une réforme de tout le système éducatif a été lancée en 2003, la première depuis celle de 1983. Ce chantier, appuyé par le programme PARE piloté par l'UNESCO, a abordé plusieurs volets et a permis la mise en place de nouveaux programmes, l'édition de nouveaux manuels scolaires, et a surtout instauré une nouvelle méthode d'enseignement basée sur l'approche par compétences. D'un point de vue pédagogique : les méthodes d'enseignement passent d'un enseignement traditionnel « basé sur des cours magistraux » à un enseignement participatif centré sur l'apprenant. Du point de vue didactique : passer des méthodes axées sur la mémorisation et le transfert des connaissances aux méthodes de construction des connaissances, développement des compétences d'analyse, de synthèse et d'application, et introduire de nouvelles organisations didactiques davantage centrées sur les situations d'apprentissage pour introduire de nouvelles connaissances mathématiques et différents moments de l'étude. L'enjeu est d'amener l'enseignant à mener autrement ses apprentissages que de façon frontale. En d'autres termes, il s'agit de l'amener à profiter de tout apprentissage nouveau pour mettre l'élève en position de résoudre une situation-problème.

Dans cette présentation, nous réalisons l'étude des pratiques enseignantes, dans le contexte de réforme de l'enseignement moyen Algérien de 2016. Nous caractérisons la prise en compte de ces nouveaux programmes dans la pratique des enseignants à partir d'une étude praxéologique des fiches d'enseignants et d'une étude didactique d'extraits de vidéos d'enseignants observés et répondons à la question : Les enseignants prennent-ils en compte les programmes de 2016 selon les contraintes auxquelles ils sont assujettis ?

Dans le paragraphe I, nous présentons les éléments théoriques des travaux de recherche en lien avec notre étude. Dans la partie II, nous dégageons les principaux résultats de l'étude sur l'évolution du rapport institutionnel à l'algèbre au cours des trois réformes. Dans le paragraphe III, nous présentons la méthodologie d'analyse des pratiques des enseignants non observés et observés. Dans la

partie IV, nous illustrons les principaux résultats relatifs à l'étude des pratiques enseignantes déclarées et effectives. Nous concluons dans le paragraphe V.

II. ÉLÉMENTS THÉORIQUES D'ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES

Nous nous sommes appuyée sur des travaux de recherche (Chevallard, 1985, 1989, 1990 ; Gascon, 1994 ; Kieran, 1990, 2007 ; Grugeon, 1997 ; Chaachoua, 2015) et (Chevallard et Bosch, 2012), en lien avec l'étude des pratiques d'enseignement dans le cas de l'algèbre élémentaire pour étudier la prise en compte ou non des recommandations de la réforme 2016 dans les pratiques des enseignants qui ont connus les trois réformes (1983, 2003 et 2016), puis relever les changements opérés et leurs adaptations aux attentes institutionnelles s'il y a prise en compte de ces recommandations.

La théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) propose un cadre d'analyse des pratiques enseignantes dans une institution quelconque, à travers l'analyse des praxéologies mathématiques et didactiques mises en œuvre par les enseignants, certainement avec des marges de manœuvre possibles de leur part comme indiqué dans le guide pédagogique de la 2AM (2^e année du collège, 5^e en France) : « Le professeur dispose d'une liberté responsable pour agir sur la gestion du plan annuel de construction des apprentissages préparé par les inspecteurs sous le contrôle de l'Inspection générale de la pédagogie » (Guide pédagogique, 2AM, p. 11).

L'analyse praxéologique nous a permis d'étudier les écarts entre les organisations mathématiques et didactiques déclarées puis mises en œuvre par les enseignants en classe avec les organisations mathématiques et didactiques attendues dans les programmes de 2016 au regard de la praxéologie de référence qui est pour nous un repère auquel les pratiques enseignantes se réfèrent du moins partiellement.

Nous nous sommes intéressée aux pratiques déclarées et effectives des enseignants dans le contexte de la réforme de 2016, Pour mieux identifier les contraintes qui peuvent influencer le processus de transposition didactique et provoquer des perturbations exogènes, nous utilisons l'échelle des niveaux de codétermination didactique (Chevallard, 2002). Chevallard a expliqué que les enseignants développent des organisations mathématiques locales, qui correspondent aux thèmes d'étude, ces OML extraites de l'organisation mathématique régionale, qui correspond au secteur d'étude et celle-ci extraite de l'organisation mathématique globale qui correspond au domaine d'étude (dans cette étude l'algèbre), l'ensemble de plusieurs domaines formant la discipline ici les mathématiques.

Selon Chevallard, ces contraintes peuvent aussi exister au niveau de la civilisation en lien avec la culture mathématique. Elles relèvent aussi du niveau de la société et entraîneront des répercussions au niveau de l'école, telles que les contraintes et recommandations instruites par la direction de l'éducation de la Wilaya (département).

Mais aussi des répercussions endogènes sur la pédagogie car les enseignants n'ont pas les mêmes statuts (formateur, titulaire, stagiaire), la même ancienneté (nombre d'années travaillées). En effet, il pourrait y avoir des différences entre enseignants à prendre en compte l'évolution des programmes selon leur ancienneté et le nombre de réformes vécues, selon leur formation initiale et les décalages entre les rapports institutionnels à l'algèbre que l'enseignant a construit préalablement, ce qui peut l'amener à ajuster différemment sa pratique enseignante et peut-être même l'organisation au niveau de la gestion didactique et pédagogique de sa classe. Ces contraintes, liées aux statuts et à l'ancienneté des enseignants, peuvent influencer leur manière d'intégrer les nouvelles recommandations des programmes.

Nous avons étudié le partage des responsabilités « *Le Topos* » entre le l'enseignant et l'élève lors des séquences de classe qui sont favorables à des interactions ayant précisément pour objet les apprentissages des élèves. Nous regardons s'il y a prise en compte des recommandations indiquées dans les programmes de 2016, dans la partie dédiée au rôle de l'élève : « L'approche par compétences présuppose l'adoption de modèles d'apprentissage qui placent l'élève au centre de l'acte enseignement/apprentissage, [...] » (Programmes, 2016, p. 39).

Les éléments théoriques étant posés, nous présentons la méthodologie suivie pour l'analyse des pratiques enseignantes du global au local, qui concerne l'étude de 456 fiches de 76 enseignants (73 non observés + 03 observés) et le suivi en classes de trois enseignantes (P_{DA} , P_L et P_M) observées lors de leurs enseignements du chapitre « calcul littéral » en classes de la deuxième année de l'enseignement moyen (cinquième en France).

III. ÉVOLUTION DU RAPPORT INSTITUTIONNEL À L'ALGÈBRE AU COURS DES RÉFORMES DE 1983, 2003 ET 2016

Tout d'abord, nous présentons les principaux résultats de l'étude comparative des programmes et documents d'accompagnement de 1983, 2003 et 2016 avec un éclairage sur le contexte institutionnel lors de ces réformes (Kebbouche, 2022).

En 1983, l'enseignement de l'algèbre était essentiellement un enseignement formalisé autour d'objets mathématiques (nombres, polynômes et équations) et était entièrement en arabe, y compris l'écriture mathématique. Ces programmes distinguent deux domaines : l'arithmétique et l'algèbre au-delà de la géométrie. Le rapport institutionnel à l'algèbre en 1983 relevait de l'arithmétique généralisée, et aucun travail antérieur n'avait été prévu pour favoriser une introduction à l'algèbre. L'organisation mathématique globale du domaine de l'algèbre est structurée en deux organisations mathématiques régionales liées aux expressions algébriques et équations, limitées à l'OML_{3exp} et à l'OML_{3eq} développées à partir de la 8AF (huitième année de l'enseignement fondamental, deuxième année du collège). L'organisation didactique est de type « cours magistral et applications », le Topos de l'élève étant très réduit.

La réforme de 2003 introduit des changements significatifs que ce soit au niveau de l'écriture mathématique universelle, de l'organisation mathématique et de l'organisation didactique de l'enseignement de l'algèbre. Cette réforme promeut un rôle majeur pour la résolution de problèmes dans l'activité mathématique. Contrairement à 1983, il n'existe plus de domaine arithmétique et algèbre et l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre est majoritairement réalisé dans le domaine « activités numériques ». De plus, l'instabilité dans la dénomination des secteurs « calcul littéral » et « résolution des équations » en 1AM et en 2AM génère une difficulté à repérer les habitats des expressions algébriques et des équations et à délimiter les organisations mathématiques régionales relatives à ces deux objets.

Le rapport institutionnel à l'algèbre attendu en 2003 prend davantage en compte le processus d'algébrisation (Ruiz Munzon, 2012), mais l'OMR relative aux expressions algébriques reste incomplète dans les attendus du programme de 2003 en particulier OML_{1exp} dans les programmes de la 1AM. Les types de tâches de l'OML_{1exp}, le bloc Logos et les situations motivant les expressions algébriques sont davantage précisées dans les ressources (documents d'accompagnement). L'OML_{2exp} est présente à travers le type de tâches T_7 (tester la validité d'une égalité ou d'une inégalité) à partir de la 2AM sans être réinvestie pour définir la solution d'une équation, la technique arithmétique de résolution d'équations de type $a + x = b$; $a - x = b$; $a \times x = b$; $a \div x = b$ restant la seule attendue en 2AM.

Une nouvelle organisation didactique autour des différents moments de l'étude (introduction, institutionnalisation, travail de la technique) vise à placer la résolution de problèmes au cœur de l'activité des élèves pour motiver des raisons d'être des expressions algébriques et des équations et à donner potentiellement plus de place au topos de l'élève.

La réforme de 2016 est en continuité par rapport à celle de 2003, aussi bien au niveau de l'écriture mathématique universelle, du rôle majeur de la résolution de problèmes dans l'activité mathématique et de l'organisation didactique de l'enseignement de l'algèbre. Il n'y a plus de référence aux difficultés engendrées par le passage de la langue arabe à l'écriture mathématique universelle et les documents d'accompagnement relatifs à l'organisation didactique de l'enseignement restent identiques à ceux de 2003. Contrairement à 2003, le rapport institutionnel à l'algèbre visé en 2016 prend en compte le processus d'algébrisation depuis la 1AM ce qui permet de compléter le développement de l'OML_{1exp}. L'instabilité dans la dénomination des secteurs « calcul littéral » et « résolution des équations » subsiste en 1AM et en 2AM. En 2AM, la seule présence du secteur « résolution des équations » et l'absence d'un habitat pour les expressions algébriques pour aborder la construction des organisations mathématiques régionales relatives aux expressions algébriques et aux équations rend plus difficile le repérage des objets mathématiques travaillés. Comme en 2003, l'organisation didactique de l'enseignement de l'algèbre prévue dans les programmes de 2016 vise à donner une place plus importante au Topos de l'élève dans la construction des savoirs.

Pour conclure, nous présentons dans le tableau ci-dessous l'évolution de l'organisation mathématique globale de l'algèbre en 2AM au cours des trois réformes (**Annexe 1**).

IV. MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE DES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS NON OBSERVÉS ET OBSERVÉS

Notre étude sur les pratiques enseignantes dans le contexte de la réforme de 2016 dans l'enseignement moyen en Algérie est amorcée par une analyse du scénario choisi par l'enseignant ainsi que les cheminements d'enseignement qu'il organise pendant ses séances et leur adéquation au regard des programmes de 2016. Notre analyse est structurée suivant plusieurs axes :

- L'analyse de la praxéologie didactique développée par l'enseignant lors de son enseignement et la prise en compte des différents moments de l'étude,
- L'analyse des praxéologies mathématiques déclarées en termes de complétude et de présence du discours justifiant les techniques (praxéologie muette, faible ou forte),
- La dynamique entre praxéologies mathématiques relative aux expressions algébriques et aux équations,
- La Topogenèse organisée par l'enseignant.

Cette étude permet d'avoir accès à des aspects des pratiques enseignantes au cours de ces six séances (Six séances dédiées au chapitre calcul littéral). La stabilité des pratiques (Robert et al., 2007) nous permet d'inférer que ces aspects sont pertinents pour dégager des caractéristiques des pratiques des enseignants.

L'étude concernant les trois premiers axes porte sur les fiches de séquences des 76 enseignants (73 non observés et 03 observés) et une première entrée concernant le quatrième axe sera réalisée à partir de l'analyse des vidéos relatives à la séance d'introduction pour les trois enseignants.

Pour tous les enseignants, l'étude praxéologique des fiches enseignants et tout document réalisé et transmis par l'enseignant aux élèves relativement à l'introduction et à la génération des expressions algébriques, permettra d'étudier les praxéologies déclarées et leur adaptation à la réforme de 2016. Pour

les trois enseignants observés, l'analyse des vidéos filmées des séances de classe a permis d'affiner l'analyse précédente et de repérer aussi des éléments relatifs à la gestion effective des raisons d'être des expressions algébriques et du Topos de l'élève au cours de la gestion en classe (recherche des situations et exercices, mise en commun des solutions et institutionnalisation).

Cette étude nous a permis d'étudier l'adaptation des enseignants à la mise en place de la réforme de 2016, compte tenu des contraintes auxquelles ils sont soumis en particulier l'ancienneté et la Wilaya dans laquelle ils enseignent.

1. Catégorisation des fiches des enseignants selon les situations abordées.

Nous présentons ici les catégories de fiches indiquant la prise en compte des programmes de 2016 ou non, à partir de l'analyse de l'ensemble des six fiches pour chaque enseignant. Nous les avons classés selon leur contenu, à savoir les activités proposées pour introduire et institutionnaliser les objets mathématiques, expressions algébriques et équations, relatifs au chapitre « notion d'équation » au regard du programme 2016, en lien avec le découpage en séances (**Annexe 2**).

V. PRINCIPAUX RÉSULTATS RELATIFS À L'ÉTUDE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES DÉCLARÉES ET EFFECTIVES

L'évolution observée des organisations mathématiques et didactiques à enseigner dans les ressources institutionnelles de 2003 et 2016, notamment en ce qui concerne l'enseignement des expressions algébriques et des équations, nous a amenés à questionner la manière dont les enseignants s'adaptent à ces évolutions. En effet, les pratiques enseignantes, souvent ancrées dans des habitudes, peuvent ne pas évoluer au même rythme que les ressources. En se situant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, nous présentons les résultats de notre recherche qui permettent de préciser la nature de ces résistances et d'identifier les facteurs favorisant l'évolution des pratiques enseignantes.

1. Relativement aux pratiques déclarées

Rôle majeur de l'organisation mathématique de référence de l'algèbre

Les organisations mathématiques de référence pour les expressions algébriques et les équations ont été utilisées pour caractériser les programmes d'algèbre au fil des réformes.

Une synthèse des aspects épistémologiques de l'algèbre a été réalisée en s'appuyant sur des recherches en didactique de l'algèbre.

Les organisations mathématiques de référence de Pilet (2012) et Sirejacob (2017) ont été adaptées au contexte Algérien et utilisées pour analyser les programmes et les ressources institutionnelles (documents d'accompagnement, guides pédagogiques et manuel scolaire de la 2^e année de l'enseignement moyen).

Méthodologie adaptée pour mener la recherche

L'analyse des programmes et des ressources institutionnelles a permis de définir les caractéristiques de chaque rapport institutionnel à l'algèbre, de les comparer et d'identifier les ruptures et décalages entre eux. Des implicites par rapport aux organisations mathématiques de référence ont également été relevés.

Cette analyse a permis de répondre aux questions de recherche relatives à la dimension institutionnelle et de cerner les perturbations exogènes.

Elle a également servi à fonder la deuxième partie de la recherche, qui s'est focalisée sur la dimension professionnelle et à cerner les perturbations endogènes à partir de l'étude des pratiques enseignantes déclarées et effectives, à catégoriser les pratiques enseignantes déclarées et à dégager des aspects saillants des pratiques effectives de trois enseignantes.

Une résistance à la prise en compte des programmes de 2016

Même si tous les enseignants organisent l'enseignement selon les moments de l'étude attendus, ils interprètent différemment les programmes. Aussi leurs fiches se répartissent dans les quatre catégories (des perturbations exogènes). L'analyse du tableau (Annexe 3), montre que plus de 22% des fiches de notre échantillon relèvent de la catégorie C₁. 35 % des fiches des enseignants relèvent de la catégorie C₂. Pour ces enseignants aucun travail sur les expressions algébriques ni sur les organisations mathématiques associées n'est présent. Seuls 43% engagent les prescriptions institutionnelles de 2016. Nous remarquons aussi une variabilité des pratiques des enseignants titulaires et formateurs.

Relation entre catégories et profil des enseignants

Nous avons mis en relation catégories de pratiques et profil des enseignants selon leur ancienneté, leur statut et leur appartenance à une wilaya (Département) (**Annexe 3**).

Il n'y a pas d'uniformité des organisations mathématiques enseignées selon le statut des enseignants, ni selon les établissements d'une même wilaya. Ce qui peut s'expliquer par le fait qu'il y a un formateur pour chaque établissement d'une wilaya. D'autres perturbations endogènes peuvent aussi intervenir. En ce qui concerne l'ancienneté, deux tiers des enseignants n'ayant mis en œuvre que la réforme de 2016, en particulier la majorité des stagiaires, proposent des enseignements proches de ce qui est prescrit en (C₃).

Après l'étude des pratiques déclarées des 76 enseignants, nous avons étudié les pratiques effectives des trois enseignantes. Après l'étude praxéologique de leurs fiches, nous avons transcrit puis analysé leur 1^{re} vidéo qui nous semble représentative de leurs pratiques tout au long de la séquence. Au vu du visionnage de l'ensemble des vidéos d'une séquence qui présentait une stabilité relative des pratiques au sens de (Robert, 2007). L'enjeu était d'identifier les décalages entre les OM et OD déclarées et celles effectivement réalisées en classe.

Les résultats de l'analyse des pratiques effectives des trois enseignantes montrent une variation dans la prise en compte du programme de 2016 (**Annexe 4**).

2. Relativement aux pratiques effectives

Les aspects saillants des pratiques de Dalia (P_{Dalia})

Nous illustrons maintenant des aspects saillants des pratiques de Dalia

- P_{Dalia} : Maintenant, qui peut s'exprimer sur la longueur de AB en fonction de x ? En fonction de x veut dire on utilise la lettre x .
- E : La longueur de ce segment est $12+x \times 2$
- P_{Dalia} : écrit sur le tableau : $AB=12+x \times 2$
- P_{Dalia} : Que veut-on dire $x \times 2$?
- E : deux fois x

- P_{Dalia} : C'est la somme de **x plus x**
- P_{Dalia} : **$x \times 2$** égale à quoi ?
- E : **$2x$**
- P_{Dalia} : Donc : **$AB = 12 + 2x$** et on dit qu'on a exprimé la longueur **AB** en fonction de **x**

D'abord, elle permet aux élèves de rencontrer les savoirs algébriques déjà travaillés et 1AM et en début d'année et favorise la dialectique **ancien / nouveau**

Par exemple : à partir de la production des expressions produites par les élèves pour calculer la longueur du segment AB, Dalia insiste sur la réécriture d'une expression algébrique en s'appuyant sur la signification des signes $\times$, $+$ et l'équivalence d'expressions telles que : $x \times 2$, $x + x$ et $2x$.

Une institutionnalisation visant des aspects épistémologiques des expressions algébriques.

« Tester l'égalité de deux expressions littérales signifie substituer des lettres par des nombres pour voir si cette égalité est vraie ou fausse pour ces nombres. »

« Les deux expressions $2 \times (x + 3)$ et $2x + 6$ sont égales selon la distributivité simple, les deux expressions donnent le même résultat quelle que soit la valeur donnée à x .

Les deux expressions : $3 + 2x$ et $3x$ donnent un même résultat pour $x = 3$ on dit que $x = 3$ est une solution de l'équation : $3 + 2x = 3x$ ».

Pour conclure, Dalia mobilise le type de tâches tester la validité d'une égalité pour résoudre « le défi » donné en début de chapitre et d'autres problèmes d'application.

VI. CONCLUSION

L'évolution observée des organisations mathématiques et didactiques à enseigner dans les ressources institutionnelles de 2003 et 2016, notamment en ce qui concerne l'enseignement des expressions algébriques et des équations, nous ont amené à questionner la manière dont les enseignants s'adaptent à ces évolutions. En effet, les pratiques enseignantes, souvent ancrées dans des habitudes, peuvent ne pas évoluer au même rythme que les ressources. En se situant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, nous présentons les résultats de notre recherche qui permettent de préciser la nature de ces résistances et d'identifier les facteurs favorisant l'évolution des pratiques enseignantes.

1. Pratiques déclarées

- Une résistance à la prise en compte de l'évolution du programme de 2016. Selon notre analyse des fiches des enseignants observés et non observés, nous relevons ces
 - a. *Résistance au changement (22%) : (Catégorie C1a et C1b).*
 - ◆ Difficulté à accepter des modifications importantes en termes d'organisations mathématiques même si l'organisation didactique semble être prise en compte.
 - ◆ Attachement au manuel scolaire de 2003.
 - b. *Prise en compte partielle (35%) : (Catégories C2a et C2b)*
 - ◆ Prise en compte partielle des recommandations institutionnelles de 2016.
 - ◆ Savoirs mathématiques peu stabilisés.
 - ◆ Les activités des deux manuels scolaires sont reprises sans mettre en relation le type de tâche TT (tester la validité d'une équation et d'une inéquation) avec la définition de la solution d'une équation.

c. *Évolution des pratiques (43%) : (Catégories C3a, C3b et C4)*

- ♦ Prise en compte des recommandations institutionnelles (OM et OD).
- ♦ Adaptation des activités du manuel de 2016.
- ♦ Une mise en relation du type de tâche TT (tester la validité d'une équation et d'une inéquation) avec la définition de la solution d'une équation comme indiqué dans le manuel. Donc les types de tâches TT (Traduire avec TT1, TT2, TT3 et TT4) et TT (Tester la validité d'une égalité ou d'une inégalité) ont été abordés.

2. Pratiques effectives

- *Les caractéristiques des aspects les plus saillants des pratiques effectives*
 - a. Une résistance aux changements dans les pratiques (OM et OD).
 - b. Une prise en compte partielle des recommandations institutionnelles dans les pratiques (OM et OD) perturbée par des savoirs mathématiques peu stabilisés.
 - c. Une prise en compte des recommandations institutionnelles dans les pratiques (OM et OD).

Cette étude met en lumière l'importance cruciale du développement professionnel des enseignants et du travail collaboratif comme leviers fondamentaux pour l'évolution des pratiques face aux réformes et à l'adaptation curriculaire. Elle a par ailleurs révélé que les enseignants formateurs (un peu plus de 14%), qui ont à leur charge la formation des enseignants dans leur établissement, changent leurs pratiques et prennent en compte davantage les recommandations institutionnelles, même s'ils ont mis en œuvre plusieurs réformes. L'accompagnement personnalisé de ces formateurs par les inspecteurs, à travers des dispositifs de formation adaptés et un suivi régulier, constitue un levier déterminant pour faire évoluer les pratiques enseignantes. En favorisant les échanges et le travail collaboratif entre pairs, et en offrant un soutien méthodologique, les inspecteurs contribuent à renforcer la professionnalité des enseignants formateurs et à améliorer la qualité de la formation initiale et continue.

RÉFÉRENCES

- Bosch, M. et Chevallard, Y. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. Dans J. L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Hors-série de Recherches en Didactique des Mathématiques* (p. 19-40). La Pensée Sauvage.
- Chaachoua, H. (2015). Étude comparative des recherches sur l'apprentissage de l'algèbre élémentaire : rapports croisés, bilan et perspectives. Dans D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chambris, G. Cirade, S. Clivaz, S. Gobert, C. Hache, M. Hersant et C. Mangiante-Orsola (dir.), *EE17 Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif* (p. 21-40). La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Seconde partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.
- Chevallard, Y. (1990). *Pour une problématique de travail* [Document inédit]. Groupe technique « Sciences en IUFM ».
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-265.

- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Écologie et régulation. Dans *Actes de la 11ème école d'été de Didactique des Mathématiques* (p. 9-15). La Pensée Sauvage.
- Gascón, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x*, 37, 43-63.
- Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 167-210.
- Kebbouche, S. (2022). *Étude de l'évolution des pratiques enseignantes en algèbre élémentaire au collège en Algérie suite aux changements de programme : conditions et contraintes* [Thèse de doctorat inédite]. Université Paris-Cité.
- Kieran, C. (1990). Processus cognitifs impliqués dans l'apprentissage de l'algèbre scolaire. Dans P. Nesher et J. Kilpatrick (dir.), *Mathématiques et cognition : une synthèse de recherche du Groupe international pour la psychologie de l'enseignement des mathématiques* (p. 96–112). Presses universitaires de Cambridge.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. Dans F. K. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, vol. 2 (p. 707-762). I.A.P.
- Pilet, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation* [Thèse de doctorat inédite]. Université Paris-Diderot, Paris 7. http://tel.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=6185fjgi96ua6r1eb9ik8j00l7&view_this_doc=tel-00784039&version=1
- Robert, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(3), 271–312.
- Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. et Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrique-fonctionnelle. *Recherches en didactique des mathématiques, Hors-série : Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives* (p. 87-106).
- Sirejacob, S. (2017). *Le rôle de l'enseignant dans l'organisation de l'étude personnelle hors la classe de collégiens : le cas des équations du premier degré à une inconnue* [Thèse de doctorat inédite]. Université Paris Diderot, Paris 7 ; Sorbonne Paris Cité.

ANNEXE 1

Tableau 1 – L'évolution de l'organisation mathématique globale de l'algèbre en 2^e année au cours des réformes

OML	Programme 1983	Programme 2003	Programme 2016
OML _{1exp}			T_P (Produire)
OML _{2exp}		T_T (Tester)	T_T (Tester)
OML _{3exp}	T_C (T_{C3}), T_S , T_D (T_{D1} , T_{D2})	T_C (T_{C1} , T_{C2} , T_{C3}), T_S	T_C (T_{C1} , T_{C2}) T_S , T_D
OML _{1eq}		T_M (T_{M1}), T_T (T_{T1} , T_{T2}), T_A (T_{A1})	T_M (T_{M1})
OML _{2eq}			
OML _{3eq}	T_R (T_{R0} , T_{R1})	T_R (T_{R0})	T_R (T_{R0})

ANNEXE 2

Tableau 2 – Les catégories de fiches

Catégories	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
Contenus	* Reprise des activités du manuel de 2003 « OM Équations » : $a + x = b$, $a - x = b$, $a \times x = b$ et $a \div x = b$	* Prise en compte des activités 3 et 4 du manuel de 2016 * OM Équations $a \times x = b$ et $a \div x = b$ * T_T Tester la validité d'une égalité	Activités du manuel de 2016 OM expressions algébriques T_T Tester la validité d'une égalité OM Équations $a \div x = b$	Activité « Défi » du manuel de 2016 Activités et OM du manuel de 2016 Réinvestissement de Tester la validité d'une égalité dans la résolution de problèmes

ANNEXE 3

Tableau 3 – Répartition des fiches des enseignants selon les catégories

Profils des enseignants	Fiches (Catégorie 1, C ₁)	Fiches (Catégorie 2, C ₂)	Fiches (Catégorie 3, C ₃)	Fiches (Catégorie 4, C ₄)	Nombre de fiches
Stagiaires	01	01	14	00	
Titulaires	09	11	07	00	
Formateurs	06	15	10	01	
Total	16	26	31	01	74 + 2 N.C ¹
%	22%	35%	42%	1%	100%

ANNEXE 4

Tableau 4 – *Les pratiques effectives des enseignantes selon les catégories*

Enseignant	Catégorie	Pratiques
P _M	C ₁	Une résistance aux changements (organisations mathématiques et didactiques) et met en place un enseignement portant sur les équations avec des techniques arithmétique.
P _L	C ₂	Une prise en compte partielle des recommandations institutionnelles (organisations mathématiques et didactiques) perturbée par des savoirs mathématiques peu stabilisés.
P _{Dalia}	C ₄	Une prise en compte des recommandations institutionnelles (organisations mathématiques et didactiques) qu'elle développe les OM attendues relatives aux expressions algébriques et les agrège à l'OM Tester la validité d'une égalité pour définir la solution d'une équation. Dalia propose une gestion didactique favorisant un topos important de l'élève.

TRAVAIL COLLABORATIF POUR RÉDUIRE L'ÉCART ENTRE LES TÂCHES ATTENDUES D'UNE ENSEIGNANTE ET D'UNE CHERCHEUSE LORS DE LA GÉNÉRALISATION ALGÈBRIQUE

| ANTOUN* ZITA

Résumé | Lors d'une recherche collaborative, la chercheuse et une enseignante ont travaillé ensemble afin de diminuer l'écart entre leurs tâches attendues autour de la généralisation algébrique (élèves de 13-14 ans). Le questionnaire administré aux élèves apparaît comme une porte d'entrée pour entamer un travail collaboratif, celui-ci étant source de développement professionnel pour l'enseignante et d'une meilleure compréhension du métier d'enseignant pour la chercheuse.

Mots-clés : double approche, recherche collaborative, écart, tâches attendues, généralisation algébrique

Abstract | In a collaborative research project, the researcher and a teacher worked together to narrow the gap between their expected tasks around algebraic generalization (students aged 13-14). The questionnaire administered to the pupils appeared to be a gateway to collaborative work, a source of professional development for the teacher and a better understanding of the teaching profession for the researcher.

Keywords: Double approach, collaborative research, gap, expected tasks, algebraic generalization

I. CONTEXTE DE L'ÉTUDE

1. Visée de la recherche

Sans être le propre de l'algèbre, la généralisation est décrite par Mason (1996) comme le moteur des mathématiques et elle est l'une des activités algébriques élémentaires du modèle GTG de Kieran (2007) nommée *activité générative*. Plusieurs chercheurs de différents pays se sont intéressés à la généralisation algébrique (Bednarz, 2005 ; Boaler et Humphreys, 2005 ; Coulange et Grugeon, 2008 ; Denis, 1997 ; Hitt et al., 2017 ; Radford, 2010 ; Squalli, 2015 ; Tremblay et Saboya, 2020 ; Vlassis et Demonty, 2019 ; Vlassis et al., 2017). La plupart de ces études se penchent sur ce que font les élèves et peu d'entre elles s'attardent à ce que font et ce qui guide les enseignants lors de la généralisation algébrique. Coulange et Grugeon (2008) soulignent, à cet effet, un écart entre les avancées de la recherche et ce qui est fait notamment par une enseignante. Notre objectif est de *Mieux comprendre cet écart et d'étudier sa possible réduction à travers un travail collaboratif entre la chercheuse et une enseignante de la 2^e année du secondaire (élèves de 13-14 ans).*

2. Tâche attendue de la chercheuse pour la généralisation algébrique

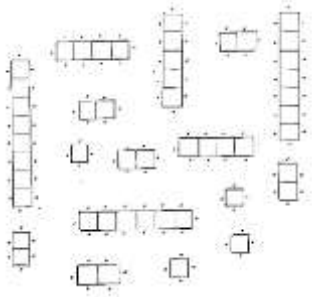
Rogalski (2003) et Vinatier (2009) reconnaissent différents types de tâches et d'activités en enseignement. Dans ce texte, nous nous restreignons à la tâche attendue. Pour un enseignant, celle-ci est définie comme « la traduction des prescriptions, des choix des situations, des ajustements pédagogiques, une prise en compte de l'hétérogénéité de la population scolaire » (Vinatier, 2009, p. 72). Nous pouvons considérer la tâche attendue d'un chercheur comme le cadre construit par celui-ci à travers la croisée de la littérature (ici les recherches en didactique de l'algèbre) et de son expérience en

* Université du Québec à Montréal – Canada – antoun.zita@uqam.ca

formation. En ce qui concerne la généralisation algébrique, la chercheuse privilégie des situations ayant certaines caractéristiques. La figure 1 présente un exemple de ce type de situations.

Le restaurant de Marcel

Marcel, le propriétaire d'un restaurant, dispose de tables simples dans son restaurant qu'il place l'une à côté de l'autre pour pouvoir placer ses clients lorsqu'ils arrivent. Il dispose ainsi de différentes tables de toutes sortes de grandeurs : des grandes, des petites, des moyennes, ... (Les tables sont toujours formées de la même façon, en prenant des tables simples qu'on place côte à côte). Marcel aimerait bien ne pas avoir à compter à chaque fois les clients qui arrivent pour décider autour de quelle table il les place. Il a besoin de ton aide pour trouver une manière de calculer vite le nombre de clients qu'on peut asseoir autour d'une table, et ce, quelle soit la grandeur de la table. Notre propriétaire habite loin et il attend que tu écrives à ce sujet.



a) Combien de clients peut-on asseoir autour de 3 tables ?

b) Combien de clients peut-on asseoir autour de 8 tables ?

c) Comment peut-on trouver le nombre de clients que l'on peut asseoir autour de 56 tables et ce, sans compter les clients un à un ?

d) Écris un message en mots à Marcel qui lui indiquerait une manière de faire pour trouver rapidement le nombre de clients qu'il peut asseoir autour d'une table, et ce, pour n'importe quelle table.

e) Vois-tu une autre façon de procéder pour compter rapidement le nombre de clients qui peuvent s'asseoir sur n'importe quelle table ?

f) Si on sait que 124 clients arrivent au restaurant, de combien de tables aura besoin Marcel ?

Figure 1 – Situation Le restaurant de Marcel (Bednarz, 2005) adaptée par la chercheuse

Ainsi, pour la chercheuse comme pour d'autres chercheurs (par ex., Bednarz, 2013 ; Combiér et al. 1996 ; Radford, 2010), la généralisation algébrique est un moyen d'introduire les notations littérales en mathématiques. Les élèves sont sollicités pour écrire d'abord des messages en mots puis des formules visant ainsi à faire naître chez eux le besoin d'utiliser des symboles (littéraux ou pas). Pour cela, les motifs figurés sont privilégiés. L'étude de motifs consiste d'abord à concentrer son attention de manière à percevoir et à rendre compte de ce qui est commun entre les motifs et en quoi ils diffèrent (initiation à la visualisation mathématique). Mulligan et al. (2004) parlent de l'appréhension de la structure des motifs et de la recherche du principe générateur, ce qui conduit à la formation d'une formule. Ainsi, dans la formulation des questions (voir figure 1), la symbolisation n'est pas présente mais la question amène l'élève à y avoir recours.

Tout comme Küchemann (2010), la chercheuse axe sur l'utilisation non séquentielle de motifs parce que l'ordonnancement des motifs aiguille l'élève sur une façon de percevoir la progression. Celui-ci s'attarde à un motif, au motif suivant et au précédent, l'approche terme à terme est ainsi privilégiée au détriment d'un travail de mise en relation certes plus important, mais menant, de plus, à une diversité de façons de percevoir ce qui change et ce qui se répète. En outre, la chercheuse privilégie l'ajout d'un contexte réel (Ainley et al. 2003 ; Bednarz, 2005 ; Demonty et al. 2018 ; Ellis, 2007 ; Labrosse, 2020 ; Landry, 1999 ; Mary, Squalli et Schmidt, 2014 ; Wozniak, 2020). Ainley et al. (2003) soulignent que les élèves qui généralisent en s'appuyant à la fois sur le contexte et sur les calculs sont capables de justifier plus facilement les expressions obtenues mais ils ont également remarqué que certaines descriptions verbales sont empreintes du contexte, ce qui ne facilite pas le passage vers des expressions algébriques.

II. REPÈRES THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES

Le cadre sollicité dans cette recherche est *la double approche ergonomique et didactique* de Robert et Rogalski (2002) dans lequel le point de vue didactique à travers les composantes *cognitive* et *médiative* est agencé au point de vue ergonomique sous les composantes *personnelle*, *institutionnelle* et *sociale*. Les deux premières composantes renseignent sur l'organisation de la séance prévue par l'enseignant et sur ses actions pendant le déroulement de la séance (Robert et Rogalski, 2002). Ainsi, la composante cognitive s'attarde aux tâches prévues pour les élèves et les apprentissages mathématiques qui peuvent en découler. À travers la composante médiative, on s'intéresse à la fois au choix de l'organisation du travail des élèves dans la classe et à l'action directe de l'enseignant pendant le déroulement en classe (Robert, 2012). Du point de vue ergonomique, la composante sociale recouvre la façon dont l'enseignant prend en compte le travail avec ses collègues ainsi que l'interaction avec d'autres acteurs du milieu scolaire comme les parents et la composante personnelle est liée aux conceptions de l'enseignant sur l'enseignement et l'apprentissage ainsi que son rapport personnel aux mathématiques. Finalement, la composante institutionnelle (dimension ergonomique) est liée aux textes officiels dont font partie les programmes et les diverses contraintes administratives qui impactent les pratiques enseignantes (Pariès et al., 2008 ; Rogalski, 2008). Kermen et Barroso (2013) précisent que Robert en 2012 ne détaille plus l'origine de chaque composante, se contentant de mentionner le type d'analyse permettant d'y accéder, tout en soulignant qu'elles sont imbriquées.

Une recherche collaborative (Bednarz, 2013 ; Desgagné, 1997) a été menée avec une enseignante de la région de Montréal que nous nommons Maria. Dans ce type de recherche, l'enseignant joue un rôle actif considéré comme un « praticien réflexif » (Schön, 1994) qui peut, dans l'expérience et l'action, grâce à la réflexion et à l'explicitation, construire des savoirs (Bourassa et al., 2007 ; Desgagné et Bednarz, 2005). Maria a 15 ans d'expérience en enseignement au secondaire au Québec (élèves de 12-17 ans). Elle s'est investie auprès de différents groupes d'élèves, au régulier, dans des classes enrichies et avec des groupes d'élèves classés en difficultés d'apprentissage. Elle exprime son intérêt pour participer à une recherche collaborative qu'elle entrevoit comme une occasion de formation continue. Tel qu'elle le précise, son but est l'amélioration de sa pratique, elle cherche à « s'outiller » en s'ouvrant à d'autres façons d'enseigner, à des « méthodes » qui vont lui permettre d'atteindre le plus d'élèves possibles. Elle entrevoit ainsi de partager avec la chercheuse sa « façon de faire travailler les élèves en algèbre », ses « stratégies de travail » et elle attend que la chercheuse lui présente d'autres façons de faire, ce sera « comme un partage équitable ». De son côté, la chercheuse, à travers le travail en collaboration, cherche à s'enrichir de l'expertise de Maria acquise dans sa pratique, à exposer sa tâche attendue et rendre visible celle de l'enseignante en ce qui a trait à la généralisation algébrique. L'expérimentation a pris place à la dernière étape de l'année scolaire¹. À ce moment, les élèves avaient travaillé en algèbre au cours des deux premières étapes.

Plusieurs instruments de collecte de données ont été utilisés : *deux rencontres avant toute expérimentation en classe, les documents utilisés par l'enseignante, une séance d'observation en classe avant toute expérimentation et cinq rencontres réflexives entre chercheuse et enseignante* dans lesquelles était visée l'élaboration conjointe de situations et d'interventions en algèbre. De plus, ces rencontres ont été entrecoupées par des expérimentations en classe. En outre, afin d'alimenter les discussions lors de la première rencontre réflexive, la chercheuse a proposé à l'enseignante de faire passer un questionnaire aux élèves, celui-ci comportant des questions portant sur ce que les élèves avaient étudié en algèbre lors des deux premières étapes ainsi que la situation du restaurant de Marcel (voir figure 1). L'objectif étant d'avoir une base de discussion lors de la première rencontre réflexive. Les résultats des élèves au questionnaire

¹ L'année scolaire au Québec est divisée en trois étapes, la troisième étape débute généralement à la mi-mars.

et discutés lors de la première rencontre réflexive sont apparus comme un levier pour ouvrir le travail collaboratif entre les deux participantes autour de la généralisation algébrique.

III. PREMIERS RÉSULTATS

Les deux rencontres avec l'enseignante avant l'expérimentation, les documents de l'enseignante, l'observation d'une séance en classe avant l'expérimentation et la première rencontre réflexive permettent de saisir la tâche attendue de l'enseignante à ce qui a trait à la généralisation algébrique².

1. Tâche attendue par l'enseignante pour la généralisation algébrique

S'appuyant sur les difficultés des élèves qu'elle a observées au long des années (notamment l'enseignante souligne qu'il y a des élèves qui n'ont jamais réussi les mathématiques du primaire et de la première année du secondaire) sur le fait que l'algèbre est un contenu qui est introduit pour la première fois en secondaire 2 (élèves de 13-14 ans) et que la géométrie n'a pas été travaillée en secondaire 1, Maria a choisi d'enseigner en spirale tout au long de l'année pour revenir à diverses reprises sur les contenus mathématiques. L'enseignante précise qu'elle a élaboré des documents de notes de cours et qu'elle les a modifiés suite à ses observations sur les difficultés des élèves et les discussions avec ses collègues. Les changements rendent compte d'un questionnement, une réflexion de la part de l'enseignante sur sa planification de base : « J'ai comme enlevé pas mal de choses, j'ai refait pas mal de choses-là. Je les bâtis à ma façon. Ouais, parce que souvent il vaut mieux l'adapter ». Ces échanges mettent de l'avant les composantes sociale, institutionnelle, cognitive et personnelle de Maria qui apparaissent imbriquées.

Ainsi, l'enseignante travaille les contenus algébriques dans les trois étapes de l'année scolaire. À chacune de ces étapes, elle reprend ce qui a été fait à l'étape précédente et pousse plus loin. On en apprend ainsi sur la dimension didactique (cognitive et médiative) de la pratique de Maria ainsi que sur la composante personnelle (dimension ergonomique). À la première étape, l'enseignante s'attarde à ce qu'elle considère être les préalables dont ont besoin les élèves pour aborder l'algèbre. Ces préalables touchent à des concepts en arithmétique par exemple les nombres entiers, les opérations, les exposants et les fractions. Par la suite, Maria introduit le langage mathématique en s'attardant sur des exercices de traduction d'expressions langagières en français, par exemple, *Le triple de la somme de d et de 5*, *La demi de b*, *5 de moins que le tiers de n*. Lors des deux premières rencontres avec l'enseignante avant l'expérimentation et de l'observation en classe, nous avons pu remarquer que la rigueur mathématique est essentielle pour l'enseignante, c'est important pour elle d'utiliser les bons termes (composante personnelle). À la deuxième étape (fin novembre), l'enseignante poursuit l'enseignement de l'algèbre de façon entrecoupée. Maria débute cette étape par l'introduction des expressions algébriques, puis elle présente la *terminologie de l'algèbre et la réduction des expressions algébriques* (+ ; - ; × ; ÷). Elle déclare qu'elle introduit les expressions algébriques à travers des petits problèmes dans lesquels elle demande aux élèves de trouver une expression algébrique comme dans cet exemple :

André a acheté 4 articles. Le premier coûte x \$. Le second coûte 10 \$ de plus que le double du premier. Le troisième coûte la moitié du premier. Et le dernier vaut 5 \$ de moins que le triple du premier.

a) Donne l'expression algébrique qui donne le montant total de ses achats.

b) S'il a payé avec un billet de 100 \$. Quelle est l'expression algébrique qui représente la monnaie que lui rend la caisse ?

² Ce texte s'appuie uniquement sur l'analyse de ces données.

Nous pouvons remarquer que dans cet exemple, la symbolisation est imposée, ce qui est le cas pour toutes les questions qui sont dans les documents destinés aux élèves.

Maria débute la troisième étape (début mars) avec l'étude des polygones. Notre séance d'observation a pris place dans une séance où elle procède à la généralisation algébrique en contexte géométrique en demandant aux élèves d'élaborer une formule pour trouver l'aire de tout polygone régulier. Lors de cette séance, elle encourage la construction de différentes formules par les élèves, celles-ci s'appuient sur un visuel et elle axe sur le sens de ces formules, se rapprochant de la tâche attendue par la chercheuse sur la généralisation algébrique. Par la suite, dans cette dernière étape de l'année scolaire, l'enseignante conclut l'enseignement de l'algèbre par les *équations : Résolution d'équations et Résolution de problèmes avec une équation* où l'élève est amené à réinvestir l'apprentissage fait préalablement. Par exemple, elle propose la résolution du problème suivant : *Ronald a le double des cahiers de sa sœur, puis elle a 3 de plus que son petit frère. Écris moi l'expression algébrique du nombre de cahiers qu'ils ont tous les 3 ensemble. S'ils ont 29 cahiers en tout, combien de cahiers chacun a-t-il ?* Les élèves réinvestissent donc ce qui a été fait auparavant lors de la construction d'expressions algébriques pour aller vers la résolution de problèmes. Notons que l'analyse des documents de l'enseignante amène à constater une absence de situations de généralisation telles qu'appréhendées par la chercheuse. Maria précise que pour elle la généralisation algébrique est reliée à la traduction d'énoncés en langage symbolique (composante personnelle) :

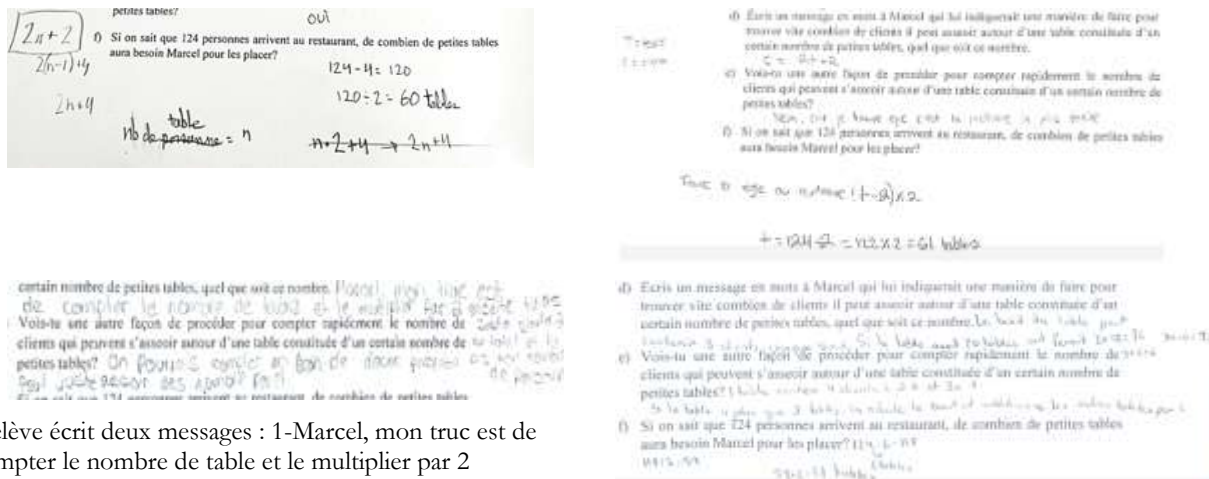
En général, on fait beaucoup d'exercices du style, lui, il a des fruits dans sa poche, on ne sait pas combien il en a mais il m'a donné 2 de moins. Combien il y en a ? Qu'est que tu fais ? On a fait de la généralisation comme ça en disant, est-ce que je peux mettre ce que je veux, par exemple f pour fruits ? oui. On a fait ça.

Ainsi pour Maria la généralisation consiste en l'introduction de la lettre pour symboliser une inconnue (composante personnelle) mais également lors de l'étude des suites, étude dont elle s'est détournée n'étant plus au programme (composante institutionnelle). Lorsque questionnée sur la séance d'observation où, aux yeux de la chercheuse, Maria présente une situation de généralisation algébrique en contexte géométrique, celle-ci reconnaît utiliser l'algèbre mais ne l'associe pas à une situation de généralisation algébrique puisqu'elle est en géométrie.

2. *Regard conjoint sur les résultats obtenus au questionnaire : une porte d'entrée pour un travail collaboratif³*

Rappelons que dans le questionnaire élaboré par la chercheuse et destiné aux élèves avant le début de l'expérimentation, la chercheuse a inséré la situation de généralisation du restaurant de Marcel. Maria accepte de passer le questionnaire tel que proposé mais elle précise craindre que le support visuel (les motifs figurés) soit une source de difficultés pour les élèves. Il ressort que les différentes questions du questionnaire n'ont pas un taux de réussite très élevé. Ainsi, malgré que le vocabulaire algébrique ait été enseigné à la première étape de l'année scolaire et qu'un retour ait été fait à la deuxième étape, plusieurs difficultés liées à la traduction algébrique des expressions se font sentir chez la majorité des élèves. Ces derniers confondent les relations « fois plus » et « de plus » et ils démontrent une faible maîtrise des manipulations algébriques (distributivité et addition et soustraction de termes semblables, etc.). Les élèves semblent ne pas donner de sens à la lettre et aux opérations. Maria est déçue par ce constat, elle reconnaît que les élèves ont des difficultés récurrentes en algèbre ce qui l'a amenée, au cours du temps, à axer sur un travail portant sur la traduction d'énoncés et qui prend place aux deux premières étapes, elle espère ainsi asseoir la compréhension du symbolisme. Pour le restaurant de Marcel, peu d'élèves ont répondu. Toutefois, Maria est étonnée par les messages en mots et formules ressortis par certains de ses élèves qui ne sont pas les plus forts de la classe (voir figure 2).

³ C'est un travail de co-construction entre enseignante et chercheuse.



L'élève écrit deux messages : 1-Marcel, mon truc est de compter le nombre de table et le multiplier par 2 ensuite tu as juste à ajouter 2 au total et tu as ton nombre de personnes. 2-on pourrait compter en bon de deux parce qu'on peut juste asseoir des nombres pairs.

L'élève écrit : 1-Le bout de table peut contenir 3 clients, chaque bout. Si la table avait 20 tables, on ferait $2 \times 18 = 36$; $3 + 3$; $36 + 6 = 42$. 2- si la table a plus que 3 tables, on calcule le bout et additionne les autres tables par 2.

Figure 2 – Messages en mots et formules ressortis par des élèves pour la situation du restaurant de Marcel

Maria est saisie par la diversité des messages des élèves sous forme symbolique ou en mots et l'utilisation de différentes lettres pour la symbolisation. Elle est agréablement surprise, elle ne s'attendait pas à ce que certains de ses élèves soient capables de trouver une formule en s'appuyant sur le visuel. Rappelons que cette situation n'est pas familière pour les élèves, elle ne ressemble pas aux situations proposées antérieurement par l'enseignante ni par sa forme ni par le contenu. Constatant que des élèves ont eu recours à une lettre (symbolisation) sans que celle-ci leur soit imposée, l'enseignante reconnaît le potentiel de ce type de situations et propose d'y revenir avec les élèves :

C'est déjà bien qu'ils pensent à donner des variables qu'ils ne connaissent pas. Je trouve que c'est déjà bien. Mais, moi, je pense en même-temps, vous me le dites. Moi, l'idée sur la table, j'aimerais bien qu'ils reviennent dessus. (...) J'aime bien ces problèmes parce qu'ils sortent de l'ordinaire, de ce qu'on fait. Dans le sens où ça sera bien de les redonner après (...) Oui, c'est bien de voir ça par la suite.

3. Écart entre les tâches attendues et travail collaboratif pour réduire l'écart

Nous pouvons constater qu'il existe un écart important entre les tâches attendues de l'enseignante et de la chercheuse autour de la généralisation algébrique. Au début, Maria ne souhaite pas faire vivre ce type de situations aux élèves, elle n'en voit pas la pertinence alors que pour la chercheuse ces situations sont intéressantes à différents points de vue : pour donner du sens au symbolisme, voir que diverses symbolisations sont possibles et faciliter le passage de messages en mots en symboles. De plus, Maria n'associe pas la situation observée en classe sur la construction de la formule de l'aire de polygones réguliers à de la généralisation algébrique. Soulignons que nous avons l'impression que Maria n'enseigne pas de la même façon quand il s'agit de l'algèbre et de la géométrie. Pour la géométrie, elle laisse les élèves découvrir des formules, l'étape d'exploration est importante pour elle alors que l'enseignement en algèbre apparaît plus rigide, de la théorie est donnée et les élèves répondent à des questions guidées. La figure 3 résume l'évolution de l'écart entre les tâches attendues des deux participantes.

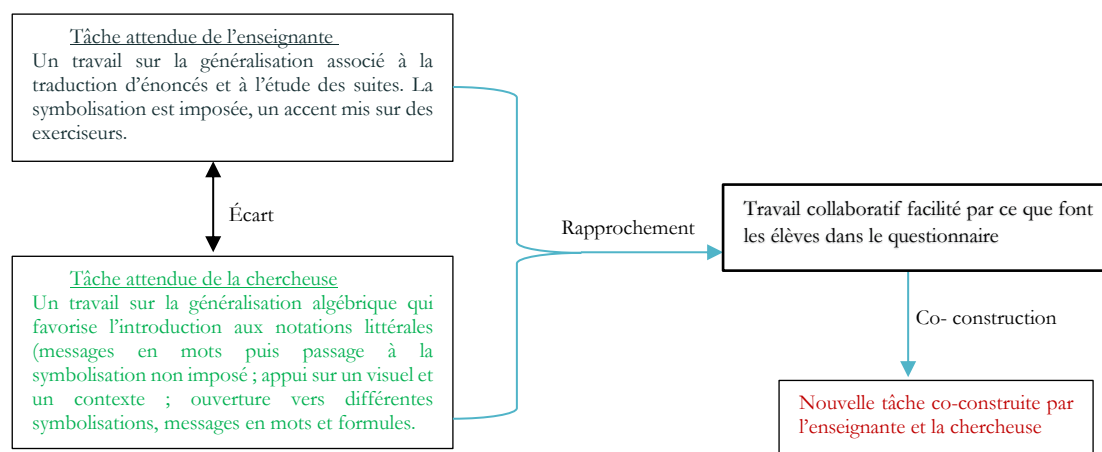


Figure 3 – Schéma synthèse de l'évolution de l'écart entre les tâches attendues de l'enseignante et la chercheuse

L'analyse met de l'avant le rôle que joue le questionnaire. Le faible taux de réussite des élèves aux questions portant sur ce qui a été vu aux deux premières étapes ainsi que le déploiement de stratégies intéressantes de certains élèves pour la situation de généralisation favorisent un travail collaboratif autour de la généralisation algébrique. Maria suggère alors de revoir sa planification de la troisième étape pour y introduire des situations de généralisation (composante cognitive). Toutefois, elle anticipe que le support visuel puisse causer des difficultés à plusieurs de ses élèves et elle suggère de choisir des situations plus faciles : « peut-être c'est mieux d'aller avec quelque chose de plus facile puis on arrêtera une période ou même deux là-dessus, ça sera super. Moi, je suis vraiment ouverte ». La chercheuse propose alors deux autres situations recensées dans la recherche qui sont acceptées par Maria. L'enseignante et la chercheuse s'entendent pour commencer l'expérimentation par des situations de généralisation, celles-ci permettant de donner du sens à la lettre (composante personnelle).

Un échange initié par Maria prend ensuite place autour des modalités de passation des situations (composante médiative). L'enseignante annonce préférer que les élèves travaillent seuls pour gérer la classe plus facilement, de plus, les élèves ont l'habitude de travailler seuls surtout quand ils sont en algèbre (composante médiative). La chercheuse propose, après le travail individuel, un travail en équipe et de finir par un retour en grand groupe (Hitt et al., 2017). Ce mode de fonctionnement se rapproche de ce que Maria fait en géométrie (on réfère ici à la séance sur l'élaboration de formules pour calculer l'aire de polygones réguliers). Ce n'est donc pas une façon d'organiser la classe qui est nouvelle pour l'enseignante mais ce qui est nouveau c'est qu'elle prend place en algèbre. Par la suite, Maria ressent le besoin de revoir le contenu des cours dédiés à l'algèbre qui sont prévus à la troisième étape pour les réorganiser en y intégrant les situations de généralisation. L'enseignante élabore à cette fin un tableau dans lequel elle inscrit la fréquence des cours avec ses deux groupes, un groupe avec des élèves en difficultés d'apprentissage et un autre groupe d'élèves inscrits en filière sport (voir tableau 1). Elle visualise ainsi dans le temps le contenu algébrique pour la troisième étape en prenant en considération ses deux groupes et leurs contraintes horaires (composante institutionnelle). Elle n'a pas besoin d'aller inscrire les séances de cours sur la résolution de problèmes algébriques qui suivent le jour 7 puisqu'elle remarque qu'elle « rentre » dans le nombre de cours prévus au départ.

Tableau 1 – Nouvelle planification de la troisième étape en algèbre s'inscrivant dans le temps

Jour	Groupe	Planification
2	Élèves en difficultés d'apprentissage	Généralisation
3	Élèves en difficultés d'apprentissage	Activités sur les relations de comparaison
	Sport	Généralisation
4	Sport	Équation-la balance
	Élèves en difficultés d'apprentissage	Égalité-équation
5	Sport	Équation
	Élèves en difficultés d'apprentissage	Équation
6	Sport	Test sur l'interprétation
	Élèves en difficultés d'apprentissage	Équation
7	Sport	Activité récompense
	Élèves en difficultés d'apprentissage	Équation

Finalement, Maria et la chercheuse en arrivent à l'élaboration d'une séquence sur l'algèbre sur l'année scolaire étalée sur les trois étapes : 1) les situations de généralisation, 2) les relations de comparaison, 3) traduction d'énoncés, 4) résolution d'équations, et 5) la résolution de problèmes. Soucieuse de l'effet de l'ajout des situations de généralisation dans une séquence déjà chargée et souhaitant finir le programme de la deuxième année du secondaire (composante institutionnelle), Maria propose de couper deux pages de son document et de choisir certaines questions qui font travailler le passage du langage usuel au langage symbolique puisque celles-ci sont répétitives : « On va garder le plus intéressant. Ça ne sert à rien d'aller faire plein de choses pour rien. Je vais couper deux pages ».

IV. CONCLUSION

Le cadre de la double approche didactique et ergonomique permet de caractériser la pratique de Maria en algèbre. Ainsi, il apparaît que l'enseignante a le souci de suivre les recommandations du programme (dimension institutionnelle), ce qui fait partie du contrat professionnel entre l'enseignante et son employeur (Rogalski, 2003). De plus, elle travaille de concert avec ses collègues (composante sociale). Il est intéressant de souligner qu'elle adopte des modalités d'enseignement différentes en algèbre et en géométrie (composantes médiative et personnelle). En géométrie, elle présente des situations en s'appuyant sur un support visuel alors qu'en algèbre celui-ci apparaît source de difficultés pour les élèves. L'écart constaté entre les tâches attendues de l'enseignante et de la chercheuse pour la généralisation algébrique se réduit grâce au questionnaire administré aux deux groupes. Celui-ci représente un élément clé pour favoriser l'entrée vers le travail collaboratif sur les situations de généralisation. L'enseignante reconnaît le potentiel de ces situations pour favoriser l'émergence d'une symbolisation propre à chaque élève et d'une variété de messages, ce travail s'appuyant sur l'étude de motifs figurés. Ainsi, pour l'enseignante, la recherche collaborative est une occasion de développement professionnel. En outre, le travail collaboratif est l'occasion pour la chercheuse de se questionner sur l'enchaînement et l'imbrication des contenus mathématiques dans une année scolaire en considérant l'enseignement en spirale privilégié par l'enseignante. Ainsi, Maria amène la chercheuse à ancrer les résultats de la recherche dans le terrain, à prendre en considération les contraintes du milieu scolaire (comme l'horaire) et les spécificités de chacun des groupes. Les situations de généralisation sont incarnées dans un contexte qui a ses spécificités.

RÉFÉRENCES

- Ainley, J., Wilson, K. et Bills, L. (2003). Generalizing the context and generalizing the calculation. Dans N. A. Pateman, B. Dougherty et J. Zilliox (dir.), *Proceedings of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference held jointly with the 25th PME-NA conference, 13-18 juillet, Honolulu, Hawaï* (volume 2, p. 9-16). PME.
- Bednarz, N. (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement*. L'Harmattan.
- Bednarz, N. (2005). Parler les mathématiques. *Vie pédagogique*, 136, 20-23.
- Boaler, J. et Humphreys, C. (2005). *Connecting mathematical ideas : Middle school video cases to support teaching and learning*. Heinemann.
- Bourassa, M., Belair, L. et Chevalier, J. (2007). Les outils de la recherche participative. *Éducation et francophonie*, 35(2), 1-11. <https://doi.org/10.7202/1077645ar>
- Combiér, G., Guillaume, J. C. et Pressiat, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre !* INRP.
- Coulange, L. et Grugeon-Allys, B. (2008). Pratiques enseignantes et transmission de situations d'enseignement en algèbre. *Petit x*, 78, 5-23. <https://www.researchgate.net/publication/309995669>
- Demonty, I., Vlassis, J. et Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 99(1), 1-19. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9820-9>
- Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, 23(2), 371-393. <https://doi.org/10.7202/031921ar>
- Desgagné, S. et Bednarz, N. (2005). Médiation entre recherche et pratique en éducation : faire de la recherche « avec » plutôt que « sur » les praticiens. *Revue des sciences de l'éducation*, 31(2), 245-258. <https://doi.org/10.7202/012754ar>
- Denis, C. (1997). *Une introduction à l'algèbre en secondaire 3 : Généralisation et construction de formules*. [Mémoire de maîtrise inédit]. Université du Québec à Montréal.
- Ellis, A. (2007). Connections between generalizing and justifying : Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 194-229. <https://www.jstor.org/stable/30034866>
- Hitt, F., Saboya, M. et Cortés Zavala, C. et GRUTEAM (2017). Rupture or continuity: The arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics*, 94(1), 97-116. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9717-4>
- Kermen, I. et Barroso, M. T. (2013, aout). *Une double approche didactique et ergonomique pour caractériser l'activité d'une enseignante de physique-chimie* [Communication]. Conférence AREF, Montpellier, France. <https://www.researchgate.net/publication/259286449>
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. Dans F. K. Lester Jr. (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 707-762). Information Age Publishing.
- Küchemann, D. (2010). Using patterns generically to see structure. *Pedagogies*, 5(3), 233-250. <https://doi.org/10.1080/1554480X.2010.486147>

- Labrosse, P. (2020). *Conception et mise à l'essai d'une séquence de situations engageant un travail de communication en algèbre en 2e secondaire : des apports pour l'élève comme pour l'enseignant ?* [Thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus. <http://hdl.handle.net/1866/24276>
- Landry, M. (1999). *Développement d'habiletés en résolution de problèmes en algèbre chez des élèves du secondaire*. [Thèse de doctorat inédit]. Université du Québec à Montréal.
- Mary, C., Squalli, H. et Schmidt, S. (2014). Activité de généralisation et de justification chez des élèves en difficulté. Dans C. Mary, H. Squalli, L. Deblois et L. Theis (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : regard didactique* (p. 163-186). PUQ.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra* (p. 65-86). Kluwer.
- Mulligan, J. T., Prescott, A. et Mitchelmore, M. C. (2004). Children's development of structure in early mathematics. Dans M. Hoines et A. Fuglestad (dir.), *Proceedings of the 28th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volume 3, p. 393-401). Bergen University College.
- Pariès, M., Robert, A. et Rogalski, J. (2008). Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré. *Educational Studies in Mathematics*, 68(1), 55-80. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9108-y>
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62. <https://doi.org/10.30827/pna.v4i2.6169>
- Robert, A. (2012, 3-8 juin). *Une analyse qualitative du travail des enseignants de mathématiques du second degré en classe et pour la classe – éléments méthodologiques* [Communication]. Colloque « Les méthodes d'analyse des pratiques d'enseignement : un regard comparatif », XVIIe Congrès Mondial AMSE, Recherche en Éducation et en Formation : Enjeux et Défis aujourd'hui, Université de Reims.
- Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528. <https://doi.org/10.1080/14926150209556538>
- Rogalski, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(3), 343-388. <https://doi.org/0246-9367>
- Rogalski, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Dans F. Vanderbrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 23-30). Octares.
- Schön, D. (1994). *Le praticien réflexif*. Les éditions logiques.
- Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF2015 « Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage », 10-14 octobre 2015, Université d'Alger, Algérie* (p. 346-356). <https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF15083.pdf>
- Tremblay, M. et Saboya, M. (2020). Étude de contradictions comme levier de formation continue : un exemple autour d'activités de généralisation algébrique. Dans A. I. Sacristán, J. C. Cortés Zavala et P. M. Ruiz-Arias (dir.), *Mathematics education across cultures : Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico* (p. 324-338).

- Vinatier, I. (2009). *Pour une didactique professionnelle de l'enseignement*. PUR.
- Vlassis, J. et Demonty, I. (2019). Conceptualisation, symbolisation et interactions enseignante/enseignant-élèves dans les apprentissages mathématiques : l'exemple de la généralisation. *Éducation et francophonie*, 47(3), 98-120. <https://doi.org/10.7202/1066515ar>
- Vlassis, J., Demonty, I. et Squalli, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 131-155. <https://doi.org/10.7202/1055731ar>
- Wozniak, F. (2020). Les problèmes de généralisation à l'école élémentaire. Une étude française. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Languier (dir.), *Le développement algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires* (p. 45-70). Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/works/le_developpement_de_la_pensee_algebrique_a_lecole_primaire_et_au_debut_du_secondaire.pdf

REGARDS SUR DEUX BOUCLES ITÉRATIVES D'UN DISPOSITIF D'INTERVENTION-RECHERCHE VISANT À SOUTENIR LE DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL D'ENSEIGNANTES FAISANT L'ENSEIGNEMENT- APPRENTISSAGE DES PROBABILITÉS À L'ÉCOLE PRIMAIRE

| MARTIN* VINCENT ET HOMIER** MARIANNE

Résumé | Pour soutenir des enseignantes dans leur volonté de développement professionnel lié à l'enseignement-apprentissage des probabilités, nous mobilisons un dispositif d'intervention-recherche nommé la Clinique didactique de l'activité. Nous présentons le cas d'une enseignante dont la progression du projet didactique d'enseignement-apprentissage des probabilités témoigne, dans ce contexte, d'une augmentation de l'importance accordée à l'incertitude et d'une ouverture à l'approche subjective.

Mots-clés : enseignement-apprentissage des probabilités, école primaire, clinique didactique de l'activité, développement professionnel des personnes enseignantes, didactique des probabilités

Abstract | To support teachers in their desire for professional development related to the teaching and learning of probability, we are mobilizing an intervention-research approach called the Didactic Activity Clinic. We present the case of a teacher whose didactic project of teaching and learning probability progression demonstrates, in this context, an increase in the importance given to uncertainty and an openness to the subjective probabilistic approach.

Keywords: Probability teaching and learning, primary school, didactic activity clinic, professional development of teachers, probability education

I. MISE EN CONTEXTE

Les probabilités sont très importantes pour prendre des décisions éclairées, particulièrement dans un monde d'incertitude comme le nôtre (Álvarez-Arroyo et al., 2024). Pour soutenir le développement de la pensée probabiliste, l'enseignement-apprentissage des probabilités est prescrit tout au long du primaire (6 à 12 ans) au Québec (Gouvernement du Québec, 2009). Toutefois, cet enseignement-apprentissage semble souvent occuper une très petite place dans les classes de l'école primaire (Martin et Thibault, 2017) et plusieurs personnes enseignantes disent rencontrer d'importants défis dans la réalisation de cette activité (Batanero et Díaz, 2012 ; Borovcnik et Kapadia, 2010 ; Martin et al., 2021). Or, des personnes enseignantes déclarent avoir soif de développement professionnel en lien avec cet enseignement, mais les voies de développement ne leur apparaissent pas évidentes (Martin et al., 2022). L'offre limitée de formation continue pour l'enseignement des probabilités au Québec a d'ailleurs été soulignée ces dernières années (Martin et al., 2017, 2022a ; Nadeau et al., 2012).

De plus, le Conseil supérieur de l'éducation (2014) est clair à ce sujet : les offres de formation ne sont pas toujours en adéquation avec les besoins des personnes enseignantes québécoises. Dans son rapport, l'organisme va même jusqu'à soutenir que ce manque de cohérence entre la demande et l'offre constituerait le maillon faible du développement professionnel des personnes enseignantes. Il y est

* Université de Sherbrooke – Québec, Canada – vincent.martin@usherbrooke.ca

** Université de Sherbrooke – Québec, Canada – marianne.homier@usherbrooke.ca

d'ailleurs noté que ces dernières se sentent souvent spectatrices plutôt qu'actrices du processus de détermination de l'offre en formation continue en enseignement-apprentissage.

Devant ces constats, nous proposons une démarche a) orientée vers le soutien des personnes enseignantes dans leur volonté de poursuivre leur développement professionnel en lien avec l'enseignement-apprentissage des probabilités, b) actionnée par un travail conjoint des personnes enseignantes et chercheuses, ainsi que c) enracinée dans les contextes singuliers d'enseignement-apprentissage des probabilités des personnes enseignantes. Dans ce sens, notre objectif de recherche, qui relève à la fois d'une dimension d'intervention et d'une dimension de recherche, vise à soutenir et à documenter le développement professionnel de personnes enseignantes au regard de l'enseignement-apprentissage des probabilités au primaire.

II. CADRE DE RÉFÉRENCE : L'ANALYSE DU TRAVAIL ENSEIGNANT

Nous adoptons une posture inscrite dans le champ de l'analyse du travail (Clot, 2017), plus spécialement dans l'analyse du travail enseignant (Benoit, 2022, 2024). Ce faisant, nous mobilisons des méthodes qui permettent d'organiser une activité de mise à distance sur l'activité initiale : une activité sur l'activité (Benoit, 2022). Dans le même sens que Filippi (2020), nous voyons ainsi l'analyse de l'activité réelle comme voie de transformation dans la manière d'envisager (et de réaliser) la formation des personnes enseignantes. Ces méthodes, qui permettent aux personnes enseignantes de vivre une activité sur leur activité, ambitionnent de les soutenir dans une perspective transformative. Celles-ci servent également des intentions de recherche visant à documenter, décrire et comprendre l'activité et la transformation de l'activité de personnes. La démarche que nous réalisons est donc une intervention-recherche qui « vise à provoquer l'augmentation de la puissance d'agir des personnes enseignantes de mathématiques dans et sur leur situation » (Benoit, 2022, p. 102).

Afin de soutenir notre analyse du travail enseignant, nous convoquons les concepts de projet didactique, de controverses de métier et d'agentivité didactique. En premier lieu, nous reprenons ce que Benoit (2022) nomme le projet didactique de la personne enseignante, qu'elle élabore dans son travail conjoint d'enseignement-apprentissage auprès des (et avec les) élèves. Ce projet relève de ses intentions didactiques, c'est-à-dire des conditions qu'elle souhaite offrir aux élèves pour favoriser leur apprentissage, par exemple le recours à des ressources didactiques, des tâches ou des situations, du matériel didactique, etc. Ce projet peut être réalisé (effectivement mis en place), empêché (qui était visé, mais qui n'est pas survenu en fonction du contexte) ou souhaité (qui est envisagé dans l'avenir) par et pour la personne enseignante, selon le contexte et les contingences de son activité.

En deuxième lieu, nous considérons, dans le même sens que Dionne et al. (2019), que le « métier n'est pas univoque ni figé dans le temps, [qu']il est objet de controverses. Il est aussi dynamisé, voire revitalisé, par la mise en dialogue d'une multiplicité de voix au sein des collectifs qu'il traverse (Clot, 2017) » (p. 28). Dionne et al. (2019) parlent d'ailleurs de l'effet dynamogène ou stimulant que ces controverses de métier exercent sur la reconfiguration du rapport à l'activité de travail des personnes participantes d'un collectif. Pour Filippi (2020), ces controverses peuvent être liées à des manières de faire, tant du point de vue des échecs que des solutions, pour tenter de faire face aux difficultés identifiées collectivement. Un exemple d'une telle controverse de métier pourrait notamment émerger des entrées théoriques ou fréquentielles respectivement empruntées par deux personnes enseignantes dans des situations vécues en classe pour réaliser l'enseignement-apprentissage des probabilités. Un autre exemple pourrait être le choix de recourir ou non à du matériel de manipulation dans le cadre de cet enseignement-apprentissage.

En troisième lieu, nous mobilisons le concept d'agentivité didactique, un concept faisant écho à ce que Clot (2017) nomme le pouvoir d'agir. L'agentivité des personnes enseignantes est définie par Biesta et al. (2015) comme la contribution active de la personne enseignante à la structuration de son travail et de ses conditions de réalisation. Martin et Malo (2019) parlent pour leur part de l'agentivité didactique d'une personne enseignante qui exerce sa puissance d'agir en mobilisant des ressources à sa disposition pour réaliser ses intentions didactiques et favoriser l'apprentissage par les élèves des objets de savoir visés. Nous considérons que les personnes enseignantes se trouvent à (re)vitaliser leur agentivité didactique à travers la reconfiguration du rapport à l'activité de travail dont parlent Dionne et al. (2019). Une telle vitalisation de la puissance d'agir d'une personne enseignante pourrait par exemple se manifester par sa (ré)appropriation de documents ministériels, entre autres la Progression des apprentissages en mathématiques (Gouvernement du Québec, 2009) ou d'ouvrages didactiques pour alimenter l'enseignement-apprentissage des probabilités dans sa classe. Un autre exemple pourrait découler de la capacité d'une personne enseignante de se saisir d'une suggestion didactique formulée par un pair en lien avec l'enseignement-apprentissage des probabilités et de lui donner écho dans son activité d'enseignement.

III. MÉTHODOLOGIE

À la manière d'une Clinique didactique de l'activité (CDA), telle qu'elle a été proposée par Benoit (2022, 2024) et qui s'inspire du dispositif méthodologique de la Clinique de l'activité de Clot (2017), nous avons d'abord mis sur pied un collectif de six enseignantes et de deux personnes chercheures¹. De notre point de vue, il s'agit d'un dispositif théorique et méthodologique d'intervention-recherche à visée transformative autant pour les personnes enseignantes que didacticiennes. Du point de vue des personnes enseignantes, la CDA semble plutôt perçue comme une offre de formation à la fois personnalisée et collective (Benoit, 2022). Il s'agit d'un dispositif collaboratif dans lequel la dimension de formation se fait à travers l'activité conjointe des personnes enseignantes et des personnes chercheuses, mais où la dimension de recherche est faite (simultanément) par ces dernières sur le travail de formation (Martin et Benoit, à paraître). Quoiqu'il existe une variété d'étapes et de méthodes à l'intérieur d'une CDA en fonction des besoins des personnes participantes et des contraintes, nous avons adopté son canevas de base (Benoit, 2022), qui est décrit plus loin : rencontre initiale du collectif, enregistrements de séances de classe, autoconfrontations simples, autoconfrontations croisées et retour au collectif.

Six enseignantes ont accepté de prendre part à la démarche de manière libre et éclairée. Elles ont été libérées de leur tâche d'enseignement (à partir des fonds de recherche) pour les moments de participation à la CDA, ce qui offrait des conditions favorables pour qu'elles (déjà [sur]chargées par l'exercice de leur profession) puissent s'investir affectivement, cognitivement et temporellement dans la démarche. Au moment de prendre part au projet, les enseignantes avaient de 9 à 17 années d'expérience professionnelle en enseignement au primaire. Deux d'entre elles enseignaient en 1^{re} année, deux en 4^e année, une en 5^e année et une en 6^e année, au sein d'une même école primaire urbaine.

La démarche, qui a eu lieu de septembre à novembre 2023, s'est déroulée en cinq étapes. Premièrement, une **rencontre collective initiale** a permis de cibler conjointement un objet professionnel, qui est devenu l'objet central autour duquel toutes les étapes subséquentes de l'intervention-recherche ont été articulées. Deuxièmement, chaque enseignante a piloté deux courtes **séances d'enseignement-apprentissage des probabilités** dans sa classe, pendant lesquelles l'objet

¹ Il convient de souligner que la CDA rapportée dans ce texte a été précédée d'une première mouture qui a eu lieu au printemps 2023 et à laquelle avait pris part quatre des six personnes enseignantes (voir Martin et Homier, 2023). Deux enseignantes supplémentaires se sont jointes au collectif pour la deuxième mouture de cette CDA.

professionnel ciblé pouvait se manifester. Troisièmement, une **séance d'auto-confrontation simple** (ACS) a eu lieu entre une des personnes chercheuses et chacune des enseignantes, pour un total de six ACS. En prévision d'une ACS, chaque enseignante et les personnes chercheuses visionnaient séparément les enregistrements faits en classe afin de cibler des extraits pertinents pour l'ACS, notamment au regard de l'objet de la CDA. L'enseignante était alors invitée à cibler des extraits qui mettaient en lumière des aspects qu'elle jugeait satisfaisants (ou moins satisfaisants) de son enseignement des probabilités lors de cette séance. Durant l'ACS, l'enseignante et la personne chercheuse ont visionné ensemble des extraits des séances en classe préalablement sélectionnés afin de mettre en rapport l'objet professionnel avec l'activité d'enseignement-apprentissage des probabilités de l'enseignante. Au terme de l'ACS, l'enseignante était invitée à cibler des extraits qu'elle souhaitait présenter à une collègue avec qui elle devait être placée en paire lors d'une **séance d'autoconfrontation croisée** (ACC). Quatrièmement, trois ACC réunissant chacune deux enseignantes avec une personne chercheuse ont eu lieu. Durant ces dernières, des manières de faire (similaires ou différentes), notamment en lien avec l'objet professionnel, étaient mises de l'avant à partir d'extraits des séances en classe de chacune des deux enseignantes. Dans le pilotage des ACC, la personne chercheuse tentait de mettre en exergue des objets de controverses dans les discours ou les actions des enseignantes, notamment au regard de l'objet ciblé, afin de provoquer la discussion ou de relever des écarts entre ce qui était visible et ce que les personnes enseignantes disaient avoir fait pour l'enseignement-apprentissage des probabilités. Au terme de l'ACC, les enseignantes étaient invitées à cibler des extraits qu'elles souhaitaient présenter au collectif lors de la rencontre finale. Finalement, une **rencontre finale du collectif** a permis un retour sur la démarche réalisée et sur les constats en ayant émergé, entre autres en lien avec l'objet professionnel. Durant cette rencontre, les extraits ciblés par chacune des enseignantes étaient présentés au collectif, puis discutés pour permettre à nouveau de faire émerger des objets de controverses dans les manières de faire des enseignantes.

Pour collecter des données, l'ensemble de ces étapes a été filmé. Pour les séances en classe, l'enseignante portait un micro-cravate et une caméra (maniée par un auxiliaire de recherche) la suivait dans ses déplacements. Pour toutes les autres étapes, un micro plat placé au milieu de la table a permis de capter les échanges filmés avec une caméra en plan large. Les ACS, les ACC et la rencontre finale ont été filmées de telle sorte qu'il soit possible de voir à la fois la ou les enseignantes, la ou les personnes chercheuses et l'écran où étaient visibles les extraits visionnés. L'analyse de ces données collectées a été réalisée en deux phases, qui visaient respectivement à soutenir les dimensions d'intervention et de recherche de la CDA. Même si ces deux phases d'analyse n'ont pas les mêmes visées et ne se déroulent pas au même moment, elles sont en fait étroitement liées et s'alimentent mutuellement.

IV. PRÉSENTATION ET DISCUSSIONS DES RÉSULTATS – LE CAS D'ÉMILIE

Nous présentons maintenant le cas d'Émilie, une enseignante de 1^{re} année (élèves de 6-7 ans), afin de documenter à la fois la progression de son projet didactique (réalisé, souhaité, potentiel) relié à l'enseignement-apprentissage des probabilités et l'émergence de nouveaux possibles liés à sa réalité qui ont pu être conjointement imaginés à travers les autres étapes de la CDA. Comme Émilie avait déjà pris part à la première mouture de la CDA², ce texte nous amène à développer un narratif de sa transformation (en considérant la première itération de la CDA, mais essentiellement) à partir d'une

² Un récit du développement professionnel d'Émilie au sein de la première boucle itérative de la CDA a déjà été publié (Martin et Homier, 2023)

analyse des différentes étapes de la deuxième boucle, qui l'ont menée à porter un regard sur son activité réelle.

1. *La rencontre initiale du collectif et l'objet professionnel ciblé*

Lors de la rencontre initiale du collectif, Émilie commence par affirmer qu'elle revient (à la suite de la première CDA) parce qu'il ne lui semble pas que d'avoir piloté et réfléchi au pilotage lors de la première CDA ait été suffisant pour se sentir solide et savoir par où aller dans son enseignement des probabilités. De plus, elle partage un certain stress avec l'idée de faire des probabilités dès l'automne (en 1^{re} année), alors que les élèves ne savent pas encore écrire et à peine compter.

Durant la rencontre, les échanges au sein du collectif amènent à cibler les causeries mathématiques liées aux probabilités comme objet professionnel. Dans ce contexte, Émilie accepte (avec une certaine réticence) cet objet professionnel, avec lequel elle se dit peu familière. Comme Morin et Martin (2024) l'ont exposé, la causerie mathématique est un dispositif d'enseignement-apprentissage qui consiste en une discussion de groupe axée sur un problème mathématique présenté par l'intermédiaire d'un déclencheur. Ce dernier peut être une image, un problème écrit ou une expression mathématique. De courte durée (5 à 15 minutes), la causerie vise à donner la parole aux élèves pour répondre à une question mathématique large et ouverte. Durant son déroulement, les élèves sont rassemblés au sol, et une gestuelle particulière leur permet de s'engager dans la réflexion et de prendre part aux échanges avec les pairs.

2. *Les séances en classe : les causeries mathématiques d'Émilie*

Conformément aux engagements pris par les membres du collectif, Émilie a planifié et réalisé deux causeries mathématiques³ liées aux probabilités dans les semaines qui ont suivi la rencontre initiale. En présentant le déclencheur imagé de la causerie des files d'épicerie (figure 1), l'enseignante a posé la question suivante aux élèves : « Je veux choisir une file d'attente. Dans quelle file est-il le plus probable que je passe le plus rapidement ? »



Figure 1 – Le déclencheur de la causerie des files d'épicerie

³ Dans le contexte de ce texte, nous nous concentrons seulement sur la première des deux causeries planifiées et pilotées par l'enseignante, à savoir la causerie des files d'épicerie.

Comme nous le verrons à travers les échanges survenus lors de l'ACS, ce déclencheur ouvre à notre sens sur une situation imprévisible unique (basée sur la vie quotidienne) qui force l'entrée par l'approche subjective et la prise en considération d'informations pertinentes.

3. *L'autoconfrontation simple*

En prévision de l'ACS, les personnes chercheuses et l'enseignante ont visionné l'enregistrement vidéo de la séance en classe. Lors de l'ACS, l'enseignante partage un sentiment général de satisfaction à l'égard de sa séance en classe. Durant les échanges, il est question des déclencheurs des causeries, qu'Émilie rapporte avoir elle-même conçus ou ajustés. Par exemple, pour planifier la causerie des files d'épicerie, elle s'est inspirée d'une situation évoquée par une des personnes chercheuses lors de la rencontre initiale de la CDA no. 1 (Meyer, 2009). Elle souligne qu'elle a considéré différentes variables didactiques, en réfléchissant entre autres au nombre de personnes dans chaque file, à la taille des paniers et à la quantité d'items contenus.

J'avais choisi des personnes... le même nombre de personnes. [J'ai cherché dans] Google. [...] Oui, oui, j'ai marqué « File d'attente épicerie » [...] Alors j'ai pris des images qui avaient le même nombre de personnes, mais là, il y avait une caisse que la madame, elle avait déjà commencé à emballer son épicerie, alors je me suis dit : « Peut-être que ça va être plus rapide avec ça ». Après ça, l'autre, il y a des paniers qui sont plus remplis. Alors, ils sont allés ressortir vraiment les informations que je voulais. (Émilie, ACS)

Ce regard orienté sur les variables didactiques de la situation dans la planification de la causerie participe à notre sens du développement de l'agentivité didactique et de la pensée didactique de l'enseignante (Benoit, 2024) pour soutenir l'apprentissage des probabilités des élèves de sa classe.

Par ailleurs, un autre thème abordé en lien avec cette causerie est l'ouverture d'Émilie à l'incertitude et à la subjectivité. En effet, alors que son enseignement lors de la première CDA témoignait d'un fort ancrage dans l'approche théorique, Émilie a cette fois choisi de présenter aux élèves un déclencheur mettant en scène une situation imprévisible unique basée sur une situation de la vie quotidienne. Puisque cette situation ne peut être calculée de manière théorique et qu'il n'est pas possible de réaliser des essais, elle doit être abordée par l'approche subjective, ce qui ouvre la voie à une grande diversité d'arguments (surtout qualitatifs) de la part des élèves. En ce sens, en proposant ce déclencheur aux élèves, Émilie a aménagé un espace pour l'incertitude dans son enseignement et elle a centré la discussion sur la prise en considération d'informations pertinentes. À ce sujet, elle a ajouté des informations à la fin de la discussion avec les élèves, en guise de conclusion. Par exemple, elle a dit aux élèves que la caissière pourrait avoir à changer le papier de l'imprimante, ou qu'une personne pourrait échapper son sac avant de quitter la caisse. L'enseignante rapporte que ces informations visaient à mettre en lumière qu'il est possible de faire un choix éclairé en fonction des informations disponibles, mais que la situation demeure incertaine.

À la fin de l'ACS, Émilie cible des extraits qu'elle souhaite aborder lors de l'ACC avec une collègue, liés notamment à la gestion des stratégies ou réponses erronées ou inattendues de la part des élèves lors de la causerie, ainsi qu'à la manière d'aborder l'imprévisibilité et l'incertitude dans la conclusion de cette causerie. Ces extraits sont ceux qui ont été présentés et discutés dans le cadre de l'ACC.

4. *L'autoconfrontation croisée*

Pour Émilie, l'autoconfrontation croisée s'est faite en collaboration avec Roxane, une enseignante de 5^e année. Durant cette rencontre, chacune des deux enseignantes a présenté à sa collègue deux ou trois extraits de ses séances en classe et des discussions ont émergé. Dans ce contexte, nous percevons qu'Émilie s'expose dans l'authenticité et qu'elle semble sincèrement à la recherche de nouvelles manières de faire (mieux à ses yeux).

Durant cette rencontre, un de ses principaux constats en émergence est lié à la gestion des réponses erronées ou inattendues, qu'elle souhaite apprendre à accueillir avec plus de curiosité (sans nécessairement aller dans le jugement bon/mauvais) et en accordant plus d'espace aux élèves pour réagir. Ce constat est lié à un extrait de l'enregistrement du pilotage de la causerie des files d'épicerie. On y voit Émilie qui interagit avec une élève qui propose de prendre la file du bas « parce qu'il y a moins de monde ». L'affirmation de l'élève est erronée, puisque chacune des files contient le même nombre de personnes. Dans l'extrait de la séance en classe, on voit d'abord Émilie qui répond à l'élève en lui disant qu'elle n'est pas d'accord avec elle, puis qui dénombre à haute voix les personnes dans chacune des files afin de montrer que l'élève n'a pas raison.

Durant l'ACC, Émilie revient sur cet extrait en disant qu'au moment de son intervention, elle aurait pu laisser réagir d'autres élèves qui lèvent la main avant d'exposer elle-même un désaccord. Roxane va dans le même sens et fait référence à des extraits de ses séances en classe où on la voit elle aussi invalider les réponses de certains élèves. Elle juge aussi qu'un ou une élève aurait très bien pu réagir spontanément à l'affirmation erronée sans qu'elle (comme enseignante) réagisse d'abord.

- Roxane : Je vois une tendance, que j'ai aussi, d'aller invalider [...] parfois, il y a une espèce de réflexe d'invalidation des réponses. [...] Le « je ne suis pas d'accord », je pense qu'on peut essayer de l'éviter dans les causeries.
- Émilie : Dans le fond, ce qui est ressorti, c'est que... je les vois, les mains qui se lèvent, ils ont voulu dire quelque chose, mais je ne sais pas si c'était à cause de ça ou s'ils m'amenaient ailleurs. Mais... j'aurais pu leur laisser la place ... attendre que les autres élèves « popent ».
- Roxane : [...] parce que tu as eu le bon réflexe de dire « viens, on va les compter ensemble ». [...] Puis, tu vois, j'ai vécu la même chose dans ma classe ... les élèves vont lever leur main et, ils seront capables de dire « non, je ne suis pas d'accord ». De laisser les élèves [...] compléter. (Roxane, ACC)

Par la suite, Roxane se questionne sur les raisons qui font qu'en tant qu'enseignante, elle a de la difficulté à laisser une réponse erronée en l'air sans l'invalidité (en grand groupe). En réponse à sa collègue, Émilie affirme qu'elle trouve les élèves éteints, qu'elle sent que peu d'entre eux auraient vraiment pu capter l'erreur de dénombrement exposée par leur collègue. Ainsi, craignant que la discussion se poursuive sans que le groupe ne se saisisse l'erreur, elle a donc choisi de d'abord donner la bonne réponse, pour ensuite interpellier le groupe pour savoir si les élèves étaient d'accord. La discussion se poursuit ensuite sur le désir de « bien faire les choses », d'exposer les élèves aux bonnes réponses, ainsi qu'à la peur de gâcher l'expérience d'apprentissage des élèves en validant implicitement des erreurs.

Ces réflexions davantage orientées sur des aspects pédagogiques de leur activité d'enseignement semblent avoir permis l'émergence de nouveaux possibles pour les deux enseignantes. Ceci amène les deux enseignantes, à la fin de l'ACC, à cibler des extraits entre autres liés à la gestion des réponses erronées ou inattendues lors des causeries qui seront présentés au collectif lors de la rencontre finale.

5. *La rencontre finale du collectif*

Lors de la rencontre finale du collectif, chacune des personnes enseignantes a présenté un ou deux extraits de sa séance d'enseignement en classe et des discussions en ont émergé. Dans le cas d'Émilie, elle reste (généralement) à l'écart des échanges au sujet des extraits ciblés par ses collègues, mais elle fait des reflets empathiques, par exemple pour atténuer l'autocritique parfois sévère dont font preuve les collègues. Au moment de poser un regard réflexif sur la CDA, elle évoque le caractère épuisant de la démarche d'un point de vue cognitif, mais elle souligne ses retombées dans son activité quotidienne.

En effet, elle dit que d'avoir autant réfléchi sur son enseignement l'a amenée à s'ajuster dans l'action. Elle a notamment réalisé qu'elle laissait plus de place au raisonnement des élèves et qu'elle les questionnait davantage plutôt que d'invalidier leurs réponses, ce qui fait écho aux réflexions de nature pédagogiques qu'elle a eues avec Roxanne lors de l'ACC.

Puis, ses propos montrent qu'après un accent mis sur l'approche théorique dans la première CDA et une ouverture faite vers l'approche subjective dans la deuxième CDA, elle semble néanmoins déçue de ne pas avoir fait expérimenter les élèves (dans l'approche fréquentielle). À ce sujet, elle pose un regard critique sur le dispositif des causeries, qui lui semble plus ou moins adapté pour (faire) vivre des expérimentations avec du matériel.

Je trouve qu'en probabilités, de ce que j'avais beaucoup retenu l'année passée, c'est à quel point il faut être dans l'expérimentation. Là, j'étais en train de faire une causerie mathématique où on ne peut pas tant expérimenter et il faut que ce soit une image [...]. J'ai trouvé ça extrêmement difficile de trouver des idées. [...] Je voulais tellement bien faire dans le modèle « puriste ». (En jouant une sorte de dialogue intérieur.) Là, j'étais comme « Il ne faut pas que j'aie de matériel, il ne faut pas que j'aie du matériel... », « Oui, mais là, il faut que tu expérimentes. ». « Oui, mais là, il ne faut pas que j'aie de matériel. » J'essayais vraiment ! (Émilie, rencontre finale)

En ce sens, peut-être choisira-t-elle de faire une plus grande place à l'expérimentation (et donc à l'approche fréquentielle) lors d'une troisième boucle de la CDA, dans laquelle elle se dit d'ores et déjà volontaire pour s'engager à nouveau.

V. CONCLUSION

Dans ce texte, nous avons présenté le cas d'Émilie, qui a pris part à deux boucles itératives d'une CDA, ce qui nous a permis de mettre en lumière une progression de son projet didactique relié à l'enseignement-apprentissage des probabilités. Son histoire, qui témoigne à la fois d'une augmentation de l'importance accordée à l'incertitude et d'une ouverture à l'approche subjective, raconte (en creux) la place de (et l'inconfort créé par) l'incertitude et l'imprévisibilité dans l'enseignement-apprentissage des probabilités. Elle fait également ressortir le développement de l'agentivité didactique de l'enseignante au service de ses propres choix (à la fois didactiques et pédagogiques) et de ses réactions aux choix de ses collègues. Or, l'écriture de ce texte nous amène à constater à quel point le processus des deux CDA, qui représente deux boucles itératives d'une démarche continue et insécable de développement professionnel, complexifie l'analyse et la reconstitution du narratif de la transformation d'une personne ou du collectif. Une troisième boucle itérative est prévue pour l'automne 2024. Ce nouveau collectif prendra de l'expansion alors qu'il inclura probablement les six enseignantes de la deuxième CDA, en plus d'accueillir deux enseignantes supplémentaires. Ce collectif, enraciné dans deux écoles, amènera une ouverture vers un nouvel objet professionnel lié à l'enseignement-apprentissage des probabilités. La suite nous permettra de voir si cette ultime boucle itérative saura continuer d'alimenter le développement professionnel d'Émilie au regard de l'enseignement-apprentissage à l'école primaire.

RÉFÉRENCES

- Álvarez-Arroyo, R., Batanero, C. et Gea, M. M. (2024). Probabilistic literacy and reasoning of prospective secondary school teachers when interpreting media news. *ZDM – Mathematics Education*, 56, 1045-1058. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01586-8>
- Batanero, C. et Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: Reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, 3(1), 3-13. [https://soche.cl/chjs/volumes/03/01/Batanero_Diaz\(2012\).pdf](https://soche.cl/chjs/volumes/03/01/Batanero_Diaz(2012).pdf)

- Benoit, D. (2022). *La clinique didactique de l'activité en classe d'accueil de mathématiques : provoquer le développement de la pensée didactique* [Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS. <https://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/19193>
- Benoit, D. (2024). Shifting towards didactic thinking development as a tool for mathematics teachers' agency. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 24, 146-158. <https://doi.org/10.1007/s42330-024-00325-1>
- Biesta, G., Priestley, M. et Robinson, S. (2015). The role of beliefs in teacher agency. *Teachers and Teaching*, 21(6), 624-640. <https://doi.org/10.1080/13540602.2015.1044325>
- Borovcnik, M. et Kapadia, R. (2010). Research and developments in probability education internationally. Dans M. Joubert et P. Andrews (dir.), *Proceedings of the Seventh British Congress of Mathematics Education* (p. 41-48). Manchester University.
- Clot, Y. (2017). *Travail et pouvoir d'agir*. Presses universitaires de France.
- Conseil supérieur de l'éducation. (2014). *Le développement professionnel, un enrichissement pour toute la profession enseignante*. Gouvernement du Québec.
- Dionne, P., Viviers, S. et Saussez, F. (2019). Discuter et réfléchir son activité par l'instruction au sosie : émergence de contradictions et débats de métier. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 21(2), 24-42. <https://doi.org/10.7202/1061838ar>
- Filippi, P.-A. (2020). *Les ressources psychosociales comme instruments de reprise du pouvoir d'agir : le cas de formateurs d'enseignants en ESPE confrontés à un nouveau dispositif de formation* [Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille]. HAL open sciences. <https://hal.science/tel-03169313/document>
- Martin, V. et Benoit, D. (2024). Une entrée par la demande pour un travail collaboratif entre un didacticien des mathématiques et des personnes enseignantes autour de l'enseignement-apprentissage des mathématiques à l'école primaire. Dans A. C. Adihou (dir.), *Actes du 8e colloque de l'EMF, 12-16 décembre 2022, Cotonou, Bénin* (p. 153-166). Les éditions de l'Université de Sherbrooke.
- Martin, V., Thibault, M., Vermette, S., Manuel, D. et Mai Huy, K. (2017). La didactique des stochastiques sous l'angle de l'apprentissage, de l'enseignement, de la formation et de la recherche : éléments de convergence entre les domaines des probabilités et de la statistique. Dans A. Adihou, J. Giroux, A. Savard et K. Mai Huy (dir.), *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (p. 10-41). Université McGill.
- Martin, V., Héroux, S., Homier, M. et Thibault, M. (2021). L'analyse de tâches probabilistes proposées dans des cahiers d'apprentissage destinés à l'enseignement-apprentissage des mathématiques au primaire au Québec : exemplification de tâches inscrites dans l'approche fréquentielle. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie*, 21(1), 145-165. <https://doi.org/10.1007/s42330-021-00134-w>
- Martin, V., Thibault, M. et Homier, M. (2022a). Convergence and divergence in probability teaching in elementary and secondary school in Québec: A closer look at eight teachers' self-reported practices. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, 22(3), 659-678. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00241-2>

- Martin, V. et Homier, M. (2024). Récit du développement professionnel d'une enseignante au sein d'un collectif œuvrant conjointement autour de l'enseignement-apprentissage des probabilités au primaire. Dans S. Barry, D. Benoit, N. Julien, R. Nolin, I. Oliveira et T. Rajotte (dir.), *Actes du Colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (p. 106-120). Université du Québec à Rimouski, campus de Lévis.
- Martin, V. et Malo, M. (2019). L'analyse de tâches probabilistes proposées dans des ressources québécoises utilisées pour l'enseignement des mathématiques au primaire. Dans V. Martin, M. Thibault et L. Theis (dir.), *Enseigner les premiers concepts de probabilités : un monde de possibilités !* (p. 71-98). Presses de l'Université du Québec.
- Martin, V. et Thibault, M. (2017). Enquête sur les pratiques déclarées d'enseignement des probabilités au primaire et au secondaire au Québec : esquisse d'un portrait statistique. Dans A. Adihou, J. Giroux, A. Savard, et K. Mai Huy (dir.), *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (p. 179-195), Université McGill.
- Meyer, D. (2009). *What I would do with this: Groceries* [billet de blogue].
<https://blog.mrmeyer.com/2009/what-i-would-do-with-this-groceries/>
- Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. (2009). *Progression des apprentissages au primaire : mathématique*. Gouvernement du Québec.
- Morin, A. et Martin, V. (2024). *Les causeries mathématiques. Un dispositif innovant pour donner la parole aux élèves*. Chenelière Éducation.
- Nadeau, D., Comtois, M. et Thibault, M. (2012). Quelle expérience de perfectionnement conviendrait à mon enseignement des mathématiques ? Réflexion sur certaines caractéristiques de diverses formations. *Envol*, 159, 27-30.

MISE AU JOUR DE SAVOIRS TRANSPARENTS AU SEIN D'UN DISPOSITIF DE FORMATION COLLABORATIVE. QUE SE PASSE-T-IL QUAND FORMATEURS ET ENSEIGNANTS SONT AMENÉS À DÉVELOPPER L'INTELLIGENCE DU CALCUL ?

| BATTON* AGNÈS

Résumé | Je m'intéresse ici à l'émergence de propriétés sans existence institutionnelle mais nécessaires pour expliquer certains raisonnements en calcul. Je décrirai le dispositif en appui duquel se fait la recherche puis les éléments de mon cadre théorique (TAD). Les praxéologies mathématiques liées aux propriétés de compensation me permettront d'analyser quelques éléments de suivi d'une formatrice M., formée au sein du dispositif, jusqu'à deux visites en classe chez un enseignant P. qu'elle a formé.

Mots-clés : formation collaborative de formateurs - calcul mental - savoirs transparents - compensation dans le champ additif

Abstract | I am interested here in the emergence of properties without institutional existence, necessary to explain certain reasoning in calculation. I will describe the system supporting the research and then the elements of my theoretical framework (TAD). The praxeologies linked to the compensation properties will allow me to analyze some elements of monitoring of a trainer M., trained within the system, until two classroom visits to a teacher P., trained by herself.

Keywords: Collaborative training for trainers - mental arithmetic - transparent knowledge - compensation in the additive field

I. CONTEXTE

Ma recherche a pour contexte des formations sur le raisonnement en calcul mental, s'appuyant sur un dispositif pédagogique de classe, le « défi-calcul »¹ dans lequel les apprenants doivent « analyser, choisir, transformer, calculer » (Batton et al., 2024). Un groupe IREMS² pluri-catégoriel (GIREM2.0) constitué d'une chercheuse en didactique des mathématiques et formatrice en INSPE³, une formatrice pour les enseignants de l'école primaire (toutes deux issues du GIREM1.0⁴) et une formatrice INSPE, produit des contenus et des outils qu'il déploie dans le cadre d'une formation par homologie-transposition⁵ à destination de formateurs-référents (FFIREM). Le collectif (GIREM2.0 et formateurs-référents) construit des formations de formateurs-néos, des formations d'enseignants et des outils pour la classe et anime des ateliers dans des colloques pour formateurs, publie des articles dans les actes, sur le site de l'IREMS et sur d'autres média afin d'en diffuser les contenus. Le dispositif est implémenté à une assez large échelle dans la formation des enseignants du primaire du Val d'Oise et des formateurs de l'académie de Versailles.

* LDAR – France – agnes.batton@cyu.fr

¹ Les élèves doivent effectuer une série d'items dans laquelle il faut d'abord choisir, pour chaque item, entre le calcul mental et la calculatrice. Plus de points sont gagnés en utilisant le calcul mental.

² IREMS : Institut pour la Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences

³ INSPE : Institut National Supérieur du Professorat et de l'éducation

⁴ GIREM1.0 : de 2014 à 2017, groupe mixte (chercheurs en didactique, formateurs et enseignants du primaire et du secondaire) qui a travaillé à l'enrichissement d'un dispositif pédagogique existant « le défi calcul » pour l'apprentissage du calcul mental (Chambris, Haspekian, Melon, Pasquet, 2018).

⁵ Houdement et Kuzniak, 2013 ; Houdement, 2019

Ce dispositif de formation est collaboratif (Bednarz, 2013) au sens où il y a co-construction des savoirs à travers les interactions, la réflexion et la confrontation de points de vue. La responsabilité est collective dans la mesure où chaque participant est responsable de sa propre progression ainsi que de celle du groupe. Il y a un processus de problématisation des pratiques car les situations de formation/enseignement/apprentissage sont centrées sur des problèmes réels de métier, favorisant l'analyse critique et la prise de recul sur les pratiques enseignantes et de formation. Il s'agit de constituer un espace où développer un système cohérent dans lequel les questionnements et les savoirs sont partagés.

Je fais l'hypothèse que des expressions intermédiaires à visée élèves sont nécessaires à mettre en place en formation et en classe pour pouvoir expliquer les techniques et les choix des élèves et que cette formation de formateurs est un lieu privilégié à leur production.

II. CADRE THÉORIQUE / MÉTHODOLOGIE

Comme Boule (1994-1995), je catégorise les savoirs du calcul en connaissance des faits numériques, propriétés des opérations et propriétés de la numération (Chambris, 2008).

Artigue et la CREM (2001) définissent, dans leur rapport sur le calcul, ce qu'ils nomment « l'intelligence du calcul » :

La reconnaissance de formes, la recherche d'analogies, mais aussi le jeu sur les variations possibles, le sens des ordres de grandeur, le sens des expressions manipulées, sur lesquels nous reviendrons ultérieurement jouent un rôle clef dans ce pilotage raisonné que l'on désignera globalement comme « intelligence du calcul ».

D'après Bautier et Goigoux (2004, p. 93), citant (Karmiloff-Smith, 1992, 2003) : « pour que les élèves puissent dépasser l'action et puissent se construire des savoirs : [l'école] doit viser le passage de connaissances-en-actes, largement dépendantes des situations langagières dans lesquelles elles s'exercent, à des connaissances conscientes, explicites et flexibles. »

Je propose d'opérationnaliser l'intelligence du calcul en rendant explicites⁶ les savoirs en jeu dans les différentes techniques qui permettent de résoudre les tâches de calcul mental.

1. *La Théorie Anthropologique du Didactique*

Ma recherche a pour objet⁷ les savoirs nécessaires à l'intelligence du calcul qui se doivent d'être explicites, ici les propriétés des opérations du champ additif, plus précisément les propriétés de compensations (cf. III). La Théorie Anthropologique du Didactique est notre principal appui théorique, incluant les notions de praxéologie et d'ostensifs (Bosch et Chevallard, 1999) ainsi que le concept de transposition didactique.

Toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T , au moyen d'une certaine technique τ , justifiée par une technologie Θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui a son tour est justifiable par une théorie Θ . En bref, toute activité humaine met en œuvre une organisation qu'on peut noter $[T/\tau, \Theta/\Theta]$ et qu'on nomme praxéologie, ou organisation praxéologique. (Chevallard, 1998, p. 92).

Je vais donc repérer dans les différents données : les calculs (tâches), les techniques de calcul, les discours sur ces techniques et les propriétés des opérations qui les soutiennent.

Chevallard (1998) décrit plusieurs fonctions à la technologie : « Si la première fonction – justifier la technique – consiste à assurer que la technique donne bien ce qui est prétendu, cette deuxième fonction

⁶ Au sens « français » du terme, pas au sens « *direct instruction* » de Bissonette et al.

⁷ « est objet toute entité, matérielle ou immatérielle, qui existe pour au moins un individu » Chevallard (2009).

consiste à exposer pourquoi il en est bien ainsi. On notera que ces deux fonctions sont inégalement assumées par une technologie donnée. ».

Je propose de spécifier ces fonctions au contexte de l'école élémentaire. Je vais donc définir ici la fonction « justifier » au fait de se ramener à l'utilisation de propriétés formelles. Par exemple : $8 + 3 + 2 = 8 + 2 + 3$ « Dans une addition, je peux échanger l'ordre des termes ». Pour autant, son énoncé formel n'explique pas le raisonnement qui rend compréhensible cette transformation pour certains élèves à l'école. Il est nécessaire de passer à un autre registre d'explication convoquant des non-ostensifs qui soient plus « visibles » et « manipulables » comme les grandeurs ou les « quantités » (Chambris, 2023). Castela (2008) définit d'autres fonctions aux technologies : valider (pour justifier), expliquer, décrire, faciliter, motiver et évaluer.

Le concept d'écologie du savoir me permet de questionner l'existence dans les classes ou dans nos formations de certains savoirs.

2. Les savoirs transparents

Margolinas et Wozniak (2015), reprenant Margolinas et Laparra (2011), définissent les « savoirs transparents » comme des « savoirs qui se manifestent par des connaissances en situation qui ne sont pas enseignées ni institutionnalisées, mais naturalisées et incorporées dans des praxéologies muettes. ». Pour penser l'enseignement des mathématiques, il est nécessaire d'identifier les « savoirs mathématiques nécessaires pour l'enseignement des mathématiques mais non identifiés par les mathématiciens eux-mêmes » (Laparra et Margolinas, 2010).

L'objectif de ma recherche est d'analyser, en termes praxéologiques, ce qui se passe dans plusieurs institutions (FFIREM, ici FC et classe), et ce, dans plusieurs situations : quand le savoir est reconnu par l'une ou les institutions et quand le savoir est explicité sans être institutionnellement reconnu, phénomènes qui sont liés à la transparence du savoir.

III. CONTRIBUTION DE MA RECHERCHE À L'ÉLABORATION D'UN SAVOIR À ENSEIGNER À L'ÉCOLE PRIMAIRE EN CALCUL MENTAL : LES COMPENSATIONS

1. Exemples de raisonnements en calcul additif

Exemple 1 : $12 - 3 = 12 - 2 - 1$

S'il s'agit de le justifier mathématiquement, l'associativité de l'addition des nombres relatifs suffit. S'il s'agit d'expliquer un raisonnement d'élève ou à un élève à l'école primaire, alors cette propriété des relatifs n'est pas satisfaisante pour expliquer ce qui se joue ici.

Exemple 2 : $29 + 30 + 31$

E : J'ai mis le 1 de 31 dans 29 pour faire que des 30

PE : Donc là tu as fait quoi ?

E : j'ai pris le 1 de l'unité

PE : tu as enlevé 1

E : j'ai enlevé 1 et je l'ai mis dans 29 pour faire que des 30.

PE : et là tu as rajouté +1.

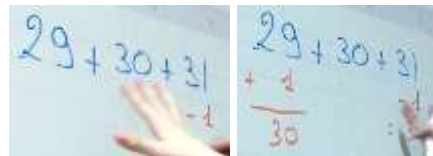


Figure 1 – Un tableau de classe

Dans ce que dit l'élève, on voit que ce qui est ajouté à 29 (+1) est retiré de 31 (-1). Il n'est apparemment pas question pour cet élève d'associativité ni de commutativité ici.

2. Les compensations de l'addition et de la soustraction : des propriétés des opérations

Le terme « compensation » est polysémique dans la littérature de recherche, résultat d'un état de l'art que je ne détaillerai pas ici (thèse en cours). Il est très présent dans les travaux en psychologie de l'éducation (anglophones notamment) pour décrire certaines « stratégies » de calcul. Quelques didacticiens l'utilisent pour décrire également des « procédures »⁸. Seules Ma et Kessel (2018) les définissent comme des propriétés des opérations.

Ma proposition de définitions formelles de ces propriétés des opérations s'organise en deux catégories : les compensations « internes » et les compensations « externes » (énoncé de la propriété, écriture algébrique⁹, exemple de représentation avec des ostensifs « ligne » pour les compensations internes (fig. 2, 3 et 4 par exemple)).

Les compensations internes correspondent à des transformations qui se compensent pour conserver le même résultat entre deux nombres :

- la compensation interne de l'addition :

Soustraire à l'un des termes ce que l'on ajoute à l'autre terme ne change pas le résultat d'une somme. $a + b = (a + c) + (b - c)$, pour $c \leq b$ // $25 + 18 = (25 - 2) + (18 + 2)$

- la compensation interne de la soustraction :

Ajouter / soustraire un même nombre aux deux termes n'en change pas le résultat.

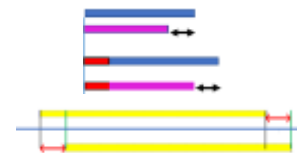
$$a - b = (a + c) - (b + c) \text{ // } a - b = (a - c) - (b - c)$$

pour $c \leq b$ et $c \leq a$

$$31 - 18 = (31 + 2) - (18 + 2) = 33 - 20 ; 31 - 18 = (31 - 1) - (18 - 1) = 30 - 17$$



Figure 2 – compensation interne de l'addition (lignes)



Figures 3 et 4 – compensation interne de la soustraction (lignes et droite numérique)

Les compensations externes : transformation d'un terme puis compensation des effets sur le résultat intermédiaire :

(E1) On ne modifie pas la valeur d'une somme en ajoutant un nombre à un des termes et en le retranchant ensuite au résultat pour compenser.

$$a + b = a + (b + c) - c \text{ // } 27 + 8 = 27 + (8 + 2) - 2$$

(E2) On ne modifie pas la valeur d'une somme en retranchant un nombre à un terme puis en l'ajoutant au résultat pour compenser. $a + b = a + (b - c) + c$ // $27 + 8 = 27 + (8 - 5) + 5$

(E3) On ne modifie pas la valeur d'une différence en ajoutant au diminuteur¹⁰ un nombre qu'on ajoute ensuite au résultat pour compenser. $a - b = a - (b + c) + c$ // $27 - 8 = 27 - (8 + 2) + 2$

(E4) On ne modifie pas la valeur d'une différence en retranchant du diminuteur un nombre qu'on retranche ensuite du résultat $a - b = a + (b - c) - c$ // $27 - 8 = 27 - (8 - 1) - 1$ i.e Soustraire une somme à un nombre revient à soustraire chacun des deux termes de la somme.

$$a - (b + c) = a - b - c \text{ // } 27 - 8 = 27 - 7 - 1$$

⁸ « Stratégie » et « procédure » correspondent à « technique » en TAD.

⁹ Comme nous sommes à l'école, a, b et c sont toujours des entiers naturels.

¹⁰ Diminuteur : nombre qu'on enlève dans une soustraction, celui qui va faire diminuer.

(E5) On ne modifie pas la valeur d'une différence en retranchant/ajoutant du diminuende¹¹ un nombre qu'on ajoute/retranche ensuite au résultat pour compenser.

$$(a - c) - b = a - b + c ; (a + c) - b = a - b - c \quad // \quad 31 - 18 = 30 - 18 + 1$$

3. Exemples de raisonnements sur des non-ostensifs grandeurs ou quantités

Si nous reprenons les deux exemples précédents, il est possible de les justifier de manière formelle à l'aide des compensations. Néanmoins, la justification sera encore trop loin d'une compréhension d'élève ou, plus simplement, de l'explication d'un raisonnement. Pour $12 - 3 = 12 - 2 - 1$, le calcul peut être soit oralisé par « 12 moins 3 égal 12 moins 2 moins 1 », soit décrit par « Pour enlever 3, je peux enlever 2 et enlever 1 car 3, c'est 2 et 1 ». La propriété de compensation externe transparait ici : « Retirer une somme revient à retirer chacun des termes. » Pour autant, son énoncé formel n'explique pas, pour l'école, le raisonnement qui rend compréhensible cette transformation. Il est nécessaire de passer à un autre registre d'explication, en convoquant des non-ostensifs qui soient plus lisibles, « manipulables » comme les grandeurs ou les « quantités » (Chambris, 2023). En voici des exemples : « Pour reculer de 3 pas, si je recule de 2 pas, je n'ai pas assez reculé, il faut reculer encore de ce qui manque, de 1 pas », ou « si je dois retirer un bande de mesure de longueur 3, je peux retirer d'abord une bande de mesure de longueur 2, mais je n'ai pas encore assez retiré, j'en ai trop, je dois encore retirer ce qui reste à retirer, une bande de mesure de longueur 1 ». Ce sont ces technologies que j'inclurai dans la fonction des technologies « justifier ».

IV. D'UNE FORMATRICE À DES ÉVÈNEMENTS DE CLASSE : LE CAS DE M.

Les données que j'analyse ici concernent une formatrice M. qui a suivi une formation par le GIREM2.0 et qui met en œuvre une formation continue (FC) en calcul mental pour une équipe d'école élémentaire. Les données sont des documents, des vidéos de formation et de classe fournis par la formatrice.

1. Évolution de ses praxéologies mathématiques personnelles et professionnelles

M. est une formatrice, enseignante pendant 18 ans et Maître Formatrice au cours des 10 dernières années puis devenue Conseillère Pédagogique de Circonscription. M. n'a pas de formation scientifique ; elle se sent plutôt à l'aise en mathématiques mais pas du tout en calcul mental (« passif douloureux »), ni personnellement ni professionnellement. Deux moments permettent d'exemplifier l'évolution de ses techniques professionnelles personnelles.

	calculs	Forme choisie M pour mental C pour calculatrice
1	28×15	C
2	$36,1 + 36,2 + 36,3 + (7 \times 36,2)$	C
3	$62\,474 \times 9\,587$	C
4	$564\,758 - 4\,700$	M
5	$0,2 + 0,60 + 0,4 + 0,80$	M
6	$(102 - 27) \times 4$	C
7	$307 - 10,8$	C

Figure 5

Lors de la première formation à laquelle M. assiste (18/10/2019), des calculs sont proposés dont les deux tâches complexes qui sont des niches pour travailler les compensations internes de l'addition et de la soustraction¹² : $(102 - 27) \times 4$ et $36,1 + 36,2 + 36,3 + (7 \times 36,2)$. Elle utilisera la calculatrice pour les résoudre et ne résout de tête que deux calculs sur les sept proposés.

¹¹ Diminuende : le plus grand des deux termes de la soustraction, celui qui va être diminué.

¹² Ces deux calculs sont hérités des travaux du GIREM1.0 (Chambris, C, Haspekian, M., Melon, I, Pasquet Fortune, N., 2018).

Moi, j'en ai fait que deux mentalement. Parce que, pour moi, et c'est mon vécu, après, ça, en tant qu'élève, on n'était que dans, c'est la rapidité, la rapidité, la rapidité, donc si je peux pas te le sortir là dans les secondes qui arrivent, j'ai même pas cette capacité d'analyse. Voilà c'est tout de suite, Ah bah celui-ci, je peux pas, je passe au suivant, etc.

Du côté des techniques, ses notes (voir annexe 1) nous permettent de voir qu'elle recopie les techniques des mises en commun. Pour transformer $36,1 + 36,2 + 36,3$ en $36,2 + 36,2 + 36,2$, les étapes de deux technique sont écrites (aucun discours) et correspondent à l'utilisation de : - la compensation interne de l'addition ; - la troncature à la partie entière (ou ordre de grandeur), calcul sur les parties entières puis compensation externe en y ajoutant le calcul sur les dixièmes. Concernant le $102 - 27$, elle recopiera les deux techniques de la mise en commun : compensation interne de la soustraction et compensation externe (retrait d'une somme). On repère, sur ce calcul, des éléments de technologie concernant la compensation interne : nom et énoncé générique de la propriété (fonction *décrire* de la technologie). Aucun ajout ou commentaire sur l'autre technique.

J'interprète ces deux comportements de la façon suivante : 1 - la compensation de la soustraction est un savoir reconnu institutionnellement par l'école en France sous le nom d'écart constant. Pour M., il semble nécessaire de maîtriser des éléments de discours pour l'enseigner et donc les acquérir pour la formation qu'elle va développer ; 2 - la compensation interne de l'addition n'est pas reconnue par l'école et, à ce moment-là de la FFIREM, n'est pas non plus stabilisée.

Lors du premier présentiel de sa FC, M. propose les mêmes tâches de mises en situation de calcul que celles de la FFIREM et demande aux enseignants de décrire leurs techniques qu'elle prend note.

M : Alors, comment tu arrives à du 36,2 alors qu'il y a du 36,3 et 36,1.

PE2 : C'est une moyenne en fait.

PE5 : Parce que j'ai pris un dixième du 36,3 que je mets sur le 36,1.

PE1 : Elle a fait une moyenne.

PE5 : Et ça me fait, enfin voilà... c'est une moyenne.

M : On est en effet sur la moyenne.

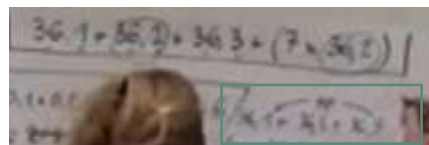


Figure 6 – Prise de note en FC lors de la mise en commun de procédures

Elle reste sur la proposition de nom de procédure des formés : « une moyenne ». M. ne demande pas d'explication à la technique, se contente de la description de la technique (« J'ai pris 1 à ... que je mets sur le ... »). Les deux diapositives de synthèse (issues de la FFIREM) montrent un savoir non stabilisé, même pour la FFIREM (cf. annexe 2).

Deux hypothèses : la compensation interne de l'addition n'est pas stabilisée ni pour M. ni en FFIREM ; la description de la technique lui paraît sans doute suffisante.

Lors de ce premier présentiel, lors de la mise en commun sur la tâche $(102 - 27) \times 4$ seront explicitées plusieurs techniques dont deux compensations internes et deux externes.

Deux techniques utilisant la compensation interne de la soustraction : arrondir le 1^{er} terme à 100 ($102 - 27 = 100 - 25$), arrondir le 2nd à la dizaine supérieure ($102 - 27 = 105 - 30$).

PE2 : Alors, le 102 moins 27, on l'a transformé en 100 moins 25, parce qu'on a bien écouté PE3 tout à l'heure avec l'écart constant.

M : 100 moins 25. Alors, qu'est-ce que tu as fait ?

PE2 : Ben, l'écart constant.

CPC : L'écart constant qui consiste en quoi ?

PE2 : J'ai enlevé deux unités à chaque membre.

M : Si je fais 100 moins 2, je fais la même chose de l'autre côté.

PE3 : Avec l'écart constant, on aurait pu faire aussi 105 moins 30. De 10 dizaines, on pourrait enlever 3 dizaines, donc c'est 75.

M : 105 moins 30, parce qu'à 105, t'as rajouté...

PE3 : J'ai rajouté 3.

M : T'as rajouté 3 et, du coup,

PE2 : À 102, elle a rajouté 3.

M : 102 plus 3 moins 27 plus 3. Donc, tu es arrivée à la même chose. Et après...

PE3 : Non, 105 moins 30.

Là encore, côté technologie, on reste sur de la description de la technique et non sur de l'explication. La technique est justifiée par l'utilisation de l'écart constant mais sans d'explication qui lui donne du sens concrètement. Il n'y a pas de discours autour du transfert de son enseignement en classe à ce stade-là.

Les deux compensations externes (E4) discutées sont : $102 - 20 - 7$; $102 - 2 - 25$. Voici un extrait des échanges qui ont eu lieu pour la première :

PE2 : *Oui, y'en a pour faire le 102 moins 27, je pense qu'ils auraient fait le $102 - 20 - 7$ [...]*

M : *Comment tu fais pour 102 moins 20 ?*

PE2 : *Un peu comme PE3. En fait, c'est moins 2 dizaines.*

M : *On est sur ce qu'on appelle la troncature, quand on va chercher ce qui nous intéresse. Donc, on est sur 10 dizaines moins 2 dizaines.*

PE2 : *82.*

M : *Donc, on a 8 dizaines, et il nous reste...*

PE2 : *2 unités.*

M : *Les 2 unités, donc 8 dizaines plus 2 unités donc 82. Et après, le 82 moins 7 ?*

PE9 : *moins 2 moins 5 ?*

M : *Ah. $82 - 7$, $82 - 2 - 5$. Donc là, on est sur quoi, quand on est sur le 2 moins 5 à la place du 7 ?*

PE : *La décomposition.*

M : *Voilà, là, on est encore sur la décomposition.*

On note encore ici une description des étapes de la technique mais pas de demande d'explication ni de justification. À nouveau ici, la compréhension de la transformation semble partagée.

Lors du deuxième présentiel de sa FC (26/02/2021), elle propose aux formés de « vivre » une séquence d'enseignement co-construite au sein de la FFIREM. Elle change la modalité de communication des techniques en demandant aux formés de les écrire sur ardoise. La première tâche est $31 - 18$. Techniques échangées : deux compensations internes ($31 - 18$ et $33 - 20$) ; trois compensations externes ($31 - 10 - 1 - 7$; $31 - 10 - 8$ (E4) ; $31 - 20 + 2$ (E 3)). Lors de cette FC, M. évoquera davantage la transposition en classe, sans doute aussi car la situation s'y prête davantage. Elle repère les différentes techniques, provoque et accueille les explications qui, cette fois, doivent aller au-delà du nom d'une propriété ou d'une simple description des étapes d'une technique (cf. annexe 3). Elle insiste auprès des PE sur la nécessité de développer des technologies dans un registre de langage nécessaire à la compréhension des techniques pour des élèves (fonction explication).

Alors là, moi, j'ai mis les termes euh (avec un geste exprimant des guillemets) voilà, les termes euh professionnels entre guillemets, nous, parce qu'on est entre enseignants mais, là, **l'idée, ce serait de pouvoir euh utiliser le vocabulaire des, des élèves** du coup. Tu vois, quand tu as dit tout à l'heure, bah oui mais comme y'en avait trop, après il a fallu euh, comme **j'en ai enlevé trop, il a fallu que j'en rajoute**. Euh, pourquoi ? parce que bah du coup **on a davantage de chances que les élèves mettent de sens et retiennent** euh si c'est eux qui sont à l'origine là euh, des, des noms entre guillemets.

[...] complément, ça euh, ça, ils, ils maîtrisent. Mais voilà, jalonnement, compensation, conservation des écarts, etc., savoir comment est-ce qu'on peut euh verbaliser tout ça euh avec eux.

Pour le calcul suivant, $91 - 37$, M. évoque son rapport à l'écart constant qui évolue :

L'écart constant c'est quelque chose que, moi à l'école, je n'ai jamais jamais travaillé. Ni en tant qu'élève, ni en tant qu'enseignante, que j'ai découvert euh sur le tard et là, depuis que j'ai, j'ai découvert ça, et bah en fait, je n'utilise plus que ça. Par contre, l'écart constant, je l'utilise euh de... première méthode. C'est-à-dire que, moi, je cherche là le nombre rond mais à soustraire. Ce que euh toi tu fais [$91 - 37 = 90 - 36$], le complément, ça, parce que pour moi, c'est trop coûteux. C'est trop coûteux d'aller chercher en plus un complément. Mais c'est propre à chacun. [...] Moi, ça a été la révélation.

2. Deux événements fortuits dans la classe de P. enseignant de CE1 formé par M

P. est un des enseignants de l'école GP, qui a suivi les formations avec M. depuis 2019. C'est un enseignant chevronné qui enseigne en CE1 (élèves de 7 ans). En 2021-2022, l'école rentre en

« constellation »¹³. Pendant ces visites entre collègues, lorsqu'elle le peut, M. est présente comme formatrice. Elle filme les séances, prend des photos des productions d'élèves et des traces laissées par les enseignants, dont elle se sert parfois comme matière pour ses formations. Parfois, elle prend la parole, notamment pour questionner les élèves sur l'explication de leurs procédures. Pendant les deux temps de visite chez P., deux événements fortuits sont filmés (cf. annexes 5 et 6 pour les extraits de verbatim). Leur analyse nous permet un constat en demi-teinte.

P. dit : « *Elle compense* » quand il voit que son élève S. utilise la compensation interne de l'addition. M. demande à S. « *Comment tu as fait pour transformer le 5 et le 7 ?* » : S. décrit son calcul. Cependant, aucun des deux ne va jusqu'à lui demander d'expliquer dans un registre qui permettrait à tous les élèves de comprendre ce qui permet de « prendre à l'un pour donner à l'autre sans changer le résultat ». De même, P. accueille l'utilisation de la compensation interne de la soustraction et tente d'en faire une explication : « *pour garder le même écart, pour garder la même différence* » mais qui n'aboutit pas. Dans aucun des cas, P. n'a a priori de projet d'apprentissage de ces techniques : « Très bonne technique, compliquée pour certains encore je pense. », « Ça, je vais en reparler après // si j'ai le temps ».

Plusieurs hypothèses sont possibles : l'une d'entre elle est que l'enseignement de la propriété interne de la soustraction est long, complexe (cf. l'ingénierie pédagogique de (Rinaldi, 2016)). L'autre hypothèse, qui n'exclue pas la première, est que c'est une première étape nécessaire dans la transposition didactique : repérer et accueillir les techniques des élèves, mais pas les expliquer, ni les représenter, ni les enseigner.

V. CONCLUSION

Pour moi, former à l'intelligence du calcul passe obligatoirement par une explicitation mais surtout une explication des procédures. Pour aider les formateurs à former les enseignants à enseigner l'intelligence du calcul, il me paraît indispensable de leur fournir des outils qui leur permettent d'identifier les savoirs en jeu, et ce dans les trois catégories de savoirs (Boule, 1994) : faits numériques, propriétés de la numération et propriétés des opérations. Une des contributions de ma recherche a consisté à mettre au jour des propriétés transparentes pour l'institution école primaire (les compensations restreintes au champ additif) et d'élaborer un discours autour de ces propriétés (fonction « justifier/expliquer » des technologies) afin de permettre aux élèves de donner du sens à des transformations d'écritures qui s'appuient sur ces propriétés dans des procédures de calcul mental.

M. est une formatrice « angoissée » par le calcul mental qui a participé à un dispositif collaboratif de formation de formateurs autour d'un dispositif pédagogique appelé « défi-calcul ». Cela lui a permis de développer des praxéologies mathématiques personnelles et professionnelles, se formant pour former à son tour l'équipe d'une école. Ses discours se développent au fur et à mesure que les savoirs issus de la formation se développent également (voir thèse), démarrant par des justifications formelles en appui sur des mathématiques savantes à des explications portées par une compréhension de propriétés.

Dans la classe d'un des enseignants formés, deux événements nous questionnent : lors d'une séance d'une demi-heure sur des calculs additifs, l'enseignant est capable de repérer l'utilisation de la compensation interne de l'addition dans la technique de l'élève mais il ne semble cependant pas prêt, à ce moment-là, à l'enseigner. De même, plus tard dans l'année, il repère et décrit l'utilisation de la

¹³ Modalité de formation issue du Plan Villani-Torossian (2018) : en plus de temps de formation en présentiel, les enseignants de l'école doivent participer à des « visites croisées » qui consistent à aller voir d'autres collègues de la même école faire classe. Un travail d'analyse suit ces visites.

compensation interne de la soustraction (« pour garder le même écart ») par un élève. Cela nous semble participer à une première étape de la transposition didactique.

Ma recherche consiste à m'intéresser aux savoirs dans la perspective de développer l'intelligence du calcul. J'ai donc été amenée à identifier des propriétés qui permettent de décrire les raisonnements et d'en rendre compréhensible les mécanismes par les élèves par des technologies explicatives dans différents cadres et registres. Même si je ne n'en ai pas décrit ici les imbrications, pour moi, ce type de dispositif collaboratif permet de créer un espace partagé, à la rencontre de multiples acteurs provenant d'institutions diverses (EN¹⁴, INSPE et Recherche). Par des activités partagées autour d'un même objet, le défi-calcul, cela permet la construction de praxéologies communes.

RÉFÉRENCES

- Artigue, M. (2004). L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives. *Repères IREM*, (54), 23-39. <https://bibnum.publimath.fr/IWR/IWR04001.pdf>
- Batton, A., Becqueriaux, M., Freguis, G. et Boillerault, S. (2024). Défi calcul année 2 : accompagner les formateurs et les enseignants pour enseigner le raisonnement en calcul mental [Atelier]. Dans *Actes du 49^e colloque de la Copirelem, juin 2023, Marseille, France* (p. 438-472). <https://hal.science/hal-04614927>
- Bautier, E. et Goigoux, R. (2004). Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue française de pédagogie*, 148, 89-100. <https://doi.org/10.3406/rfp.2004.3252>
- Boule, F. (1994-1995). 31 - 18 = ? Regards sur le calcul mental. *Grand N*, (58), 39-52. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/58n4_1583009268086-pdf
- Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(2), 135-182. <https://revue-rdm.com/2008/travailler-avec-travailler-sur-la/>
- Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-00338665>
- Chambris, C. et Subramaniam, K. (2023, août). Can school arithmetic be seen as theory building? Dans *Actes de l'International Symposium Elementary Mathematics Teaching, Charles University, Faculty of Education, Czech Republic, août 2023, Prague* (p. 123-133). <https://hal.science/hal-04188452>
- Chevallard, G. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques. Dans R. Noirfalise (dir.), *Actes de l'université d'été de l'ARDM, 4-11 juillet 1998, La Rochelle, IREM de Clermont-Ferrand* (p. 91-120). https://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/analyse_des_pratiques_univ_d_ete_la_rochelle.pdf
- Margolinas, C. et Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. Dans J.-Y. Rochex et J. Crinon (dir.), *La construction des inégalités scolaires* (p. 19-32). Presses universitaires de Rennes.
- Ma, L. et Kessel, C. (2018). The theory of school arithmetic: Whole numbers. Dans M. Bartolini Bussi et X. Sun (dir.), *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades* (p. 439-463). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63555-2_18

¹⁴ Éducation Nationale.

Mise au jour de savoirs transparents au sein d'un dispositif de formation collaborative. Que se passe-t-il quand formateurs et enseignants sont amenés à développer l'intelligence du calcul ?

| BATTON Agnès

Rinaldi, A.-M. (2016). *Place et rôle des technologies dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2 : proposition d'ingénierie* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot].
<https://www.theses.fr/2013PA070039>

Villani, C. et Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse.

ANNEXES

1) Notes de M. en formation :

18/10/2019

1) $35,1 + 36,2 + 34,5 = (7 \times 36,2)$
 $+0,1 \quad -0,1$
 $36,2 \times 10$

2) $36 + 0,1 = 36 + 0,2 + 36 + 0,3 = (7 \times 36,2)$
 $36 \times 10 + (7 \times 0,2) + 0,1 + 0,3$
 $1,4 + 0,6$
 $360 + 2$

$(102 - 27) \times 4$
 $(100 + 2 - (25 + 2)) \times 4$ ou $102 - 27$
 $102 - 2 = 100$
 $100 - 25 = 75$
On diffère le 27 car si on ajoute on se complique à se retrouver aux 1000

Les règles conseillées pour revenir au thème des dérivés plus facile de calculer 23 - 8 que 24 - 8
 $24 - 8 = (24 + 2) - (8 + 2) = 23 - 10 = 13$

Propriétés des opérations
 Associativité
 Distributivité
 Commutativité
 Conservation des dérivés

Facteurs numériques
 Tables de multiplication
 Tables d'addition
 Tables de soustraction
 Compléments à 10

Facteurs numériques
 Tables de multiplication
 Tables d'addition
 Tables de soustraction
 Compléments à 10

Synthèse extraite du diaporama de l'atelier COPIRELEM, juin 2018 (Batton et al., 2019)

Faire connaître (connaissances à maîtriser)	Nomenclature		Propriétés des opérations
	multiplicatifs	additifs	
Avec les tables	Compléments à ... (contre l'oubli des tables de multiplication)	Tables de fractions Décomposition	Associativité Distributivité Commutativité Conservation des dérivés Compensation

Tableau des savoirs adapté de celui de la FFIREM par une CPC pour la formation

2) FC 18-12-2019

Deux diapositives, extraites du diaporama du présentiel 1 de la Formation continue, dressant un bilan des savoirs :

- un tableau sans,
- un tableau avec la compensation.

(3) M. comme formatrice 2020-02-26 : tâche : 31 - 18

P : 31 moins 20 plus 2 égal 13.

M : Alors du coup, comment est-ce qu'il a procédé là X ?

PE1 : Il est allé à la dizaine supérieure.

M : Alors, il a utilisé, là, une dizaine entière. Pourquoi il nous a rajouté, là, un plus 2 ?

PE1 : Parce que il a 18 pour aller jusqu'à 20, faut ajouter 2

M : Alors, est-ce que c'est l'écart constant ça ?

Plusieurs PE (PE2, PE3 ..): non. PE3 : non ce n'est pas l'écart constant.

M : C'était quoi déjà l'écart constant ?

PE3 : C'est quand j'enlève autant aux deux termes (geste des mains) ou je rajoute autant aux deux.

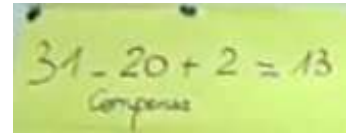
[...] M : C'est quand je mets... j'ajoute la même chose ou j'enlève la même chose. Mais alors qu'est-ce qui se passe là, pourquoi on a un plus 2 ? Pourquoi à un moment donné...

PE2 : Parce que j'ai trop retiré en enlevant 20 il fallait enlever que 18.

M : Voilà, tu as trop retiré, du coup ?

PE2 : Je rajoute 2.

M : Voilà, donc, pour compenser ... pour compenser du coup tu as rajouté du plus 2. Compensation.



31 - 20 + 2 = 13
Compense

(4) M. comme formatrice 2020-02-26 : tâche : 91 - 37

PE : Moi, j'ai fait 91 - 1, pour avoir 90. Ensuite j'ai fait euh, je suis passée à, j'ai fait euh, 90 - 30.

M : Voilà, on est là alors (en passant à l'affichage du gauche). [...]

PE : Ça fait 60, et après moins 7 euh, moins 7 et plus, plus 1.

M : Donc t'as fait 91.

$$\begin{aligned} & 91 - 37 \\ &= 90 - 30 - 7 + 1 \\ &= 60 - 7 + 1 \end{aligned}$$

PE : Parce que j'ai enlevé 1 au début et je rajoute 1 après.

M : 91 moins 1, 90. Après, 90 moins, moins 30, ça fait 60.

PE : Moins 7.

M : Et après 60 moins 7.

PE : Ça fait 53. Plus 1, 54.

M : Ah, ah oui, donc, là, t'as une petite, t'as une petite compensation du coup.

PE : Voilà. J'ai fait un moins 1 au début et plus 1 après.

(5) Chez JP. en CE1 (7 ans) : épisode 1 du 22/11/2021

Tâche : calculer $27 + 5$

PE : Tout à l'heure, on avait $27 + 5$. 7 et 5 et 5 et 7 c'est la même chose. On pouvait se rappeler que le 5 avec le 7 ça faisait 12. Maintenant la question que je vous pose c'est, si moi je ne le connais pas par cœur que $7 + 5$ ou $5 + 7$ ça fait 12 ? Puisqu'on n'a pas appris la maison du 12. Comment on peut faire ? Stratégina je t'écoute.

S : On peut faire un double avec. Comme $6 + 6$.

PE : T'as transformé ton calcul en $26 + 6$. Celle-là je ne l'avais pas vu venir celle-là ! (rires des collègues) Et donc comment tu as transformé ton $25 + 7$ en $26 + 6$.

S : En fait $6 + 6$ c'est un double. Et comme ça fait 12 et ben tu calcules. [...]

PE : Mais moi je t'avais demandé $25 + 7$. Pourquoi tu as changé ton $25 + 7$ et tu t'es dit oh c'est pareil que $26 + 6$?

M : Comment tu as fait pour transformer le 5 et le 7 ? Tu as fait comment pour les transformer en 6 ?

S : Ben en fait j'ai fait 7 plus « moins 1 » après ça fait 6 et après j'ai fait $5 + 1$ ça fait 6.

M : D'accord. Donc ça veut dire que tu as, hop dans le 7 tu t'es dit il y a du 6, ça m'arrangerait. Donc je vais en retirer 1, et tu en as fait quoi de celui que tu lui as retiré ?

S : Et ben sur le 5 j'ai fait $+1$.

M : Tu lui as donné. Tu en as retiré 1 au 7 et tu l'as donné au 5.

[PE(s) en aparté : « elle compense »]

PE : Très bonne technique, compliquée pour certains encore je pense.

(6) Même classe : épisode 2 du 30/03/2022

Tâche : calculer $100 - 98$ (avant, les élèves posent)

PE : J'ai quelqu'un d'autre là, qui m'a pas fait le calcul que j'ai écrit au tableau. Je comprends pas, j'ai besoin d'une explication. J'ai H. qui m'a fait ça comme calcul. Pourquoi t'as fait ce calcul ? ($99-97$) [inaudible...]

H : $100-98$ c'était trop difficile. J'ai enlevé une unité à 100, ça fait 99 et 98, restait 97 et après j'ai calculé.[...]

PE : Alors H. , il a transformé son calcul pour qu'il soit plus facile. ça l'embêtait, le 100. Il savait pas où casser, casser, c'est tout nouveau là, casser, là (nombre de dizaines). Ce qu'il est en train de faire, c'est pas quelque chose qu'on a appris, je ne sais pas d'où il sort ça mais bravo !

Là il a enlevé 1 ici (écrit -1 sous le 100). Et pour garder le même écart, pour garder la même différence, là aussi il a enlevé 1 (écrit -1 sous 98). 100 moins 1 ça fait 99 et 98 moins 1, ça fait 97. Et donc il a transformé son calcul en $99-97$ parce qu'il sait que la différence entre les deux, ça va rester la même. Donc après, il fait son calcul.

Ça, je vais en reparler après // si j'ai le temps.



RECHERCHE COLLABORATIVE ET DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL : LE CAS D'UNE RECHERCHE EN INFORMATIQUE AU PRIMAIRE EN FRANCE

| COUDERETTE* MICHÈLE

Résumé | Depuis la rentrée 2016, la programmation informatique est inscrite en tant que thème transversal dans les programmes d'école primaire en France. Cette communication présente les résultats d'une recherche collaborative engageant deux professeurs d'école au cycle 2 (6-8 ans) néophytes en informatique. Nous montrerons, à partir d'extraits, les retombées des rencontres réflexives sur l'épistémologie pratique et le rapport au savoir des enseignants.

Mots-clés : recherche collaborative, informatique, modèle de l'action didactique conjointe, épistémologie pratique du professeur, rapport au savoir

Abstract | Since 2016, computer programming has been included as a cross-curricular theme in French elementary school curricula. This paper presents the results of a collaborative research project involving two Cycle 2 schoolteachers (pupils aged 6-8) neophytes in computer science. Using extracts, we show the impact of reflexive encounters on the teachers' practical epistemology and relationship to knowledge.

Keywords: Collaborative research, computer science, model of joint didactic action, practical epistemology of the teacher, relationship to knowledge

I. CONTEXTE DE LA RECHERCHE

Depuis 2016, l'initiation à la programmation informatique fait partie des programmes de l'école primaire en France. Au cycle 4, la programmation est traitée comme une discipline distincte, tandis qu'au primaire, les concepts d'algorithmique et de programmation sont intégrés de manière transversale, impliquant des domaines comme les mathématiques, les sciences et technologies, le langage, et la géographie. Le document d'Eduscol intitulé « Initiation à la programmation au cycle 2 et 3 » fournit des précisions importantes à l'intention des enseignants.

L'initiation à la programmation pourra être une opportunité pour des travaux interdisciplinaires : avec le champ questionner le monde au cycle 2, par exemple, autour de la question du repérage ou avec le français, dans le développement des usages du langage oral ou écrit, notamment en créant des histoires illustrées par de courtes animations créées par les élèves (MEN, 2016, p. 1)

L'initiation à la programmation est perçue comme une opportunité pour l'interdisciplinarité, concernant principalement le français et les mathématiques. Cela soulève la question de la manière dont ces recommandations sont accueillies par les enseignants du primaire. Les professeurs considèrent-ils cette intégration dans les programmes comme un véritable enseignement des concepts informatiques, ou l'interprètent-ils plutôt comme un moyen de renforcer des apprentissages jugés « fondamentaux » ? Plusieurs recherches (Villemonteix, 2018) montrent que les enseignants privilégient souvent des ressources prêtes à l'emploi et visent à susciter la découverte chez les élèves, ou à intégrer des éléments « compatibles avec des enseignements déjà légitimes » (Ibid.). D'autres recherches (Couderette, 2016 ; Devos-Prieur et Grandaty, 2011 ; Schubauer-Leoni et al. 2007) soulignent les obstacles rencontrés dans la mise en œuvre de projets interdisciplinaires, accentués par un manque de formation, notamment en informatique (Briant, 2013 ; Couderette, 2016)

* Université de Montréal CRM, CNRS – Canada ; Université Paris Est Créteil, LDAR – France – michele.couderette@u-pec.fr

Dans notre communication, nous présentons les premiers résultats émergeant de l'analyse d'une recherche collaborative impliquant deux enseignants du cycle 2.

II. CADRES THÉORIQUES MOBILISÉS ET INDICATIONS MÉTHODOLOGIQUES

1. *Concepts théoriques mobilisés*

Le modèle de l'action didactique conjointe

Le modèle de l'action didactique conjointe, proposé par Sensevy (2007), analyse la co-construction du savoir entre professeur et élèves. Le modèle considère que les apprentissages en classe sont le produit de l'action didactique conjointe professeur élèves et qu'ils émergent des interactions dans la classe. Bien que ce texte se concentre principalement -) sur les interactions au sein de la recherche collaborative de classe, les analyses des participants, portant sur ce qui a eu lieu dans les expérimentations en classe, ont été abordées à travers ce cadre. Aussi, nous utilisons les concepts de mésogenèse, topogenèse et chronogenèse pour décrire l'évolution dynamique du système didactique. L'agir professoral est analysé à travers les descripteurs « définir », « dévoluer », « réguler » et « institutionnaliser ».

Le concept d'épistémologie pratique (EPP)

D'un point de vue anthropologique, Chevallard (2002) définit le rapport d'une personne à un savoir comme advenant d'une pluralité de rapports institutionnels : « les rapports "personnels" sont le fruit de l'histoire de nos assujettissements institutionnels passés et présents. ». Comment les enseignants interagissent-ils avec le savoir informatique en contexte d'enseignement ? Brousseau (1986) utilise le concept d'épistémologie du professeur pour interroger la nature des savoirs qui sous-tendent la pratique enseignante. Sensevy prolonge et enrichit ce concept en introduisant l'oxymore d'"épistémologie pratique". L'épistémologie est pratique car « produite en grande partie, pour un savoir donné, par les habitudes d'actions que le professeur a construites lors de son enseignement » (Sensevy, 2006, p. 214) et ce, sans pour autant que l'enseignant soit toujours en mesure de les expliciter (Amade-Escot ; 2014) : « l'épistémologie pratique du professeur renvoie à l'ensemble des savoirs qui informent sur ce qu'il fait et dit dans sa classe sans pour autant qu'il ne soit toujours en mesure de les expliciter ». Par ensemble des savoirs, Amade-Escot fait référence aux savoirs académiques ainsi qu'aux savoirs acquis dans la pratique professionnelle. Convoquer le concept de l'EPP permet d'analyser la manière dont l'enseignant articule savoirs académiques et savoirs issus de la pratique, en fonction des contraintes et des contextes spécifiques de la classe. Ainsi, l'épistémologie pratique éclaire les mécanismes par lesquels les enseignants adaptent et transforment les connaissances disciplinaires pour les rendre opératoires dans leurs gestes professionnels.

Dans ces actes, nous présentons les premiers résultats d'une analyse en cours portant sur l'évolution de leur rapport au savoir informatique et les effets sur leur pratique pédagogique. Ce processus est complexe dans la mesure où il se déroule dans un cadre où les enseignants doivent naviguer entre les exigences des programmes scolaires et la réalité de leurs classes.

2. *Indications méthodologiques*

Une recherche collaborative

Notre recherche s'inscrit dans un cadre collaboratif : elle vise à créer des conditions favorables du partage des expériences et à favoriser la « co-construction d'un objet de connaissance entre un

chercheur et des praticiens » (Desgagné et al., 2001 ; Bednarz, 2013). Ainsi, faire de la recherche 'avec' les praticiens et non 'sur' les praticiens nécessite d'établir une « certaine dialectique entre les préoccupations du monde de la recherche et celles du monde de la pratique » (Ibid.). De ce fait, la recherche collaborative a l'ambition de contribuer tant à la production de connaissances scientifiques et qu'au développement professionnel des acteurs engagés dans la recherche.

Une démarche clinique expérimentale

La méthodologie adoptée repose sur l'approche « clinique expérimentale » développée par Schubauer-Leoni et Leutenegger (2002). Cette approche implique d'une part la co-construction de situations d'enseignement riches en savoirs disciplinaires (et notamment informatiques), d'autre part, la co-analyse des situations didactiques, co-analyse se réalisant à travers les analyses *a priori*, *a posteriori* et les mises en œuvre dans la classe. Cette approche méthodologique vise à documenter le processus d'enseignement-apprentissage par une réflexion collaborative et un ajustement continu basé sur l'analyse des mises en œuvre dans la classe.

La figure 1 ci-dessous décrit l'architecture du dispositif de la recherche.



Figure 1 – Architecture du dispositif de recherche collaborative

Les pointillés sur la figure indiquent le processus itératif du dispositif : des réunions de régulations entre les mises en œuvre avaient pour fonction de réajuster les modalités et objectifs entre chacune des séances.

III. RÉSULTATS

Nous présentons ces premiers résultats en deux sous-sections : la première met en avant les signes d'un développement professionnel dans la pratique en classe, la seconde s'intéresse à l'évolution de leur rapport au savoir.

Les expérimentations se déroulent dans une école ordinaire de banlieue parisienne et impliquent deux enseignants. Une enseignante, que nous désignerons par Ens1 a moins de 8 années d'ancienneté dans le métier et enseigne dans un cours double CP/CE1 (6 – 7 ans), tandis que Ens2, de plus de vingt ans d'ancienneté, intervient dans un CE2 (8 ans). A partir d'extraits de verbatim issus d'entretiens ante et post séance et des rencontres réflexives, nous cherchons à montrer l'évolution de leur rapport au savoir informatique et de leur épistémologie pratique.

1. Un développement professionnel au plan de la pratique

Si les écrits institutionnels recommandaient une approche interdisciplinaire de la programmation informatique, les premières intentions déclarées des enseignants était d'ordre mathématique : « *on voudrait [construire] des situations qui travaillent la spatialité droite/gauche, à la droite de... à la gauche de... et le repérage sur quadrillage [...] et puis aussi l'espace, se repérer sur un quadrillage quelque chose où le Blue-Bot pourrait être un plus.* » (Ens1). L'utilisation d'un « robot »¹ de plancher tel que le Blue-Bot a été choisi pour sa

¹ Bien que souvent présenté comme étant un robot, les Blue-Bot sont en réalité des automates. Ils réagissent à la pression de touches positionnées sur le capot et non à des événements provenant de leur environnement.

disponibilité dans les services de prêt l'académie mais surtout pour son potentiel rétroactif. Dans les paragraphes qui suivent, nous décrivons comment cet artefact a généré des discussions contribuant au développement professionnel des participants à la recherche.

Le Blue-Bot, objet technologique problématique

La manipulation du Blue-Bot fait apparaître plusieurs sources de difficultés pour des élèves de cycle 2.

Un premier problème réside dans la gestion de la mémoire du Blue-Bot. Vider la mémoire s'opère par la touche « X » (cf. Fig. 2). Cependant, l'absence d'un indicateur permettant de contrôler le contenu de la mémoire du robot empêche de vérifier si des instructions y sont toujours stockées. Si la mémoire n'est pas vide, les instructions suivantes s'ajoutent alors aux précédentes. Cet aspect cumulatif de saisie des instructions ne facilite ainsi pas l'interprétation des rétroactions du Blue-Bot, et ce faisant affaiblit ainsi son potentiel rétroactif.

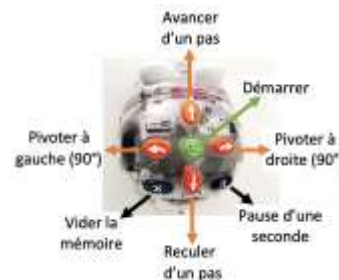


Figure 2 – Présentation du Blue-Bot

Les déplacements du Blue-Bot sont contrôlés de manière distincte selon que l'on modifie ou non la direction. Pour avancer ou reculer, une seule commande est nécessaire. En revanche, pour tourner, deux commandes doivent être choisies : la première indique la direction (pivoter à droite ou à gauche), et la seconde sert à avancer ou à reculer. Cette distinction est particulièrement marquante par rapport au quotidien, où un changement d'orientation et un déplacement se produisent simultanément.

Si l'intention didactique initiale formulée par les enseignants relevait des mathématiques, les difficultés présupposées ont conduit à modifier le scénario en introduisant dans un premier temps une étude de l'objet technologique : localisation et fonction des différents éléments du robots, tels que les différents boutons marche/arrêt, la batterie, les boutons-flèche.

L'extrait ci-dessous (Cf. extrait 1) illustre la première préoccupation des enseignants en début de recherche : comment introduire le blue-bot dans la classe ?

- Ens2 : [...] Avec le robot idiot quand on voulait qu'il aille à droite, sur cette case, on faisait une flèche à droite, basta. Et puis voilà, on ne s'en occupait pas plus. Alors qu'avec le Blue-Bot il faut qu'il tourne sur lui et qu'il fasse un pas... En fait, tout est séquencé. Pour tourner, je pivote et je fais un pas. Pour programmer cette bête-là, en revenant à ce qu'on disait tout au début, le Blue-Bot, pour cette bête-là, il va falloir leur montrer qu'ils comprennent comment elle marche ...
- Ch : on pourrait les laisser chercher...en les mettant directement sur un plan quadrillé et en leur demandant de les programmer pour se déplacer d'une case à une autre ...
- Ens1 : On pourrait faire une séance d'observation du Blue-Bot. Juste les touches, les trois interrupteurs dessous, la croix, rien que ça, ça va prendre du temps. [...] En plus, c'est dans le programme, ça rentre dans questionner le monde.
- Ens2 : et ça permettrait d'aller plus vite après sur les déplacements.

Extrait 1 – Inscription de la première séance en sciences

Nous observons ici des enseignants cherchant à se maintenir au plus près de l'esprit des programmes. Remarquons que la suggestion de la chercheuse n'est pas retenue au profit d'une étude de l'objet technologique qui est, pour les enseignants, une opportunité de répondre aux injonctions

institutionnelles : inscrire cette première séance en sciences. La remarque finale de Ens2 laisse entrevoir une élaboration par emboitements de milieux didactiques.

Exploitation d'une dissonance de points de vue enseignants/chercheuse

Les élèves ayant eu une première approche du Blue-Bot, les enseignants proposent de « compléter la fiche [technique] du Blue-Bot en trouvant la longueur d'un pas » (Ens1) et de « travailler sur "combien mesure le pas d'un Blue-Bot ou le 'une fois j'avance' " avec une petite situation-problème progressive et l'utilisation d'une bande à papier. » (Ens2) L'extrait ci-dessous montre comment les enseignants tentent de travailler de concert les mathématiques et l'informatique. Dans l'extrait suivant, Ens2 évoque une ressource qu'il connaît et qui a déjà été expérimentée.

- Ens2 : ils doivent placer le Blue-Bot pour qu'en avançant quatre fois il s'approche le plus près possible d'un KAPLA sans le percuter. On va pas leur demander tout de suite de mesurer combien ça fait en une fois. On va partir en quatre fois pour corser un peu l'affaire.
- Ch : corser l'affaire ? je ne comprends pas ...
- Ens2 : Parce qu'au niveau procédure, sans mesurage, j'ai prévu une bande de papier et que pour trouver un pas, il suffit de plier une fois et encore une fois et normalement il devrait trouver un bon
- Ch : ok... Donc on travaille plus la grandeur que la mesure ...
- Ens1 : Une fois qu'on saura la grandeur, on va pouvoir prévoir avec plusieurs pas où mettre le robot //
- Ens2 : // et après on va pouvoir éventuellement commencer à construire un quadrillage et se déplacer dessus.
- Ch : ok, j'ai compris pour le quatre fois avancer ... Mais le KAPLA ?
- Ens2 : il faudra que le Blue-Bot s'approche le plus possible du KAPLA sans le percuter
- Ch : Ok ... je suis prête à parier que vous allez vous faire bouffer par le KAPLA.
- Ens2 : J'ai déjà fait. Tu vas voir, ça marche ...

Extrait 2 – Déterminer la grandeur d'un pas Blue-Bot

Cet extrait illustre une distance perceptible entre deux points de vue, non pas sur la concomitance des deux objectifs didactiques, mais plutôt sur l'introduction d'un élément – le KAPLA – que la Ch pense inutile voire perturbateur. Ens2 a le souvenir de cette situation vécue lors d'un stage et testée dans une de ses classes antérieures. L'observation des séances de classe, que nous décrivons brièvement dans les deux paragraphes suivants, montre des mises en œuvre contrastées.

Ens1 découpe la tâche en deux étapes : programmer le Blue-Bot pour qu'il percute le Kapla puis positionner le Blue-Bot à une distance de 4 pas Blue-Bot et qu'il ne percute pas le Kapla. Nous interprétons ce découpage une manière d'introduire dans le milieu didactique les ingrédients nécessaires pour atteindre l'enjeu didactique, obtenir la grandeur d'un pas Blue-Bot La première étape a pour objectif de faire appel à la mémoire didactique des élèves à propos de l'utilisation de la touche « effacer », dont la méconnaissance de sa fonction ralentit la compréhension des rétroactions du Blue-Bot. Si à la première étape Ens1 est en position topogénétique haute de manière à peser sur le temps didactique, elle se replie sur une position basse d'observatrice, de « questionnante », laissant les élèves chercher par eux-mêmes une bande de longueur « quatre pas Blue-Bot ». La séance se termine par une

mise en commun organisée collectivement, l'enseignante faisant exprimer par les élèves leurs différentes manières d'obtenir une bande de longueur « 4 pas Blue-Bot ».

Ens2 mène quant à lui la séance sous forme de défis : après de manipulation libre (7 min), il s'agit de « programmer comme vous voulez le Blue-Bot pour qu'il percute le Kapla » (défi1, 8 min), puis de « percuter le Kapla en programmant seulement "4 fois avancer" » (défi2, 10 min) puis de « programmer avec seulement "4 fois avancer" le Blue-Bot pour qu'il s'arrête le plus près possible sans percuter le Kapla » (défi3, 20 min). Nous interprétons ce découpage comme une élémentarisation de la tâche principale. Ens2 espère ainsi amener l'ensemble de ses élèves à produire une bande de longueur 4 pas Blue-Bot. Pour autant, nous observons plusieurs élèves se maintenant – trop – longtemps dans les deux premiers défis ce qui amène Ens2 à basculer d'une position topogénétique basse à une position surplombante usant de multiples effets Topaze, monstrations, trilogues².

L'analyse des mises en œuvre de cette séance a-t-elle contribué au développement professionnel des participants ? A-t-elle influé sur la poursuite de la recherche ?

Les discussions au sein de la recherche collaborative se sont d'abord centrées sur la pertinence de l'utilisation du Kapla durant la séance. Alors que la chercheuse l'identifie comme un facteur perturbateur, Ens1 y voit un élément de validation : « le Kapla devrait revenir à la fin, quand la bande de 4 pas a été trouvée. Les élèves testent avec le Kapla. En plus pour les élèves on répond à la question de départ³ ». Ens2 renchérit en soulignant la nécessité de dissocier l'aspect ludique de l'activité : « il faut le détacher du jeu. Les miens se sont bien amusés ». Cet échange met en lumière un enjeu récurrent dans la reprise de ressources pédagogiques : leur appropriation et leur transformation. N'ayant pas retrouvé la ressource originelle, Ens2 ne peut en expliciter les intentions didactiques initiales. Ens1 souligne alors qu'il aurait fallu « prendre le temps de la tester par nous-mêmes », ce qui permet à Ch d'introduire ainsi la question de la reprise de ressources pédagogiques et de l'importance d'une analyse *a priori*.

À mesure que la discussion avance, l'attention se déplace de l'outil Kapla à la structuration même de la séance. Ce sont cette fois-ci les enseignants qui amènent la réflexion dans la réalité de la classe. Ens2 interroge la définition de la tâche : « nous on savait ce qu'on voulait, mais comment on le dit sans le dire ? C'est ça aussi la résolution de problème ... Donner une consigne claire au départ sans trop en dire ». Ens1 questionne sa posture dans la classe « moi, je passe entre les groupes. [...] Là je les ai laissé chercher, et après je les ai repris tous ensemble. D'habitude j'interviens plus, mais là, est-ce qu'il aurait fallu que je sois plus présente pour aller jusqu'au bout ... du coup j'ai pas fait d'institutionnalisation ». Ch revient quant à elle sur les défis de Ens2, qu'elle analyse comme une forme d'élémentarisation des savoirs attendus : « est-ce que découper autant est intéressant ? »

Ce croisement des points de vue témoigne d'un basculement : d'un débat initial sur un outil didactique, la réflexion s'élargit vers des considérations plus fondamentales sur la conduite de l'activité et l'articulation entre consignes, accompagnement et institutionnalisation des savoirs.

Au final, l'analyse conjointe de l'action didactique conduit les participants sur un terrain « non ordinaire » : Ch questionne la pratique ordinaire *in situ* tandis que les Ens1 et Ens2 tirent parti de concepts didactiques théoriques pour réinterroger leurs pratiques. Nous considérons que c'est dans cette confrontation de points de vue que s'opère une évolution de l'épistémologie pratique des

² Trilogue (Schubauer-Leoni, 1997) : technique d'interaction didactique où l'enseignant s'adresse simultanément à plusieurs élèves tout en ne parlant explicitement qu'à un seul.

³ Placer le Blue-Bot à 4 pas de telle façon qu'il arrive le plus près du Kapla sans le toucher

participants à la recherche. En ouvrant un espace interprétatif sur les mises en œuvre, les enseignants interrogent et confrontent leurs pratiques, tandis que la chercheuse, engagée dans la co-construction de la situation, accepte une forme de lâcher-prise.

2. *Un développement professionnel du point de vue de la discipline*

Si la recherche collaborative favorise le développement professionnel, elle amène aussi à consolider des savoirs disciplinaires. L'extrait ci-dessous (Cf. extrait 3) illustre un échange à propos des systèmes de repérage absolu et relatif.

- Ens2 : les CE2 ont appris à se le déplacer sur un quadrillage. Ce qu'ils ont fait avant c'est dans un repère absolu. Et donc en repère absolu, si tu vas à gauche, tu mets autant de flèches de gauche sur ton déplacement à gauche. En relatif, il faut mettre le Blue-Bot dans le bon sens. En absolu, tu t'en fous.
- Ens1 : répète ?
- Ens2 : regarde [Ens2 se déplace sans changer d'orientation] tout droit, droite, tout droit, gauche.
- Ens1 : quand tu dis droite ou gauche, hein, c'est bien par rapport à toi
- Ens2 : oui, mais je change pas d'orientation.
- Ens2 : [se déplaçant] si je suis en relatif, tout droit, droite, tout droit, gauche. J'arrive pas au même endroit...
- Ch : Avec vos élèves //.
- Ens2 : // c'est du repérage ligne colonne.
- Ens1 : et là, ça a pas rapport avec toi. C'est indépendant
- Ch : OK. [...] droite, gauche c'est par rapport à toi... relatif à toi. Ce sont des termes qui sont associés à un repère relatif. Il me semble que si on mélange les deux systèmes//
- Ens1 : on peut faire avec les points cardinaux
- Ch : ou avec des élèves tableau porte fenêtre et //
- Ens2 : // mais c'est pas faux ce que je disais ...

Extrait 3 – Repère absolu vs repère relatif

Ens2 montre ici non pas une mécompréhension ou confusion des deux systèmes de repérage, mais une volonté d'expliquer à sa collègue le système de repérage en absolu. Bien que précisant ne changeant pas d'orientation, il utilise des termes spécifiques au système de repérage en relatif. Reprenant son explication, Ens1 témoigne d'une attention à une meilleure exemplification tandis que Ch envisage un possible façon de faire dans la classe. Les échanges entre les deux enseignants Ens1 et Ens2 montre une centration sur le savoir en jeu. Par contre, en suggérant une manière d'aborder le concept de repère absolu, nous observons que Ch endosse brièvement son statut de formatrice, ce qui pour nous est une émergence de son épistémologie pratique.

Au-delà des notions mathématiques, la recherche collaborative révèle également des enjeux liés à l'informatique et à son appropriation par les enseignants. Lors des premiers entretiens, les enseignants déclarent avoir peu de connaissances, ce que traduit notamment l'orthographe approximative du terme « algorithme », souvent écrit « algorythme ». Ce mot est spontanément associé à la notion de rythme,

entendue comme une succession régulière d'éléments. L'extrait ci-dessous (Cf. extrait 4) illustre un échange à propos de l'introduction de la notion de boucle informatique.

- Ens2 : j'utilise le mot instruction. donc maintenant, je peux leur demander combien d'instructions ils ont données au Blue-Bot pour faire le tour [il s'agit de déplacer une Blue-Bot sur un carré]
- Ens1 : dire d'où on part aussi ...la position d'entrée, la position de sortie
- Ch : oui, C'est pas tout à fait les entrées/sorties d'un programme mais on s'en approche ...
- Ens2 : Si tu mets tu mets ici bleu, ici rouge ...ça se répète et donc en fin de compte, tout droit pivoter à gauche tout droit pivoter à gauche et ça se répète .
- Ens : oui, mais pas si facile parce qu'il faut penser à remettre la BB dans le même sens pour pouvoir répéter ... c'est une difficulté. On peut les laisser écrire toutes les flèches, ça va faire long ...
- Ens2 : heu ...ou juste faire une flèche retour. Tu peux introduire la boucle là ...
- Ens1 : oui, mais on pourrait quand les laisser faire et comparer les programmes.
- Ens2 : et on verra mieux ce qui se répète.
- Ch : comment on fait avec la blue-bot, on n'a pas de touche répéter
- Ens2 : On rappele sur GO
- Ch : on pourrait s'appuyer sur les frises de Ens2. Ce que tu fais en histoire
- Ens2 : trop galère. [dessinant un rectangle] Pourquoi on mettrait pas tout le monde là-dessus ?
- Ens2 : tout le monde fait ça. On sort la boucle et après on les met là-dessus [montrant les frises grecques]
- Ens : oui, on fait d'abord des trucs plus simples et on peut même revoir le périmètre

Extrait 4 – Repère absolu vs repère relatif

Cet extrait illustre plusieurs aspects du développement professionnel des enseignants, dans en programmation. D'abord, Ens2 introduit la notion d'instruction et de répétition, amorçant la réflexion sur les boucles. Ens1, de son côté, identifie une difficulté liée à la Blue-Bot : la nécessité de remettre le robot dans la même position pour répéter les actions, qu'elle identifie comme une difficulté. Ens2 propose une flèche retour, orientant ainsi la discussion vers la question de l'utilisation de boucles. Les enseignants réfléchissent alors à une stratégie didactique, comme la comparaison de programmes produits par les élèves, pour faire émerger le concept de boucle informatique. Ens2 résout finalement la question de la simulation en ré-appuyant sur la touche GO pour enclencher la répétition. Cet extrait montre une dynamique collaborative où la confrontation des idées renforce le rapport au savoir informatique. L'identification des contraintes techniques et la recherche de solutions didactiques montrent une appropriation progressive du concept de boucle, ancrée dans une réflexion sur les conditions d'apprentissage des élèves.

IV. CONCLUSION

Le schéma ci-dessous pointe les principaux concepts théoriques ayant émergés au cours de la recherche. Nous avons distingué les concepts relevant de l'action didactique (encadrés en pointillés) de ceux relevant d'une discipline (encadrés en traits pleins).

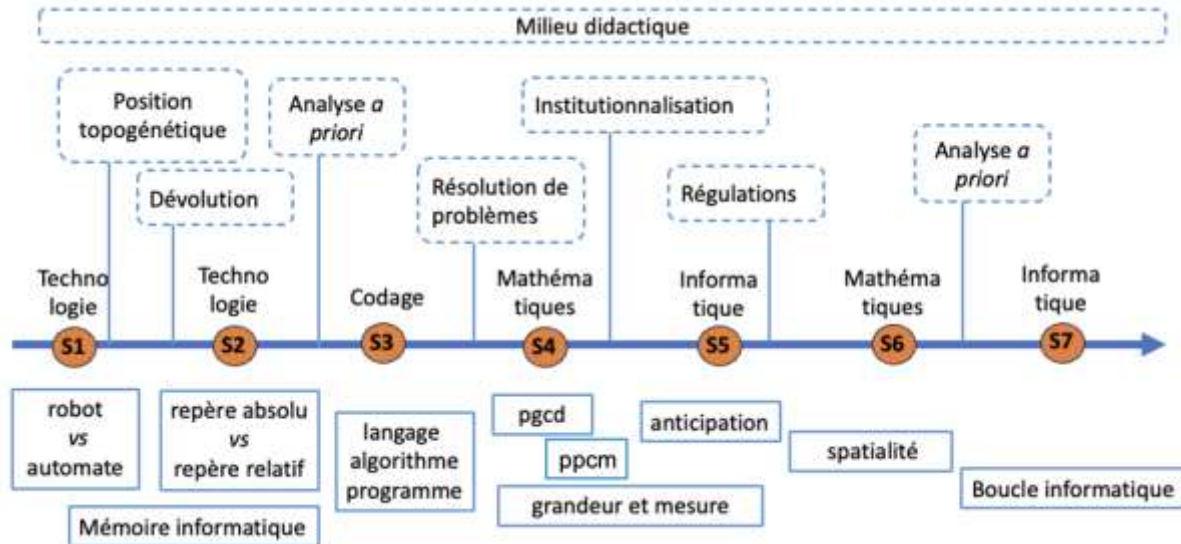


Figure 3 – Concepts théoriques abordés lors de la recherche collaborative

Ce schéma montre une articulation des disciplines telles que chaque séance a pu faire milieu didactique pour les suivantes. En ce sens, elle répond aux préoccupations initiales des enseignants relatives à l'interdisciplinarité. Il met en exergue la concomitance des savoirs théoriques permettant ainsi d'explorer deux facettes du métier d'enseignant : la mise à jour de concepts disciplinaires et leur transposition didactique dans la classe.

En conclusion, le dispositif de recherche collaborative entre enseignants et chercheur s'avère un bon levier pour le développement professionnel, tant sur le plan didactique qu'académique. La confrontation des pratiques permet aux enseignants de réinterroger et d'approfondir leurs savoirs disciplinaires, notamment en mathématiques et en algorithmique, tout en questionnant leurs stratégies didactiques. Ce processus co-construit un partage de pratique qui, au-delà de l'acquisition de connaissances théoriques, conduit à une évolution de l'épistémologie pratique des participants.

RÉFÉRENCES

- Amade-Escot, C. (2014). De la nécessité d'une observation didactique pour accéder à l'épistémologie pratique des professeurs. *Recherches en éducation*, 19, 18-29. <https://doi.org/10.4000/rec.8284>
- Briant, N. (2013). *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français* [Thèse de doctorat, Université Montpellier 2]. HAL theses. https://theses.hal.science/tel-00920506/file/MA_moire_thA_se_NBriant.pdf
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115. <https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/>

- Couderette, M. (2016). Enseignement de l'algorithmique en classe de seconde : une introduction curriculaire problématique. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 21, 267-296. <https://hal.science/hal-01926799/document>
- Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P. et Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, 27(1), 33-64. <https://doi.org/10.7202/000305ar>
- Bednarz N. (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement*. L'Harmattan.
- Devos, O. et Grandaty, M. (2011, 20-22 janvier). *Les retombées de la formation continue : étude comparée des contenus enseignés en EPS et en ML chez un PEMF et un PE* [Communication]. 2e Colloque international de l'ARCD "Les contenus disciplinaires", Lille 3.
- Schubauer-Leoni, M.-L., Leutenegger, F. et Forget, A. (2007). L'accès aux pratiques de fabrication de traces scripturales convenues aux commencements de la forme scolaire : interrogations théoriques et épistémologiques. *Éducation & didactique*, 1(2), 7-35. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.137>
- Schubauer-Leoni, M. L. et Leutenegger, F. (2005). Une relecture des phénomènes transpositifs à la lumière de la didactique comparée. *Revue suisse des sciences de l'éducation*, 27(3), 407-429. <https://doi.org/10.25656/01:4131>
- Schubauer-Leoni, M. L. et Leutenegger, F. (2002). Expliquer et comprendre dans une approche clinique/expérimentale du didactique d'ordinaire. Dans F. Leutenegger et M. Saada-Robert (dir.), *Expliquer et comprendre en Sciences de l'éducation* (p. 227-252). De Boeck.
- Sensevy, G. (2006). L'action didactique. Éléments de théorisation. *La revue suisse des Sciences de l'Éducation*, 28(2), 205-225. <https://doi.org/10.25656/01:4146>
- Sensevy, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. Dans G. Sensevy et A. Mercier (dir.), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (p. 13-49). Presses universitaires de Rennes.
- Spach, M. (2017). *Activités robotiques à l'école primaire et apprentissage de concepts informatiques : quelle place du scénario pédagogique ? Les limites du co-apprentissage* [Thèse de doctorat, Université Sorbonne Paris Cité ; Université Paris Descartes]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-02271924>
- Villemonteix, F. (2018, 3-4 mai). *Entre savoir-faire et devoir-faire, quelle légitimation des pratiques pédagogiques de l'informatique à l'école primaire ?* [Communication]. 5e colloque international en éducation, Symposium « Enseignement et apprentissage de l'informatique à l'école primaire », Montréal, Canada.

TRAVAIL COLLABORATIF ENTRE CHERCHEURS ET ENSEIGNANTS : DE LA CIRCULATION ENTRE CONNAISSANCES DIDACTIQUES POUR LA RECHERCHE ET CONNAISSANCES DIDACTIQUES POUR ENSEIGNER

| MATHÉ* ANNE-CÉCILE, RIVIÈRE** OLIVIER ET ROUX*** AURÉLIE

Résumé | Depuis une dizaine d'années, un groupe de l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Clermont Ferrand (France) réunit enseignants et chercheure en didactique de la géométrie autour de questions d'enseignement et d'apprentissage de la géométrie à l'école. Nous interrogeons dans ce texte la manière dont ce travail collaboratif peut participer au développement professionnel des enseignants, et plus particulièrement à la circulation entre connaissances didactiques de la recherche et connaissances didactiques pour enseigner.

Mots-clés : travail collaboratif, didactique de la géométrie, connaissances didactiques de la recherche, connaissances didactiques pour enseigner

Abstract | For about ten years, a group from the IREM (Research Institute for Mathematics Teaching) of Clermont-Ferrand (France) has been bringing together teachers and researchers in geometry education to address issues related to the teaching and learning of geometry in schools. In this text, we examine how this collaborative work can contribute to the professional development of teachers, particularly in bridging the gap between research-based didactic knowledge and didactic knowledge for teaching.

Keywords: Collaborative work, geometry education, research-based knowledge, didactic knowledge for teaching

I. INTRODUCTION

Depuis une dizaine d'années, un groupe de l'IREM¹ de Clermont Ferrand (France) réunit une dizaine d'enseignants et une chercheure (Anne-Cécile Mathé) autour de questions d'enseignement et d'apprentissage de la géométrie tout au long de l'école primaire (élèves de 3 à 12 ans). Les travaux de ce groupe prennent appui sur des recherches actuelles en didactique de la géométrie (Mathé et al., 2020) et participent à les nourrir. Ces recherches s'ancrent en théorie des situations (Brousseau, 1998) et adoptent une démarche d'ingénierie didactique (Artigue, 1988). Elles se sont pour l'instant essentiellement centrées sur l'étude de conditions de rencontre des élèves avec des connaissances mathématiques, dans des situations, et sur le noyau dur élève(s)-milieu. Mais ce groupe IREM est également le lieu d'un travail collaboratif étroit entre chercheur et enseignants. Pour autant, les dynamiques d'interactions entre recherche et pratiques enseignantes et les effets de ce travail collaboratif sur les pratiques enseignantes sont pour l'instant restées dans l'angle mort de nos études. Documenter ces dynamiques constitue aujourd'hui un enjeu majeur. Ces préoccupations de recherche nous amènent aujourd'hui à déplacer notre regard de chercheurs vers le travail du professeur et à questionner la circulation entre connaissances didactiques de la recherche et connaissances didactiques mobilisées par les enseignants pour enseigner au sein de dispositifs de recherche collaborative. En partageant avec les participants quelques éléments d'analyse d'une séance de classe menée par une enseignante du groupe IREM, nous mettons ici à la discussion la manière dont nous avons cherché à

* Laboratoire ACTé, Université Clermont-Auvergne – France – a-cecile.mathe@uca.fr

** Laboratoire ACTé, Université Clermont-Auvergne – France – olivier.riviere@uca.fr

*** Laboratoire LDAR, Université Paris-Cité – France – aurelie.roux@uca.fr

¹ IREM – Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques

identifier certaines des connaissances sur lesquelles s'appuie l'enseignant pour conduire sa leçon, penser ses séances et construire son projet d'enseignement.

II. PRÉSENTATION DU CORPUS

1. *L'enseignante-sujet d'étude*

L'enseignante dont il est question ici est professeure des écoles en Grande Section de maternelle (élèves de 5 à 6 ans) depuis une trentaine d'années. Elle est investie dans divers dispositifs de formation continue et de travail collaboratif, avec d'autres enseignants, des chercheurs ou des formateurs. Elle est membre du groupe IREM animé par Anne-Cécile Mathé depuis 2016. Elle est formatrice d'enseignants depuis 2018. Au fil de sa carrière et de par son expérience, elle a ainsi rencontré et pu construire des connaissances didactiques solides en géométrie, comme dans différents domaines enseignés à l'école. Observer et essayer de décrire la manière dont elle a pu s'approprier ces connaissances didactiques issues de la recherche, les sélectionner, les transformer et les intégrer dans sa pratique nous intéressent donc particulièrement.

2. *La situation mise en œuvre, telle que pensée d'un point de vue théorique*

La situation dont nous observons la mise en œuvre en classe s'insère dans une progression construite par le groupe IREM, que l'enseignante suit dans sa classe de Grande Section. Le travail qui a été conduit auparavant porte sur l'étude de solides (comparaison, reproduction), sur la reconnaissance globale de figures planes isolées et leur désignation par le nom des formes, sur l'analyse d'une figure comme un assemblage de figures juxtaposées. L'objectif de cette séance est de passer de la reconnaissance globale des figures (en termes de surfaces, 2D) à une caractérisation de ces figures par leur contour (lignes frontières des surfaces, 1D/2D). Elle sera prolongée par un travail de décomposition de formes en termes d'assemblages de formes qui se chevauchent, d'identification de premiers prolongements de segments et d'alignements de segments ou de segments et de points. Ce travail se poursuivra tout au long de l'école par un travail d'analyse de figures en termes de réseaux de segments, puis de segments, droites et points (Perrin-Glorian et Godin, 2014 ; Mathé et al., 2020).



Figure 1 – Balises de progression, de la maternelle au cycle 3

La situation dont il sera en particulier question ici est une situation de formulation graphique à autrui autour de la reproduction d'un assemblage de formes juxtaposées (Mathé et al., 2020, p. 124). Cette situation naît d'un travail d'élaboration d'une déclinaison de situations à partir de la situation fondamentale de reproduction de figures aux instruments (Mathé et al., 2020). De premiers élèves « émetteurs » disposent d'un assemblage de formes, constitués par la juxtaposition de gabarits de formes déplaçables. Ils ont pour mission de produire un dessin qui doit permettre à un camarade « récepteur » de reproduire le même assemblage sans l'avoir vu. Une phase de mise en commun permet de valider ou invalider les assemblages produits par les élèves récepteurs par comparaison avec une

photo des assemblages initialement produits par les élèves émetteurs, de discuter des dessins, puis de pointer la capacité des dessins à faire reconnaître des formes. Le dessin ne permettant que de représenter des lignes frontières de surfaces, l'objectif est de faire travailler les élèves sur la caractérisation de formes géométriques par leurs contours.

Cette analyse rapide de la situation et de sa place dans une progression plus générale est connue par l'enseignante, puisque partagée au sein du groupe IREM. Elle repose sur des savoirs et connaissances didactiques issues de la recherche. Notre objectif ici est de questionner la manière dont l'enseignante investit et transforme ces connaissances au service de la mise en œuvre effective de la situation en classe.

III. MÉTHODOLOGIE

1. *Démarche de recherche*

Notre travail repose sur les idées suivantes. Les connaissances qu'un enseignement met en œuvre dans son enseignement sont multiples et de nature variée. Celles sur lesquelles nous focalisons notre attention sont les connaissances didactiques qu'utilise un enseignant pour conduire son projet, c'est-à-dire ses connaissances sur les savoirs mathématiques visés, sur des enjeux et chemins possibles de leur apprentissage et enseignement. Comment accéder à ces connaissances ? La connaissance d'un sujet se manifeste par les actions qu'il mène. En situation, un sujet est capable de prendre des décisions pertinentes et d'agir de manière efficace dans son environnement, sans nécessairement être capable d'explicitier les connaissances qu'il met en œuvre. Notre démarche consiste alors à partir de l'observation de moments d'enseignement, et de leurs enregistrements vidéo, et à formuler des hypothèses sur les connaissances mises en œuvre par l'enseignante à partir des actions réalisées. Nous mettons ensuite à l'épreuve et complétons ces hypothèses par l'analyse d'un entretien d'auto-confrontation mené avec l'enseignant, autour du visionnage de nos données vidéos. Nous considérons qu'en plus de se manifester dans les actions conduites, les connaissances didactiques mobilisées apparaissent, en partie au moins, dans les discours produits sur les actions menées. Nous façonnons ainsi des hypothèses sur des connaissances didactiques mises en œuvre par l'enseignante dans le travail observé. Nous proposerons de les replacer en termes de niveaux de l'activité du professeur (Margolinas, 2002).

2. *Données*

L'étude exploratoire que nous proposons ici s'appuie sur deux types de données : des enregistrements vidéo du déroulement de la mise en œuvre de la situation en classe et un entretien avec la professeure mené après les moments d'enseignement. Ces différentes données sont disponibles sous forme de transcriptions. L'enregistrement vidéo a été réalisé en 2019, sur une séance d'une heure. Le déroulement articule un premier atelier dirigé, réunissant un groupe de 6 élèves autour de l'enseignante (que nous allons appeler élèves "émetteurs"), un atelier en autonomie regroupant 6 autres élèves dits « récepteurs » puis un moment de mise en commun avec les 12 élèves. L'entretien, réalisé en 2023, s'est appuyé sur le visionnage avec l'enseignante d'extraits vidéo pré-sectionnés et a pris la forme de questions-réponses et discussion libre. Il a duré un peu plus d'une heure.

Nous présentons dans cette communication quelques exemples de connaissances didactiques pour enseigner identifiées lors de l'analyse de ce corpus.

IV. DE L'IDENTIFICATION DE CONNAISSANCES DIDACTIQUES POUR ENSEIGNER : ÉLÉMENTS D'ANALYSE

1. *Une mise en place de la séance empreinte de connaissances didactiques relatives au projet d'enseignement*

L'enseignante et six élèves sont assis autour d'une table au milieu de laquelle se trouve un baril de formes déplaçables en plastique. L'enseignante débute la séance en amenant les élèves à se remémorer des ateliers précédents.

- P (Professeure)² : Qui est-ce qui nous raconte ce qu'on a fait la dernière fois avec des formes
- E (Elève) : en fait on est sur une feuille et ... des formes
- P. : Et puis comment on avait fait comment est-ce que cela s'appelle ce qu'on avait fait avec des formes ?
- E : toi tu étais la marchande
- P. : Moi j'étais la marchande. Et du coup il fallait refaire son ... comment on avait que cela s'appelait ... quand on met des formes ensemble ... un
- E. : Les formes elles étaient juxtaposées.
- P. : Ah les formes elles étaient juxtaposées mais c'est un ... [avec les élèves] assemblage. un assemblage de formes juxtaposées

L'enseignante guide ensuite une phase de rappel du nom des formes présentes dans le baril (rectangle, carré, triangles, disques et demi-disques...), puis formule une première consigne :

- P. : Alors aujourd'hui écoutez bien ce que l'on va faire. On va préparer un jeu pour les copains qui sont en train de faire leurs assemblages. Vous savez quoi on va leur faire un modèle / d'accord/ mais d'abord vous allez faire un assemblage de formes juxtaposées avec cinq pièces.

Les élèves construisent individuellement un assemblage de 5 formes juxtaposées. Ces assemblages font l'objet d'une mise en commun et d'une première phase de validation durant laquelle enseignante et élèves vérifient que chaque assemblage contient bien 5 formes et que celles-ci sont juxtaposées. Une seconde consigne est alors donnée aux élèves, faisant apparaître la construction des assemblages comme phase préliminaire à la situation³.

- P. : Ecoutez bien on va préparer maintenant un jeu pour les copains. On va cacher tout à l'heure nos assemblages et les copains ils devront refaire le même assemblage que vous mais il faudra que vous le dessiniez/ le modèle pour que les copains. Robin tu n'écoutes pas ce que je te dis. Le modèle pour que les copains refassent votre assemblage ce sera votre dessin. d'accord ? Alors cela veut dire votre assemblage qu'est ce qu'il va falloir faire à côté ?

² Dans les extraits de transcription présentés, nous désignons par P l'enseignante, E un élève (nous ne différencions pas les élèves ici). Lorsqu'il s'agira des extraits de l'entretien, nous désignons par P l'enseignante, O.R. Olivier Rivière.

³ On pourrait discuter du choix de l'enseignante de partir ainsi de la construction d'assemblages par les élèves, et non de modèles d'assemblage. Les raisons de ce choix ont été discutées avec l'enseignante lors de l'entretien. Nous ne reviendrons pas, faute de place, sur les raisons de ce choix, qui nous semblent plus relever de connaissances pédagogiques que de connaissances didactiques.

- E. : Un dessin
- P. Un dessin.

L'activité de l'enseignante semble dirigée ici par une volonté de tissage : il s'agit de replacer son enseignement dans le fil du travail engagé autour des formes. On pourra noter son insistance sur l'objet de travail, qu'elle désigne à plusieurs reprises et fait désigner par les élèves comme des « assemblages de formes juxtaposées ». Cette désignation, et la qualification du caractère juxtaposé des formes, est peu courante dans les classes de maternelle. Cette phase nous laisse par ailleurs entrevoir quelques bribes du travail mené en amont. L'enseignante montre aux élèves que la situation n'est pas isolée mais s'insère dans une progression plus globale, autour de la construction et la reproduction (à partir de modèles) d'assemblages de formes juxtaposées, et de jeu de la marchande (ou situation de formulation à autrui, verbale, autour de la reproduction d'assemblages de formes, permettant de travailler le nom des formes). La connaissance de l'enseignante de son projet didactique et de la place de cette situation dans une progression générale semble guider la manière dont elle installe cette situation et participe à sa dévolution.

L'influence de la perception du projet d'enseignement sur la gestion de cette phase d'installation de l'atelier est confirmée par l'entretien. Bien que l'entretien se tienne près de trois ans après l'enregistrement vidéo, l'enseignante replace assez vite cette séance dans une progression générale, témoignant ainsi d'une certaine maîtrise de ses objectifs généraux et particuliers d'enseignement-apprentissage :

- O.R. [Olivier Rivière] (0 : 7') : D'accord, OK, et alors, quand tu revois la séance là, qu'est-ce que tu vois, toi, qu'est-ce que tu, comment tu la positionnes, qu'est-ce que tu peux m'en dire ?
- P. : Et Ben, ça veut dire qu'avant. J'ai travaillé sur ce que c'est qu'un assemblage, sur ce que c'est qu'un assemblage de formes qui sont juxtaposées. Et que là, j'en suis à la formulation écrite, donc j'ai déjà fait ma situation d'action et j'ai déjà fait mon éloignement dans l'espace puisque là tu vois elle vient me redire enfin au moment du tissage euh elle dit que j'ai été la marchande, donc ça veut dire que tu vois,
- O.R. : oui ça fait référence à la situation d'avant où c'est toi qui donnais les pièces.
- P. : Voilà
- O.R. : et ils venaient commander les pièces
- P. : c'est ça
- O.R. : Ok
- P. : : Oui. donc tu vois, j'arrive à situer parce que c'est un peu loin, mais après c'est une, c'est aussi quelque chose que je maîtrise bien maintenant, donc je vois bien ma progression.

Elle formule ensuite explicitement les raisons pour lesquelles elle insiste sur le qualificatif « juxtaposées » :

- O.R. (0 : 11') : Tu insistes beaucoup sur le mot juxtaposition. Donc tu leur as dit ça, hein ? Ou c'est eux qui l'ont dit. Non, c'est un élève qui le dit hein, et c'est toi qui reprends, tu relances là-dessus. Ouais.
- P. [L'enseignante] : Et oui, quand je leur demande, qu'est-ce que vous êtes en train de faire ? Et elle dit que les formes sont juxtaposées, alors que j'attendais plutôt le mot assemblage. Mais c'est vrai que c'est un assemblage par juxtaposition. Je leur demande parce que je sais qu'après je vais travailler sur la

superposition et les chevauchements donc euh donc je veux que déjà ils sachent bien à quoi ça correspond pour qu'ensuite ils puissent me dire tu vois que c'est autre chose et que ce n'est plus de la juxtaposition.

- O.R. : Donc, donc tu es déjà dans la suite en fait là
- P : Oui, enfin j'ai, j'ai besoin qu'ils sachent ce que c'est qu'un assemblage par juxtaposition puisqu'après ça va être un peu différent.

Cette première analyse nous semble illustrer les phénomènes d'interaction entre plusieurs niveaux d'activité du professeur, au sens de la structuration des niveaux d'activité du professeur proposé par Margolinas (2002). Nous mettons en particulier en lumière ici les interactions entre niveaux de la situation didactique (N0) et niveau du projet de leçon (N+1).

Tableau 1 – Interactions entre niveaux d'activité du professeur (à partir de Margolinas, 2002)

Niveau noosphérique ou idéologique	(+3)
Niveau de construction ou de conception d'un thème	(+2)
Niveau de projet de leçon	(+1)
Niveau de la situation didactique	(0)
Niveau d'observation ou de dévolution	(-1)

2. La dévolution de la situation et l'importance donnée à la question de l'usage des instruments, en lien avec le regard porté par des formes

L'enseignante installe la situation de formulation à autrui graphique. Au lieu de laisser les élèves interagir individuellement d'emblée avec cette situation, elle fait vivre une longue discussion (plus de 5 minutes) autour des instruments et des stratégies possibles pour réaliser ces « dessins ». Sous l'impulsion de l'enseignante, émergent différentes stratégies possibles : le dessin à main levée, l'utilisation d'un calque, l'utilisation des formes comme gabarits.

- P. (3 : 27) : Si je ne sais pas très bien dessiner mon carré à la main/ je peux essayer à la main/ (...) Mais je peux aussi utiliser la forme pour tracer mon carré/

Elle explicite ensuite auprès des élèves le changement d'usage des formes et le fait que ces gabarits prennent le statut d'instruments de tracé de contours.

- P. (3 : 36) : Et là ma forme elle devient un instrument/ d'accord / Ça devient un instrument pour tracer la forme

L'enseignante nous semble ménager un équilibre subtil entre avancée du temps didactique et une volonté de laisser vivre la situation. Ceci nous semble demander une compréhension très fine de la situation, des conditions de rencontre des élèves avec les connaissances visées, et de ce fait des adaptations possibles sous les contraintes du temps d'un atelier, dans une interaction entre niveau du projet de leçon de son activité (N+1) et le niveau de la situation didactique (N0). Durant l'entretien, elle explicite cette tension entre avancée de l'activité des élèves et rencontre avec la situation.

- O.R (0 : 30). Il y a beaucoup de temps qui est consacré aux techniques de reproduction.
- P. : oui, parce que je pense qu'il faut quand même, c'est tellement nouveau, tu peux pas les lancer comme ça et les laisser se dépatouiller. Et si t'as envie qu'ils produisent et qu'ils y arrivent, c'est un peu ton but quand même, c'est quand tu lui demandes une tâche, c'est qu'ils apprennent des choses, mais qu'ils soient

en mesure de réussir. Donc s'ils sont en mesure de réussir, ça veut dire qu'avant tu les as outillés pour qu'ils puissent le faire.

Elle revient aussi sur ce qu'elle identifie ici comme important, du point de vue de son projet didactique.

- P. (0 : 26') : Ben parce que là c'est vraiment la bascule entre la vision qu'ils ont de cet assemblage en surfaces et après là ils vont passer à une vision de contour. Et c'est aussi le moment où on découvre que la forme peut être un gabarit, un instrument de tracé. Donc c'est très important et c'est vrai que c'est dense [...]. Parce que finalement y a beaucoup de choses, il y a le fait de passer de la surface à contour, le fait d'avoir un nouvel instrument. De prendre en compte aussi, à main levée. Et aussi tu vois une proposition d'un élève qui rebondit sur quelque chose qu'on a déjà fait. Donc laisser aussi ouvert par rapport à ce que j'ai prévu. et la 3e chose.. [...]. Et il y a aussi un peu de méthodologie parce que je leur montre un petit peu comment se servir d'un gabarit parce que c'est pas facile en termes de motricité fine tu vois pour des élèves de grande section.

Les élèves émetteurs produisent ensuite chacun un dessin de leur assemblage, en utilisant à leur choix une des stratégies retenues (main levée, calque, tracé du contour de gabarits). Ces dessins sont donnés à des élèves récepteurs qui, en atelier autonome, produisent des assemblages à partir des modèles fournis. S'en suit une phase de mise en commun et de validation, guidée par l'enseignante.

3. *Une mise en commun des assemblages tournée vers la question de la caractérisation des formes par des dessins*

L'enseignante met en place un jeu de questions/ réponses permettant aux élèves de prendre position par rapport à la validité de l'assemblage fabriqué et, dans le cas où l'assemblage n'a pas été reproduit correctement, d'identifier les éléments qui ne correspondent pas. Voici un exemple de la manière dont l'enseignante pilote cette phase.

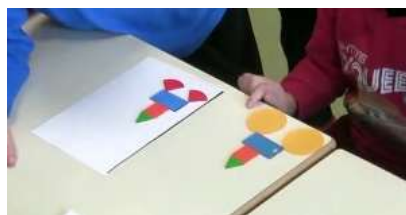


Figure 2 – Exemple de productions d'élèves

- P. (1 :48") Alors est-ce que c'est le même assemblage
- E : non
- P. : Pourquoi Nathan/ c'est Nathan qui nous raconte
- E : en fait là il y a des disques et / et là c'est pas des disques
- P. : Est-ce que c'est Nathan ou bien Estéban qui s'est trompé
- E : c'est Nathan / parce qu'il croyait qu'il avait des disques parce qu'il avait il avait/il s'était trompé
- P. : Oui et là [en montrant le dessin produit par l'émetteur Estéban] en fait tu n'as pas reconnu qu'il y avait un bord qui était droit / un bord / Tu vois tu n'as pas reconnu que ça (se saisit du quart de disque sur l'assemblage)

Assez vite, l'enseignante oriente cette phase de validation vers la question de la capacité des dessins à faire reconnaître (caractériser) les formes, sans toutefois aller jusqu'au bout du processus d'institutionnalisation (qui pourrait expliciter plus clairement la distinction entre surface et contour sans doute). Elle clôt la séance sur :

- P. : Alors vous voyez ils ont bien appris à dessiner des formes, avec des gabarits, à la main ou avec le calque. Demain vous essaieriez les autres ?

Elle reprendra le processus d'institutionnalisation plus tard, notamment en complétant un affichage issu d'un premier travail sur l'étude des solides et de figures planes (d'abord représentées comme des surfaces) avec l'illustration de figures planes par leurs contours.



Figure 3 – Affichage produit de manière différée

Dans ces phases de conclusion et d'institutionnalisation, se joue ici encore une imbrication profonde entre niveaux d'activité de l'enseignant, et en particulier des niveaux du projet de leçon (N+1) et le niveau de la situation didactique (N0).

4. La mise en place d'une situation de formulation graphique à autrui, comme maillon d'une conception plus générale de l'enseignement et apprentissage des mathématiques

À la fin de l'entretien, l'enseignante décrit enfin comment elle pense des régularités dans la conception de son enseignement-apprentissage des mathématiques (et au-delà).

- P. (1h 3') : Et Ben, j'ai toujours ce canevas. Moi, ce qui m'a aidé, c'est de comprendre ce canevas avec situation d'action, éloignement dans l'espace et dans le temps, et formulation écrite. Et je trouve que ça, ça fait vraiment une progression qui fonctionne quand même qui fonctionne très bien pour construire la connaissance et même tu vois, je m'en sers dans d'autres matières en fait. Parce que c'est intéressant dès que tu éloignes et ben tu contrains tes élèves donc. Oui, c'est intéressant.

Nous savons que la dialectique de l'action et de la formulation lui a été présentée comme un outil pour la recherche, pour décrire et analyser des situations d'enseignement. Cette dialectique a été transformée chez ce sujet comme un outil pour enseigner, pour construire et penser des progressions. Cette dialectique lui apparaît fonctionnelle. Elle la fait fonctionner dans des contextes mathématiques, mais aussi dans des contextes d'autres disciplines. Cette bribe d'entretien nous laisse ainsi entrevoir des imbrications et interactions fortes entre niveaux noosphérien (N+3), de construction du thème (N+2), de projet de leçon (N+1) et de la situation didactique (N0) de son activité. Nous ne nous sommes pas ici donné les moyens d'observer le niveau d'observation (N-1).

V. POUR CONCLURE

Notre démarche consiste à questionner la manière dont le travail collaboratif mené au sein de groupes tels que les groupes IREM, réunissant enseignants et chercheurs, sont susceptibles de constituer le terreau au développement professionnel des enseignants. Nous abordons cette question, large, par le spectre de la circulation entre connaissances et savoirs issues de la recherche en didactique des mathématiques et connaissances didactique pour enseigner.

Identifier les connaissances didactiques qu'un enseignant mobilise pour enseigner est difficile, car l'exercice engage nécessairement une lecture fortement interprétative de l'activité enseignante in situ. Les analyses présentées ici ne constituent par ailleurs qu'une première et modeste étude exploratoire. Pour autant, elles nous laissent entrevoir une très grande richesse des connaissances didactiques pour enseigner construites par cette enseignante expérimentée et mobilisées pour piloter la mise en œuvre de la situation et le jeu des élèves au sens de cette situation. Elles mettent en particulier en lumière la manière dont les connaissances et savoirs peuvent nourrir la pratique, selon plusieurs niveaux imbriqués. Ces connaissances portent sur la compréhension de la situation et de ses enjeux, mais aussi sur le projet d'enseignement plus global ou encore sur des considérations profondes sur l'enseignement et l'apprentissage mathématiques et les conditions de rencontre des élèves avec les connaissances et savoirs en jeu. Ces analyses sont bien sûr à poursuivre et affiner, mais elles nous semblent d'ores et déjà ouvrir des pistes pour nous donner les moyens de documenter des dynamiques possibles d'interactions entre recherche et pratiques enseignantes au sein de dispositifs de recherche collaborative. Ce sont ces pistes de recherche que nous souhaitons poursuivre à travers la création actuelle d'un LéA (Lieu d'Education Associé, IFé, ENS de Lyon, France). Explorer cette question nous semble aujourd'hui relever d'un enjeu important, devant nous permettre à terme de mieux expliciter les liens fondamentaux et apports réciproques entre recherche en didactique et acteurs de l'éducation, entre recherche en didactique et Société.

RÉFÉRENCE

- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281–308.
<https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/>
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.
- Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances : Analyse de l'activité du professeur. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir.), *Actes de la 11^e École d'été de didactique des mathématiques* (p. 141–156). La pensée sauvage. <https://shs.hal.science/halshs-00421848>
- Mathé, A.-C., Perrin-Glorian, M.-J. et Barrier, T. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire, enjeux, ruptures et continuités*. Académia-L'Harmattan.
- Perrin-Glorian, M.-J. et Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math École*, 222, 26–36.

ANALYSE DE LA PRATIQUE ENSEIGNANTE POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA SYMBOLISATION ALGÈBRIQUE CHEZ LES ÉLÈVES DU SECONDAIRE AU MAROC

| ABOUHANIFA SAÏD*

Résumé | Nous proposons une analyse des connaissances d'un enseignant de mathématiques lors de la conduite d'un cours, pour introduire le concept d'expression algébrique et l'utilisation de lettres pour exprimer une quantité, pour des élèves de première année de collège (12-13 ans). L'analyse s'appuie sur le modèle de connaissances de Shulman (1987) et celui de Ball et al. (2008), ainsi que sur le modèle épistémologique de référence développé par Squalli et al. (2020), et le cadre de Aloys et al. (2021). Nous avons repéré ses connaissances en idées émergentes à travers une analyse croisée, en tenant compte de l'analyse du programme, la fiche pédagogique fournie sous forme de script et l'analyse de la vidéo enregistrée de la séance menée par cet enseignant.

Mots-clés : enseignement explicite, généralisation, expression algébrique, pratique enseignante, symbolisation.

Abstract | We propose an analysis of a mathematics teacher's knowledge during the conduct of a lesson, to introduce the concept of algebraic expression and the use of letters to express a quantity, for first-year middle school students (12-13 years old). The analysis is based on Shulman's (1987) knowledge model and that of Ball et al. (2008), as well as the epistemological reference model developed by Squalli et al. (2020), and the framework by Aloys et al. (2021). We identified his knowledge in emerging ideas through a cross-analysis, taking into account the curriculum analysis, the teaching sheet provided in script form, and the analysis of the recorded video of the teaching session conducted by this teacher.

Keywords: Explicit teaching, generalization, algebraic expression, teaching practice, symbolization.

I. INTRODUCTION

Au Maroc, le projet « *collèges pionniers* » représente et structure la feuille de route 2022-2026 qui vise à améliorer les apprentissages aux cycles primaire et collégial, à travers une approche multidimensionnelle touchant les principaux facteurs de qualité d'un établissement scolaire. Ce projet instauré récemment a certainement réalisé des acquis au niveau du primaire (MENPS, 2022). Le dispositif des *collèges pionniers* s'articule autour de quatre grands axes à savoir le programme de l'enseignement au bon niveau ou (enseigner selon le niveau convenable), les pratiques pédagogiques efficaces (*l'enseignement explicite*) (Bocquillon et al., 2019), l'approche de l'enseignement et le label qualité, (Hamdani, 2024).

Dans cette recherche, nous nous intéressons aux pratiques pédagogiques soutenues par la méthode de *l'enseignement explicite* préconisée dans ce projet de réforme. Nous avons fait le choix d'étudier les pratiques enseignantes dans le cadre de cette expérimentation à travers l'introduction d'une nouvelle entrée à l'enseignement de l'algèbre au collège, il s'agit de repenser les rapports entre l'arithmétique au primaire et l'algèbre au collège en termes de continuités et d'orienter l'enseignement-apprentissage vers le développement de la pensée algébrique. Dans le programme de 2009, l'algèbre a été considérée comme une arithmétique généralisée, son introduction est fondée sur l'extension des systèmes de nombres $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ et l'établissement du calcul algébrique sur ces domaines. C'est une voie classique

* Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de la Formation, Casablanca-Settat (CRMEF-CS) – Maroc –
saidabouhanifa@yahoo.fr

d'entrée dans l'algèbre par les équations, elle est réputée tardive et plus discontinue (Abouhanifa et al., 2023).

Dans le processus d'enseignement-apprentissage, l'entrée à l'algèbre peut se faire sous différentes formes : généralisation ; étude de relations fonctionnelles, étude des structures, résolution de problèmes, etc. L'enjeu de l'enseignement de l'algèbre en ce moment charnière réside dans le passage de l'arithmétique enseignée au primaire à l'algèbre enseignée au collège. Pour Kieran (1992, 1994), entre l'arithmétique et l'algèbre résident à la fois de fausses continuités et de réelles discontinuités. Vergnaud (1986), quant à lui, évoque une double rupture épistémologique lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre. Filloy et Rojano (1989) parlent d'une coupure didactique qui aurait lieu le long de la ligne d'évolution d'une pensée arithmétique à une pensée algébrique. Kaput (1998) a remis en question l'approche transitionnelle classique de l'algèbre et a ouvert des perspectives de recherche curriculaires et des pistes dans le domaine de la formation initiale et continue des enseignants (Early algebra).

Dans sa recherche, Démonty et al. (2018) a montré que les enseignants ont tendance à percevoir l'algèbre comme une manipulation de symboles. Cette recherche vient confirmer celles de plusieurs autres chercheurs qui ont constaté que : Les enseignants du primaire se sentent mal à l'aise avec ce contenu, lorsqu'il est défini de cette façon (Jacobs et al., 2007). Les enseignants sont divisés sur le fait qu'une description en mots d'une généralisation soit réellement de nature algébrique (Abouhanifa et al., 2024).

Dans l'enseignement de l'algèbre, en particulier l'utilisation de lettres pour exprimer des quantités, est un aspect fondamental du développement cognitif des élèves. Dans le cadre d'un projet consortium de recherche entre le Maroc, le Bénin et la Tunisie, un des résultats est que pour l'enseignement de l'algèbre, ce ne sont pas les outils méthodologiques pour travailler l'algèbre qui posent souvent des problèmes, mais c'est surtout le rapport institutionnel et le rapport personnel des enseignants à ce qu'est l'algèbre (Najar et al., 2021). Nous avons montré que les pratiques enseignantes évoluent peu et que les difficultés des élèves dans l'enseignement-apprentissage de l'algèbre subsistent. Une analyse du rapport personnel au savoir à enseigner relativement au développement de la pensée algébrique dans ce nouveau programme de mathématiques au collège s'avère nécessaire (Abouhanifa et al., 2024).

Dans le cadre de l'expérimentation de ce projet, des séances de formation des enseignants ont été effectuées pendant deux journées (au début de l'année scolaire 2024/2025) selon les modalités de *l'enseignement explicite* et un accompagnement personnalisé des enseignants par des inspecteurs pédagogiques. La deuxième journée de cette formation a été consacrée à l'analyse d'une vidéo d'une leçon enregistrée qui a porté sur « *Utiliser des lettres pour exprimer une quantité* ». Cette séance d'enseignement enregistrée relève de l'unité « *Expressions algébriques du premier degré* » du domaine de l'algèbre et fonction, selon le nouveau programme de mathématiques de la première année du collège (MENPS, 2024).

Nous pouvons montrer Abouhanifa (2019) que cette leçon s'inscrit dans le cadre de l'algèbre précoce, où les élèves apprennent à utiliser des variables pour représenter des nombres inconnus ou des quantités qui peuvent changer. Nous interrogeons les prédispositions des enseignants à soutenir le développement de la pensée algébrique chez les élèves à la transition entre les deux modes de pensées, arithmétique et algébrique, pour analyser les connaissances d'un enseignant dans ce contexte. La question qui se pose est la suivante : les enseignants du collège disposent-ils des connaissances essentielles pour soutenir et développer la pensée algébrique chez les élèves ? Nous avons utilisé la notion de connaissances des enseignants au sens de Ball et al. (2008), pour désigner tout ce que l'enseignant met en œuvre avant, pendant et après la classe. A travers cette expérimentation de la

méthode « *d'enseignement explicite* » dans le système marocain, nous nous sommes intéressés à la question suivante : Quelles connaissances sur les expressions algébriques et l'utilisation des lettres ont les enseignants et comment se manifestent-elles en situation d'enseignement en classe ?

En combinant la connaissance des mathématiques avec la connaissance de l'enseignement, nous tentons d'analyser la sensibilité de cet enseignant aux caractéristiques des situations porteuses : s'il est capable de retrouver le raisonnement des élèves qui l'ont conduit à trouver la solution ; s'il est conscient du fait que le caractère algébrique d'une généralisation dépend de la nature de la validation. Ainsi, le temps que l'enseignant consacre à l'apprentissage et les élèves à la tâche. Enfin, la qualité des pratiques d'enseignement qui aident à développer les compétences socio-émotionnelles et cognitives des élèves à travers les trois domaines : culture de la salle de classe, l'enseignement et les compétences socio-émotionnelles.

II. NOUVELLES ORIENTATIONS CURRICULAIRES DE L'ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES AU COLLÈGE

1. *Aperçu sur le nouveau programme de mathématiques au collège*

Les contenus d'apprentissage des programmes d'études de mathématiques (MENPS, 2024) sont conçus selon une architecture spiralaire qui assure l'harmonie de chaque unité du programme, ainsi qu'une logique évolutive qui prend en considération aussi bien le niveau de développement de l'élève que les besoins disciplinaires des autres matières. Les programmes d'étude sont répartis en quatre domaines distincts qui sont interreliés : Nombres et calculs ; Algèbre et fonctions ; Espace et Géométrie ; Organisation et gestion de données.

Dans l'activité mathématique liée au domaine « Algèbre et fonction », une attention particulière est accordée à transition de la pensée arithmétique à la pensée algébrique et à l'articulation entre l'algèbre et les fonctions dans les différents registres. Dans ce cadre, les élèves sont amenés à :

- Utiliser les lettres dans le calcul pour exprimer un résultat général.
- Utiliser le calcul algébrique pour exprimer les changements et leurs représentations sous différentes formes.
- Représenter et lire des relations quantitatives et des lois à l'aide d'expressions algébriques.
- Reasonner de manière analytique (opérer sur l'inconnue).

2. *Méthode d'enseignement : « Enseignement explicite »*

Dans le cadre de cette méthode pédagogique « *enseignement explicite* », il est recommandé à l'enseignant de choisir des méthodes adaptées au niveau de développement cognitif de ses élèves ; par exemple, utiliser des objets concrets pour illustrer comment les lettres peuvent représenter des quantités avant de passer à une abstraction plus complexe. L'enseignant pourrait également intégrer la résolution de problèmes réels pour rendre l'apprentissage plus pertinent.

L'adoption de quelques principes des méthodes efficaces (manipuler, illustrer, verbaliser, abstraire) (Bruner, 2000) pour la résolution de problèmes et pour l'introduction de notions mathématiques abstraites (par ex. les expressions algébriques). La résolution de problèmes fait l'objet d'apprentissage dans le cadre de séances dédiées à la construction des connaissances et des séances dédiées à la consolidation des apprentissages précédents sont programmées pour faciliter l'installation des ressources et le transfert des acquis.

3. *Les connaissances des enseignants pour enseigner dans le domaine de l'algèbre*

Modèle théorique pour décrire les connaissances pour enseigner

Dans le contexte de cette recherche, nous nous focalisons sur les connaissances nécessaires pour l'enseignement des mathématiques en général et de l'algèbre élémentaire en particulier. Deux types de connaissances sont spécifiquement visés. Les premières évaluées à travers des questions visant à amener les enseignants à analyser des démarches correctes ou incorrectes d'élèves débutant en algèbre et les secondes sont focalisées sur les choix des activités dans leurs pratiques d'enseignement. La connaissance du contenu et de l'enseignement (KCT) combine la connaissance des mathématiques avec celle de l'enseignement. KCT concerne les décisions pédagogiques, la connaissance du séquençage et de la conception de l'enseignement, l'évaluation objectifs et des différentes représentations, la capacité de présenter des activités propices à l'approfondissement des connaissances chez les élèves. Ce modèle théorique permet de décrire les connaissances pour enseigner (Nathan et Koedinger, 2000, Loewenberg Ball, Thames et Phelps, 2008).

Les connaissances pour développer la pensée algébrique chez les élèves

Nous nous sommes intéressés au processus de généralisation algébrique qui est une composante essentielle de la pensée algébrique. Plusieurs auteurs distinguent deux formes de généralisation : la généralisation empirique (Dörfler, 1991) ou inductive (Piaget et Henriques, 1978) et la généralisation théorique (Dörfler, 1991) ou constructive (Piaget et Henriques, 1978).

La généralisation commence dès qu'on pressent un cheminement sous-jacent, même si on est encore incapable de le formuler. Nous avons retenu deux catégories de généralisation, (Abouhanifa, 2019) : empirique et théorique. La généralisation empirique s'apparente à la généralisation inductive de Piaget et Henriques (1978). Les élèves expriment le plus souvent leur raisonnement à l'aide de calculs, de phrases, d'annotations sur le dessin ou à l'aide d'un substitut symbolique pour identifier le nombre inconnu. L'indéterminée peut être symbolisée par un substitut symbolique, mais la symbolisation élaborée garde des traces de la situation qui l'a vue naître. La généralisation théorique, quant à elle, réfère à un système d'actions dans lequel des invariants essentiels sont identifiés et remplacés par des prototypes. La généralité est construite à travers l'abstraction des invariants essentiels. Les qualités abstraites sont des relations entre les objets, plutôt que d'être elles-mêmes des objets et elles sont adaptées aux situations de généralisations algébriques. Cette généralité consiste à se détacher de la situation de départ pour proposer une écriture correcte sur le plan mathématique. Dans ce cas, la formulation symbolique de la généralisation ne comporte plus aucune trace permettant de relier les symboles à leurs signifiants (Abouhanifa et al., 2019).

4. *Démarche de l'analyse de la pratique enseignante*

La qualité des pratiques d'enseignement qui aident à développer les compétences socio-émotionnelles et cognitives des élèves est organisée en trois domaines principaux : Culture de la salle de classe, Enseignement et Compétences socio-émotionnelles (Aloys et al., 2021) :

Culture de la salle de classe

L'enseignant crée un environnement favorable à l'apprentissage. Ce qui compte plus ici ce n'est pas la correction du comportement négatif de l'élève par l'enseignant, mais plutôt les conditions créées par l'enseignant : un environnement d'apprentissage favorable en traitant tous les élèves avec respect, en utilisant systématiquement un langage positif, en répondant aux besoins des élèves, en remettant en cause les stéréotypes et en ne manifestant pas de préjugés de genre dans la salle de classe.

Enseignement effectif

L'enseignant facilite les leçons en articulant clairement les objectifs de la leçon alignés sur les activités d'apprentissage et en expliquant le contenu en utilisant diverses formes de représentation. Il relie les activités d'apprentissage aux connaissances préalables des élèves ou à la vie quotidienne et modélise l'activité d'apprentissage. La compréhension est vérifiée au moyen de questions, d'invites et d'autres stratégies pour évaluer les niveaux de compréhension des élèves. L'enseignant supervise le travail individuel ou en groupe, en adaptant les consignes aux niveaux des élèves et en fournissant une rétroaction pour résoudre les problèmes de compréhension ou confirmer les bonnes réponses. La pensée critique est encouragée par des questions ouvertes et des tâches de réflexion, les élèves démontrant leurs capacités de pensée critique en s'engageant dans ces activités.

Compétences socio-émotionnelles

Il s'agit de vérifier si les enseignants encouragent l'autonomie des élèves en leur permettant de faire des choix et de jouer un rôle significatif en classe. La persévérance est valorisée par la reconnaissance des efforts, une attitude positive face aux défis, et la présentation des erreurs comme partie intégrante de l'apprentissage. Les compétences sociales et la collaboration sont développées à travers les interactions entre paires et l'acquisition de compétences interpersonnelles telles que l'empathie et la régulation émotionnelle.

III. MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

Cette étude de cas met en lumière non seulement les connaissances théoriques et pratiques de l'enseignant concernant la leçon « *Utiliser des lettres pour exprimer une quantité* », mais aussi les défis auxquels il fait face dans sa mise en œuvre didactique et pédagogique. Par ailleurs, l'enseignant a reçu une formation continue pour renforcer ses compétences pédagogiques, notamment en matière d'engagement actif des élèves. Le contenu mathématique de cette vidéo enregistrée de cet enseignant était un outil de formation des formateurs et des enseignants de mathématiques dans le cadre de l'expérimentation du projet de réforme dans des collèges à l'échelle nationale.

Nous proposerons d'analyser les praxéologies mathématiques et didactiques (Chevallard, 1999) ; de la façon de faire des enseignants de mathématiques au collège, relativement à l'enseignement de l'algèbre, et de dévoiler l'organisation didactique utilisée lors d'une étude de cas d'un enseignant, à travers les différents outils de collecte de données.

L'analyse commence par un examen du programme de la première année du collège qui cadre la leçon. Cela inclut les objectifs d'apprentissage, les compétences visées et les contenus spécifiques relatifs à l'utilisation des lettres en mathématiques. Cette étape permet de situer la leçon dans un cadre théorique plus large et d'identifier les attentes institutionnelles. L'analyse des documents officiels a porté aussi sur le dispositif de formation continue des enseignants dans le cadre de l'expérimentation du projet de réforme. La fiche pédagogique fournie, par l'équipe centrale qui pilote la mise en œuvre de ce projet, est donnée à l'enseignant, est également analysée. Elle contient des informations sur la planification de la leçon, les activités proposées, ainsi que les méthodes d'évaluation envisagées. Cette analyse aide à comprendre comment l'enseignant prévoit d'aborder le sujet et quelles stratégies il compte utiliser pour engager ses élèves. Pour cela, nous avons construit une grille d'analyse de la pratique qui précise les indicateurs portant sur des connaissances de l'enseignant en lien avec le problème de généralisation proposé dans cette séance d'enseignement. Deux connaissances sont mises en exergue : la sensibilité de l'enseignant à retrouver le raisonnement de l'élève dans le processus de généralisation et à la nature de la validation par rapport au caractère algébrique d'une généralisation.

La vidéo est utilisée comme outil principal pour observer les interactions entre l'enseignant et ses élèves pendant la leçon. La grille d'observation de la classe, d'Aloys et al. (2021), est utilisée dans une optique de développement professionnel des enseignants afin d'identifier les forces et les faiblesses de chacun et de fournir un soutien ciblé. Elle développe les axes suivants : le temps que les enseignants consacrent à l'apprentissage et les élèves à la tâche. Trois instantanés de 1 à 10 secondes de deux segments, d'un temps de 15 minutes chacun sont utilisés pour analyser autant les pratiques de l'enseignant que l'activité des élèves en train de réaliser la tâche. La qualité des pratiques d'enseignement qui aident à développer les compétences des élèves est organisée en trois domaines principaux : la culture de la salle de classe, l'enseignement effectué et les compétences socio-émotionnelles (Aloys et al., 2021).

IV. LES RÉSULTATS

1. *Enjeu de la formation des enseignants sur la méthode « d'enseignement explicite »*

Le projet de réforme vise à être expérimenté sur un échantillon de 230 collèges à l'échelle nationale durant l'année scolaire 2024/2025. Dans ce cadre, des formations continues pour un public d'inspecteurs et d'enseignants ont été mises en œuvre, afin d'améliorer l'apprentissage des élèves et sa qualité au niveau des établissements publics. Vu que l'enseignant joue un rôle central pour atteindre les objectifs fixés par les *collèges pionniers*, sa capacité à adopter des pratiques pédagogiques efficaces est essentielle pour améliorer les apprentissages des élèves. Cela inclut non seulement l'enseignement des connaissances mathématiques mais aussi la manière dont ces connaissances sont enseignées et intégrées dans le quotidien scolaire.

Un autre aspect crucial du projet est le renforcement des comportements positifs chez les élèves. En développant une relation de confiance entre enseignants et élèves, il est possible d'instaurer un climat favorable aux apprentissages en classe, qui est essentiel pour encourager la participation active des élèves et leur motivation à apprendre.

Les moments de la séance et les comportements à observer et à éviter sont généralement portées sur les éléments de la gestion de classe. L'analyse didactique, illustrée par une activité qui traite le rapport personnel au savoir, s'avère nécessaire pour amener l'enseignant à saisir les enjeux de cette méthode d'enseignement. Par ailleurs, si l'on vise un apprentissage centré sur l'élève, il nous paraît important de bien différencier, dans les pratiques enseignantes, deux paradigmes (Tardif, 1998 ; Legendre, 2001) : le paradigme de l'enseignement, le paradigme de l'apprentissage

2. *Les connaissances de cet enseignant*

Analyse didactique de l'activité proposée dans cette séance d'enseignement

À travers cette séance, l'enseignant accueille les élèves à l'extérieur de la classe en vérifiant qu'ils respectent les règles (deux par deux, en silence). Il leur demande de prendre place et de se préparer pour démarrer la séance et leur rappelle les règles. L'enseignant a imprimé et collé le contrat de la classe dans la salle, il a demandé aux élèves de rappeler les règles de la classe et s'assure de leur la compréhension, sans donner des indications additionnelles.

La phase d'ouverture se consacre généralement au calcul mental et un rappel sur les prérequis. Pour cela, l'enseignant rappelle les élèves des règles de participation à l'activité, il laisse le temps aux élèves de réfléchir (quelques secondes) avant de recueillir les réponses, sur quelques opérations, après avoir leurs donné un signal pour répondre. L'enseignant demande systématiquement aux élèves de justifier leurs réponses et de verbaliser leur raisonnement mais il ne fournit pas dans la majorité des cas un

feedback substantiel aux élèves. Il utilise le tableau pour montrer des techniques et astuces additionnelles aux élèves, il note le lexique et les expressions de quelques concepts importants. Malheureusement, il a commis une erreur de traduction de l'expression numérique.

Dans cette démarche pédagogique, il est recommandé de déclarer l'objectif de la leçon aux élèves au début de la séance. Cette pratique fait partie des stratégies pédagogiques efficaces qui favorisent un apprentissage actif et engagé. Nous analysons les raisons pour lesquelles cela est bénéfique, ainsi que les meilleures pratiques pour le faire et les difficultés susceptibles d'être rencontrées. Lorsque l'enseignant partage clairement l'objectif d'apprentissage, cela aide les élèves à comprendre ce qu'ils doivent apprendre et pourquoi c'est important. Cela crée une feuille de route pour la leçon, permettant aux élèves de se concentrer sur les compétences ou concepts clés. Dans cette méthode, connaître l'objectif peut accroître la motivation des élèves. De plus, en ayant un objectif clair, les élèves peuvent mieux évaluer leur propre compréhension et progrès tout au long de la leçon. Cela leur permet d'identifier ce qu'ils maîtrisent et ce sur quoi ils doivent encore travailler. Enfin, annoncer l'objectif dès le début aide également à structurer le temps de la séance. L'enseignant peut planifier son activité en fonction des résultats attendus, ce qui rend l'enseignement plus efficace. Cependant, il doit être vigilant face au manque de cohérence qui peut exister entre l'objectif déclaré, les activités et les tâches proposées pour atteindre cet objectif. L'objectif est exprimé de la manière suivante « *..Alors l'objectif de la séance, c'est utiliser les lettres pour exprimer une quantité..* ». Cet objectif porte sur des connaissances nouvelles qui vont être introduites pour la première fois pour préparer l'entrée dans la symbolisation algébrique. L'enseignant a effectué des opérations sur le calcul mental et les rappels sur les prérequis, mais les éléments de l'ouverture ne suffisent pas pour faire référence à ce que les élèves ont déjà appris pour renforcer leur compréhension. Après avoir déclaré l'objectif, l'enseignant n'a pas consacré assez de temps pour que les élèves posent des questions ouvertes pour clarifier ce qu'ils vont apprendre et en quoi c'est pertinent.

Concernant l'activité proposée, nous avons fait les constats suivants : cet enseignant n'a pas saisi le potentiel de l'activité proposée, il l'a présentée aux élèves sans consigne générale. Cette consigne pourrait être la suivante : « *Vous devez envoyer un message à la créatrice de bijoux dans lequel vous allez lui expliquer comment elle pourrait faire pour trouver le nombre de perles rouges qu'elle aura besoin pour n'importe quel nombre de disques en argent* ». De même, les étapes à suivre pour la résolution sont données par l'enseignant, sans que les élèves n'aient le temps de réfléchir aux enjeux de l'activité. La figure suivante présente un extrait du cheminement utilisé par l'enseignant pour résoudre cette tâche.

Modélage
Une créatrice de bijoux fabrique des bracelets avec des disques en argent et des perles rouges. Elle fixe 3 perles rouges sur chaque disque et utilise 4 autres perles pour fermer le bracelet comme illustré ci-dessous :



Un bracelet avec 1 disque $\rightarrow (1 \times 3)$ perles + 4 perles = 7 perles
Un bracelet avec 2 disques $\rightarrow (2 \times 3)$ perles + 4 perles = 10 perles
Un bracelet avec 3 disques $\rightarrow (3 \times 3)$ perles + 4 perles = 13 perles

Pour 1 disque $\rightarrow 1 \times 3 + 4 = 7$
Pour 2 disques $\rightarrow 2 \times 3 + 4 = 10$
Pour 3 disques $\rightarrow 3 \times 3 + 4 = 13$
Penser à 4 disques $\rightarrow 4 \times 3 + 4 = 16$
Penser à 5 disques $\rightarrow 5 \times 3 + 4 = 19$

Le nombre de perles dans chaque cas est égal à :
(le nombre de disques) $\times 3 + 4$
Le nombre de perles dans chaque cas est égal à :
 $n \times 3 + 4$

Calculer avec l'expression : $n \times 3 + 4$
Si $n = 5$, alors le nombre de perles est : $5 \times 3 + 4 = 19$ perles
Si $n = 10$, alors le nombre de perles est : $10 \times 3 + 4 = 34$ perles

- L'expression $n \times 3 + 4$ nous permet de calculer le nombre de perles pour n'importe quel nombre de disques.
- Cette expression est une expression littérale.

Une expression littérale (ou expression algébrique) est une expression contenant une ou plusieurs lettres qui désignent des nombres.

Figure 1 – Extrait du cours présenté par l'enseignant

Dans cette activité, l'idée est de confronter les élèves à une suite arithmétique illustrée par des suites de disques en argent et des perles rouges. L'élève dispose au départ d'une représentation visuelle des trois motifs de bracelets représentant la suite de disques en argent et des perles rouges. La tâche consiste à présenter des figures représentant le nombre de disques en argent et de perles rouges et à montrer les exemples de figures des premiers termes (dans chaque bracelet, la variable dépendante est le nombre de perles rouges et la variable indépendante est le nombre de disques en argent).

Dans un premier temps (pour les premiers termes), l'élève est amené à anticiper le nombre de perles rouges dans la figure d'un bracelet de 4 disques en argent, sans être obligé de le dessiner et dénombrer les perles rouges. Il doit ensuite proposer une description de l'agencement des perles rouges pour un bracelet de 15 disques d'argent. Ensuite, l'élève doit identifier le nombre de perles rouges nécessaires pour une figure lointaine (un bracelet de plusieurs disques d'argent) ; il s'agit d'amener l'élève à formuler en mots une procédure générale pouvant convenir quel que soit le nombre de disques en argent de la figure recherché. Afin d'amener les élèves à donner du sens à la notion de nombre indéterminé dans ce contexte, il est avantageux de formuler la consigne, par : « *Trouvez une expression mathématique qui donne le nombre de perles rouges, à n'importe quelle figure de bracelet, pour n'importe quel nombre de disque* ». Le passage au formalisme mathématique se fait progressivement, il a dû être introduit par l'enseignant non pas pour prescrire la manière de formuler les régularités, mais comme un moyen de rendre plus efficace les formulations des élèves.

Les aspects didactiques manquants dans la pratique de cet enseignant

Processus d'institutionnalisation dans cette pratique : L'enseignant n'a pas effectué une analyse de la production des élèves, mettant l'accent sur le processus d'évolution des représentations spontanées des élèves sur le processus algébrique. De même, il n'a pas fourni aux élèves les éléments de ce processus de généralisation basé sur les processus numériques.

Valorisation de l'activité de l'élève selon les différentes modalités de travail : Il est primordial de faire les articulations possibles entre le travail en groupe, le travail du grand groupe et le travail individuel favorisant l'autoréflexion, afin d'amener les élèves à donner du sens à la notion de nombre indéterminé.

Les connaissances de cet enseignant relativement au processus de généralisation

Dans ce problème proposé aux élèves, le registre de représentation pour la détermination du nombre de perles rouges pour 4 et 15 disques est naturellement numérique. Pour la question du cas d'un bracelet avec un nombre inconnu de disques, le registre pourra être algébrique conventionnel ou intermédiaire. Il pourra aussi être numérique, dans le cas où l'élève utilise un nombre déterminé quelconque pour exprimer le cas général.

Cet enseignant ne fait pas référence à un raisonnement produit par un élève tout en faisant des commentaires qui aideront cet élève à s'engager dans la construction du sens de l'activité. L'enseignant ne considère pas les conditions de validation de la généralité, qui est empirique si la généralisation est arithmétique et intellectuelle si la généralisation est algébrique. De même, nous n'avons pas relevé d'indicateurs montrant la capacité de l'enseignant à retrouver les différentes stratégies et les expliquées aux élèves.

3. *Analyse de la pratique enseignante à travers les trois critères (culture de la classe, enseignement effectif et les compétences socio émotionnelles)*

Culture de la salle de classe

Temps consacré à l'apprentissage des élèves : Globalement, l'enseignant est efficace pour maximiser le temps consacré à l'apprentissage en s'assurant que la plupart des élèves sont en apprentissage pendant la majeure partie du cours et qu'ils y participent. Cependant, nous avons observé des élèves qui ne participent pas à l'activité fournie par l'enseignant.

Environnement propice à l'apprentissage des élèves : L'enseignant est surtout efficace pour créer un environnement favorable. Il traite tous les élèves avec respect et utilise fréquemment un langage positif pendant la séquence. Tous les élèves ont les mêmes chances de participer aux activités de la classe et sont traités avec la même considération ; il n'y a pas de preuve d'un préjugé même implicite lié au genre ou au handicap, mais il n'y a pas de cas où ces stéréotypes sont explicitement remis en question.

Attentes comportementales positives : L'enseignant est plutôt efficace pour promouvoir un comportement positif dans la classe. Il fixe certaines attentes en matière de comportement, et les élèves se comportent bien. Cependant, il ne reconnaît pas le comportement des élèves qui répondent ou dépassent les attentes.

Enseignement effectif

La mise en œuvre de la leçon : L'enseignant est assez efficace dans l'animation de la leçon pour favoriser la compréhension. Il énonce naïvement l'objectif d'apprentissage, mais il utilise trois formes de représentation pour expliquer le contenu et il a utilisé une activité porteuse de sens pour modéliser l'activité d'apprentissage. Cependant, l'enseignant ne fait pas assez de lien entre ce qui est enseigné, les autres connaissances du contenu ou les expériences des élèves.

Vérification de la compréhension des élèves : L'enseignant a procédé à une vérification de la compréhension des élèves en leur proposant des exercices, en leur demandant de réfléchir sur ces exercices et en demandant à certains de passer au tableau. En particulier, quatre élèves vont au tableau pour répondre aux différents exercices, ce qui ne lui permet pas d'obtenir des informations sur la plupart des élèves. De plus, comme nous ne pouvons pas voir l'ensemble de la classe, il est difficile d'avoir une idée précise du nombre d'élèves qui ont compris la notion de l'indéterminé. L'enseignant surveille certains élèves pendant qu'ils travaillent de manière indépendante et ajuste son enseignement. En particulier, après qu'un élève ait terminé un exercice au tableau, il juge sa production sans interroger les autres élèves sur la justesse du raisonnement de leur camarade et sans leur demander quelle erreur est commise. Puis il explique la solution de l'exercice pour que l'ensemble des élèves comprenne le processus. Un autre point crucial est l'erreur manifestée par l'élève et qui est passée sous silence, lorsque l'élève considère l'unité du litre « l » comme un indéterminé. L'un des défauts des représentations sémiotiques qui sont à l'origine des difficultés des élèves dans les problèmes de mise en équation est la variable indice, c'est-à-dire, l'indice dimensionnel d'une quantité connue qui est choisi comme inconnue.

Pensée critique : L'enseignant parvient assez bien à encourager les élèves à faire preuve d'esprit critique en les aidant à identifier et à synthétiser les informations pertinentes. L'enseignant pose quelques questions ouvertes aux élèves, mais ne s'appuie pas sur leurs réponses et leur fournit une tâche de réflexion superficielle. Les élèves ne posent pas de questions ouvertes mais assistent à la tâche de réflexion substantielle fournie et effectuée par l'enseignant, ce qui ne contribue pas au développement de l'esprit critique chez les élèves.

Compétences socio-émotionnelles

Autonomie : L'enseignant est assez efficace dans la promotion de l'autonomie, il leur donne l'occasion de jouer des rôles importants. De plus, certains élèves profitent de ces opportunités et se portent volontaires pour jouer des rôles.

Persévérance : Généralement, l'enseignant ne reconnaît pas les efforts des élèves, il fait preuve d'une attitude neutre à l'égard des défis des élèves puisqu'il ne les pénalise pas pour leurs erreurs. Cependant, il n'aide pas les élèves à comprendre que l'erreur et la frustration sont des éléments normaux du processus d'apprentissage, et ne donnent pas de retours pour les surmonter. Enfin, rien ne prouve que l'enseignant encourage les élèves à se fixer des objectifs d'apprentissage à court ou à long terme. L'enseignant n'est pas très efficace pour encourager les efforts des élèves. Il adopte une attitude neutre face aux défis et n'aide pas les élèves à se fixer des objectifs.

Compétences sociales et collaboratives : L'enseignant a l'intention d'encourager la collaboration entre les élèves et favorise les compétences interpersonnelles des élèves. Les élèves sont installés par groupe, mais l'enseignant ne favorise pas la collaboration effective entre les élèves pour résoudre des problèmes.

V. CONCLUSION

L'objectif était d'analyser la pratique d'un enseignant, spécifiquement dans le domaine « *Algèbre et fonction* ». Divers outils de collecte de données ont été utilisés pour soutenir l'analyse. L'accent a été mis sur la compréhension de la manière dont l'enseignant organise et met en œuvre ses stratégies d'enseignement en classe. Dans la classe, l'enseignant s'efforce de créer un environnement d'apprentissage positif. Pour cela, il tente de faciliter la compréhension des élèves en clarifiant les objectifs de la leçon et en utilisant diverses représentations. Il met en pratique ses connaissances théoriques, mais cela présente certaines limites. Bien qu'il explique les techniques et concepts, il pourrait enrichir son enseignement en intégrant davantage d'activités pratiques pour améliorer la compréhension des élèves. Un point critique est le manque d'institutionnalisation dans sa pratique : l'enseignant n'a pas analysé les productions des élèves, ce qui aurait permis de mieux comprendre l'évolution de leurs représentations spontanées et leur approche des processus algébriques. De plus, il n'a pas présenté le processus algébrique comme un moyen de généralisation, basé sur les processus numériques, ni aidé les élèves à s'éloigner progressivement des conditions initiales pour parvenir à une expression algébrique. Les interactions observées montrent que l'enseignant exerce une dominance dans sa pratique pédagogique et modifie son enseignement de manière peu significative. Il possède une connaissance réflexive de sa méthode d'enseignement, qui nécessite un soutien accru.

L'enseignant engage les élèves dans divers exercices, leur laissant le temps de réfléchir et d'analyser leurs réponses. Toutefois, il ne questionne pas suffisamment la classe sur les raisonnements ou les erreurs commises. Par exemple, une confusion d'un élève entre une unité et une variable est négligée. Les élèves rencontrent des difficultés à identifier et à convertir des quantités inconnues en expressions algébriques, car les différents registres ne s'alignent pas toujours. Bien qu'il adapte son enseignement, l'enseignant ne teste pas les connaissances des élèves concernant les équivalences des expressions algébriques. Lors de la phase de pratique guidée collective, il rappelle les règles du contrat liées à cette pratique et demande systématiquement aux élèves de justifier leurs réponses. Cependant, ne fournit pas un retour d'information substantiel sur les réponses incorrectes.

Les résultats de l'étude sur les connaissances nécessaires pour enseigner révèlent que l'enseignant en question montre peu de sensibilité aux spécificités des situations porteuses, ainsi qu'à la nature de la validation des connaissances (qu'elle soit empirique ou intellectuelle). De plus, il ne prend pas

suffisamment en compte les types de raisonnements que les élèves utilisent lors de la résolution de problèmes liés à la généralisation. Cette sous-estimation du rôle des registres de représentation dans le développement cognitif des élèves pourrait entraver leur transition d'une pensée arithmétique vers une pensée algébrique. En conséquence, le manque de connaissances didactiques et le besoin de formation continue pour les enseignants sont identifiés comme des facteurs cruciaux pour favoriser un développement précoce de la pensée algébrique.

RÉFÉRENCES

- Abouhanifa, S., Benjema, S. et Oky, E. (2024, 20-24 mai). *Analyse des connaissances d'enseignants de mathématiques du collège autour de la résolution de problèmes de comparaison chez les élèves* [Communication]. Colloque ADIMA-4, Université Mohammed 6 Polytechnique, Benguerir.
- Abouhanifa, S. (2019). Développer la symbolisation algébrique à travers le processus de généralisation. *Revue de Mathématiques pour l'école (RMé)*, 232, 35-46.
<https://doi.org/10.26034/vd.rm.2019.1756>
- Abouhanifa, S. et Squalli, H. (2023). Raisonnements des élèves dans la résolution de problèmes algébriques à la transition primaire/collège au Maroc. Dans *Actes du colloque EMF22, GT2 du 12 au 16 décembre 2022 à Cotonou, Bénin*.
- Aloys, J. B., Carter, E. J., Del Toro Mijares, A. T., Ding, E., Yi, Z., Melo Hurtado, C. E., Molina, E., Pushparatnam, A., Singal, N., Wilichowski, T. M. (2021). *Teach Primary: Manual do Observador – Volume 1* (2^e éd.). World Bank Group.
<https://documents1.worldbank.org/curated/en/918781650527970027/pdf/Teach-Primary-Manual-del-Observador.pdf>
- Ball, D. L., Thames, M. H. et Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bocquillon, M., Gauthier, C., Bissonnette, S., Trudel, L., Decelles, S. et Eva, M. (coord.). (2019) L'enseignement explicite : une approche pédagogique efficace pour favoriser la réussite du plus grand nombre [Numéro thématique]. *Apprendre et enseigner aujourd'hui*, 8(2).
<https://www.enseignementexplicite.be/WP/wordpress/wp-content/uploads/Num%C3%A9ro-enseignement-explicite-Apprendre-et-enseigner.pdf>
- Bruner, J. (2000). *Cultures et modes de pensée. L'esprit humain dans ses œuvres*. Retz.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique de la didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-226. <https://revue-rdm.com/1999/1-analyse-des-pratiques/>
- Demonty, I., Vlassis, J., Fagnant, A. (2018). Pensée algébrique, activités types et connaissances pour l'enseignement à la transition entre l'école primaire et secondaire. *Études pédagogiques en mathématiques*, 99, 1-19.
- Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. Dans A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen et J. Dormolen (dir.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (p. 61-85). Kluwer Academic Publishers.
- Filloy, E. et Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25. <https://www.jstor.org/stable/40247950>

- Hamdani, Y. (2024). L'évaluation de la qualité du projet des écoles pionnières par les professeurs de l'enseignement primaire au Maroc. *Journal for Education Studies and Research on Pedagogical Innovation*, 2(1), 211-240. <https://doi.org/10.34874/PRSM.takwine-vol2n01.1245>
- Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L. et Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 258-288.
- Kaput J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by « algebrafying » the K-12 curriculum. Dans *Proceedings of a National Symposium, may 27 and 28, 1997. The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum* (p. 25-26). National Academy Press.
- Kieran, C. (1994). A functional approach to the introduction of algebra: Some pros and cons. Dans J. P. Ponte et J. F. Matos (dir.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Lisbon, Portugal, 29 juillet au 3 août 1994 – Volume 1* (p. 157-175).
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans A. D. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 390-419). Macmillan.
- Legendre, M.-F. (2001). Favoriser l'émergence de changements en matière d'évaluation des apprentissages. *Vie pédagogique*, (120), 14-19.
- Ministère de l'éducation nationale, du préscolaire et des sports (MENPS). (2022). *Feuille de route 2022-2026 : 12 engagements pour une école publique de qualité*. Gouvernement du Maroc.
- Ministère de l'éducation nationale, du préscolaire et des sports (MENPS). (2024). *Projet des écoles pionnières. Programme du cycle national de formation des enseignants sur l'approche de l'enseignement au bon niveau*. Gouvernement du Maroc.
- Najar, R., Squalli, H., Adihou, A. et Abouhanifa, S. (2021). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : pour un état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. Dans B. Cherradi, A. Jamea et A. Boukhair (dir.), *CIFEM'2020 – 3^e édition du Colloque International sur la Formation et l'enseignement des mathématiques et des sciences, 26-28 octobre 2020. ITM Web of Conferences*, 39, article 01004. <https://doi.org/10.1051/itmconf/20213901004>
- Nathan, M. J. et Koedinger, K. R. (2000) An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and instruction*, 18(2), 209-237
- Piaget, J. et Henriques, G. (1978). *Recherches sur la généralisation*. Presses universitaires de France.
- Shulman, L. (1987). Connaissance et enseignement : fondements de la nouvelle réforme. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23.
- Squalli, H., Najar, R., Abouhanifa, S. et Adihou, A. (2020). *Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre* [Communication]. 3^e édition du Colloque CIFEM'2020, CRMEF CS, El Jadida, Maroc.
- Tardif, J. (1998). *Introduire les nouvelles technologies de l'information. Quel cadre pédagogique ?* ESF.

LA CIRCULATION DES SAVOIRS AU SEIN DE GROUPES DE TRAVAIL

COLLABORATIF : ÉTUDE DE CAS

| NECHACHE* ASSIA ET ROLLINDE** EMMANUEL

Résumé | Dans le cadre d'un projet de recherche, nous nous sommes intéressés au développement des connaissances professionnelles des enseignants placés dans une dynamique de travail collaboratif. Cette dynamique, créée par le dispositif des Lesson Studies, est basée sur l'observation conjointe des pratiques d'enseignement ainsi que sur des analyses réflexives. Dans le cadre du GT1, nous proposons de présenter le dispositif de travail collaboratif mis en œuvre et l'impact de ce dernier sur le développement professionnel des enseignants et chercheurs participants à ce projet.

Mots-clés : travail collaboratif, lesson studies, développement professionnel, interdisciplinarité

Abstract | As part of a research project, we were interested in the development of the professional knowledge of teachers placed in a collaborative work dynamic. This dynamic, created by the Lesson Studies system, is based on joint observation of teaching practices and reflective analysis. As part of WG1, we propose to present the collaborative work system implemented and its impact on the professional development of the teachers and researchers taking part in this project.

Keywords : Collaborative work, lesson studies, professional development, interdisciplinarity

I. INTRODUCTION

1. *Présentation du projet de recherche*

Cette contribution présente le développement professionnel observé dans un projet de travail collaboratif, L2SMEA (Lesson Studies of Science and Mathematics through Astronomy), basé sur le modèle des Lesson Studies (LS). Le projet L2SMEA est financé par l'INSPE¹ de Versailles - CYU en lien avec l'académie de Versailles². Il a été mis en place sur l'année 2023-2024 et porte sur la co-conception par des enseignants de mathématiques et de physique-chimie d'une séquence commune en astronomie basée sur l'usage d'un « planétaire humain ». Nous faisons l'hypothèse que la collaboration entre différents acteurs favorise la circulation des savoirs, avec une approche interdisciplinaire. Le collectif est en mesure de créer des situations d'apprentissage plus significatives pour les élèves et plus intégratives en termes de savoirs. En modifiant « la façon dont les enseignants s'engagent dans l'enseignement de leur matière en accédant à ce qu'ils savent de leur matière » (Shulman, 1986) et ici à la complémentarité avec d'autres matières, ce dispositif participe au développement de la connaissance du savoir « apprêté » (Bueno-Ravel, 2003).

Nous allons tout d'abord présenter le « planétaire humain » et le contenu en astronomie, puis le dispositif de travail et de recueil de données mis en place. Nous analyserons l'évolution des compétences professionnelles des différents acteurs.

* CY Cergy Paris Université et LDAR – France – assia.nechache@cyu.fr

** CY Cergy Paris Université et LDAR – France – emmanuel.rollinde@cyu.fr

¹ Institut National Supérieur du Professorat et de l'Éducation - CY Cergy Paris Université.

² <https://pourlessciences.ac-versailles.fr/spip.php?article339> (« pour les sciences » de l'académie de Versailles).

2. *Le planétaire Humain*

Le Planétaire Humain (PH) est un outil conçu pour illustrer le mouvement des planètes autour du Soleil et leurs changements de position dans le ciel. Sur un PH (Figure 1), les orbites des planètes et des comètes sont dessinées à l'échelle humaine, avec une distance de 1 mètre entre le Soleil et la Terre. Ainsi, les apprenants vont reproduire par leur propre déplacement sur le PH les mouvements des planètes internes (Mercure, Vénus, Terre et Mars dans l'ordre de distance au Soleil) et d'une comète (orbite de forme plus allongée). Ils avancent le long de leur orbite en respectant une durée constante et identique pour tous pour aller d'un point au suivant (voir Abboud et Rollinde, 2021 pour une description plus détaillée). L'usage du PH permet d'approcher des concepts scientifiques tels que la cinématique et la dynamique (trajectoire, vitesse, repère, forces), les formes géométriques et la proportionnalité dans le contexte intégratif du Système Solaire. Un tel apprentissage nécessite cependant d'adopter une pratique d'enseignement interdisciplinaire (mathématiques et sciences pour le second degré). Les professeurs du secondaire sont experts dans leur discipline scientifique (mathématiques ou physique). Ils ont au contraire peu l'habitude de travailler sur des objets communs et leurs discours sur ces objets peuvent être très différents.

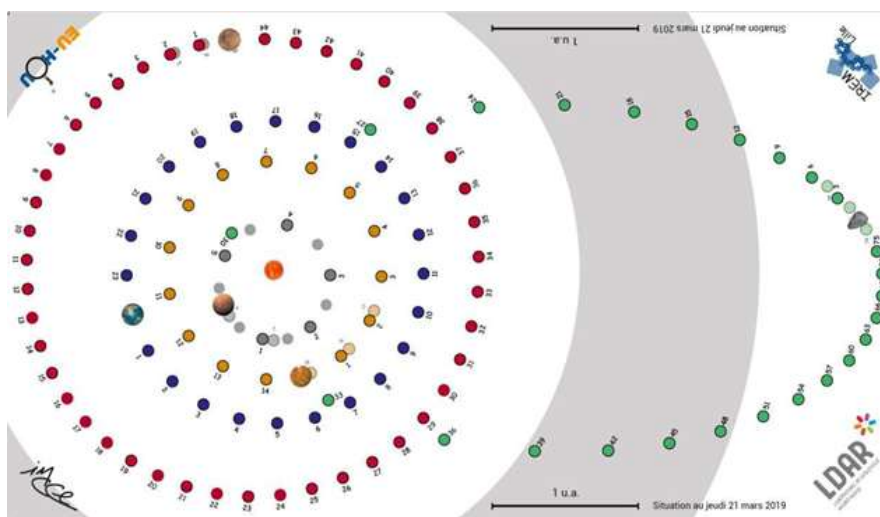


Figure 1 – Le planétaire humain (format 3m-6m)

Tel qu'il est conçu, le PH impose un contenu riche et détaillé du Système Solaire. En cela, il favorise l'interdisciplinarité car il associe dans un premier temps, mathématiques et physique. Il constitue également un défi, pour les enseignants, autant pour le premier qu'au second degré, pour les raisons différentes, connaissances disciplinaires pour le premier, et travail en polyvalence pour le second. C'est pourquoi au sein du projet L2SMEA, l'astronomie est traitée en lien avec le planétaire humain comme support pédagogique, avec une approche d'enseignement interdisciplinaire des mathématiques et de la physique.

Dans le projet L2SMEA, le travail collaboratif entre chercheurs et praticiens de l'éducation a été mise en place afin de produire des séances basées sur l'astronomie et une approche STEM (White et Delanay, 2021). Nous interrogeons alors *l'impact de ce travail collaboratif dans le développement des compétences professionnelles des enseignants et des chercheurs*. Cette question est explorée ici à travers l'analyse de circulations potentielles des savoirs au sein d'un collectif. Par *circulation des savoirs* on entend, un processus par lequel les savoirs théoriques, pédagogiques et didactiques (Kuzniak, 2007) se déplacent entre les différents individus au sein d'un collectif travaillant autour d'une problématique commune.

Cela inclut la manière dont ces savoirs sont partagés, échangés, discutés, adaptés par le collectif dans le but de construire une pratique commune et avec un langage commun.

II. LE DISPOSITIF DE TRAVAIL

1. *Lesson Studies*

Le travail collaboratif est reconnu comme « un levier de développement professionnel » (Bednarz et al., 2012). En effet, selon Allard et al. (2022), le travail collaboratif est fondamental pour le développement professionnel, car il crée un cadre de recherche enrichissant sur les plans scientifique et humain. Il renforce la confiance entre enseignants et chercheurs, permettant de générer de nouvelles connaissances sur les pratiques professionnelles. Ce type de collaboration facilite l'accès à des pratiques durables et permet de tester des hypothèses de recherche tout en répondant aux besoins des enseignants et en produisant des ressources.

Parmi les dispositifs collaboratifs, nous avons choisi les « Lesson Studies » (ou LS : Fernandez et Chokshi, 2002 ; Miyakawa et Winslow, 2009). Ce dispositif place les enseignants dans une dynamique collaborative à travers des analyses réflexives entre pairs et avec des chercheurs en didactique ; l'observation conjointe des pratiques d'enseignement ; et une dialectique entre la théorie et la pratique. Le collectif choisit de traiter un sujet d'enseignement problématique. Dans un processus itératif, ils réalisent une étude collective de la leçon. Pour ce faire, ils analysent l'apprentissage visé et planifient une leçon. Par la suite, un des enseignants met en œuvre la séance en étant observé par ses pairs. À l'issue de la mise en œuvre, le collectif de la LS se réunit pour discuter des effets de la leçon sur l'apprentissage des élèves et propose des ajustements si nécessaire, et dans le cas échéant décide d'arrêter le processus d'étude de la leçon. À l'issue de ce processus itératif, le collectif décide de diffuser l'étude de la leçon sous forme de scénarios et d'articles de recherche.

Le collectif d'une LS est constitué d'un groupe d'enseignants, d'un facilitateur qui anime et organise les séances de travail. Selon son niveau d'expertise, le facilitateur endosse également le rôle de médiateur entre la culture de recherche et la culture de pratique (Martin et al., 2017). À ceci, s'ajoute d'un ou plusieurs chercheurs experts d'un domaine, qui ont le rôle d'accompagnateur du collectif. Ils apportent, en particulier, des ressources issues de la recherche en lien avec le sujet (ou la notion) retenu(e) pour la LS.

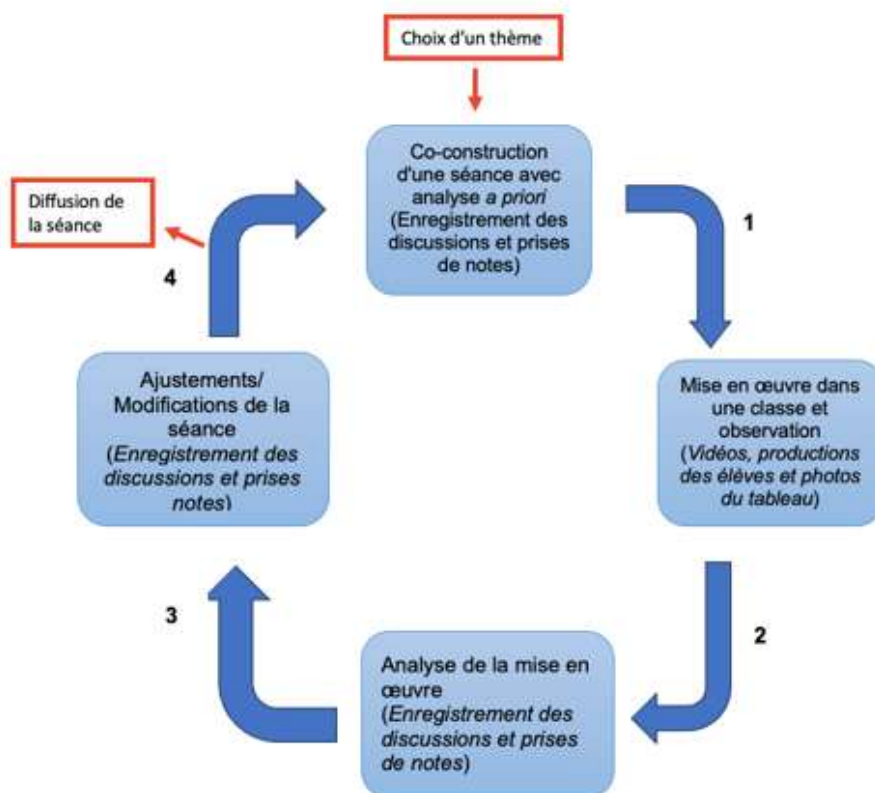


Figure 2 – Cycle d'étude d'une séance

2. Cycle d'étude au sein du projet L2SMEA

Dans le cadre du projet L2SMEA, le cycle d'étude d'une séance est réalisé selon quatre phases (Figure 2). La première consiste à co-construire une séance et de mener une analyse a priori du contenu proposé. Cette séance est mise en œuvre dans une des classes des membres du collectif. Cette mise en œuvre est soumise à l'observation par les autres membres du collectif. L'analyse du déroulement effectif est réalisée a posteriori par l'ensemble du collectif et elle se termine par une proposition d'ajustements ou de modification dans la quatrième phase.

Le dispositif des LS favorise la collaboration entre enseignants et chercheurs tout en contribuant à l'amélioration des pratiques pédagogiques et à la création d'une communauté d'apprentissage. Il permet aussi aux enseignants d'examiner systématiquement leur pratique pour enrichir les expériences d'apprentissage des élèves. Au total trois séances (Annexe 1) ont été construites avec, pour chacune d'elles, deux cycles d'étude. Ce dispositif a été mis en œuvre avec un collectif au niveau collège, en classe de 4^e (14 ans) et un deuxième au niveau primaire, en Cycle 3 (9 ans- 10 ans).

Le collectif de L2SMEA est constitué d'enseignants (primaire et secondaire), d'inspecteurs et de chercheurs. Ainsi, au collège, le collectif est constitué de quatre enseignants – un de SVT, nommé M, deux de mathématiques, A et L, et un de physique-chimie, D – de deux chercheurs en didactique (astronomie et mathématiques) et d'un inspecteur académique de physique-chimie. Les enseignants M,

A et L enseignent dans le même établissement. Au sein de ce collectif, l'apport didactique sur l'astronomie vue comme une « porte d'entrée vers les sciences » (Fitzgerald et al., 2014 ; Salimpur et al. 2021) est assurée par le didacticien de l'astronomie (l'un des auteurs), l'apport en didactique des mathématiques est proposé par le didacticien d des mathématiques (le deuxième auteur). Et enfin, l'enseignant de SVT, qui aussi formateur (au sein d'un groupe IREMS³), a pris en charge, en qualité de facilitateur, l'organisation et l'animation des séances du travail collaboratif.

La séquence (constituée de trois séances) construite collectivement, est mise en place deux fois dans deux classes de quatrième, par un enseignant de mathématiques (L) puis un enseignant de Physique-Chimie (D). Tous les membres du groupe observent les séances lors de leur mise en place.

En ce qui concerne le collectif du primaire, le collectif de L2SMEA, est composé de trois enseignants du cycle 3 (9ans-10 ans), un enseignant de cycle 2 (6 ans - 8ans) et est également formateur (au sein d'un groupe IREMS). Ce dernier a eu le rôle de facilitateur au même titre que l'enseignant de SVT présenté ci-dessus. Et enfin, ce collectif est accompagné par deux chercheurs en didactiques (les mêmes que ceux du collectif collège). Dans le cadre de cette contribution, nous allons nous focaliser sur le collectif du collège.

3. *Recueil des données*

Le travail du collectif du collège a eu lieu entre juin 2022 et mai 2024. Au total 11 réunions ont été planifiées au cours de cette période par le collectif. Celles-ci sont rythmées entre des réunions portant le choix de la notion à traiter dans une séquence et le nombre de séances et l'étude de chacune des séances (analyse de la mise en œuvre ; et des observations de mises en œuvre en classe). Précisions, que le choix du thème et le nombre de séances ainsi que le contenu a été fait par les enseignants. La seule contrainte imposée par les porteurs du projet est que les séances construites doivent utiliser le contexte de l'astronomie avec l'usage du planétaire. Lorsque les réunions sont en présentielles, elles ont eu lieu dans les établissements des enseignants. Les réunions sont enregistrées en vidéo puis retranscrites. Chacune des quatre phases de l'étude d'une séance est filmée, enregistrée et retranscrite. A ceci s'ajoute les photos de productions d'élèves et du tableau et les prises de notes.

Ces données permettent d'observer effectivement la circulation et l'évolution des connaissances de chaque acteur du collectif sur le contenu. La séquence (composée de trois séances) co-construite porte sur la notion de vitesse en classe de 4^e (14 ans). Nous choisissons ici d'aborder la question de la circulation des savoirs au sein du collectif à partir des échanges ayant eu lieu lors des deux premières réunions. Au cours de celles-ci, les enseignants ont choisi de traiter un sujet d'enseignement dans le cadre d'une approche interdisciplinaire et dans le contexte de l'astronomie avec l'usage du PH. Ces échanges et confrontations au sein de la collaboration portent essentiellement sur le sens de cette notion selon les deux disciplines, avec l'astronomie en « toile de fond ». En effet, dès le début de la première réunion de travail, la notion de vitesse a été rapidement choisie par les enseignants du collectif comme notion pertinente pour co-construire une séquence d'apprentissage dans le contexte de l'astronomie et dans une approche interdisciplinaire. Cela a suscité de nombreux échanges et des points de vue différents.

³ Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences.

III. CIRCULATION DU SAVOIR AU SEIN DU COLLECTIF

1. *Analyse par acteur*

Les pratiques pédagogiques dans le contexte des LS se sont assez rapidement stabilisées et le développement professionnel autour des savoirs des deux disciplines a eu lieu au cours des échanges dans chaque réunion. Nous présentons une synthèse de ce développement pour chaque acteur.

La présence d'une inspectrice académique apporte une vision institutionnelle et critique sur les méthodes d'enseignement, soulignant la nécessité d'une approche rigoureuse et tenant compte des programmes. Nous ne revenons pas ici sur le développement propre à l'inspectrice académique.

Du point de vue des enseignants de mathématiques, pour évoquer la vitesse, des concepts de proportionnalité et de fonctions linéaires sont utilisés, restant ainsi dans le domaine des mathématiques : la définition des fonctions linéaires doit être fondée sur la proportionnalité. La vitesse est décrite comme le facteur de proportionnalité de la relation entre distance et durée. A travers la discussion collective sur la question des marges d'erreur acceptées, apportées par l'enseignant de physique, les enseignants de mathématiques prennent en compte la place du protocole de mesure dans la séquence et insistent de leur côté sur la rigueur nécessaire dans la définition des objets. En particulier, la mesure de distance sur le planétaire se fait entre deux disques qui représentent deux positions de départ et d'arrivée. La définition du point au centre du disque est reprise pour être précisée par les enseignants de mathématiques. Les enseignants de mathématiques partagent ainsi leurs connaissances théoriques et pratiques tout en restant réceptif aux retours des autres participants, favorisant un échange constructif.

L'enseignant de physique quant à lui, met en avant l'importance de la répétition des mesures pour obtenir des résultats fiables et encourage les élèves à critiquer leurs propres mesures. Il évoque également la modélisation et les observations à l'échelle du planétaire humain, reliant ainsi la théorie à des applications concrètes. En intégrant les préoccupations de l'enseignant de mathématique (établir le lien entre la notion de vitesse avec celle de la proportionnalité), il enrichit sa pratique en proposant des éléments pratiques issus de son expérience (liés à la notion de mesure et de mesurage) et propose des analogies pour aider les élèves à comprendre des concepts complexes. Cela lui permet de mieux comprendre comment ses enseignements peuvent être abordés dans une autre discipline.

En posant des questions et accompagnant, les chercheurs en didactique amènent les enseignants à réfléchir sur leurs pratiques et à considérer des approches alternatives. D'une part, le chercheur en didactique des mathématiques a proposé l'utilisation de la bêche au lieu du format A3 pour illustrer des concepts dans le méso-espace et le macro-espace. D'autre part, le chercheur en didactique de la physique a apporté une perspective de recherche sur la précision des mesures et la modélisation, soulignant l'importance de la rigueur scientifique dans le processus d'observation. Les chercheurs enrichissent ainsi les échanges en introduisant des concepts avancés et en insistant sur la nécessité de précision. Leur rôle est crucial pour introduire des concepts théoriques et insister sur la rigueur scientifique. En participant à ces échanges, ils enrichissent leur compréhension des pratiques de classe et peuvent ainsi ajuster leurs recherches pour qu'elles soient plus pertinentes et opérationnelles dans un contexte éducatif.

IV. DISCUSSION

Nous voyons que pour tous les acteurs du collectif la circulation des savoirs dans ce dialogue est dynamique et en interaction avec les différents acteurs. Chaque participant apporte ses propres connaissances et expériences, enrichissant ainsi le processus de développement professionnel. Les

enseignants et les chercheurs échangent des idées, remettent en question leurs pratiques et s'adaptent aux besoins des élèves. Cette collaboration favorise une approche intégrée de l'enseignement, où la théorie et la pratique se nourrissent mutuellement. Dans le cadre de l'échange entre enseignants et chercheurs, plusieurs types de savoirs ont été mobilisés, illustrant la richesse de la collaboration. Les savoirs théoriques sont mobilisés par les enseignants de mathématiques qui introduisent des concepts de proportionnalité et de fonctions linéaires, tandis que l'enseignant en physique se concentre sur le protocole de mesure et les incertitudes. Les chercheurs en didactique évoquent les notions associées de modélisation et d'observation, et de changement d'échelle. Sur le plan pratique, les enseignants discutent de la mise en œuvre des mesures et soulignent l'importance de la répétition pour garantir des résultats fiables, tout en encourageant les élèves à critiquer leurs propres mesures, favorisant ainsi un apprentissage actif. Les savoirs techniques se manifestent par l'utilisation du planétaire humain selon deux formats : bâches et A3, pour illustrer des concepts mathématiques et physiques, ainsi que par des discussions sur le choix des points de mesure et l'interprétation des résultats. Les enseignants prennent également en compte le contexte d'apprentissage des élèves, adaptant leurs méthodes à leurs besoins, et reliant la théorie à des situations réelles, comme les mesures relevées sur le planétaire humain. Enfin, les savoirs réflexifs émergent lorsque le collectif réfléchit sur la complexité des choix pédagogiques et l'importance de guider les élèves dans leur apprentissage, tout en abordant des questions de marge d'erreur et de précision, témoignant ainsi d'une réflexion approfondie sur la rigueur scientifique.

Cela permet de renforcer leurs connaissances théoriques tout en intégrant des éléments pratiques issus des discussions, ce qui améliore leur capacité à enseigner ce concept complexe et interdisciplinaire qu'est la vitesse.

V. CONCLUSION

Le dispositif de travail mis en œuvre associé à l'outil pédagogique le planétaire humain a permis d'engendrer des échanges riches et fructueux. De surcroît, le PH, du fait de son contenu, favorise la mise en œuvre d'une approche l'interdisciplinarité associant les mathématiques et la physique, et voire au-delà de ces deux disciplines comme cela a été observé dans le cas du collectif primaire (Heussaff et al., 2025). La co-construction des séances dans une perspective interdisciplinaire a également favorisé un fonctionnement de groupe où chaque membre a pu contribuer activement à la création de ressources communes, tout en adoptant un langage commun. Ce mode de fonctionnement s'apparente au principe de symétrie proposé par Sensevy et al. (2013) dans le cadre des ingénieries coopératives tenant compte des spécificités de chaque discipline.

Conçu de cette manière, le dispositif de travail a offert un environnement propice à l'expression et à la confiance, facilitant ainsi l'émergence de questionnements, de prises de conscience et de discussions sur les diverses options concernant les contenus et les déroulements en classe. Ce dispositif a également impacté positivement la circulation des savoirs entre les membres du collectif. Dans le cadre de cette contribution, nous avons discuté la question de la circulation des savoirs à partir deux réunions (sur les 11 réunions) du collectif. Or afin de saisir finement l'impact réel d'un tel dispositif de travail sur le développement des pratiques professionnelles intégrant des approches interdisciplinaires, il est nécessaire d'étudier l'évolution de cette circulation des savoirs sur l'ensemble du processus du travail collaboratif (étude en cours).

La collaboration au sein du collectif du collège a été fructueuse à plusieurs niveaux. L'équipe d'enseignants engagés dans ce travail a souhaité continuer la collaboration en participant à la valorisation des résultats du projet. Cette valorisation a donné lieu à des communications avec actes dans des colloques (COPIRELEM, AstroEdu-FR 2023) et des rédactions d'articles. Cela a donné envie

aux enseignants de s'engager davantage dans un travail de réflexion à l'image d'un chercheur, ce qui est assez positif. Par ailleurs, elle a contribué à établir une communauté d'apprentissage durable, réunissant chercheurs et enseignants exerçants dans une même région.

RÉFÉRENCES

- Abboud, M. et Rollinde, E. (2021). Les mathématiques du système solaire en plein air. Le planétaire humain au collège. *Repères IREM*, (124), 37-62.
- Allard, C., Horoks, J. et Pilet, J. (2022). Principes de travail collaboratif entre chercheur·e·s et enseignant·e·s : le cas du LéA RMG. *Éducation et didactique*, (16-1), 49-66.
- Bednarz, N., Desgagné, S., Maheux, J.-F. et Savoie-Zajc, L. (2012). La mise au jour d'un contrat réflexif comme régulateur de démarches de recherche participative : le cas d'une recherche-action et d'une recherche collaborative. *Recherche en éducation*, (14), 128-151. <https://doi.org/10.4000/rec.5894>
- Bueno-Ravel, L. (2003). Raisonnement et nombres entiers. Comportements d'élèves de terminale S spécialité mathématique en arithmétique. *Bulletin de l'APMEP*, (447), 419-429. <https://www.researchgate.net/publication/340088553>
- Fernandez, C. et Chokshi, S. (2002). A practical guide to translating lesson study for a U.S. setting. *Phi Delta Kappan*, 84(2), 128-134. <https://doi.org/10.1177/003172170208400208>
- Fitzgerald, M. T., Hollow, R., Rebull, L. M., Danaia, L. et McKinnon, D. H. (2014). A review of high school level astronomy student research projects over the last two decades. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 31, e037. <https://doi.org/10.1017/pasa.2014.30>
- Heussaff, V., Nechache, A. et Rollinde, E. (2024). Utiliser le planétaire humain pour mesurer et représenter l'évolution au cours du temps de la distance entre deux planètes. Dans *Actes du 50^e Colloque de la COPIRELEM, juin 2024, Bonneuil-sur-Marne, France* (p. 505-518).
- Kuzniak, A. (2007). Savoir mathématique et enseignement didactique et pédagogique dans les formations initiales du premier et second degré. *Recherche et formation*, (55), 27-40. <https://doi.org/10.4000/rechercheformation.855>
- Martin, D. et Clerc-Georgy, A. (2017). La lesson study, une démarche de recherche collaborative en formation des enseignants ? *Revue Phronesis*, 1-2(6), 35-47. <https://shs.cairn.info/revue-phronesis-2017-1-page-35?lang=fr>
- Miyakawa, T. et Winslow, C. (2009). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants : étude collective d'une leçon. *Éducation & didactique*, 3(1), 77-90. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.420>
- Salimpour, S., Bartlett, S., Fitzgerald, M. T., McKinnon, D. H., Cutts, K. R., James, C. R., Miller, S., Danaia, L., Hollow, R. P., Cabezon, S., Faye, M., Tomita, A., Max, C., de Korte, M., Baudoin, C., Birkenbauma, D., Kallery, M., Anjos, S., Wu, Q. ... et Ortiz-Gil, A. (2021). The gateway science: A review of astronomy in the OECD school curricula, including China and South Africa. *Research in Science Education*, 51(4), 975-996. https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/2021RScEd..51..975S/doi:10.1007/s11165-020-09922-0
- Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S. et Morales, G. (2013). Cooperative engineering as specific design-based research. *ZDM Mathematics Education*, 45(7), 1031-1043. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0532-4>

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>

White, D. et Delaney, S. (2021). Full STEAM ahead, but who has the map for integration? – A PRISMA systematic review on the incorporation of interdisciplinary learning into schools. *LUMAT : International Journal on Math, Science and Technology Education*, 9(2), 9-32. <https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.2.1387>

ANNEXE 1 :
SÉQUENCE PORTANT SUR LA VITESSE CONÇUE PAR LE COLLECTIF COLLÈGE

Nombres de séances	Durée	Thème	Contenu
Séance 1	50 min	Découverte du planétaire	Chorégraphie des planètes Système Solaire, etc..
Séance 2	50 min	Le mouvement des planètes (en relation avec la vitesse et proportionnalité	Vitesse = distance/durée L'homogénéité de la formule Relever des mesures Débat sur le choix du matériel pour mesurer les grandeurs
Séance 3	20 min	« Mesurer les grandeurs »	Critique du choix du matériel par rapport à la précision de la mesure

SE CONSTRUIRE DANS LA DURÉE, AU GEM : PERCEPTIONS DES PARTICIPANTS À L'UN DE SES GROUPES DE TRAVAIL COLLABORATIF

| NINOVE* LAURE

Résumé | Cette étude interroge la perception qu'ont les acteurs de l'impact de leur participation à un groupe collaboratif sur leur développement professionnel et leur épistémologie pratique d'enseignant. Les apports de la mixité des rôles (instituteurs et didacticiens) au sein du groupe sont également analysés.

Mots-clés : groupe collaboratif, développement professionnel, enseignants et didacticiens, ingénierie didactique coopérative

Abstract | This study focuses on the actors' perceptions of the impact of participating in a collaborative group on their professional development and their practical epistemology as teachers. The contribution of the mixed roles (teachers and didacticians) within the group is also analysed.

Keywords: Collaborative group, professional development, teachers and didacticians, cooperative engineering

I. INTRODUCTION

Le Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) rassemble enseignants et didacticiens dans une démarche s'apparentant à une ingénierie didactique coopérative. Leur travail s'inscrit généralement dans la durée, avec une lenteur qui contraste avec l'accélération de nos sociétés. En outre, certains membres collaborent à l'un ou l'autre groupe de travail du GEM depuis de nombreuses années, voire plusieurs décennies.

Cette étude se concentre sur le groupe « fondamental » du GEM, qui vise au développement, pour l'école fondamentale, de situations d'apprentissage basées sur une analyse épistémologique et didactique approfondie. Nous souhaitons investiguer comment les acteurs de ce groupe collaboratif perçoivent l'impact de leur participation sur leur épistémologie pratique d'enseignant, ainsi que sur leur développement professionnel. Parallèlement à ces deux aspects, nous nous intéressons à l'interconnexion des connaissances des instituteurs et didacticiens du groupe et en particulier à la manière dont chacun perçoit l'apport de l'autre à la recherche commune et à son propre développement professionnel.

II. ÉLÉMENTS DU CADRE THÉORIQUE

1. *Épistémologie pratique du professeur*

L'action didactique de l'enseignant dépend de son intention, des contraintes dans lesquelles il exerce, ainsi que de son rapport au savoir, du regard qu'il pose sur sa pratique, de la manière dont il conçoit l'apprentissage. Sensevy (2007, p. 37) appelle *épistémologie pratique du professeur*, la théorie de la connaissance, en partie implicite, issue de la pratique du professeur et qui contraint sa pratique, soulignant qu'elle « a des conséquences *sur* la pratique », qu'elle « est produite en grand partie *par* la pratique » et « *pour* la pratique ».

* IRMP Université catholique de Louvain et Haute École Vinci – Belgique – laure.ninove@uclouvain.be

2. Développement professionnel de l'enseignant

Différents auteurs se sont intéressés au développement professionnel de l'enseignant prenant part à un groupe collaboratif (Borko et Potari, 2024 ; Jaworski et al., 2017 ; Lebel et Belair, 2018 ; Lieberman, 1986 ; Marlot et al., 2017 ; Van Nieuwenhoven et Colognesi, 2015). Van Nieuwenhoven et Colognesi, qui se placent dans la perspective professionnalisante du développement professionnel proposée par Mukamurera (2014) d'un processus d'apprentissage, de recherche ou de réflexion au service de l'amélioration des pratiques, se focalisent sur le développement professionnel dans le cadre d'un dispositif de recherche collaborative dont la double finalité est de « faire émerger une activité de production de connaissances » et « viser un développement professionnel de chaque catégorie d'acteurs concernés par le processus de recherche » (Van Nieuwenhoven et Colognesi, 2015, p.105). Ils identifient treize bénéfices d'une recherche collaborative au niveau du développement professionnel, listés au tableau 1, notant que, si les huit premiers peuvent être rencontrés en formation continue classique et peuvent être rapprochés de la typologie proposée par Paquay (2000), les items 9 à 13 sont plus spécifiques aux dispositifs de recherche collaborative.

Tableau 1 – Gains de la recherche collaborative (Van Nieuwenhoven et Colognesi, 2015, p. 113)

1. Jeter un regard nouveau sur mes tâches et mon rôle	7. Apporter des perspectives de mobilité dans ma carrière professionnelle
2. Acquérir de nouveaux savoirs et savoir-faire disciplinaires	8. Vivre à nouveau une posture d'apprenant
3. Développer de nouvelles compétences professionnelles	9. Co-construire des connaissances nouvelles
4. Partager des problèmes	10. Vivre une transformation au niveau personnel et/ou professionnelle
5. Rencontrer des pairs, me reconnaître dans la préoccupation des autres	11. Être reconnu comme collaborateur d'une recherche
6. Élargir mon regard sur d'autres réalités avec mon vécu professionnel	12. Trouver un autre sens à mon identité professionnelle
	13. Acquérir plus de confiance en moi

3. Interconnexion des connaissances de deux groupes d'acteurs

Jaworski (2008) et Jaworski et Huang (2014) se sont intéressés au partenariat entre enseignants de mathématiques (« *teachers* ») et didacticiens/formateurs (« *didacticians/ educators* », termes utilisés de manière interchangeable par ces auteurs), et en particulier à l'interconnexion des connaissances de ces deux groupes d'acteurs, modélisée par Jaworski (2008) par le diagramme de la figure 1. Les deux groupes partagent un certain nombre de connaissances sur l'enseignement (région B), celles-ci formant une base commune permettant la communication entre eux, mais chaque groupe apporte également des connaissances plus spécifiques, plutôt théoriques pour les didacticiens (région A) et ancrées dans le terrain pour les enseignants (région C). Lors de la collaboration en vue d'améliorer les apprentissages mathématiques en classe, les connaissances partagées évoluent, grâce aux connaissances spécifiques de chaque groupe et au travail de recherche commun (Jaworski et Huang, 2014). Ces auteurs notent également que cette réciprocité favorise le respect mutuel envers les qualités respectives des deux groupes d'acteurs.

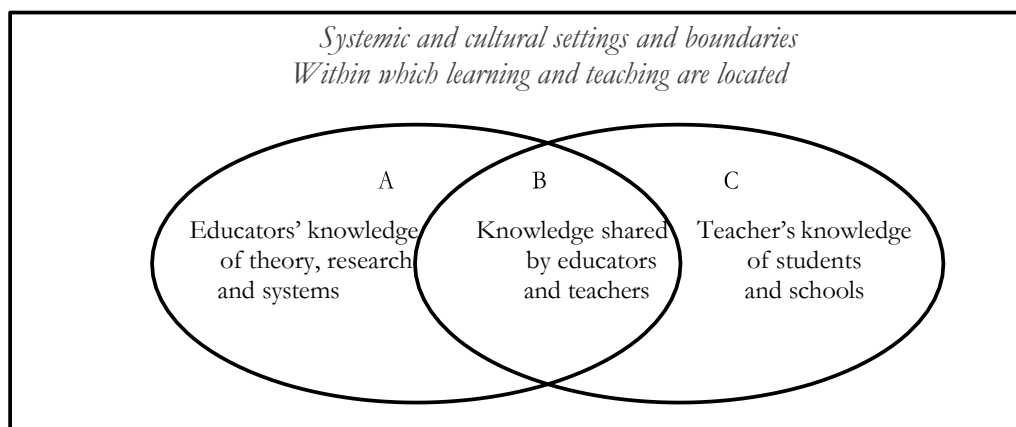


Figure 1 – Interconnexion entre les connaissances des formateurs et des enseignants (Jaworski, 2008)

III. CONTEXTE : LE GROUPE « FONDAMENTAL » DU GEM

Le Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) a été créé en 1977 à l'initiative de Nicolas Rouche, professeur à l'Université catholique de Louvain (Rouche 1981 ; GEM 1985 ; Docq et Hauchart 2009). Il rassemble des enseignants de maternelle, primaire, secondaire, formateurs d'enseignants, enseignants et chercheurs universitaires, dans une démarche s'apparentant à une ingénierie didactique coopérative (Artigue, 2020 ; Sensevy et al., 2013). Ils se placent dans une démarche de recherche collaborative, au sens où la recherche se fait « avec » plutôt que « sur » les praticiens (Lieberman, 1986). Le travail s'organise en groupes de 8 à 12 acteurs, qui s'engagent à collaborer pendant une année scolaire autour d'un objet d'apprentissage mathématique particulier ou un thème transversal lié à l'enseignement des mathématiques. Ce thème, choisi collégialement, peut être reconduit pendant quelques années. Au sein de chaque groupe de travail, les collaborateurs, de manière itérative, étudient finement l'objet d'apprentissage, conçoivent des dispositifs, les implémentent dans les classes et analysent a posteriori les enseignements, pour ensuite diffuser les connaissances construites via des formations et des écrits.

À la mixité des acteurs au regard de leur formation et de leur fonction dans le monde de l'enseignement, s'ajoute celle de leur ancienneté dans le dispositif collaboratif. Ainsi, le GEM accueille chaque année de nouveaux collaborateurs, dont un nombre non négligeable décident ensuite de s'investir sur le long terme, voire le très long terme.

Précisons aussi que la participation au GEM, qui représente une quinzaine de réunions d'une demi-journée par an, n'est pas valorisée institutionnellement et se fait donc de manière volontaire et bénévole, sur le temps libre de ses acteurs, qu'ils exercent dans l'enseignement obligatoire ou dans l'enseignement supérieur.

Depuis une vingtaine d'années, un des groupes de travail annuel est consacré à des questions d'enseignement des mathématiques plus spécifiquement liées à l'enseignement fondamental (maternel et primaire, enfants de 2,5 à 6 ans et 6 à 12 ans en Belgique). Au moment de cette étude, le groupe était composé de 11 personnes, instituteurs et formateurs d'enseignants en formation initiale (FI) ou continue (FC). Le tableau suivant présente brièvement le niveau auquel ils enseignent, la progression dans leur carrière, leur ancienneté au GEM et s'ils sont titulaires d'un doctorat.

Tableau 2 – Participants au groupe « fondamental » au moment de l'étude (prénoms d'emprunt)

Instituteurs	Formateurs
Gabrielle, maternelle, fin de carrière, 7 ans GEM	Pauline, FI primaire, milieu de carrière, 1 an GEM
Delphine, primaire, milieu de carrière, 5 ans GEM	Claire, FI primaire, milieu de carrière, 7 ans GEM,
Alain, primaire, retraité, 18 ans GEM	Dr Carole, FI primaire, fin de carrière, 11 ans GEM
Sylvie, primaire, milieu de carrière, 26 ans GEM	Chantal, FC primaire, retraitée, 47 ans GEM,
Serge, primaire, retraité, 27 ans GEM	Dr Noémie, FI primaire, début de carrière, 1 an GEM,
	Dr (Sonia, FI maternel/primaire, début carrière, 1 an GEM)

IV. MÉTHODOLOGIE

Vers la fin de l'année scolaire, les participants au groupe « fondamental » ont été invités à répondre à un questionnaire comportant quelques questions ouvertes, qui ont été partagées et approfondies lors d'un entretien de type « focus group » (Cohen et al., 2007). Neuf personnes étaient présentes pour le focus group, qui a duré environ une heure et a été audio-enregistré puis retranscrit. Deux participantes étaient absentes (en italique au tableau 2). L'une a répondu aux questions du questionnaire écrit. L'autre n'a pu prendre part ni au questionnaire ni à l'entretien et n'est donc pas reprise dans cette étude.

L'entretien était axé sur sept questions. La première question se voulait très ouverte, pour permettre aux participants d'évoquer des aspects importants à leurs yeux. Les quatre suivantes, librement inspirées de Lebel et Belair (2018), visaient à investiguer la perception des participants concernant l'apport du GEM à leur épistémologie pratique et leur développement professionnel, ainsi que leur identification ou non à une démarche de recherche collaborative. Les deux dernières questions ont été ajoutées pour l'entretien de groupe, suite à l'évocation spontanée de ces aspects dans les réponses aux questionnaires.

1. Pourquoi participez-vous aux travaux du GEM ? Qu'y recherchez-vous ?
2. Pensez-vous que votre participation au GEM a modifié votre vision de ce que c'est que « faire des maths » et « apprendre les maths » et influencé votre enseignement ?
3. Identifiez-vous des effets de votre participation au GEM en termes de développement professionnel, de connaissances, de compétences ?
4. En quoi vous sentez-vous utile dans le processus de travail collaboratif au GEM ?
5. Avez-vous le sentiment de participer au GEM à une recherche collaborative, avec une double finalité de co-formation des acteurs et de production de connaissances ?
6. Selon vous, qu'apporte la mixité des profils au sein du groupe ?
7. Voyez-vous des freins à votre participation au GEM ?

Les données issues des réponses écrites et des échanges oraux ont été analysées en trois phases chronologiques, de préanalyse, exploitation et interprétation (Wanlin 2007, p.249). Pour les aspects liés au développement professionnel, les catégories identifiées ont été rapprochées des gains identifiés par Van Nieuwenhoven et Colognesi (2015). Dans le cadre de cette courte contribution, seule une partie des données récoltées est développée. En particulier, on n'abordera pas la question de savoir si les participants se reconnaissent dans une démarche dite de recherche collaborative.

V. RÉSULTATS

1. Des profils et rôles différents et complémentaires, mais pas hiérarchisés

La question de l'apport de l'hétérogénéité des profils dans le groupe a émergé spontanément, tant dans les réponses au questionnaire écrit que dans les échanges qui ont fusé dès les premières secondes de l'entretien, bien avant le moment prévu pour cette question dans le guide d'entretien. Cette particularité du travail au GEM revêt donc beaucoup d'importance aux yeux de ses membres : les différents acteurs *apportent chacun au collectif des connaissances propres* à leur profil.

Les deux profils « enseignants » et « didacticiens », pour reprendre les termes de Jaworski et Huang (2014), identifiés tant dans les questionnaires écrits que lors des échanges, sont considérés comme particulièrement complémentaires. Les deux parties mettent l'accent sur l'apport de l'autre, en reconnaissant l'expertise de chacune, notamment la *théorie* apportée par les formateurs et la *connaissance des enfants et du terrain* apportée par les instituteurs, spécificités des régions A et C du modèle de Jaworski (2008) présenté à la figure 1.

En outre, tant les instituteurs que les formateurs soulignent le gain *pour leur propre développement professionnel* apporté par cette altérité, ce qui rejoint la perspective évoquée par Jaworski et Huang (2014, p. 173), « *that joint activity of these two groups (teachers and didacticians), in creation of classroom mathematics, leads to learning for both.* ». La collaboration leur permet ainsi de *jeter un regard nouveau sur leurs tâches et leur rôle*, un des gains (item 6 du tableau 1) identifiés par Van Nieuwenhoven et Colognesi (2015).

- Carole – Pour moi qui suis à l'école normale, ce [...] qui est très intéressant, c'est d'avoir des personnes qui côtoient les enfants tous les jours, dans leurs apprentissages [...], ça me remet [...] les pieds sur terre.
- Sylvie – Et moi, je trouve intéressant le côté inverse de Carole – [parce] que nous, on est sur le terrain, et c'est chouette pour nous d'avoir un peu le côté un peu méta du dessus, [avec] la théorie qu'on n'a pas.
- Claire – Avoir des enseignants « de terrain » [...], qui venaient valider tout ça [ses intuitions, sa pratique].

Plusieurs modalités de travail collaboratif entre enseignants incluent des formateurs prenant le rôle de « *facilitator* » (Borko et Potari, 2014). Ligozat et Marlot (2016) parlent quant à eux de didacticien dans un rôle d'« éclairer », qui « tient seul la lanterne », pour amener l'enseignant à (re)découvrir sa propre pratique. Lors des échanges, Sylvie, institutrice, pointe effectivement ce « côté un peu méta du dessus », qui lui manque et est apporté par les didacticiens. Mais les apports vont *dans les deux sens*, les didacticiens se percevant également clairement bénéficiaires de la collaboration. Les profils sont donc certes distincts, mais non hiérarchisés, ainsi que l'exprime Sylvie : « ici, [...] on est tous sur le même pied ».

2. Une épistémologie pratique en évolution

Il ressort une grande convergence entre les participants sur leur vision de ce signifie « faire des mathématiques » et « apprendre des mathématiques ». Même si chacun enseigne et réfléchit sa pratique avec ses spécificités propres, on sent une épistémologie pratique partagée se dessiner. Alain évoque même une « philosophie de l'apprentissage » mathématique du GEM, elle-même en évolution grâce au travail de recherche de ses participants.

- Carole – Oui, moi j'ai peut-être envie d'insister sur le fait [que c'est] une autre façon de faire les maths.
- Alain – [Le GEM], c'est un moteur, il y a un courant, il y a une direction, c'est même pas une direction, c'est une philosophie de l'apprentissage et en plus ici elle est plus orientée vers la mathématique. [...] Et

là, je pense on a évolué au niveau du GEM, on parle maintenant beaucoup plus souvent de cette nécessité du langage, de verbaliser, de mettre en mots, mettre des mots sur sa pensée [...].

L'élément central de cette « philosophie » partagée est le souhait d'apprendre aux enfants à réfléchir, à chercher, et à ne pas se contenter d'application routinière de techniques de calcul.

- Alain – Quand je suis arrivé au GEM, en fait j'ai découvert une autre approche des mathématiques que – je vais être classique – [il mime avec les mains les « items d'une liste »].
- [...] Ça m'a permis de sortir de « calcul réponse calcul réponse, un problème une solution ». Apprendre aux enfants à réfléchir, [...] à avoir du plaisir à chercher, pas spécialement à trouver.
- Carole – Quand je suis à l'école normale avec les étudiants, j'ai l'impression que ces maths sont tellement figées dans leur tête, pour eux, les maths, c'est « on me donne une formule, je fais, je l'applique et j'ai une solution, on me donne un calcul et je dois avoir la bonne réponse ». [...]

La question du sens, la résolution de problèmes, l'intérêt des manipulations avec du matériel – parfois insolite – et de la verbalisation reviennent abondamment dans les propos.

- Chantal – Il faut aller jusqu'au sens profond et se l'approprier, faire en sorte que les écoutants, les apprenants, s'approprient le sens, plus que des techniques de calcul.
- Claire – Du sens d'un point de vue mathématique, d'un point de vue didactique.
- Delphine – Depuis que je viens au GEM, j'ai plus envie de manipuler, de faire réfléchir les enfants. Alain – En manipulant, en prenant du recul sur notre manipulation, en verbalisant.
- Pauline – Et parfois même insolites. [...] Ça me paraît très insolite d'aller en classe avec ce matériel-là !

Les participants relèvent la conception au GEM de l'apprentissage de manière globale, au sein d'une même année scolaire, mais aussi dans une perspective verticale, de construction dans la durée, tout au long de la scolarité. La complémentarité du groupe se déploie ici aussi, avec des instituteurs travaillant en maternelle, au début ou à la fin des primaires.

- Alain – C'est une autre approche des maths que ce découpage matières travaillées par blocs.
- Sylvie – La curiosité de ce qui se fait avant et après (l'aspect vertical est hyper riche).
- [...] Ça nous apporte une ouverture d'esprit aussi, de savoir ce qui se passe avant, ce qui se passe après. [...] Sur ce qui se passe en maternelle, on boit les paroles de Gabrielle de manière phénoménale ici. [...]

Certains évoquent la recherche de pistes pour comprendre et dénouer les nœuds observés sur le terrain. Alain insiste sur l'intérêt de *vivre à nouveau une posture d'apprenant*, (item 8 du tableau 1), pour revivre ce que ceux-ci peuvent ressentir dans des situations de recherche.

Alors que les formatrices d'enseignants expliquent avoir plutôt été confortées au GEM dans ce qui faisait déjà sens pour elles, les instituteurs insistent sur le fait que le groupe a profondément changé leur manière d'être enseignant. Ils vivent ainsi une *transformation au niveau personnel et professionnel* (item 10 du tableau 1).

- Sylvie – D'expérience, ça change nos pratiques et ça change l'enseignant qu'on est. [...] Moi, la philosophie du GEM, elle déteint même dans mes autres cours, ma manière d'enseigner le français, [...], enfin... tout en fait, je trouve. Donc moi ça a clairement influencé qui je suis. En évoluant aussi [...].

- Serge – Oui, pour moi aussi je dirais. Je ne sors pas indemne du GEM. Oui, dans la mesure où effectivement, déjà, rien que la confrontation, mais aussi la manière de se confronter ensemble dans le travail qu'on fait déjà. Déjà rien que ça, c'est une manière de travailler qui quelque part, forge, qui me forge à l'intérieur aussi. Donc c'est quelque chose qui est pour moi aussi reproductible dans la manière de gérer une classe, dans la manière de gérer un groupe, [...] que ce soit dans le travail, dans le cours d'histoire, dans le cours, peu importe.
- Alain – Au niveau professionnel, moi, je rejoins Sylvie, ça déteint aussi au niveau du français.

3. *Développement de la confiance en soi et tremplin vers de nouveaux horizons*

Le *développement de la confiance en soi* est identifié par Van Nieuwenhoven et Colognesi comme un gain spécifique aux dispositifs de type recherche collaborative, non rencontré en formation continue classique (item 13 du tableau 1). Plusieurs participants l'évoquent spontanément, sous différentes facettes. Ainsi, le groupe a un côté « rassurant », tant par le soutien qu'il peut apporter avec la possibilité de *partager des problèmes* (item 4 du tableau 1), que par la validation d'intuitions sur sa pratique, ce qui accroît le sentiment de légitimité.

- Gabrielle – C'est très agréable et rassurant d'avoir un groupe sur qui on peut compter, à qui on peut soumettre un problème rencontré en classe.
- Noémie – [...] Le GEM semble globalement en adéquation avec ce que j'enseigne. C'est rassurant. [...]
- Claire – [...] J'ai rejoint le GEM avec un ouf de soulagement de trouver un endroit [...] qui aille dans le sens que j'intuitionnais ou que je développais pendant/depuis les 10-12 premières années.
- Pauline – Je crois que seule je n'arriverais pas à bien mettre en œuvre la philosophie qu[e Nicolas Rouche] a impulsée, avec laquelle je suis d'accord, mais j'ai pas assez de force de manière isolée et mes collègues ne travaillent pas comme ça. [Et même, depuis que je suis au GEM, à] l'école, je suis moteur, c'est vraiment drôle, [...] alors que je n'ai pas l'impression d'en avoir l'envergure [...]

La participation au GEM amène également ses membres à oser de nouvelles pratiques.

- Gabrielle – J'ose expérimenter de nouvelles activités.
- Pauline – [...] j'ai fait l'activité avec les miroirs sur des carrés [...], ça a eu un impact formidable [...]
- Serge – Quand j'étais sur le terrain [...], c'est clair qu'il y avait un intérêt [en venant au GEM] à me lancer dans des domaines où je n'allais pas spécialement creuser [si j'étais seul] et pouvoir les creuser.

Les nouvelles connaissances et compétences, et la confiance développée au GEM, sont aussi une aide voire un tremplin vers de nouveaux rôles, que ce soit pour les instituteurs (devenir référence auprès de collègues, devenir formateurs...) ou les didacticiens (piloter une équipe...). Pour reprendre les gains présentés par Van Nieuwenhoven et Colognesi, ce *développement de nouvelles compétences professionnelles* (item 3 du tableau 1) leur apporte donc des *perspectives de mobilité* dans leur carrière professionnelle (item 7 du tableau 1).

- Gabrielle – Je suis devenue une référence en math auprès de certaines collègues, j'ai pu à mon niveau donner quelques formations.
- Sylvie – Ça s'est grâce au GEM, il n'y a qu'au GEM que je l'ai fait, ça, animer des adultes.
- Serge – Il y a un moment donné où, je pense, on peut se sentir « ok, je passe de l'autre côté de la barrière, c'est moi qui propose la formation et qui apporte aussi ce qui s'est travaillé ici [...] »

- Claire – [Ma participation au GEM m'a apporté] aisance dans le fait de travailler avec des groupes, que ce soit en pilotage ou au sein de ceux-ci, de donner une place aux apports de chacun et de les combiner.

4. *Accrochage professionnel dans la durée*

Les deux instituteurs retraités évoquent le rôle crucial qu'a eu leur participation au GEM pour tenir dans la durée dans le métier. Pour Alain, c'est le *regard sans cesse renouvelé sur sa pratique* (item 1 du tableau 1), via le GEM, qui, le faisant sortir de la routine, lui a permis de tenir, de *trouver un sens nouveau à son identité professionnelle* (item 12 du tableau 1), en faisant évoluer ses pratiques et sa pensée sur ses pratiques.

- Alain – Au niveau professionnel, je crois que j'aurais arrêté d'être instit, si je n'étais pas venu au GEM. [...] Faire faire, chaque année, « fois 9 » ; le mois suivant, « fois 99 » ; « fois 999 »... Et puis quand on demande une fois, [...] « fois 98 », « Monsieur, on ne l'a pas vu, ça ! » [...] Et ça m'a permis, au niveau professionnel, [...] de ne plus avoir cette lassitude. Sinon avant c'était une autoroute quoi... « Brrrrr... » [mime : au volant] Cruise control pendant encore 30 ans de ma carrière ? Non, j'allais mourir, quoi !

Serge évoque quant à lui également le soutien apporté par la *rencontre avec les pairs*, le *partage des préoccupations* de chacun (item 5 du tableau 1).

- Serge – C'est vraiment quelque chose qui fait que moi j'ai pu tenir à long terme dans le boulot, à avoir de l'intérêt et à pas se laisser bouffer et démolir par les tas de contraintes qui arrivent de l'extérieur [...]. Le fait de pouvoir échanger là dessus, c'est vraiment important, tout à fait, d'avoir ces groupes de soutien.

5. *Des freins organisationnels et institutionnels*

Quand on leur demande s'ils voient des freins à leur participation au groupe collaboratif, les participants évoquent surtout le manque de temps, accentué pour certains par la distance de 60, 100, voire près de 200 km aller-retour pour participer aux réunions. Malgré ce frein, Noémie et Claire insistent sur l'importance fondamentale du travail au GEM à leurs yeux.

- Noémie – Le manque de temps est un frein [...] Pourtant, je trouve le travail qu'on y fait fondamental.
- Claire – Après, cette longueur, c'est ce nombre de réunions qui fait qu'on peut aller en profondeur dans les choses, et on apprécie ça. [...] Voilà, c'est une force et un inconvénient parce que le temps, on ne sait pas le multiplier, [le] dilater.

Carole et Sylvie y voient en outre un aspect plus institutionnel. En effet, sans valorisation institutionnelle à la participation à un groupe collaboratif, ses participants doivent y consacrer leur temps libre, en conciliant parfois difficilement cela avec leur vie privée.

- Carole – C'est évident. [...] Des freins, mais des freins institutionnels, en fait, c'est qu'on est tellement chargé à la haute école qu'on n'a pas le moyen de s'investir correctement. [...] [E]n tant qu'enseignante de haute école, ça devrait faire partie de mon job, clairement [...].
- Sylvie – C'est quand même souvent des femmes qui ont des enfants à gérer. [...] Et clairement, c'est un frein pour elles de pouvoir se libérer pour venir ici [le mercredi après-midi] [...].
- Carole – [...] On demande beaucoup plus aux enseignants de l'école primaire actuellement [qu'il] y a 30 ou 40 ans. [...] Avant, c'était possible de venir serein à une réunion, parce qu'il n'y avait pas toutes les concertations, [...] tous les dossiers [...], tout ce qui est à faire en dehors du travail de classe.

VI. DISCUSSION : PRENDRE LE TEMPS DANS UN MONDE EN ACCÉLÉRATION

La question du temps est revenue en filigrane tout au long des échanges. Malgré les contraintes temporelles (« le temps, on ne sait pas le multiplier, [le] dilater »), le temps, donné généreusement, est vu comme une force du groupe, et ce sous plusieurs aspects. (1) Au niveau de la *dynamique du travail collaboratif*, les participants apprécient « prendre le temps de réfléchir », de « creuser », de travailler ensemble un thème « en continu [...], qu'on nourrit progressivement [...] sur plusieurs séances », jusqu'à « sent[ir] que tout est déplié, qu'on maîtrise complètement le sujet ». (2) Pour leurs élèves, ils conçoivent également les *apprentissages dans la durée*, en prenant le temps de « creuser plusieurs jours d'affilée » pour les amener à « aller jusqu'au sens profond », à « manipuler » et « verbaliser », à « réfléchir » et « chercher ». (3) Au delà du travail en profondeur sur une thématique avec les enfants, ils tiennent à envisager les apprentissages mathématiques de manière verticale, *se construisant tout au long de la scolarité*. (4) La *persévérance* des participants au long des années reflète aussi les bénéfices qu'ils tirent de leur participation au groupe. Plusieurs participants évoquent qu'ils se sont *construits au GEM*, l'une exprimant qu'elle n'est « pas la même qu'il y a 20 ans ». (5) Enfin, plusieurs d'entre eux identifient leur participation au groupe comme un élément clé qui leur a permis de *tenir dans la durée* dans leur profession, qu'ils auraient « arrêté d'être instit[us], s'ils n'étaie[n]t pas venu au GEM », que cela leur a permis de ne pas « se laisser bouffer et démolir par les tas de contraintes [...] extérieures ».

Prendre le temps dans un monde en accélération ? C'est un des éléments que les participants cherchent en venant au GEM.

- Pauline – Je viens chercher aussi quelque chose dans la durée...
- Alain – [Au GEM, o]n est une coopérative d'artisans. [...]
- [Le GEM, c'est...] de la conception à la production, mais il ne faut pas être pressé...

VII. CONCLUSION

Par cette étude, nous souhaitons évaluer l'impact, perçu par ses acteurs, de leur participation aux travaux du GEM sur leur développement professionnel et leur épistémologie pratique d'enseignant.

Concernant l'impact du travail collaboratif au GEM sur l'épistémologie pratique des participants, on constate une évolution plus claire pour les instituteurs, qui y ont découvert une autre approche des mathématiques, ce qui a transformé profondément leurs pratiques et le regard qu'ils portent sur celles-ci et sur les apprentissages. Pour les didacticiens formateurs d'enseignants, l'évolution est moins radicale : leur épistémologie s'est plutôt vue confirmée et approfondie par la réflexion commune, les échanges, les expérimentations dans les classes.

Au niveau du développement professionnel, tant les instituteurs que les didacticiens soulignent l'impact significatif de leur participation au GEM, en particulier au niveau de leur confiance en eux et du développement de nouvelles perspectives professionnelles, notamment de nouveaux rôles assumés de formateur, de référent au sein d'une équipe, ou de pilotage.

La question de la diversité des profils au sein du groupe ne constituait pas une focale *a priori* pour cette étude. Mais elle s'est révélée centrale dans les propos des acteurs, qui la perçoivent comme une vraie richesse, tant pour le travail de réflexion et de production du groupe collaboratif, que pour le développement de chacun de ses acteurs, qui peut mettre à profit, dans son terrain professionnel propre, ce qu'il a appris dans le groupe.

RÉFÉRENCES

- Artigue, M. (2020). Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques : Où en sommes-nous ? *Educação Matemática Pesquisa*, 22(3), 25-64. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i3p025-064>
- Borko, H. et Potari, D. (dir.). (2024). *Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups. The 25th ICMI Study*. Springer.
- Cohen, L., Manion, L. et Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6^e éd.). Routledge.
- Docq, C. et Hauchart, C. (2009). Les idées principales de Nicolas Rouché à propos de l'enseignement des mathématiques. *Losanges*, (5), 4-10. https://wp.gem-math.be/wp-content/uploads/2010/02/pdf_article_du_11_nov._en_hommage_a_Nicolas_.pdf
- Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM). (1985). Lettre du GEM au GFEN. *Revue Dialogue*, (54 bis), 10-27. <https://wp.gem-math.be/1996/01/01/lettre-du-gem-au-gfen/>
- Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. Dans B. Jaworski et T. Wood (dir.), *The international handbook of mathematics teacher education: The mathematics teacher educator as a developing professional* (Vol. 4, p. 335–361). Sense Publishers.
- Jaworski, B. et Huang, R. (2014). Teachers and didacticians: Key stakeholders in the processes of developing mathematics teaching. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 46(2), 173-188.
- Jaworski, B., Chapman, O., Clark-Wilson, A., Cusi, A., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M., Joubert, M. et Robutti, O. (2017). Mathematics teachers working and learning through collaboration. Dans *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education: ICME-13* (p. 261-276). Springer International Publishing.
- Lebel, C. et Belair, L. M. (2018). La recherche collaborative et son apport au développement de l'agir professionnel d'enseignants associés. *Phronesis*, 7(4), 49-64. <https://doi.org/10.7202/1056319ar>
- Lieberman, A. (1986). Collaborative research: Working with, not working on... *Educational Leadership*, 43(5), 29-32.
- Ligozat, F. et Marlot, C. (2016). Un « espace interprétatif partagé » entre l'enseignant et le didacticien est-il possible ? Étude de cas à propos du développement de séquences d'enseignement scientifique en France et à Genève. Dans F. Ligozat, M. Charmillot et A. Muller (dir.), *Le partage des savoirs dans les processus de recherche en éducation* (p. 143-164). De Boeck supérieur.
- Marlot, C., Toullec-Théry, M. et Daguzon, M. (2017). Processus de co-construction et rôle de l'objet biface en recherche collaborative. *Phronesis*, 6(1-2), 21-34. <https://doi.org/10.7202/1040215ar>
- Mukamurera, J. (2014). Le développement professionnel et la persévérance en enseignement. Éclairage théorique et état des lieux. Dans L. Portelance, S. Martineau et J. Mukamurera (dir.), *Développement et persévérance professionnels en enseignement. Oui mais comment ?* (p. 9-34) Presses de l'Université du Québec.
- Paquay, L. (2000). Donner du sens à la formation continue. Dans G. Carlier, J.-P. Renard et L. Paquay (dir.), *La formation continue des enseignants. Enjeux, innovation et réflexivité* (p. 263-278). De Boeck.

- Rouche, N. (1981). *Le Groupe d'Enseignement Mathématique ou un essai de coopération pour enseigner les mathématiques. Propositions*. Groupe d'Enseignement Mathématique.
- Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S. et Morales, G. (2013). Cooperative engineering as a specific design-based research. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 45(7), 1031-1043. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0532-4>
- Sensevy, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. Dans G. Sensevy et A. Mercier (dir.), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (p. 13-49). Presses universitaires de Rennes.
- Van Nieuwenhoven, C. et Colognesi, S. (2015). Une recherche collaborative sur l'accompagnement des futurs instituteurs : un levier de développement professionnel pour les maitres de stage. *Evaluer. Journal international de Recherche en Education et Formation*, 1(2), 103-121. <https://journal.admee.org/index.php/ejiref/article/view/51/37>
- Wanlin, P. (2007). L'analyse de contenu comme méthode d'analyse qualitative d'entretiens : une comparaison entre les traitements manuels et l'utilisation de logiciels. *Recherches Qualitatives, hors série*(3), 243-272. https://www.recherche-qualitative.qc.ca/documents/files/revue/hors_serie/hors_serie_v3/Wanlin2.pdf

TYPES DE DIALOGUE ET CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES : ANALYSE DIALOGIQUE D'UNE LESSON STUDY

| CLIVAZ* STÉPHANE, BATTEAU** VALÉRIE, DAINA*** AUDREY, PRESUTTI**** SARA,
BUNZLI***** LUC-OLIVIER ET PELLET***** JEAN-PHILIPPE

Résumé | Cette recherche vise à analyser le type de connaissances sur l'enseignement de la résolution de problèmes mathématiques utilisées lors d'un travail collaboratif dans le cadre d'un processus de Lesson Study (LS) à l'école primaire et à examiner comment les interactions dialogiques contribuent à la construction de ces connaissances. Huit séances ont été analysées, révélant principalement trois types de dialogues évoluant tout au long du cycle LS. Les niveaux de connaissances diffèrent selon les types de dialogues, ce qui permet de mieux comprendre le développement des connaissances des enseignant·es.

Mots-clés : type de dialogue, lesson study, connaissances sur l'enseignement de la résolution de problèmes

Abstract | This study investigates mathematical knowledge for teaching problem-solving used during collaborative work as part of a Lesson Study (LS) process in primary school and to examine how dialogic interactions contribute to the construction of this knowledge. Eight sessions were analysed, revealing mainly three types of talk evolving throughout the LS cycle. The levels of knowledge differed according to the types of talk, providing a better understanding of the development of teachers' knowledge.

Keywords: Type of talk, Lesson Study, mathematical knowledge for teaching problem-solving

I. INTRODUCTION

Cette recherche vise à analyser le type de connaissances en matière de résolution de problèmes mathématiques pour l'enseignement utilisé par les enseignant·es du primaire qui travaillent en collaboration dans le cadre d'un processus d'étude de leçons et à examiner comment les interactions dialogiques contribuent à la construction des connaissances.

Huit séances au cours d'un cycle de Lesson Study (LS) d'un groupe de huit enseignant·es primaires suisses ont été enregistrées sur vidéo, transcrites et codées à l'aide d'un logiciel d'analyse qualitatif de données. Deux articles et un acte de colloque ont déjà été publiés sur la première partie de l'étude. Le premier article présente les aspects théoriques et méthodologiques (Clivaz, Daina, et al., 2023) tandis que le second présente les résultats de l'analyse de la première partie du cycle LS (covering five out of eight meetings, Clivaz, Batteau, et al., 2023). A la suite des actes de CERME13 (Clivaz, Presutti, et al., 2023), cette contribution établit un lien entre les caractéristiques dialogiques des énoncés au niveau micro et les types de dialogue au niveau méso pendant les séances de la LS. Une version anglaise de cette contribution a également été présentée à ICME13 et à CERME14.

* HEP Vaud – Suisse – stephane.clivaz@hepl.ch

** HEP Vaud – Suisse – valerie.batteau@hepl.ch

*** HEP Vaud – Suisse – audrey.daina@hepl.ch

**** HEP Valais – Suisse – sara.presutti@hepvs.ch

***** HEP Vaud – Suisse – luc-olivier.bunzli@hepl.ch

***** HEP Vaud – Suisse – jeans-philippe.pelle@hepl.ch

II. CADRE THÉORIQUE

Cet article n'a pas la longueur nécessaire pour exposer de manière exhaustive le cadre théorique de la recherche associée. Par conséquent, nous renvoyons le lecteur à nos travaux précédemment publiés qui décrivent le processus LS (Clivaz, 2019, p. 133-134) ; les niveaux de connaissance (Clivaz, Batteau, et al., 2023, p. 2–4) ; ainsi que la grille d'analyse dialogique que nous avons développée (Lesson Study Dialogic Analysis, LSDA, Clivaz, Daina, et al., 2023, p. 24–28; 37). Nous présentons ici brièvement les connaissances mathématiques pour l'enseignement de la résolution de problèmes (CERPEM) et les niveaux de connaissance, ainsi que les types de dialogue et les liens avec l'analyse dialogique.

1. Connaissances pour Enseigner la Résolution de Problèmes en Mathématiques (CERPEM)

La recherche sur la résolution de problèmes (RP) s'est principalement concentrée sur le point de vue des élèves. Cependant, certaines études ont exploré la compréhension qu'ont les enseignant·es de la résolution de problèmes et leurs connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball et al., 2008). Sur la base d'une analyse documentaire d'études réalisées entre 1922 et 2013, Chapman (2015) a identifié six catégories de connaissances en matière de résolution de problèmes pour l'enseignement, y compris la connaissance du contenu de la résolution de problèmes et la connaissance pédagogique de la résolution de problèmes. Ces catégories sont influencées par les compétences des enseignant·es en matière de résolution de problèmes, les facteurs affectifs et les croyances. Reprenant les conclusions de Chapman, nous proposons une représentation graphique de cette catégorisation (Figure 1) pour faire le lien entre les catégories de connaissances en résolution de problèmes mathématiques pour l'enseignement et de connaissances mathématiques pour l'enseignement.

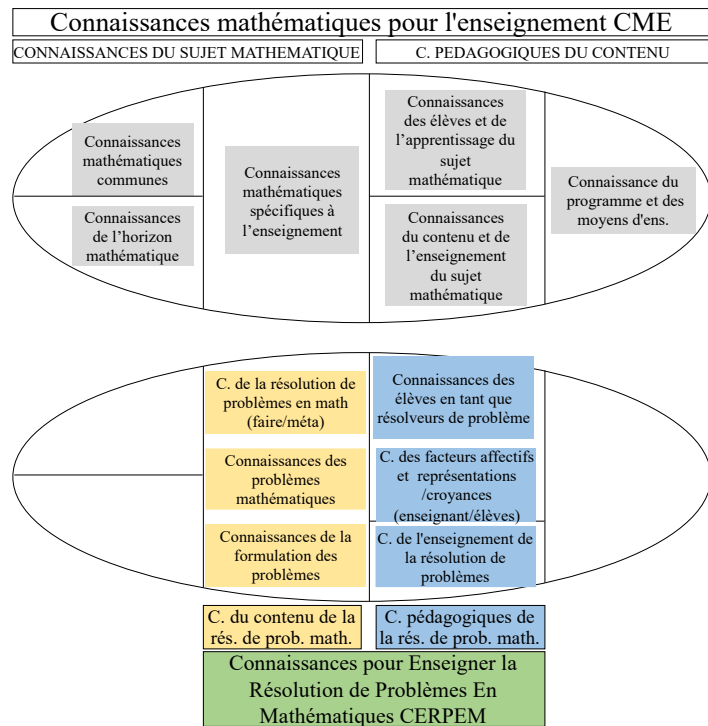


Figure 1 – Connaissances pour Enseigner la Résolution de Problèmes en Mathématiques (CERPEM).

Les connaissances mathématiques pour l'enseignement (partie supérieure grise de la figure) sont tirées de Ball et al. (2008) les CERPEM (catégories colorées) sont tirées de Chapman (2015). Pour la description des catégories, voir (Clivaz, Daina et al., 2023).

Nous devons ensuite déterminer les niveaux de connaissance (Tableau 1) pour identifier l'évolution des connaissances des participants tout au long des séances ou les différences liées aux rôles (enseignant·e, facilitateur·ice). Ces niveaux ne constituent pas une hiérarchie : les connaissances contextuelles ou les questions ont autant de valeur que les connaissances générales. Les niveaux de connaissance sont numérotés de 1 à 5.

Tableau 1 – Niveaux de connaissance (Clivaz, Daina et al., 2023)

Niveaux de connaissance	
1	Connaissance erronée, absence de connaissance, ignorance assumée et/ou représentation personnelle discutable
2	Connaissance non expliquée, de l'ordre de l'observation, du témoignage
3	Connaissance incomplète, connaissance avec un faible degré de certitude. Questionnement explicite
4	Connaissance explicite contextualisée. Le locuteur connaît ou semble connaître la justification
5	Connaissance généralisée, décontextualisée (processus de décontextualisation, éventuellement pas complètement abouti). Exemple générique

2. Types de dialogues

Notre analyse dialogique des tours de parole et des types de dialogues¹ est basée sur le travail de l'équipe Cambridge Educational Dialogue Research (CEDiR) qui a développé un schéma pour l'analyse du dialogique de leçons, le Scheme for Educational Dialogue Analysis (SEDA, Hennessy et al., 2016). Nous avons adapté leur analyse des énoncés au niveau micro à notre contexte (Clivaz, Daina, et al., 2023). En suivant la méthode SEDA, nous avons relié cette analyse au micro (tours de parole) à l'analyse au niveau meso (série de tours de parole dans lesquels le sujet reste constant). À ce niveau, nous avons adopté les trois types de dialogues caractérisés par Mercer et ses collègues (Littleton et Mercer, 2013, p. 15-16 ; Wegerif, 2020, p. 28–29) :

dialogue cumulatif (Cumulative talk) : Se caractérise par le fait que chacun accepte et est d'accord avec ce que les autres disent. Chacun exprime ses connaissances dans la conversation, mais il n'y a pas de position critique ou d'évaluation.

dialogue disputationnel (Disputational talk) : Se caractérise par des désaccords entre les personnes qui discutent et une atmosphère compétitive dans laquelle chacun prend ses propres décisions. Il y a peu de partage de ressources ou de critiques constructives, les interactions sont souvent des prises de position courtes sans justification.

dialogue exploratoire (Exploratory talk) : Se caractérise par le fait que chacun s'engage de manière critique, mais constructive dans la conversation. Chacun apporte des informations qu'il considère comme pertinentes ; celles-ci sont questionnées et argumentées, et les membres du groupe cherchent à rejoindre un accord avant de passer à une autre étape. Il est ainsi possible pour un observateur extérieur de suivre le fil du raisonnement.

Ces types de dialogue ont été déterminés par nos indicateurs LSDA (Clivaz, Daina, et al., 2023, p. 37). Afin de passer du contexte de la classe à celui d'une LS, les membres du groupe CEDiR ont apporté quelques ajustements à ces types de dialogue (Dudley, 2013). Comme eux nous avons donc pris en compte deux autres types de dialogues : **Structurer la conversation** et **gérer la compréhension**. Ces deux types étant moins fréquents dans nos résultats, nous les omettons dans le présent document.

Ces types de dialogues peuvent être considérés comme des façons différentes de réfléchir ensemble. Le dialogue exploratoire est considéré comme le plus "efficace sur le plan éducatif (Littleton et Mercer, 2013, p. 16).

III. DONNÉES, MÉTHODE ET QUESTION DE RECHERCHE

1. Contexte, collecte de données et méthode

Un groupe LS composé de dix enseignant·es et facilitateur·ice de la région lausannoise a été formé en lien avec cette recherche. Le groupe a suivi un processus LS tel que décrit notamment à EMF 2018 (Clivaz, 2019, p. 134-135) et comportant le choix d'une thématique de recherche, une étude du

¹ Nous traduisons « type of talk » par type de dialogue. Cette traduction, comme celle des types de dialogues est celle des auteurs.

curriculum liée à cette thématique, la planification, la réalisation, l'observation et l'analyse d'une leçon de recherche (Figure 2).

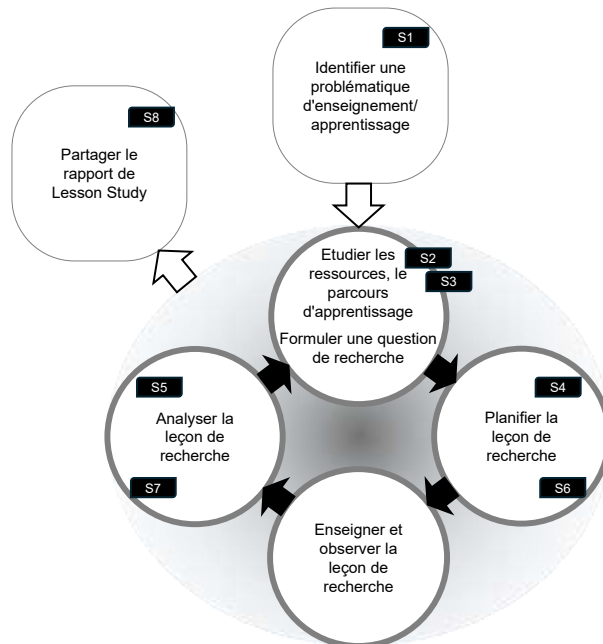


Figure 2 – Le cycle LS réalisé

Plus précisément, les facilitateur·ices, un formateur en didactique des mathématiques (le premier auteur de cet article) et une enseignante, avaient pour objectif de se concentrer sur la résolution de problèmes, sans nécessairement se focaliser sur un sujet mathématique particulier. Après avoir discuté des difficultés liées à l'enseignement de la résolution de problèmes (S1), le groupe s'est attaché aux aides à apporter aux élèves pour favoriser leur apprentissage de la représentation du problème (S2). Lors de la séance suivante (S3), ils ont sélectionné un problème tiré d'une évaluation cantonale externe d'une année précédente avec lequel les élèves avaient eu des difficultés. Le groupe a ensuite discuté de la représentation, des approches des élèves et des mathématiques impliquées avant de planifier une leçon de recherche (S4). Après avoir enseigné et observé la leçon, le groupe a discuté de ses observations du travail des élèves et de l'importance du matériel de manipulation, des mises en commun, des aspects mathématiques et de l'aide à apporter aux élèves en difficulté (S5). Sur la base de cette discussion, il a planifié une deuxième leçon dans une deuxième classe (S6), l'a observée et discutée (S7). La dernière séance a permis de discuter des deux leçons, de la finalisation du plan de leçon, du bilan du cycle LS et de la décision d'organiser le cycle LS suivant (S8).

Les huit séances LS ont été filmées, transcrites et codées à l'aide d'un logiciel d'analyse de données qualitatives, Transana (transana.com), par les auteurs de cet article. Ce logiciel nous permet de transcrire les dialogues (3517 tours de parole transcrits, soit 567 minutes) et de coder les interactions selon les CERPEM (Figure 1), les niveaux de connaissance (Tableau 1), et les types de dialogues. Le codage des données, les indicateurs et la méthodologie sont décrits en détail dans Clivaz, Daina, et al. (2023). Les trois niveaux d'analyse sont imbriqués et fournissent une structure systématique pour l'analyse des données. Le codage systématique est effectué au niveau micro. Ensuite, l'objectif est de caractériser les types de dialogues de manière à mettre en évidence la "fonction d'interaction" au sens de Dudley (2013). Ce type de dialogue permet d'analyser les phases de la LS.

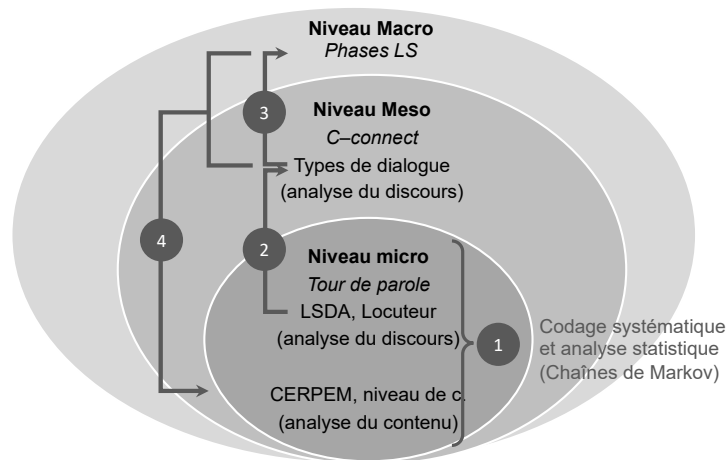


Figure 3 – Emboîtement des niveaux d'analyse

2. Question de recherche

Notre principale question de recherche est la suivante : de quelle manière les CERPEM sont-elles construits collectivement au cours du processus de LS ? Dans cet article, nous nous concentrerons sur la sous-question suivante : "Quels sont les types de dialogue ? Évoluent-ils ? La construction des CERPEM est-elle liée au type de dialogue ?"

IV. RÉSULTATS

1. Types de dialogue lors des séances du LS

Les différents types de dialogue peuvent être associés à des phases du cycle LS, aux catégories de CERPEM et aux niveaux de connaissance. Notre hypothèse initiale postulait que la catégorie spécifique de MKPTS n'aurait pas de corrélation significative par rapport aux types de dialogue, et notre analyse a validé cette affirmation. Nous nous attendions également à ce que les types de dialogue évoluent au fil des séances, en fonction de la nature et de l'objectif spécifiques de chaque séance. En outre, nous nous attendions à ce que certains niveaux de connaissances se manifestent davantage dans des types de discours spécifiques. Les sections suivantes présentent les résultats concernant ces deux aspects.

La Figure 4 illustre les types de dialogue principalement observés au cours des séances : dialogue exploratoire (53 %), dialogue cumulatif (23 %) et dialogue disputationnel (10 %). Un examen plus approfondi de chaque séance révèle des caractéristiques distinctes. Par exemple la séance 1 (S1), une discussion générale sur l'enseignement de la résolution de problèmes, se distingue par la prévalence d'un dialogue cumulatif (58 %). Lors de cette séance, les participant·es ont exprimé leurs idées et leurs questions de manière indépendante, avec peu de références croisées ou d'interdépendance dans leurs échanges. Cette situation contraste fortement avec celle de la séance S8, au cours de laquelle les participant·es ont discuté des deux leçons, du plan de leçon, de l'évaluation du cycle et des questions pour le cycle suivant. Au cours de la séance S8, l'analyse montre une réduction marquée du dialogue cumulatif et une augmentation notable du dialogue exploratoire (70%) et du dialogue disputationnel (24%). Au cours de cette séance, les participant·es se sont activement engagés à développer les idées des autres et ont parfois exprimé des désaccords avec d'autres participant·es. Cette augmentation du dialogue exploratoire est également visible si on compare des séances portant sur des thèmes similaires. Les séances S2 et S3 (étude du matériel pédagogique) ont connu une augmentation du dialogue exploratoire au cours de la dernière séance, passant de 37 % à 62 %. De même, la planification de la

deuxième leçon de recherche (S6) s'est caractérisée par une présence prédominante du dialogue exploratoire (76%) par rapport à la planification de la première leçon de recherche (S4), dont l'incidence est plus faible (50%). Le contraste est encore plus marqué si l'on compare la discussion qui suit la première leçon de recherche à celle qui suit la deuxième leçon de recherche. Lors de la première discussion, chaque enseignant·e a successivement fait part de ses observations, qui étaient majoritairement cumulatives (48%). En revanche, lors de la deuxième discussion, presque toutes les observations ont été mises en relation avec celles des collègues, comparant ou contrastant les observations de manière exploratoire (65%), ou parfois en désaccord de manière disputationnelle (14%).

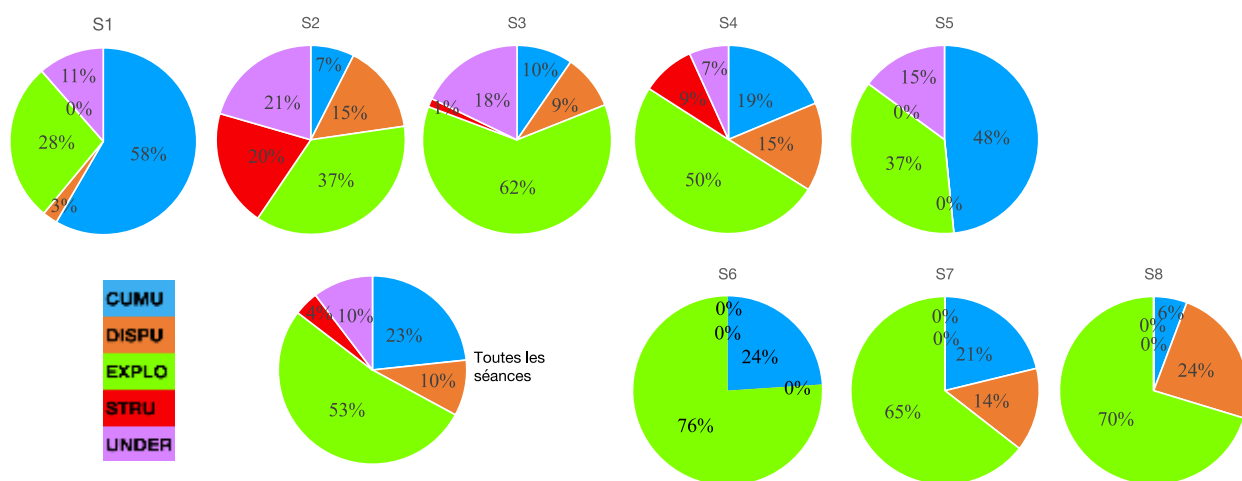


Figure 4 – Type de dialogue pour chaque séance et pour l'ensemble des séances

2. Niveaux de connaissance présents selon les types de dialogue

L'examen du niveau de connaissance dans les trois principaux types de dialogue fait apparaître une distinction entre les dialogues cumulatif et exploratoire (cf. Figure 5). Plus précisément, la prévalence du niveau 4 (connaissances explicites contextualisées. Le locuteur connaît ou semble connaître le raisonnement) dans les discussions exploratoires (29 % contre 19 %). En revanche, le niveau 2 (connaissances inexplicées. Observation, témoignage) est relativement moins important. Cette différence peut être attribuée aux définitions du type d'entretien et des niveaux de connaissance. Mais elle peut également être rationalisée par l'observation que pendant les phases d'une séance caractérisées par un dialogue exploratoire (au niveau méso), les connaissances ont tendance à être justifiées de manière plus complète (au niveau micro). L'observation selon laquelle le dialogue de dispute est proche du dialogue exploratoire en termes de niveaux de connaissance est plus inattendue. Toutefois, un examen plus approfondi des transcriptions révèle que, même s'ils adoptent de "courtes positions sans justification" en réponse à des énoncés antérieurs, les participants à l'entretien de dispute démontrent souvent qu'ils connaissent la raison d'être de ces connaissances, avec une occurrence réduite de connaissances inexplicées par rapport à l'entretien cumulatif.

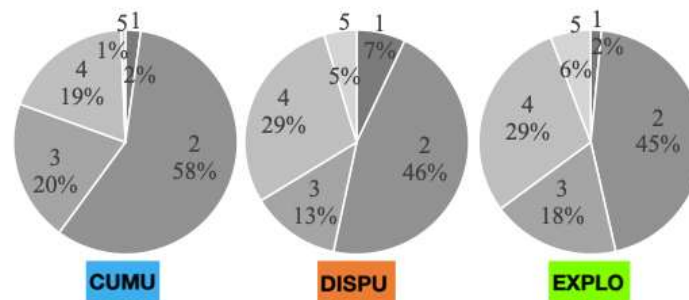


Figure 5 – Niveaux de connaissance pour les trois principaux types de dialogue

Nous avons ensuite affiné nos analyses par l'étude des transitions entre niveaux de connaissances et ceci par type de dialogue (Figure 6).

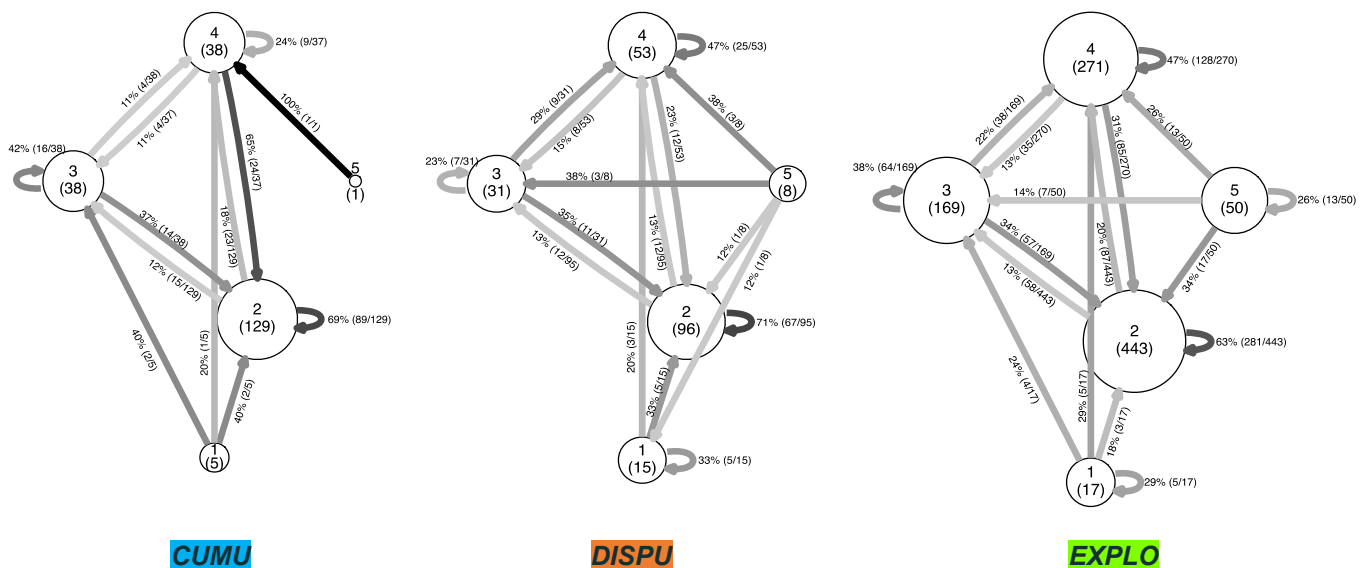


Figure 6 – Chaînes de Markov pour les niveaux de connaissance par type d'entretien

Ces chaînes de Markov nous permettent de faire ressortir que les types de dialogues exploratoire et cumulatif se différencient sur les transitions du niveau 3 vers le niveau 4 passant de 22% pour le type de dialogue exploratoire à 11% pour celui cumulatif. Ce résultat peut s'interpréter comme suit, lorsqu'un locuteur manifeste une connaissance incomplète ou un questionnement, le locuteur suivant témoignera d'une connaissance explicite contextualisé. De même la transition du niveau 4 au niveau 2 (connaissance non expliquée, de l'ordre de l'observation, du témoignage) est beaucoup plus importante dans le type de dialogue cumulatif (65%) qu'exploratoire (31%).

Ces résultats issus des analyses des transitions entre les niveaux de connaissances illustrent comment se construisent les connaissances dans les dialogues exploratoires en contraste avec les dialogues cumulatifs. Ces résultats confirment notre hypothèse de recherche appuyée sur les travaux de (Littleton et Mercer, 2013, p. 16) selon laquelle le type de dialogue exploratoire a été jugé comme étant le plus « efficace sur le plan éducatif ». Ces résultats permettent également d'analyser les dynamiques dans la construction des connaissances, par les transitions entre niveaux de connaissance.

De plus, il n'y a pas de niveau 5 de connaissance généralisée, décontextualisée dans le type de dialogue cumulatif, contrairement au type de dialogue exploratoire et disputationnel. Les transitions des niveaux 2, 3 et 4 vers le niveau 5 de connaissance sont toutes inférieures à 10% pour les trois types

de dialogues. Il n'y a donc pas de transition significative vers le niveau 5 de connaissance décontextualisée, ce que nous aurions pu attendre dans le type de dialogue exploratoire. En revanche, il y a des transitions entre le niveau 5 vers le niveau 2 pour le type de dialogue exploratoire (34%) et disputationnel (12%). De même, des transitions entre le niveau 5 vers le niveau 3 pour le type de dialogue exploratoire (14%) et disputationnel (38%), et vers le niveau 4 pour le type de dialogue exploratoire (26%) et disputationnel (38%). Le nombre d'occurrences étant faible nous pouvons souligner que dans les types de dialogue exploratoire et disputationnel, les connaissances décontextualisées mobilisées à un tour de parole sont requestionnées ou alors sont recontextualisées à des situations de classe au tour de parole suivant. Ces résultats illustrent les dynamiques entre les connaissances décontextualisées et les connaissances de l'ordre du questionnement ou de l'observation de classe.

Le niveau 2 de connaissance est le plus présent pour le type de dialogue cumulatif, en contraste avec les deux autres types de dialogue. Ainsi dans un dialogue cumulatif, les participants expriment leurs connaissances dans la conversation sans prise de position critique ou d'évaluation, et ces connaissances sont principalement de niveau 2. Ainsi dans ce type de dialogue, les participants témoignent de ce qu'ils ont pu observer lors des leçons de recherche ou alors se réfèrent à leurs pratiques en classe, sans se positionner par rapport à l'interaction précédente.

Concernant les transitions du niveau 2 au niveau 4, les types de dialogue cumulatif et exploratoire sont similaires avec 18% et 20%. À la suite d'une observation de classe, le tour de parole porte une connaissance contextualisée. Ce qui peut s'expliquer par la recherche de consensus dans ces deux types de dialogue (Littleton et Mercer, 2013).

3. Dynamiques dans les transitions entre niveau de connaissances, communes aux trois types de dialogue

Pour les trois types de dialogue, les transitions des niveaux 2 vers 3 (12 à 13%) et 3 vers 2 (34 à 37%) sont similaires. Cela signifie que les types de dialogue ne se différencient pas concernant la transition d'une connaissance en lien avec une observation de classe qui est suivie ou précédée d'un questionnement ou d'une connaissance incomplète. De même, pour les trois types de dialogues, les transitions des niveaux 4 vers 3 (entre 11 % et 15%) sont proches. Ces résultats peuvent s'expliquer par la nature même du code de niveau 3 de connaissance qui relève soit d'un questionnement, ce qui peut être favorable à la construction de connaissance, soit de connaissance incomplète, ce qui peut être moins favorable à la construction de connaissance dans le cas où elle n'est pas suivie d'une connaissance de niveau 4 ou 5.

V. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Le développement des connaissances mathématiques des enseignant·es sur l'enseignement de la résolution de problèmes dans un cadre collaboratif est un processus complexe. Les conclusions de cette étude de cas sont spécifiques au groupe examiné, et des facteurs individuels ont eu un impact sur les résultats. Néanmoins, l'approche de cette méthode mixte offre une perspective complète et interactive sur la construction collective de la CERPEM. Les caractéristiques uniques des LS et des CERPEM soulignées dans nos résultats renforcent l'idée que les LS et l'enseignement de la RP sont interdépendants et démontrent comment les connaissances professionnelles des enseignant·es sont façonnées par le dialogue au cours des LS. Ceci illustre la manière dont les LS et la RP sont imbriquées et représentent « the two wheels of a cart » pour reprendre l'expression de Fujii (2018, p. 2).

RÉFÉRENCES

- Ball, D. L., Thames, M. H. et Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT*, 3(1), 19–36. <https://pdfs.semanticscholar.org/327b/973f1bccfc73f888aad4532f4c3b98f16a24.pdf>
- Clivaz, S. (2018, 22-26 octobre). *Comment un processus de lesson study conduit-il les enseignants à utiliser et à développer leurs connaissances mathématiques ?* [Communication]. Colloque l'espace Mathématique Francophone (EMF), Gennevilliers, Paris.
- Clivaz, S. (2019). Comment un processus de lesson study conduit-il les enseignants à utiliser et à développer leurs connaissances mathématiques ? Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMF2018 « Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines », 22-26 octobre 2018, Gennevilliers, Paris* (p. 132–141). IREM de Paris. https://emf2018.sciencesconf.org/data/actes_EMF2018.pdf
- Clivaz, S., Batteau, V., Pellet, J.-P., Bünzli, L.-O., Daina, A. et Presutti, S. (2023). Teachers' mathematical problem-solving knowledge: in what way is it constructed during teachers' collaborative work? *Journal of Mathematical Behavior*, 69, article 101051. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101051>
- Clivaz, S., Daina, A., Batteau, V., Presutti, S. et Bünzli, L.-O. (2023). How do dialogic interactions contribute to the construction of teachers' mathematical problem-solving knowledge? Construction of a conceptual framework. *International Journal for Lesson & Learning Studies*, 12(1), 21–37. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-03-2022-0031>
- Clivaz, S., Presutti, S., Batteau, V., Bünzli, L.-O., Daina, A. et Pellet, J.-P. (2023). Mathematical knowledge for teaching problem-solving: Dialogic construction during a lesson study. Dans P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi et E. Kónya (dir.), *Thirteenth congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (p. 4898-4905). Alfréd Rényi Institute of Mathematics & ERME. <https://hal.science/hal-04411092>
- Dudley, P. (2013). Teacher learning in Lesson Study: What interaction-level discourse analysis revealed about how teachers utilised imagination, tacit knowledge of teaching and fresh evidence of pupils learning, to develop practice knowledge and so enhance their pupils' learning. *Teaching and Teacher Education*, 34, 107-121. <http://dx.doi.org/10.1016/j.tate.2013.04.006>
- Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. Dans M. Quaresma, C. Winslow, S. Clivaz, J. P. da Ponte, A. Ni Shuilleabhain, A. Takahashi et T. Fujii (dir.), *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (p. 1-22). Springer.
- Hennessy, S., Rojas-Drummond, S., Higham, R., Márquez, A. M., Maine, F., Ríos, R. M., García-Carrión, R., Torreblanca, O. et Barrera, M. J. (2016). Developing a coding scheme for analysing classroom dialogue across educational contexts. *Learning, Culture and Social Interaction*, 9, 16-44. <https://doi.org/10.1016/j.lcsi.2015.12.001>
- Littleton, K. et Mercer, N. (2013). *Interthinking: Putting talk to work*. Taylor & Francis. <https://books.google.com.my/books?id=C26pAgAAQBAJ>
- Wegerif, R. (2020). Orientations and ground rules: A framework for researching educational dialogue. Dans R. Kershner, S. Hennessy, R. Wegerif et A. Ahmed (dir.), *Research methods for educational dialogue* (p. 27–46). Bloomsbury Academic.

DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL ET TRAVAIL COLLABORATIF AU NIGER : ANALYSE DE LA CARTOGRAPHIE DES PROGRAMMES DE MATHÉMATIQUES SUR LES APPRENTISSAGES FONDAMENTAUX

| SAGAYAR* MOHAMED MOUSSA

Résumé | Notre article explore un travail collaboratif d'enseignants et de chercheurs sur l'alignement des contenus, les savoirs mathématiques et les possibilités de développer des compétences fondamentales en mathématiques des élèves. L'article analyse la façon dont les enseignants interagissent entre eux, pour interroger ensuite la pertinence du travail de conception collective de leçons.

Mots-clés : travail collaboratif, pratiques enseignantes, pratiques didactiques, conception collective de leçons

Abstract | Our paper explores collaborative work by teachers and researchers on the alignment of content, mathematical knowledge and opportunities to develop students fundamental mathematical skills. The paper analyzes how teachers interact with each other, and then questions the relevance of collective lesson design work.

Keywords: Collaborative work, teaching practices, didactic practices, collective lesson design

I. INTRODUCTION

Au Niger, les pratiques d'enseignement – apprentissage de mathématiques sont observées et analysées dans le cadre dans les cellules d'animation pédagogique (CAPED). Elles fonctionnent sur des principes de discussions et d'échanges, qui aboutissent à des propositions de mise en œuvre pour lesquelles, les enseignants sollicitent souvent l'avis des conseillers pédagogiques en charge de l'encadrement. C'est donc sur la base d'un travail collaboratif que les enseignants, interagissent autour de difficultés didactiques, pour trouver des solutions consensuelles.

Ce type de fonctionnement apparaît comme « un levier de développement professionnel » (Bednarz et al., 2012). Les enseignants travaillent avec des modalités qu'il convient d'interroger sous différents angles pour analyser les modalités du travail collaboratif et voir dans quelle mesure elles soutiennent le développement professionnel.

Dans cette perspective, les débats actuels sur le développement professionnel et la professionnalisation des enseignants, portent sur la conception de dispositifs de formation par alternance intégrative. Cette modalité permet d'articuler les apports des recherches en sciences humaines et sociales, des recherches pédagogiques et didactiques, « savoirs pour enseigner », les savoirs des programmes d'enseignement « savoirs à enseigner » à des savoirs issus de la pratique professionnelle. Une forme de collaboration s'installe en faisant travailler des catégories différentes de formateurs, universitaires et professionnels du métier (Altet, 2000). Il s'agit, en effet, de permettre aux enseignants de construire des compétences nécessaires à l'exercice de la profession enseignante et, en même temps, de développer la posture réflexive d'un enseignant professionnel réfléchi à travers le travail collaboratif.

De nombreux travaux de recherche (Altet, 1994, Lenoir, 2014, Vacher, 2015) montrent que le développement professionnel des enseignants dans une logique de travail collaboratif vient soutenir la

* École Normale Supérieure – Université Abdou Moumouni Niamey Niger – mmsagayar@gmail.com

dimension singulière de partage d'expérience au sein de groupes collaboratifs. Ces derniers cherchent à développer la prise de conscience, la compréhension et la réflexivité par et pour eux-mêmes, et cela favorise la construction des compétences professionnelles, des savoirs à mobiliser en situation de travail. Les enseignants par cette voie s'engagent dans un développement professionnel assumé et marqué par le climat favorable qui s'y crée en faveur du développement professionnel dans un monde en constante évolution.

Nous avons choisi de centrer notre analyse sur la cartographie des manuels de mathématique du Cours Élémentaire première année (CE1) relative à l'addition avec retenue, pour ensuite analyser les possibilités pour les élèves de développer des compétences fondamentales en mathématiques.

En partie 1., nous proposons une revue de travaux concernant le travail collaboratif et le développement professionnel. Notre questionnement étant très lié au fonctionnement d'une entité collaborative, la CAPED, et à la manière dont cette entité fonctionne et produit du savoir. Nous avons choisi de nous référer aux travaux :

- pourtant sur la diversité des formes de collaborations qui débouchent sur la production de connaissances pour favoriser l'apprentissage des élèves (DuFour, 2004)
- sur la question de la contribution des dispositifs de collaboration en tant que levier au développement professionnel (Bednarz et al., 2012)
- mettant en relief la question des approches de développement professionnel et leur adaptation au contexte du travail collaboratif (Gersten et al., 2014)
- qui caractérisent les interactions enseignants et chercheurs dans le cadre du travail collaboratif pour créer une synergie et développer des dispositifs centrés sur l'analyse approfondie du savoir mathématique et des contenus (Marlot et al., 2017).¹

Dans la partie II, nous décrivons brièvement le contexte de l'enseignement au premier degré au Niger et présentons notre méthodologie. La partie III est consacrée à l'analyse de la cartographie d'une séance de classe mise en œuvre par un collectif d'enseignant. Nous abordons dans ce qui la revue des travaux.

II. TRAVAIL COLLABORATIF ET DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL : REVUE DES TRAVAUX

Nous nous intéressons ici à des travaux de recherche concernant le travail collaboratif et le développement professionnel, deux conceptions qui fonctionnent comme un binôme dépendant avec une dimension réciproque.

Pour Dufour, 2004, il note que : « *Educators who are building a professional learning community recognize that they must work together to achieve their collective purpose of learning for all. Therefore, they create structures to promote a collaborative culture* »¹.

On note ici un groupe d'individus réunit en communauté de pratique pour travailler ensemble dans une perspective collaborative. L'auteur précise que c'est un puissant moyen qui consiste pour les enseignants à travailler ensemble sur l'analyse de leurs pratiques enseignantes en vue d'améliorer les apprentissages des élèves. En travaillant en équipe les enseignants s'engagent dans un processus complexe pour relever le niveau d'apprentissages des élèves avec professionnalisme. Le travail collaboratif tient

¹ Notre traduction : « Les éducateurs qui bâtissent une communauté d'apprentissage professionnel reconnaissent qu'ils doivent travailler ensemble pour atteindre leur objectif collectif d'apprendre pour tous. Par conséquent, ils créent des structures pour promouvoir une culture collaborative »

lieu de tribune autour de questionnements précis : les élèves apprennent-ils ce qu'ils ont besoin d'apprendre ? Quels sont les élèves qui ont besoin de plus de temps et de soutien pour apprendre ? Quels sont les élèves qui ont appris ce qui était prévu par rapport à ce qui est réalisé ? Et quels sont ceux qui n'ont pas appris ?

Dans une autre perspective le travail collaboratif est considéré comme levier de développement personnel quand les enseignants s'érigent en collectifs de recherche participative, avec comme acteurs principaux des chercheurs et des praticiens. Mais, à la base, ces deux espaces réflexifs ont comme point commun d'être l'espace d'interaction privilégié entre les participants, espace où la réflexion est canalisée autour d'un objet commun qui traverse et justifie la démarche de recherche » (Bednarz et al., 2012). Il s'agit donc de privilégier la pratique réflexive comme un espace d'interactions entre chercheur en éducation et un groupe de praticiens.

Gersten et al., 2014 introduisent l'idée que développement professionnel est une approche qui induit des changements dans les performances des élèves. Il précise que :

This intensive professional development effort resulted in significant improvement in student math achievement as measured by the statewide assessment. The effect was found only for teachers who enrolled in two full math courses during the summer; there was no effect for teachers who enrolled in only one course.²

L'auteur insiste sur le fait que le développement professionnel des enseignants favorise les performances des élèves, tant que leur capacité est renforcée, dans le cas des mathématiques par exemple.

Les réflexions sur le travail collaboratif prennent sens dans les institutions éducatives et Ligozat et Marlot (p. 23, 2016) de préciser : que « L'institution « recherche collaborative » est alors représentée par la communauté d'enseignants et de chercheurs qui vont interagir intellectuellement dans le but de produire une intelligibilité accrue et pour partie partagée, de situations et de phénomènes d'enseignement et d'apprentissage. Les catégories pour penser ces phénomènes ou ces organisations vont alors représenter non pas le préalable, mais le résultat de la coopération, son produit ».

Avec les points de vue des auteurs ci-dessus, on voit la notion de collaboration comme des expériences coopératives pour produire collectivement des résultats. De plus en plus des individus décident de travailler ensemble ou cherchent à mettre en place des modalités d'assemblage de compétences individuelles pour s'organiser et produire collectivement (Feron, 2001). Pour notre part, nous proposons de retenir la définition suivante que nous reprendrons dans la suite du document : un processus qui associe enseignants et chercheurs pour concevoir et mettre en œuvre des actions communes à travers lesquelles, ils interagissent vers des intérêts communs dans le cadre d'une situation d'apprentissage donnée.

Dans une autre considération et dans le domaine spécifique des sciences ingénieriques, Sensevy (2018) aborde la question de collaboration sous la double dimension d'un processus qui unit enseignants et chercheurs dans la mise en place d'une synergie collaborative d'échanges et de partage pour déterminer des stratégies d'études et d'analyses des savoirs mathématiques dans les contenus d'enseignement. Le contexte et la méthodologie sont abordés dans ce qui suit.

² Notre traduction : « Cet effort intensif de développement professionnel a permis une amélioration significative des résultats des élèves en mathématiques, tels que mesurés par l'évaluation au niveau de l'État. L'effet n'a été constaté que pour les enseignants qui se sont inscrits à deux cours complets de mathématiques pendant l'été ; il n'y a pas eu d'effet pour les enseignants qui se sont inscrits à un seul cours. pour les enseignants qui n'ont suivi qu'un seul cours. »

III. CONTEXTE ET MÉTHODOLOGIE

Au Niger, l'âge d'entrée au cycle primaire est de 6 à 7 ans, comme le stipule la Loi d'Orientation du Système Éducatif Nigérien. Ce cycle primaire (nommé cycle de base 1) est structuré en trois sous-cycles (CI-CP, CE1-CE2, CM1-CM2) et sa durée est de six ans à raison de deux ans par sous-cycle.

L'apprentissage des mathématiques s'offre aux enfants comme une activité à travers laquelle ils sont censés développer leur intelligence par des activités concrètes au sens de l'extrait suivant du programme de l'enseignement du premier degré (il s'agit ici d'un extrait du programme de mathématiques de 1992) :

« Les activités mathématiques ont un double objectif : d'une part favoriser une bonne structuration mentale, d'autre part donner aux élèves un outil utilisable dans les situations diverses qu'ils rencontrent au cours de leur existence. Dans cette perspective, elles constituent une discipline irremplaçable pour la formation de l'esprit, car l'acquisition de certaines structures mathématiques est essentielle pour le développement de l'intelligence. L'enseignement sera centré sur l'élève qui participera aux leçons par des manipulations conduisant au savoir-faire et à la découverte ». (Ministère de l'Éducation Nationale, 1992, p. 24)

Dans le cadre du travail collaboratif, on note un chercheur en Sciences de l'Éducation (étude du curriculum) en didactique des mathématiques (contenus et savoirs mathématiques), un chercheur en Sciences du langage (didactique des langues), des praticiens en analyse de contenu de manuels et encadreurs pédagogiques (ici Conseillers Pédagogiques de l'école primaire) pour passer en revue les principaux documents et décrire les principales caractéristiques du système qui soutient l'apprentissage de base. Ensemble, ils vont cartographier des documents clés (curriculum, manuels, guide de l'enseignant, cadre national d'évaluation) et déterminer les compétences fondamentales à développer par les élèves en classe.

La collaboration s'établit en répartissant les tâches de chaque acteur : les chercheurs élaborent la revue de la littérature et la cartographie, les Conseillers Pédagogiques (CP) et les enseignants pour travaillent sur la numération en première année du Cours Élémentaire première année (CEI). Il n'y a pas eu de conception collective de situations. Les acteurs travaillent sur les manuels officiels dans lesquels se trouvent des exemples de situations.

Le cadre de l'analyse curriculaire a été notre référence avec une concentration sur l'étude des programmes scolaires, des objectifs d'enseignement, des contenus, la structuration et à l'organisation du curriculum dans son ensemble, en étudiant l'articulation entre les différentes disciplines et les compétences à acquérir. Le schéma ci-après explique le processus pour aboutir aux résultats sur le plan du développement professionnel des enseignants :

Étape 1.	Étape 2.	Étape 3.	Étape 4.
identification et de cartographie les compétences mathématiques visées par le programme d'études	identification et à la cartographie des compétences en mathématiques lors des évaluations nationales	identification et cartographie des compétences mathématiques ciblées pour l'élève	identification et cartographie des compétences mathématiques ciblées dans le guide de l'enseignant

Dans sa forme, la collaboration entre les différentes parties prenantes repose sur la capacité de travailler avec divers acteurs autour d'une compréhension mutuelle, telle une pédagogie de la coopération au sens de Gamble (2002). En termes de développement professionnel, il est à noter qu'à partir du tableau 1 (informations sur le programme d'enseignement), le chercheur accompagne les conseillers pédagogiques et les enseignants sur :

- la constitution d'une référence des connaissances et des compétences minimales en mathématiques que les élèves doivent démontrer à des moments clés de leur parcours d'apprentissage
- la description de ce que peut faire un élève du niveau de performance « atteint le niveau minimum » en mathématique.

Tableau 1 – Cartographie programme d'enseignement

Total du temps d'enseignement (opportunités d'apprentissage prévues)			Pourcentage du temps d'enseignement consacré aux mathématiques (opportunités d'apprentissage des mathématiques prévues)			
A. Nombre de semaines d'instruction par année scolaire (politique du ministère)	B. Nombre d'heures d'enseignement, semaine scolaire	C. Nombre total d'activités d'enseignement par année (A*B)	D. Nombre d'heures par semaine consacrée aux mathématiques (selon le ministère)	E. Nombre total d'enseignement en mathématiques par an (D*A)	F. % du temps d'instruction consacré à l'enseignement des mathématiques (E/C x 100%)	G. % de l'activité hebdomadaire consacré aux mathématiques (D/B x 100%)
34	30	1020	5	170	17	17

Ce tableau renseigne sur le temps d'enseignement consacré aux mathématiques en classe de CE1. Les renseignements permettent aux enseignants de planifier les leçons en prenant en compte le temps consacré aux activités hebdomadaires. Les enseignants s'organisent et travaillent avec les CP pour déterminer ensemble les compétences libellées dans le manuel de mathématique et les compétences fondamentales à développer par les élèves.

Le tableau 2 ci-après est le résultat d'un travail collectif CP et enseignants pour déterminer les compétences à développer à partir de l'objectif général.

Tableau 2 – Cartographie des compétences

Compétences libellées dans le manuel de mathématique	Domaines	Objectif général	Compétences fondamentales à développer par les élèves
Technique écrite de l'addition (nombres de 2 et 3 chiffres)	Nombres et opérations	Résoudre des opérations sur les nombres entiers	Additionner et soustraire
Table d'addition : mémorisation			Additionner, soustraire, multiplier et diviser avec fluidité et automaticité des calculs de base
Technique écrite de l'addition de plusieurs nombres			Calculer en impliquant 2 ou plus de 2 opérations

Le tableau 2 présente un exemple de travail collaboratif qui a abouti à la cartographie des compétences. On voit bien le travail préalable à faire pour mieux situer les savoirs mathématiques à travailler dans une situation d'enseignement-apprentissage. C'est donc une forme d'ingénierie collaborative chercheurs et responsables pédagogiques que la cartographie s'est réalisée. Rappelons des éléments de sémantique sur ce que c'est qu'une ingénierie collaborative dans le cadre de ce travail. Thierry Picq et Didier Retour (2001) l'envisagent comme « un acte par lequel des personnes échangent volontairement des ressources et agissent ensemble, au même moment et pour une certaine durée, en vue de la réalisation d'un travail » Pour Harasim et al. (1996) le travail collaboratif peut-être défini

comme « n’importe quelle activité à l’occasion de laquelle deux personnes ou plus travaillent ensemble pour créer du sens, explorer un sujet ou améliorer leurs connaissances » (p. 30).

Dans cet article, nous avons choisi de nous pencher sur la cartographie du manuel de mathématique (guide de l’instituteur) utilisé au CE1 selon les programmes en vigueur. Nous nous limiterons ici à l’addition de deux nombres à deux chiffres et d’un chiffre. Ceci nous permet de nous centrer sur un point d’enseignement qui ne soulève pas *a priori* de difficulté particulière en termes de technique opératoire. L’élève doit comprendre ce qui se passe dans le cas où la somme des unités atteint ou dépasse 10.

IV. LE TRAVAIL COLLABORATIF : ANALYSE D’UNE ÉTUDE CAS SUR L’ADDITION AVEC RETENUE

Le travail collaboratif s’est organisé de la façon suivante :

- conception collective de la leçon sur l’addition d’un nombre deux chiffres et d’un chiffre. Le cherche relève le contenu proprement mathématique qui doit-être introduit dans les situations didactiques. Les CP et les enseignants étudient la possibilité l’enseignant en classe de rendre l’activité mathématique compréhensive au sens où les élèves peuvent développer des compétences et des savoirs mathématiques précis.
- mise en œuvre de la séance collective par un enseignant volontaire

Le tableau 3 ci-après montre le synopsis de la leçon telle qu’elle est mise en œuvre dans la classe par l’enseignant volontaire.

Tableau 3 – *synopsis de la leçon*

Séance sur l’addition avec retenue	
Objectif :	Effectuer une addition de deux nombres avec retenue
Etape 1 : Calcul mental /révision	Additions : $6+2$; $4+2$; $3+2$ et $36+3$; $22+12$
Etape 2 : Leçon du jour	Disposition et résolution des additions $16 + 6$ et $36 + 15$ dans un tableau à double colonne. Explication de la technique opératoire de l’addition avec retenue
Etape 3 : Exercices d’application et de contrôle	Additions $15 + 6$; $17 + 17$ sur les ardoises.

Le collectif fait une analyse de la séance mise en œuvre qui porte sur les points suivants :

- L’enseignant commence la leçon avec comme consigne l’addition de $(16 + 6)$ et $(36 + 15)$ dans un tableau à deux colonnes :

Tableau 4 – *représentation de l’addition dans un tableau à deux colonnes*

x	●	Le tableau identifie ces colonnes respectivement par un point (●) l’unité et par une croix (x) la dizaine. L’élève désigné dit : « $6+6$ donnent 12 » combien ? ». Il écrit 2 dans la colonne des unités et reporte « 1 » dans la colonne des dizaines et dit « $1 + 1 = 2$ ». Il trouve 22.
1		
1	6	
	6	
2	2	

Le collectif décrit le travail de l'élève : groupement des unités entre elles pour calculer le résultat d'une addition avec retenue, disposer les écritures chiffrées correspondantes en colonnes, et faire apparaître dans ces colonnes la dizaine et l'unité. La référence aux tableaux à deux colonnes est omniprésente dans la leçon étudiée. L'enseignant tente d'expliquer aux élèves le passage d'une colonne inférieure à une colonne supérieure à travers le principe unités-dizaines comme indiqué dans le schéma ci-après :

10^{a+3}	10^{a+2}	10^{a+1}	10^a

Figure 1 – Passage d'une colonne inférieure à une colonne supérieure

L'élève doit se faire une représentation du fait que si le chiffre "1" dans une colonne réfère à $10a$, le chiffre "1" dans la colonne de gauche immédiatement contiguë à celle-ci réfère à $10a+1$, le chiffre "1" dans la colonne suivante renvoie à $10a+2$, etc.

À partir de cette mise en œuvre de leçon issue du travail collaboratif, le collectif a proposé un dispositif (ingénierie collaborative) pour mieux favoriser le développement professionnel :

C'est un type de travail collaboratif dont les différentes étapes se déclinent comme suit :

- Étape 1 : Préparation collective d'une leçon 1

Le collectif prépare collectivement une leçon. Un volontaire est choisi pour la mise en œuvre dans une classe. Le chercheur met à disposition du collectif de la documentation, pour un travail d'un point de vue conceptuel.

- Étape 2 : Mise en œuvre de la leçon 1 par un enseignant volontaire

La leçon est mise en œuvre dans une classe, en présence du collectif et du chercheur. Elle va être filmée, un synopsis de la leçon sera élaboré, des transcriptions seront effectuées (interactions enseignants élèves dans la classe autour de l'objet du savoir).

- Étape 3 : Travail d'analyse du collectif après la mise en œuvre in situ de la leçon 1

L'enseignant anime la leçon en prenant la parole le premier pour réagir, suite à la diffusion de la leçon filmée. Le collectif réagit et complète par un échange avec l'enseignant en s'appuyant tantôt sur la vidéo, tantôt sur le synopsis ou des éléments de la transcription réalisée. Des modifications sont proposées sur les façons de faire de l'enseignant, en vue d'améliorer l'efficacité des transactions didactiques dans la classe pour la leçon 2. Le chercheur enregistre le travail d'analyse et effectue des transcriptions.

- Étape 4 : Préparation individuelle de la leçon 2 (leçon 1 aménagée) par un autre enseignant

L'enseignant prépare la leçon 2 un autre jour, à partir des modifications proposées par le collectif lors du travail d'analyse après la mise en œuvre de la leçon 1. L'enseignant prend en compte les propositions d'amélioration du collectif pour préparer la leçon 2.

- Étape 5 : Mise en œuvre de la leçon 2 préparée par l'enseignant

La leçon va être mise en œuvre par l'enseignant dans une autre classe de CE1 avec des élèves qui n'ont pas rencontré la leçon 1. La leçon 2 sera filmée, un synopsis de la leçon élaboré, des transcriptions de la leçon seront effectuées (interactions enseignants élèves autour de l'objet du savoir).

- Étape 6 : Travail d'analyse du collectif après la mise en œuvre in situ de la leçon 2

Le collectif a fait un travail d'analyse selon les mêmes principes que l'Étape 3 avec cependant une attention particulière sur les pratiques centrées sur les difficultés proprement mathématiques de la leçon.

V. CONCLUSION

L'article a mis en exergue la dimension du travail collaboratif et le développement professionnel des enseignants. Nous avons rappelé la problématique du développement professionnel des enseignants à travers le travail collaboratif. Un détour par la revue des travaux dans le domaine, et ce que ce type de travail implique comme organisation. Ce qui est décrit dans cette étude nous a permis de voir qu'une séance collective peut s'inscrire dans un dispositif d'ingénierie collaborative pour améliorer le fonctionnement général des enseignements et des apprentissages. Ainsi pour construire collectivement une ingénierie collaborative avec une mise en situation réelle avec des enseignants puis des élèves, il faudrait, il nous semble souligner les points suivants :

- la place du savoir, et comment il est travaillé dans le collectif
- comment organiser les enseignants en situation de travailler leurs pratiques dans une perspective d'amélioration des apprentissages des élèves ;
- les ressources utilisées et produites par le collectif. Il peut y avoir des ressources de nature mathématique, des ressources sur la mise en œuvre en classe, mais aussi des ressources méthodologiques du type « grille d'observation » ;
- les apports du collectif avec le chercheur sont à prendre en compte systématiquement dans toutes ces dimensions, ainsi que la question du rôle du chercheur.

RÉFÉRENCES

- Altet, M. (1994). *La formation professionnelle des enseignants*. PUF.
- Altet, M. (2000). *L'analyse des pratiques. Une démarche professionnalisante*. <http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/recherche-et-formation/RR035-03.pdf>
- Bednarz, N., Desgagné, S., Maheux, J.-F. et Zajc, L. S. (2012). La mise au jour d'un contrat réflexif comme régulateur de démarches de recherche participative : le cas d'une recherche-action et d'une recherche collaborative. *Recherches en éducation*, (14). <https://doi.org/10.4000/rec.5894>
- DuFour, R. (2004). What is a "professional learning community"?. *Educational leadership*, 61(8), 6-11.
- Feron, M. (2001). NTIC et apprentissage de la coopération. Dans *Actes du 12^e congrès de l'AGRH* (Volume 1, p. 542-557).
- Gamble, J. (2002). Pour une pédagogie de la coopération. *Éducation et francophonie*, 30(2), 188–219. <https://doi.org/10.7202/1079531ar>
- Gersten, R., Taylor, M. J., Keys, T. D., Rolhus, E. et Newman-Gonchar, R. (2014). *Summary of research on the effectiveness of math professional development approaches*. Institute of Education Sciences; Regional Educational Laboratory. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED544681.pdf>

- Harasim, L., Calvert, T. et Groenboer, C. (1996). Virtual-U : Un environnement Web personnalisé pour soutenir l'apprentissage collaboratif et l'acquisition de connaissances dans les cours postsecondaires. Dans H. B. Khan (dir.), *Web based instruction* (p. 149-158). Educational Technology Publications.
- Lenoir, Y. (2014). L'observation des pratiques d'enseignement : une approche à caractère sociologique. *Recherches en éducation*, (19).
- Ligozat, F. et Marlot, C. (2016). Un « espace interprétatif partagé » entre l'enseignant et le didacticien est-il possible ? Étude de cas à propos du développement de séquences d'enseignement scientifique en France et à Genève. Dans F. Ligozat, M. Charmillot et A. Muller (dir.), *Le partage des savoirs dans les processus de recherche en éducation* (p. 143-164). De Boeck.
- Marlot, C., Toullec-Théry, M. et Daguzon, M. (2017). Processus de co-construction et rôle de l'objet biface en recherche collaborative. *Phronesis*, 6(1-2), 21-34. <https://doi.org/10.7202/1040215ar>
- Ministère de l'Éducation nationale, République du Niger (1992). *Programmes de l'enseignement du premier degré*. Ministère de l'Éducation nationale de République du Niger.
- Picq, T. et Retour, D. (2001, février). La coopération dans les organisations par projets. *Personnel*, (417), 29-39.
- Sensevy, G. (2018). L'action conjointe en didactique. *Animation & Éducation*, (265), 48-50.
- Vacher, Y. (2015). Professionnalisation, alternance et émergence de nouveaux savoirs dans la formation initiale des enseignants. *Recherche & formation*, (79), 91-102. <https://doi.org/10.4000/rechercheformation.2461>

DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL DES ENSEIGNANTS DANS UN LIEU D'ÉDUCATION ASSOCIÉ

| DREAM*

Résumé | Les situations didactiques de recherche de problèmes ont pour objectif de fonder l'enseignement sur des problèmes de mathématiques. Leur mise en œuvre demande aux professeurs de développer des compétences professionnelles spécifiques pour permettre aux élèves de rentrer dans une recherche mathématique authentique et pour eux de construire leur enseignement sur les productions des élèves. Cette proposition porte ainsi sur l'étude et l'analyse des gestes professionnels pour un enseignement fondé sur la recherche de problèmes dans un contexte de recherche collaborative.

Mots-clés : gestes professionnels, collaboration, recherche de problème, situation didactique, lieu d'éducation associé à l'Institut Français de l'Éducation

Abstract | The aim of problem-solving didactic situations is to base teaching on mathematical problems. Their implementation requires teachers to develop specific professional skills to enable students to engage in authentic mathematical research, and for them to build their teaching on students' productions. This proposal therefore focuses on the study and analysis of professional gestures for problem-based teaching in a context of collaborative research.

Keywords: Professional gesture, collaboration, problem solving, didactical situation, Associated educational Places at the French Institute for Education

I. INTRODUCTION

Les « problèmes pour chercher » sont une façon différente d'envisager l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques dans le cours ordinaire de la classe. L'équipe de recherche DREAM et le LéA ECL@Maths (Lieu d'Éducation Associé École-Collège-Lycée et @pprentissage des Maths) constituée de professeurs des écoles, et de collèges et de lycées, de formateurs d'enseignants et de chercheurs s'intéresse à la mise en œuvre de progressions annuelles fondées sur des situations didactiques de recherche de problèmes dans le cours de mathématiques depuis l'école primaire jusqu'au lycée (grade 4 – grade 12). Cette mise en œuvre demande aux professeurs de développer des compétences professionnelles spécifiques pour permettre aux élèves de rentrer dans une recherche mathématique authentique. La recherche que nous présentons ici s'adosse sur des premiers résultats portant sur l'accompagnement entre pairs avec l'identification de moments critiques et de gestes professionnels (Di Francia et al., 2023).

Notre proposition de communication porte ainsi sur l'étude et l'analyse des gestes professionnels pour un enseignement fondé sur la recherche de problèmes dans un contexte de recherche collaborative en lien avec la question de recherche suivante : Quels gestes professionnels peut-on envisager de développer dans un dispositif de co-enseignement pour qu'un enseignant devienne capable de construire un enseignement fondé sur la recherche de problèmes en s'appuyant sur les productions effectives des élèves ?

* DREAM est un collectif de l'IREM de Lyon, Université Lyon 1 – France – dream@math.univ-lyon1.fr. L'auteur correspondant est Gilles Aldon : gilles.aldon@ens-lyon.fr

II. CADRE THÉORIQUE

Le cadre théorique de la recherche est construit autour des deux axes de collaboration et de geste professionnel. En ce qui concerne la collaboration, le fonctionnement de l'équipe de recherche et du LéA est fondé sur le paradigme de recherche orientée par la conception et s'appuie sur des méthodologies basées sur la réflexivité et le travail collectif des acteurs. Le cadre théorique s'appuie sur des travaux de recherche antérieurs portant sur les analyses des processus collaboratifs entre acteurs d'institutions différentes, notamment les travaux autour de la transposition meta-didactique (Arzarello et al., 2014 ; Robutti et al., 2019 ; Cusi et al., 2022). Dans ce cadre théorique, la collaboration est vue comme la rencontre d'acteurs de deux (ou plusieurs) institutions ayant chacun des buts spécifiques contraints par leur appartenance à leur institution. Le terme institution étant pris ici dans le sens large dans lequel « toute institution admet un environnement qui est un univers culturel » (Chevallard, 1988, p. 97). Ces acteurs sont confrontés à un objet de travail qui, lorsqu'il est accepté, devient un objet frontière (Star et Griesemer, 1989 ; Star, 2010), c'est-à-dire un objet suffisamment commun pour que les interactions prennent sens et suffisamment parlant à tous les acteurs pour que chacun puisse s'engager dans le travail sur cet objet avec une finalité au sein de leur institution. Cet objet frontière s'insère dans l'activité humaine qui peut être décrite en terme de praxéologies, c'est-à-dire en considérant pour chaque type de tâches, les techniques mises en œuvre pour résoudre la tâche, techniques liées à l'institution d'appartenance et des justifications pratiques et théoriques de ces techniques. Ainsi, la confrontation des techniques et des justifications des acteurs permet de faire avancer la connaissance commune de l'objet frontière et modifie les composantes des praxéologies dans un phénomène d'internalisation (Cusi et al., p. 367). Ces modifications relèvent d'un développement professionnel des acteurs qui peut être perçu à travers les gestes professionnels qui prennent sens dans un contexte donné, dans la situation vécue par l'enseignant. Nous nous référons en particulier aux définitions proposées par Bucheton et al. (2008, p. 66) :

Un geste professionnel est un signe verbal et non verbal adressé à un ou plusieurs élèves pour susciter leur activité. Il est fait pour être compris. Il manifeste une intention que les élèves doivent être en mesure de comprendre. Il relève d'une culture scolaire et disciplinaire partagée.

Les auteurs introduisent à ce propos le concept de multi-agenda de l'enseignant qui renvoie à la complexité des actions à mener pour faire progresser le temps didactique (Chevallard et Mercier, 1987) tout en conjuguant de multiples préoccupations, maintien d'une atmosphère susceptible de favoriser l'apprentissage, équité, gestion de l'autorité, transmission de valeurs, tout en suscitant l'engagement des élèves, en maintenant leur attention et en favorisant la parole. Dans cette perspective une distinction est faite sur les différents gestes : gestes d'étayage, accompagnement des élèves dans leur parcours d'apprentissage qui peuvent à l'excès devenir un super-étayage ne laissant plus la place à l'élève de construire ses connaissances, gestes de tissage reliant la tâche à l'avant et l'après, à l'extérieur et au contexte d'apprentissage, gestes de pilotage maintenant le cap de la leçon et la demande cognitive des élèves, gestes du maintien de l'atmosphère propice à l'apprentissage et, bien sûr, gestes didactiques reliés aux savoirs en jeu, aux compétences disciplinaires en relevant chez les élèves les connaissances à institutionnaliser dans la classe. Pour chaque geste, l'enseignant a à sa disposition des postures variées permettant d'atteindre le but fixé, c'est-à-dire des manières cognitives et langagières pour s'engager dans la résolution d'une tâche. Par exemple, la posture d'accompagnement permet de laisser du temps aux élèves de construire leur connaissances, la posture d'enseignement facilite l'institutionnalisation des savoirs qui apparaissent dans la classe, la posture de contrôle vise à cadrer la situation d'enseignement en régulant le temps didactique (Bucheton et al., 2008 ; Bucheton et Soulé, 2009).

La mise en œuvre d'une démarche d'enseignement fondé sur la recherche de problèmes demande la maîtrise de compétences professionnelles que nous avons étudiées à partir d'expérimentations

d'accompagnement de professeurs par des pairs (Di Francia et al., 2023). Cet accompagnement a été construit sur une double collaboration au sein de l'équipe de recherche entre enseignants et chercheurs ; d'une part, dans une perspective d'internalisation de praxéologies, entre les résultats de la recherche et les pratiques professionnelles des enseignants et d'autre part, au sein du LÉA, entre deux professeurs. C'est l'articulation entre ces deux collaborations qui a débouché sur la mise en évidence de six compétences essentielles pour un enseignement fondé sur la recherche de problèmes :

- Compétence 1 : être capable d'analyser un problème de mathématiques en vue de mettre en évidence les connaissances nécessaires aux raisonnements permettant l'exploration du problème.
- Compétence 2 : être capable de dévoluer aux élèves les différentes phases d'une recherche de problème.
- Compétence 3 : être capable de repérer dans les travaux des élèves des connaissances et compétences mathématiques en lien avec les programmes de la classe.
- Compétence 4 : être capable de permettre aux élèves de débattre scientifiquement.
- Compétence 5 : être capable de construire son enseignement à partir des productions effectives des élèves.
- Compétence 6 : être capable d'analyser ce qui s'est passé en classe et d'en tirer des pistes concrètes d'enseignement pour améliorer les situations d'apprentissage élaborées et testées. (Di Francia et al., 2023, p. 35)

Dans la suite, nous nous appuyons sur deux études de cas pour mettre en évidence les gestes professionnels qui témoignent de la mise en œuvre de ces compétences.

III. ÉTUDE DE CAS

1. Contexte

Le LÉA ECL@Maths est organisé en cinq mini-labos, chacun constitué d'enseignant.e.s et de formateurs.trices et de chercheur.e.s de l'équipe DREAM. Dans l'Académie de Rennes, le mini-labo se déploie sur deux circonscriptions de la banlieue de Rennes Il rassemble sept enseignant.e.s exerçant en CM1 ou CM2 (grade 4 et 5), les deux conseillères pédagogiques, référentes mathématiques de ces circonscriptions, ainsi que la conseillère pédagogique départementale de la mission mathématiques. C'est au cours d'une rencontre du mini-labo que des observations en classe ont été réalisées. Ces observations portaient sur la mise en œuvre de la situation didactique de recherche de problèmes suivante :

Trouver le plus rapidement possible la somme de 10 nombres entiers consécutifs. Par exemple, la somme de 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39.

Ce problème provient des travaux de Barallobres (2007) et a été largement repris par Durand-Guerrier (2007). À l'école primaire et au début du collège, trois objectifs principaux peuvent être visés avec cette situation : travailler le calcul mental et le calcul réfléchi ; travailler la numération décimale, mettre les élèves en situation de recherche pour leur apprendre à dégager des "règles générales" à partir d'exemples dans une perspective de pré-algèbrisation. Nous renvoyons au texte de présentation de ce problème pour une analyse mathématique et didactique, disponible sur le site de l'équipe DREAM : <https://math.univ-lyon1.fr/dream/wp-content/uploads/2022/03/La-somme-des-10-entiers-consecutifs.pdf>

Nous examinons dans la suite deux observations dans les classes de S. en CM2 (grade 5) et de K. en CM1 (grade 4). Les élèves, dans les deux classes, ont déjà cherché individuellement puis par groupe

de quatre le problème et ont réalisé une affiche pour montrer leurs stratégies pour calculer la somme d'une suite de dix entiers consécutifs.

2. Observations dans la classe de S.

Le mot « efficace » a été donné par S. dans la consigne orale parce qu'elle souhaitait utiliser ce problème pour développer dans la classe le calcul « efficace » ou « astucieux » aussi bien dans le calcul mental que posé. Toutes les affiches sont collées au tableau et après un moment de lecture des affiches par les élèves, S. leur demande de commenter ces affiches. Dans un premier temps, les remarques portent sur les couleurs (le jaune peu lisible), la taille des lettres (trop petites), bref la forme des affiches. Cependant un élève s'intéresse au fond d'une affiche en disant : « l'affiche de ... c'est un peu compliqué » ; S., dans une posture d'accompagnement, reprend la remarque pour rediriger le débat : « C'est pourquoi on va vous demander d'expliquer ! »

À partir de là, les commentaires portent plus sur les contenus (« dans cette affiche, il y a moins de calculs », « il y a les dizaines et les unités », ...) mais aussi sur la compréhension (« c'est difficile »). La professeure peut alors faire avancer la classe dans la compréhension des méthodes utilisées : « J'ai demandé d'expliquer la méthode » (geste de tissage) puis elle demande aux élèves de repérer les affiches qui leur parlent le mieux, pour lesquelles la méthode exposée serait la plus compréhensible et utilisable dans une recherche pour d'autres suites. Les raisons données portent encore une fois sur la forme et le fond. Les deux affiches plébiscitées par la classe comme « parlantes » sont les deux proposant des arbres de calcul (figure 1 en bas et à droite).

La première affiche (en bas de la figure 1) est commentée par le groupe d'auteurs. C'est dans ce dialogue avec la classe qu'apparaît la première fois la relation entre l'addition itérée et la multiplication : « ils pouvaient faire des fois », dit un élève. S. reprend cette proposition mais sans insister sur ce fait et plutôt en généralisant : « je vais garder des idées. Je vais noter à chaque fois qu'on peut aller plus vite ». S. note dans la partie rabattue du tableau du fait de l'étalage de toutes les affiches. S. reprend pour interroger les élèves : « qu'est-ce qu'on peut multiplier ; trois dizaines dix fois donc 30 fois $10 = 300$ ». La remarque n'est pas plus approfondie à cet instant mais reste cependant dans l'histoire de la classe puisqu'inscrite sur le tableau.

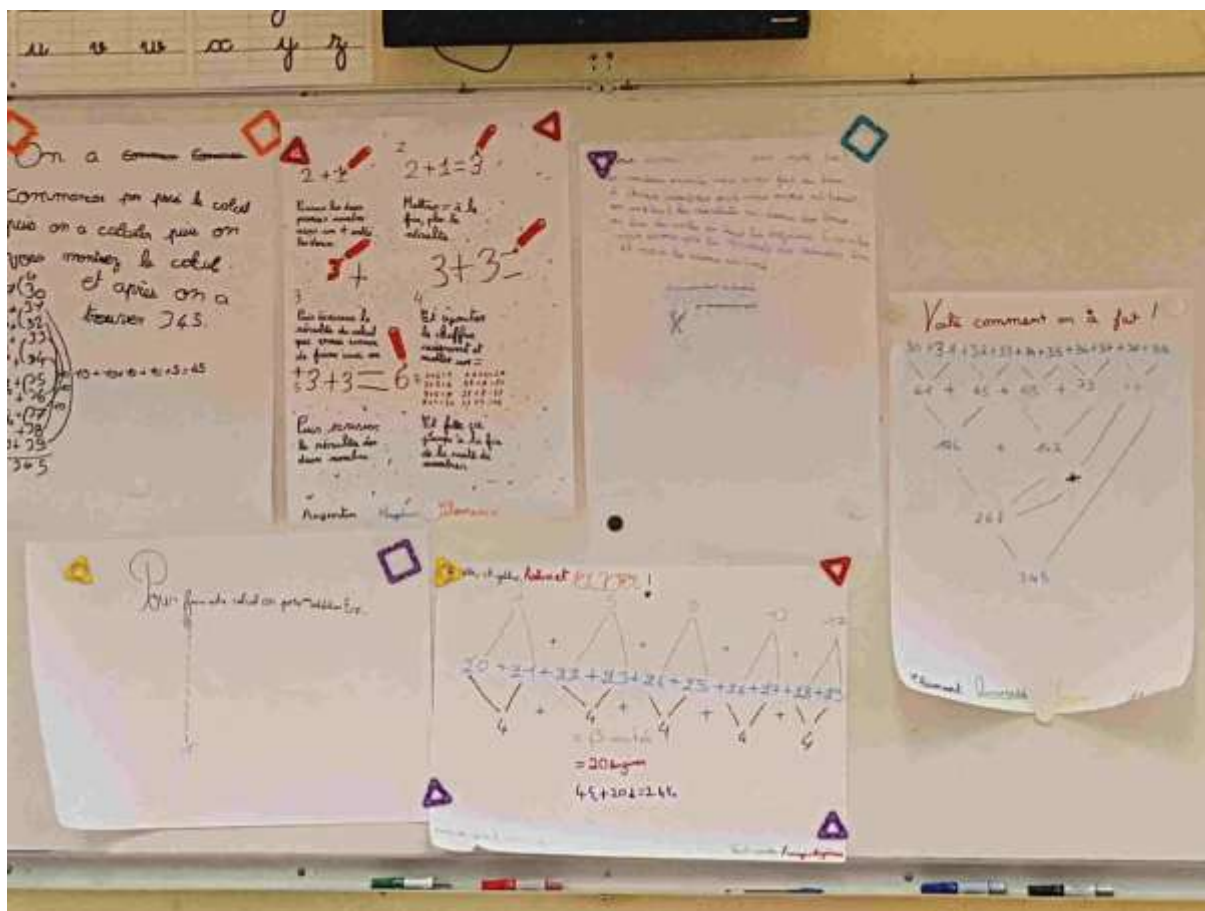


Figure 1 – Les affiches de la classe de S.

Cet épisode est intéressant pour plusieurs raisons :

1. D'un point de vue des savoirs, le passage de l'addition itérée à la multiplication apparaît oralement alors qu'elle n'était pas présente dans les traces écrites. On peut s'interroger sur le statut de la trace écrite (affiche) qui reflète l'énoncé (on parle de sommes et non pas de produits) mais qui ne traduisait pas toutes les idées proposées par les élèves qui ressortent à l'oral dans le débat ;
2. D'un point de vue des gestes professionnels : S. effectue des gestes de pilotage dans une posture d'enseignement mais aussi dans une posture de contrôle ; S. pointe le savoir proposé par un élève (compétence 3) en lui donnant un statut important mais ne le laisse pas discuter par la classe (pour conserver un contrôle de la chronogénèse ?) ;
3. Du point de vue du geste de tissage dans une posture d'enseignement : récupérer et garder trace des idées fortes (compétence 3 et 5). On voit ici que ce geste aurait pu être anticipé pour conserver *a priori* une place sur le tableau pour recueillir ces idées qui, du coup, n'ont pas été un repère pour le débat du fait de sa position « cachée » derrière le tableau. C'est cependant un geste professionnel dont S. a perçu l'efficacité dans le cours de la leçon et qui sera conservé et amélioré dans les prochains débats dans la classe (compétence 4).

L'affiche suivante (à droite dans la figure 1) montre des regroupements facilitant les calculs. S. reprend ce contenu pour faire référence aux méthodes de calcul mental déjà rencontrées (calcul astucieux) et le conserve comme idée intéressante (compétence 3). Là encore le geste de tissage dans une posture d'enseignement fait avancer le temps de classe. S. cherche à valoriser les réponses présentes

dans les affiches : geste d'atmosphère dans une posture d'enseignement : retenir les éléments qui sont des « idées à garder » et faciliter le débat (compétence 4).

L'affiche suivante amène une technique de calculs baptisée par les élèves les calculs par bond :

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 6 & 9 & 12 & \dots \\ 30+31+32+33+\dots \\ 1 & 3 & 6 & \dots \end{array}$$

Le calcul par bond est un peu discuté puis rejeté par la classe comme n'étant pas plus rapide ou astucieux qu'un calcul posé. En revanche les arbres, d'une part en regroupant les dizaines puis les unités semblent convenir à tous ; dans cet épisode, on voit la volonté de S. de s'appuyer sur le débat pour poursuivre son enseignement (compétence 5).

Enfin, la dernière affiche permet à S. de faire le lien avec les calculs posés ou mentaux. Un élève conclut : « on a rassemblé toutes les techniques ». S. relance la discussion (compétences 3 et 4) pour reprendre toutes les techniques ou « idées » proposées dans la classe. On se situe à la fois dans un geste de tissage (récapitulation et projection vers l'avenir) et didactique (première institutionnalisation de méthodes et de connaissances mises en évidence dans les affiches).

La séance s'achève sur un défi : est-ce que ces techniques pourront faire trouver la somme des nombres commençant à 17 (compétence 2 : ce défi permet de maintenir dans la classe l'intérêt pour le problème et responsabilise les élèves dans leur apprentissage) ? Les élèves travaillent sur leur ardoise et mettent effectivement en place l'une ou l'autre des techniques discutées. La diversité des réponses montre que le travail est déjà suffisamment efficace pour que tous les élèves trouvent le résultat souhaité.

3. *Observations dans la classe de K.*

Le déroulement prévu par K. consiste à proposer aux groupes d'élèves de commenter leurs affiches successivement dans un ordre qu'il a préétabli en fonction des connaissances mises en œuvre dans les travaux de groupe ; le travail préalable sur le problème permet ainsi à K. de mettre en évidence les connaissances nécessaires à la résolution de ce problème (compétence 1) et de les faire apparaître à partir des travaux des élèves dans le débat sur les affiches (compétence 4). Tous les gestes de K. sont construits pour atteindre son objectif avec la classe qui était de faire comprendre les décompositions additives d'un nombre, en dizaines et unités, mais aussi en partant d'un nombre a comme $a+1$, $a+2$... ou $a-1$, $a-2$, ... qui permettront de justifier l'écriture $10a+45$. Il note soigneusement toutes les connaissances, toutes les méthodes qu'il a vu dans les affiches et qu'il fait énoncer dans la mise en commun en laissant la liberté de parole aux enfants (compétence 4). Les gestes d'atmosphère, les gestes didactiques alternent avec des postures d'accompagnement et parfois des postures de contrôle pour maintenir le temps didactique en mettant en valeur les travaux et en proposant des critiques sur les traces écrites, comme par exemple sur l'écriture :

$$6+4=10+7+3=10+8+2\dots = 45$$

Ou sur l'ordre des facteurs d'une multiplication : 5 fois 70 comme l'itération de cinq soixante-dix, plutôt que 70 fois 5 qui représenterait la somme de soixante-dix cinq (geste didactique, posture d'enseignement lié à la compétence 5).

Un épisode intéressant arrive dans la classe lorsque deux élèves débattent à propos d'addition itérée 5 fois de 6 dizaines : le premier propose d'ajouter les dizaines et l'autre de multiplier 5 par 60. K. laisse

le débat continuer et ne départage pas dans un geste de tissage avec une posture d'accompagnement (compétence 4). En revanche, il revient sur le mot « rapidement » dans la consigne lorsqu'un élève propose une méthode avec des bâtons et des groupements de 10. On voit toujours le même souci de conclure dans les temps (nous sommes le dernier jour avant les vacances) et K. cherche à institutionnaliser la méthode de décomposition à partir du premier nombre de la série de façon à pouvoir s'en resservir dans la suite de son cours (compétence 5).

Après la mise en commun des affiches, K. propose aux élèves cette décomposition à partir de la série commençant à 47.

- Un élève : J'ai pas compris
- K. réexplique.
- E : mais pourquoi ?
- K. : on va voir à la fin peut-être il va se passer quelque chose d'intéressant.

Les gestes professionnels de K. tendent à construire cette connaissance sur les décompositions multiples des nombres en utilisant parfois des gestes de pilotage dans une posture de contrôle mais en maintenant par de nombreux gestes d'atmosphère une ambiance propice au travail. Là encore le tissage se construit progressivement pour faire apparaître une institutionnalisation partielle des méthodes utilisées.

IV. DISCUSSION

Les gestes professionnels apparaissent dans la mise en œuvre en classe de cette situation de recherche de problème. Ces gestes prennent sens dans un contexte donné comme des « actions de l'enseignant, l'actualisation de ses préoccupations » (Bucheton et Soulé, 2009, p. 32). Ils sont des repères permettant de mettre en évidence une transformation des comportements des acteurs vis-à-vis d'une situation nouvelle. Ils apparaissent liés aux compétences présentées ci-dessus comme autant d'indicateurs de la prise en charge des éléments fondamentaux des SDRP. Dans ces observations, toutes les compétences ne sont pas apparues du fait du mode d'observation ponctuel dans ces deux classes. D'un point de vue méthodologique, il serait souhaitable d'avoir deux entretiens avant et après la leçon pour mettre en évidence la présence de gestes professionnels témoignant des compétences 1 et 6 qu'il est difficile d'observer pendant la leçon. Les gestes professionnels sont ainsi des indicateurs des évolutions des praxéologies méta-didactiques tant dans une modification des techniques que des justifications de ces techniques. Ainsi, par exemple, ce qui apparaît dans la classe de S. pour thésauriser tout au long de la discussion les éléments importants qui devront être institutionnalisés constitue une modification d'une technique en vue de résoudre un type de tâches méta-didactiques d'enseignement de la numération décimale de position. Les justifications de cette technique s'appuient alors sur le travail collaboratif qui précise les éléments fondamentaux des apports de la recherche de problème dans l'apprentissage des élèves. Ainsi, les gestes professionnels apparaissent dans des temps différents du métier d'enseignant :

- dans la préparation d'une leçon, dans une phase d'anticipation, soit au moment du choix d'un problème en lien avec les objectifs d'apprentissage des élèves ou au moment du classement des affiches dans une perspective de mener le débat dans la classe ;
- dans le cours de la recherche des élèves, dans une phase d'observation, pour repérer dans les travaux des élèves des connaissances et des compétences mises en œuvre mais aussi

pour remobiliser les élèves, pour répondre à des questions sans dénaturer la tâche, pour évaluer de façon formative les élèves et renvoyer des informations susceptibles de les faire progresser ;

- dans la phase de débat, pour amorcer et maintenir la discussion scientifique mais aussi pour orienter les discussions vers ses objectifs d'enseignement, pour faciliter la communication et préparer l'institutionnalisation des connaissances qui émergent des travaux des élèves ;
- et, enfin, dans une phase de retour réflexif sur le déroulement didactique et pédagogique de (ou des) séance(s) de classe dans une réflexion meta-didactique permettant d'institutionnaliser les gestes professionnels mis en œuvre dans l'action dans une perspective de développement professionnel. Mais aussi, de prendre en compte les connaissances et les apprentissages des élèves pour proposer un canevas d'enseignement en lien avec les programmes et les demandes institutionnelles.

V. CONCLUSION

Les expérimentations menées dans le LéA sont de nature exploratoire et ont permis de mettre en évidence des gestes professionnels liés aux compétences nécessaires à la mise en place dans la classe d'un enseignement des mathématiques fondé sur la recherche de problèmes. Le travail n'est cependant pas terminé et nous projetons pour la suite de la recherche d'élaborer une grille d'analyse des gestes professionnels fondés sur des observables qui pourraient être décrits précisément. Nous souhaitons utiliser ces grilles de façon à ce que les enseignants, dans un rôle d'auto-observation ou d'observation de collègues, puissent s'en emparer et conscientiser les gestes professionnels. Mais cette grille d'observation et d'analyse pourra aussi servir dans le cadre de la formation pour permettre de mieux appréhender l'enseignement des mathématiques à travers la recherche de problèmes. Enfin, cette grille pourra également servir à l'équipe DREAM dans le cadre de la création de ressources, de façon à maintenir une cohérence des ressources que l'équipe de recherche produit (Aldon, Gardes et Front, 2017).

RÉFÉRENCES

- Aldon, G., Front, M. et Gardes, M.-L. (2017). Entre élaboration et usage, comment poser la question de la cohérence des ressources ? *Education & Didactique*, 11(3), 9-30.
- Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N. et Martignone, F. (2014). Meta-didactical transposition: A theoretical model for teacher education programmes. Dans A. Clark-Wilson, O. Robutti et N. Sinclair (dir.), *The mathematics teacher in the digital era*. Springer Science+Business Media.
- Barallobres, G. (2007). Introduction à l'algèbre par la généralisation : problèmes didactiques soulevés. *For the Learning of Mathematics*, 27(1), 39-44. <https://flm-journal.org/Articles/11CAE091FF7856D4C00321D131A92B.pdf>
- Bucheton, D. et Dezutter, O. (dir.). (2008). *Le développement des gestes professionnels dans l'enseignement du français*. De Boeck.
- Bucheton, D. et Soulé, Y. (2009). Les gestes professionnels et le jeu des postures de l'enseignant dans la classe : un multi-agenda de préoccupations enchâssées. *Éducation et didactique*, 3(3), 29-48. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.543>

- Cusi, A., Robutti, O., Panero, M., Taranto, E. et Aldon, G. (2022). Meta-didactical transposition 2: The evolution of a framework. Dans A. Clark-Wilson, O. Robutti et N. Sinclair (dir.) *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (p. 365-389). Springer.
- Chevallard, Y. (1988). Esquisse d'une théorie formelle du didactique. Dans C. Laborde (dir.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique, 16-21 novembre 1986, Marseille* (p. 97-106). La pensée sauvage.
- Chevallard, Y. et Mercier, A. (1987). *Sur la formation historique du temps didactique* (publication n° 8). Publications de l'IREM d'Aix Marseille.
- Di Francia, M., Leclerc, F., Aldon, G. et Gardes, M. L. (2023). Un dispositif d'accompagnement à l'enseignement fondé sur la recherche de problèmes. *Repères-IREM*, 131, 23-49.
- Durand-Guerrier, V. (2007). *La dimension expérimentale en mathématiques. Enjeux épistémologiques et didactiques*. <http://educmath.ens-lyon.fr/applet/exprime/texteintroress.pdf>
- Robutti, O., Aldon, G., Cusi, A., Olsher, S., Panero, M., Cooper, J., Carante, P. et Prodromou, T. (2019). Boundary objects in mathematics education and their role across communities of teachers and researchers in interaction. Dans G. M. Liloyd et O. Chapman (dir.), *International Handbook of Mathematics Teacher. Volume 3: Participants in mathematics teacher education* (2^e éd., p. 211-240). Brill-Sense.
- Star, S. L. (2010). This is not a boundary object: Reflections on the origin of a concept. *Science, Technology & Human Values*, 35(5), 601-617. <https://www.jstor.org/stable/25746386>
- Star, S. L. et Grisemer, J. R. (1989). Institutional ecology, 'translations' and boundary objects: Amateurs and professionals, Berkeley's Museum of Vertebrate Zoology, 1907-1939. *Social Studies of Science*, 19(3), 387-420. <https://www.jstor.org/stable/285080>

SE CONSTRUIRE UNE IDENTITÉ MATHÉMATIQUE PROFESSIONNELLE EN FORMATION INITIALE : LEVIERS ET OBSTACLES

| FLORES GONZALEZ* MACARENA ET ABBOUD** MAHA

Résumé | Cette recherche vise à étudier la place des mathématiques dans le processus de construction de l'identité professionnelle des futurs professeurs¹ des écoles en France. Nous nous focalisons en particulier sur la transition qu'ils vivent entre leur parcours préalable à l'entrée en institut de formation et celui entamé pendant la formation.

Mots-clés : formation initiale, identité mathématique professionnelle, rapport au savoir, pratiques des enseignants

Abstract | The objective of this research is to examine the role of mathematics in the construction of the professional identity of future primary school teachers in France. In particular, we focus on the transition they experience between their academic trajectory and the initial teacher training they receive in the teaching training institute.

Keywords: Initial teacher training, professional mathematical identity, relationship to knowledge, teachers' practices

I. INTRODUCTION

Bien que la formation initiale des enseignants représente un enjeu toujours d'actualité pour la recherche en éducation, la transition que vivent les étudiants qui viennent de parcours universitaires divers et qui s'engagent dans la formation initiale pour devenir professeurs à l'école primaire (élèves âgés de 3 à 10 ans), est peu étudiée en didactique des mathématiques. Dans le contexte français, plusieurs écrits scientifiques et institutionnels ont mis en évidence la complexité de la formation initiale des professeurs des écoles et les difficultés qu'éprouvent les étudiants qui s'y engagent. Ces difficultés sont liées non seulement à l'exigence de la formation proposée, mais aussi à des processus en lien avec la transition vécue par ces étudiants entre le parcours préalable à la formation au professorat et celui entamée dans l'institut de formation. Un élément clé de ces processus est la construction de l'identité professionnelle enseignante (Smith, 2007). Cependant dans le cas des futurs professeurs des écoles (FPE), cette identité se révèle être instable et marquée par des tensions dans la construction de compétences à partir des expériences vécues en tant qu'étudiant puis qu'enseignant stagiaire (Méard et Zimmermann, 2013). Pour ce même public, les mathématiques représentent un enjeu particulier : les FPE déclarent souvent avoir eu des expériences négatives avec cette discipline au cours de leur scolarité. Ceci rend la formation initiale essentielle pour une remise à niveau et une réconciliation avec les mathématiques, ainsi que pour l'apprentissage des savoirs didactiques et professionnels essentiels pour la pratique enseignante (Chenevotot et al., 2019). Puisqu'il s'agit du vécu personnel avec cette discipline, cela fait écho à des études sur l'identité mathématique dans le cadre de l'enseignement pour des enseignants spécialisés ou non spécialisés en mathématiques (Lutovac et Kaasila, 2018). À ce propos, Nanna et al. (2021) déclarent que cette identité se construit non seulement par l'expérience du sujet lui-même avec l'apprentissage des mathématiques, mais aussi grâce aux expériences qu'il vit en

* CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, Univ. Lille, Univ Rouen, LDAR, F-95000 Cergy-Pontoise, France - macarena.flores-gonzalez@cyu.fr

** CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, Univ. Lille, Univ Rouen, LDAR, F-95000 Cergy-Pontoise, France - maha.abboud-blanchard@cyu.fr

¹ Pour plus de fluidité dans la rédaction, nous n'utilisons pas l'écriture inclusive dans ce texte.

tant qu'enseignant avec ses élèves. Ces auteurs analysent spécifiquement l'identité mathématique des FPE, mettant en évidence trois types d'identités liées à l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques qui se caractérisent respectivement par :

« (a) une hésitation dans la connaissance des mathématiques, (b) un enseignement des mathématiques parce que c'est amusant versus un enseignement des mathématiques parce que cela fait partie du devoir des enseignants du primaire, et (c) un besoin de soutien à l'enseignement des mathématiques » (Nanna et al., 2021, p. 210).

Par ailleurs, bien que les auteurs constatent qu'un facteur d'influence de cette identité au début de la pratique d'enseignement est le désir d'apprendre, ils ne confirment pas la cohérence entre les déclarations des FPE et leur pratique réelle. D'ailleurs, certaines études (van Putten et al., 2014) montrent même qu'il existe une incohérence entre les déclarations des FPE et ce que l'on voit objectivement dans leur pratique d'enseignement, notamment en ce qui concerne leur prise en compte des connaissances didactiques acquises pendant la formation. Deux questions se posent ainsi à nous : De quelle manière la construction d'une identité mathématique professionnelle impacte les débuts dans la pratique professionnelle effective et vice-versa ? Quelles cohérences et dissonances y a-t-il entre le discours des FPE sur cette identité et la pratique réelle en classe ?

II. APPUIS THEORIQUES

Plusieurs cadres théoriques guident notre étude. Le premier concerne l'identification des composantes des pratiques des enseignants. Il s'agit de **la Double Approche** (Robert et Rogalski, 2002) qui nous permet d'étudier la complexité des pratiques des stagiaires en construction au moyen de cinq composantes : la composante *sociale* qui prend en compte que le FPE appartient à un institut de formation et, en qualité de stagiaire, intègre une équipe d'enseignants ; la composante *institutionnelle* à travers la manière dont le FPE s'approprie les contenus des différents documents institutionnels, avec les contraintes propres de l'institution ; la composante *personnelle*, qui s'intéresse aux représentations des mathématiques et de leur enseignement, qui sont liées aux expériences vécues par le FPE en tant qu'élève, étudiant, puis en tant qu'enseignant ; la composante *cognitive* qui considère la manière dont le FPE prend en compte les apprentissages potentiels des élèves ; et enfin la composante *médiative* qui étudie les choix du FPE concernant l'organisation du travail des élèves dans la classe et les interactions avec eux pendant le déroulement.

Le deuxième se réfère au **rapport des FPE au savoir** (Charlot, 1997 ; 1999) et à la notion d'**identité mathématique** (Lutovac et Kassila, 2014). Cela nous permet de questionner les liens entre le rapport de l'enseignant stagiaire aux mathématiques et la nature et modalités d'apprentissage qu'il propose à ses élèves. En effet, l'étude du rapport au savoir considère une *dimension identitaire*, que nous analysons via l'identité mathématique définie comme un processus narratif comprenant une interaction entre l'individu et le contexte mathématique social (Lutovac et Kassila, 2014, p. 131) ; et une *dimension épistémique* qui prend en compte le processus d'apprendre (entendu comme l'appropriation des objets de savoir).

Nous complétons l'étude de cette identité en explorant son aspect professionnel. Pour cela, nous utilisons la notion de **concepts pragmatiques** définie au sein de la didactique professionnelle (Pastré, 2011). Ces concepts sont définis comme des « représentations schématiques et opératives, élaborées par et pour l'action, qui sont le produit d'un processus historique et collectif, et qui sont transmises essentiellement par expérience et par compagnonnage » (Samurçay et Rogalski, 1992, p. 235). Plus précisément, c'est à travers les actions que l'on peut rendre compte de ces représentations. Ces actions font partie d'une construction liée au vécu, à l'histoire propre et à la formation suivie par l'individu. Elles correspondent à des concepts, des croyances, à différents types de savoir et savoir-faire et même

à des sensations expérimentées (Weill-Fassina et al., 1993). Comme nous souhaitons étudier la construction de l'identité mathématique professionnelle, nous nous intéressons à la formation des concepts pragmatiques en considérant en particulier le *processus de développement de la conceptualisation dans et pour l'action* (Samurçay et Rogalski, 1992). Ainsi, grâce à l'étude des concepts pragmatiques, notre focus est mis sur ce que nous appelons l'*identité mathématique professionnelle* qui se traduit par une prise de conscience des expériences vécues et des interactions qui évoluent dans un cadre de formation et d'apprentissage professionnelle.

Ce cadrage théorique nous amène à mieux spécifier nos questions de recherche :

QR1 : *Quelles évolutions du rapport au savoir en mathématiques des FPE peuvent être identifiées en formation initiale et comment influencent-elles la construction de l'identité mathématique professionnelle (en lien avec les connaissances mathématiques et didactiques) ?*

QR2 : *Quels concepts pragmatiques sont en construction pendant l'expérience vécue en stage et comment permettent-ils de façonner l'identité mathématique professionnelle ?*

III. MÉTHODOLOGIE

Pour le recueil des données, nous avons défini trois entrées : (1) élaborer et implémenter des questionnaires, (2) effectuer des observations de classes et ensuite (3) procéder à des entretiens post-observation, avec des moments d'auto-confrontation. Pour les observations de classes et les entretiens, il s'agira d'études de cas qualitatives des FPE sélectionnés suite à la passation d'un premier questionnaire. Concernant ce questionnaire, nous avons élaboré des questions fermées relatives à l'évolution du rapport au savoir en mathématiques pendant toute la scolarité des participants avant d'intégrer l'institut de formation, et à l'issue d'une année de formation. Suite à ces questions, d'autres questions, plutôt ouvertes, ont été posées concernant les expériences vécues pendant la scolarité, qui ont conditionné le rapport actuel aux mathématiques. Le questionnaire se termine par des questions concernant le début de l'expérience professionnelle grâce au stage en première année de formation. Du point de vue de la double approche, cela nous donne des éléments pour caractériser les composantes personnelle, sociale et éventuellement institutionnelle des FPE.

Pour les études de cas, nous avons procédé en deux temps. L'analyse des observations de classe suivait un schéma usuellement adopté dans le cadre de la double approche, à savoir : faire une analyse de la tâche proposée aux élèves qui permet de définir a priori l'itinéraire cognitif prévu et ensuite procéder à l'analyse du déroulement préalablement découpée en épisodes. Ceci nous fournit des éléments d'une part relatifs aux composantes cognitive et médiative de l'enseignant et d'autre part aux tensions² (au sens d'Abboud et Rogalski, 2017) dans l'activité de l'enseignant ainsi qu'aux perturbations éventuelles de l'itinéraire cognitif prévu. Pour l'analyse des transcriptions de l'entretien, nous visions à repérer d'abord dans le discours de l'enseignant son identité mathématique. Ensuite, dans son retour sur la séance vécue, nous voulions compléter les éléments préalablement identifiés de ses composantes de pratiques. Considérant que ces composantes sont encore « en construction » au cours de l'année de stage, nous nous sommes penchées, à un niveau micro, sur les conceptualisations en jeu au service de l'action, autrement dit les concepts pragmatiques en construction au cours de l'action.

² « Les tensions sont des manifestations de conflits entre la visée de l'enseignant de maintenir l'itinéraire cognitif voulu et la nécessité de s'adapter aux phénomènes qui surgissent et qui sont dus à la dynamique de la situation de classe » (Abboud, 2024).

IV. ÉLÉMENTS D'ANALYSES QUANTITATIVES

Les données quantitatives analysées dans cet article correspondent aux résultats d'un questionnaire passé en fin de première année de formation auprès d'un échantillon de 17 étudiants. En examinant les réponses concernant les filières suivies au lycée on identifie que : 12 % des étudiants se placent en Littéraire, 18% en Technologique ou Professionnelle, 23% en Économique et Social, et 47 % en Scientifique. Concernant les licences obtenues, 6 % correspondent à une licence en Sciences de l'Éducation, 12% à une licence en Sciences, 53 % à une licence Lettres et Sciences Humaines et 12 % à un autre type de licence où les mathématiques faisaient partie du cursus universitaire. Cela veut dire que la plupart des étudiants enquêtés n'avaient pas eu ou avaient eu peu de cours de mathématiques pendant la licence.

L'étude de l'évolution du rapport au savoir en mathématiques des étudiants pendant différents moments de la scolarité ainsi que leur appréciation d'éléments qui peuvent influencer ce rapport est représentée sur les graphiques de la figure 1 (cf. annexe). Nous pouvons y observer que le rapport aux mathématiques n'est pas stable au fil de la scolarité. Pendant l'école primaire et le collège (A) par exemple, sept étudiants disent avoir un très bon rapport aux mathématiques alors qu'il s'agit de deux étudiants pendant la période du lycée (B). Cet indicateur peut être mis en relation avec les réponses aux questions relatives au besoin de travail personnel supplémentaire ; les étudiants ont eu besoin de fournir plus de travail au lycée (B) que pendant l'école primaire et le collège (A). Cependant, nous observons qu'à l'issue de la première année de formation (C), même s'ils avaient besoin de fournir un travail important, le rapport aux mathématiques s'est considérablement amélioré.

Concernant les expériences vécues et les facteurs plus importants qui ont influencé leur rapport actuel aux mathématiques, 53% (soit 9/17) des FPE consultés considèrent que c'est le vécu avec les formateurs de mathématiques pendant la première année dans l'institut de formation, et 38 % (soit 6/17) pensent que ce sont les expériences vécues pendant leur scolarité à l'école primaire, au collège et au lycée. Enfin, concernant les facteurs qui ont eu une incidence importante pour la préparation des séances, la plupart des FPE considèrent comme très important les connaissances mathématiques identifiées des élèves (64 % – soit 11/17), les documents ministériels (59 % – soit 10/17), et les recommandations des collègues de l'école de stage (53 % – soit 9/17). Concernant les deux derniers, il est intéressant de souligner que les conseils des collègues sont même parfois peu importants, tandis que les documents ministériels sont systématiquement importants. Cela nous indique que la composante institutionnelle des pratiques semble prendre une place plus importante dans ce cas que la composante sociale.

À travers ce travail exploratoire, nous avons fait un premier panorama général de l'évolution ainsi que des éléments qui semblent impacter le rapport au savoir en mathématiques et l'identité mathématique des FPE. Cela nous a permis à la fois d'avoir les premiers éléments de l'identité mathématique professionnelle en construction, ainsi que d'établir des profils individuels des FPE selon leur rapport aux mathématiques. Mais des données et des analyses complémentaires sont nécessaires pour évaluer la cohérence entre ce qui est déclaré par les FPE et ce qu'ils vivent réellement dans leur début de pratique en stage, d'où l'importance des observations de classes et des entretiens qui s'en suivront.

V. ÉTUDE DE CAS

L'étude de cas que nous présentons ici concerne un FPE, que nous nommerons Marc, et qui a fait partie de l'échantillon étudié dans la partie précédente. Nous l'avons observé dans une séance portant sur la notion du cercle avec les élèves de sa classe de début du cycle 3 (âgés de 8-9 ans). Cette séance a

été filmée et des extraits de l'enregistrement nous ont servi pour mener l'entretien avec des moments d'auto-confrontation un mois après (nous y reviendrons). Nous exposerons d'abord ses réponses aux questionnaires, puis nous présenterons la séance mise en place et terminerons par des analyses de l'entretien post-séance.

1. *Le profil de Marc*

Marc déclare n'avoir pas eu de « bon rapport » avec les mathématiques tout au long de sa scolarité et qu'il devait fournir beaucoup d'efforts pour réussir. Il a choisi des études universitaires (niveau licence) plutôt littéraires avec peu de cours de mathématiques. Il n'est cependant pas « hostile » aux mathématiques car il déclare avoir été satisfait des modules qu'il a suivis en première année à l'institut de formation malgré des notes très moyennes. C'est l'expérience de stage en école (cycle 3) qui a été très positive et lui a permis d'être « à l'aise sur les notions de géométrie et de calcul mental ». Il dit être volontaire et profiter des conseils des formateurs et avoir le souci d'aider ses élèves dans leurs apprentissages. En somme, Marc a le profil d'un étudiant qui a été mal à l'aise avec les mathématiques pendant son parcours académique avant d'arriver à l'institut de formation. Mais il se destine à être enseignant avec une envie de réussir dans le métier, ce qui l'amène à profiter de l'ensemble de la formation pour avancer. Son expérience de stage semble avoir été décisive.

2. *La séance menée en classe*

D'après la fiche de préparation que Marc nous a fournie, l'objectif de la séance est d'abord de reconnaître le cercle comme l'ensemble des points équidistants d'un même point, son centre. L'activité mise en place devrait ensuite permettre d'introduire la notion de diamètre comme la « corde » la plus longue et dont le milieu est le centre du cercle. Il s'agit de mettre les élèves dans une situation problème (inspirée d'une activité proposée par son formateur de mathématiques) dans la cour de l'école et puis de revenir en classe pour fabriquer une affiche où seront institutionnalisées les notions qui ont été découvertes pendant le travail « expérimental » dans la cour. Lorsqu'ils sont dans la cour, la consigne donnée aux élèves est de se placer tous à égale distance d'un plot placé par terre. Ils doivent ensuite trouver un moyen pour être sûrs qu'ils sont à la même distance. La réponse attendue est que les élèves utilisent des « cordes » mises à leur disposition pour dire que la longueur de la corde reliant le plot à chacun d'entre eux est la même pour tous. C'est cette distance qui sera désignée comme étant le rayon du cercle dont le plot est le centre. Le retour en classe devrait permettre de tracer un cercle sur l'affiche puis de faire référence à ce qui a été vécu dans la cour afin d'inscrire sur la fiche les définitions de cercle, rayon, « corde d'un cercle » et diamètre. L'analyse du déroulement de la séance permet d'identifier trois épisodes critiques.

Épisode 1 (dans la cour) : Lorsque le FPE dit aux élèves que le but est de trouver comment faire pour se placer à une même distance du plot (qu'il avait encore en mains), les élèves se déplacent pour se mettre le long d'un cercle déjà dessiné dans la cour (terrain de jeu) et disent au FPE : « *tu mets le plot au milieu du cercle* ». A partir de ce moment l'objectif de l'activité devient de donner une preuve que les élèves sont à la même distance du plot en se servant de cordes (matériel de sport), qui ne sont pas de même longueur (cf. figure 2 en annexe). Plusieurs propositions sont faites par les élèves, mais qui manquent de précision quant à positionner la corde sur le plot ou associer deux cordes ou encore bien tendre les cordes pour comparer leurs longueurs.

Épisode 2 (dans la cour) : Après avoir désigné la distance entre le plot et les points du cercle comme étant le rayon, Marc passe à la notion de diamètre. Au cours de l'échange avec les élèves émerge l'idée du diamètre comme étant « deux rayons ». Un élève propose alors que c'est comme les aiguilles d'une

horloge en montrant un V avec ses doigts (cf. figure 3 en annexe). Le FPE semble confus, il précise que la longueur du diamètre est la même que la longueur de deux rayons. Toutefois, il n'arrive pas à réfuter le fait que le diamètre puisse avoir la forme d'un V.

Épisode 3 (en salle de classe) : Marc annonce aux élèves qu'ils vont fabriquer une affiche et pour cela commencer par le tracé d'abord d'un grand cercle. Les élèves demandent un compas « géant » mais l'enseignant propose d'utiliser une grande assiette et d'en tracer le contour. Cela étant fait, l'activité de la classe et de l'enseignant se transforme en activité de recherche du centre de ce cercle ! L'échange qui s'en suit dure plus de cinq minutes et se termine par un placement perceptif approximatif du centre, par l'enseignant qui dit qu'il refera plus tard l'affiche en positionnant le centre « avec précision » et des élèves qui répondent qu'« il est trop fort ! ».

3. *Analyses et résultats de l'entretien*

L'entretien, qui s'est déroulé 6 semaines après l'enregistrement de la séance vécue et vers la fin de l'année universitaire, consistait d'abord à faire revenir Marc sur les trois épisodes repérés plus haut en les visionnant avec lui, et ensuite à prendre un temps pour le questionner sur sa conception de l'enseignement des mathématiques, ses acquis à l'issue de la formation et sa projection dans son métier dans les années à venir, concernant l'enseignement des mathématiques notamment. Dans ce texte nous présentons en particulier des résultats relatifs aux connaissances mathématiques et didactiques du FPE, aux concepts pragmatiques en construction de sa pratique enseignante ainsi que l'évolution de son rapport au savoir.

Connaissances mathématiques et didactiques

Le retour de Marc sur l'épisode 2 dévoile un manque dans ses propres connaissances mathématiques. Lorsque l'élève lui demande de valider qu'un diamètre peut être sous forme de deux rayons accolés par un sommet, il a des doutes : « je ne m'étais jamais posé la question véritablement » ; « moi-même en termes de notions mathématiques, je me suis perdu ». Ne sachant pas quoi répondre à l'élève, il choisit d'esquiver, préférant ne pas se prononcer devant une question mathématique qu'il ne maîtrise pas : « parce que je doutais sur la réponse que je pouvais lui fournir ». Un autre exemple se présente dans son retour sur l'épisode 1, lorsque le cercle est déjà tracé et que les élèves essaient de trouver son centre. C'est in situ qu'il se rend compte d'abord qu'il ne sait pas comment le faire et ensuite, qu'il le sait probablement, mais que ce n'est pas du niveau de ses élèves : « c'est surtout le moment où ils ont insisté sur qu'il n'est pas au milieu [...] enfin moi je suis bloqué par rapport à ça » ; « je m'étais dit que je ne pouvais pas démontrer avec des arguments mathématiques ». Dans cette situation de tension entre ce qui était prévu (reproduire sur l'affiche le travail fait dans la cour, i.e., tracer un cercle en partant d'un point et en marquant des points à égales distances) et ce qui a résulté de l'utilisation improvisée d'une assiette pour tracer le cercle et ensuite trouver son centre, l'enseignant choisit un argument d'autorité à savoir, dire qu'il refera lui-même ultérieurement le cercle et le centre d'une façon précise. Même si Marc est conscient de ses difficultés, il déclare que cette prise de risque et ces moments de doutes ne le gênent pas, car il est en formation pour apprendre : « donc si je peux apprendre sur des choses qui mettent en soi en difficulté [...] justement, je veux apprendre ».

Enfin, la tension principale à laquelle Marc a été confrontée a eu lieu dès le début de la séance (épisode 1) quand les élèves repèrent directement un cercle déjà tracé dans la cour :

« l'exercice ne devait pas se faire autour de ce cercle, et donc mon objectif c'était avec la corde et le plot essayer de juger de la distance pour être toutes égales. Mais là le problème c'était que ce cercle s'est imposé là et parce que aussi j'ai dit ok ça va me faciliter, mais en fait pas du tout ça m'a plus handicapé qu'autre chose. ».

Ne sachant comment gérer cette déviation originelle de l'itinéraire cognitif, le FPE va être confronté à plusieurs difficultés qu'il aura du mal à surmonter, principalement par manque de connaissances didactiques en lien avec la composante médiative en construction de ses pratiques.

Concepts pragmatiques en construction

Nous identifions principalement trois concepts pragmatiques en construction dans l'action de Marc, qui ne sont pas spécifiques à l'enseignement des mathématiques : engager les élèves dans la résolution du problème, être vigilants à ne pas « les perdre » et laisser des traces de l'activité mise en œuvre.

Marc manifeste une volonté certaine d'amener ou d'inciter les élèves à la découverte des notions en jeu, déjà attestée par le choix (pas très courant) d'aborder les notions via une situation problème dans la cour : « les questionner pour les faire chercher ». Cependant, ses manques de connaissances mathématiques et didactiques (ses doutes), viennent contrecarrer son projet et font qu'il sent qu'il perd les élèves : « il ne faut pas perdre les élèves ». Ainsi ce concept d'agir pour garder le contrôle de la classe, qui est d'ailleurs commun à tout enseignant, est déjà présent chez Marc. La tension de début de séance fait qu'il sent une perte de ce contrôle et la gestion de la classe est surtout sur un mode d'improvisation : « ce que je voulais faire à la base ça a complètement été annulé [...] je tente de faire des improvisations moi-même autour des notions que j'avais préparées ».

Un concept qui semble également déjà construit sous l'effet de la formation est celui d'institutionnaliser à la fin d'une séance les notions travaillées, ou a minima de laisser une trace écrite de l'activité entreprise : « quand je fais les préparations de séances, maintenant je pars plus de la mise en commun vers l'objectif plutôt que l'inverse ». Toutefois, Marc est conscient qu'il a beaucoup de difficultés pour arriver à maîtriser ce moment de fin de séance : « je sais que, en tant que professeur stagiaire, c'est là où j'ai le plus de difficultés. C'est vraiment l'institutionnalisation pour vraiment laisser la trace du cours ». D'une façon cohérente avec ce qui précède, on voit que Marc se projette dans un enseignement des mathématiques où il fera des activités de découverte qui engageraient les élèves. Ceci ne lui semble pas compliqué, mais il considère qu'il doit clôturer la séance avec une trace, ce qui lui reste à apprendre/consolider : « faire une activité de découverte, ce n'est pas ça qui est le plus difficile, je pense que c'est vraiment ce que je vais laisser comme trace à la fin ».

Évolution du rapport au savoir et construction d'une identité mathématique professionnelle

Concernant le rapport de Marc aux mathématiques, on observe dans son discours que les dimensions identitaires et épistémiques sont redéfinies, car son rapport en tant qu'élève n'a pas le même statut qu'en tant que FPE. En effet, lors de l'entretien, il déclare « Je pense que par rapport aux maths, j'ai dû annuler tout ce que j'avais fait moi, en primaire [...] vraiment tout effacer et reprendre, ce n'est pas pareil quand on pratique et quand on est professeur ou quand on est élève ». Ici, c'est la construction de l'identité mathématique professionnelle qui intervient. On note que le FPE est conscient de l'importance de maîtriser le savoir mathématique pour prendre des décisions où une certaine robustesse épistémique est nécessaire. Les nouvelles connaissances d'ordre didactique sont cruciales pour cette nouvelle identité, et dans le cas de Marc, il a conscience qu'il a besoin de les apprendre. À ce nouveau rapport aux mathématiques vient se rajouter l'élément « plaisir » : « la manipulation pour moi c'est aussi un plaisir personnel [...] et en maths je prends énormément de plaisir [...] mais c'est aussi des choses où il faut apprendre à faire ».

Enfin, on remarque que Marc a une posture particulière en tant que FPE en formation. Concernant la composante sociale, il se sent différent de ses camarades de l'institut de formation au sujet des visites des formateurs et de la notation : « Quand ils me parlent de leurs visites [...] il y a moins de prise de

risque, et ce n'est pas quelque chose que je partage vraiment comme idée [...] ». La prise de risque assumée par Marc dans le début de sa pratique professionnelle met en avant son véritable désir de se former sans trop faire attention à l'évaluation, en mettant en avant encore l'élément « plaisir » : « Et puis je les vois prendre moins de plaisir quand ils ont des visites que moi [...] mais c'est vrai que c'est ma vision des choses et que pour eux ça peut peut-être paraître fou ou suicidaire, je n'en sais rien, mais c'est vraiment quelque chose dont j'ai envie ».

VI. DISCUSSION ET PERSPECTIVES

Notre recherche montre avant tout la complexité de la construction de l'identité mathématique professionnelle chez les professeurs des écoles. Marquée par des instabilités quant au rapport au savoir mathématique, cette identité a besoin de se construire appuyée par une analyse objectivée du FPE de sa propre pratique professionnelle.

Concernant le cas de Marc, nous venons de mettre en avant que l'évolution de son rapport au savoir en mathématiques influence la construction de son identité mathématique professionnelle et de ses connaissances didactiques. En effet, l'instabilité de ses connaissances mathématiques et didactiques relatives au savoir en jeu dans la séance observée jouent un rôle déterminant dans les aspects médiatifs de sa pratique enseignante. En outre, les concepts pragmatiques en construction identifiés chez lui, permettent de se rendre compte que les actions mises en place ne sont pas propres à la discipline mathématique. Le cas de Marc peut paraître particulier quant à ses conceptions de l'enseignement des mathématiques et de la formation initiale, c'est pourquoi nous poursuivrons nos études de cas avec des FPE ayant des profils différents, non seulement par rapport à leurs conceptions mais aussi par rapport au savoir mathématique avant l'entrée en formation.

Enfin, en accord avec l'étude de Nanna et al. (2021) nous soutenons que les FPE ont besoin de formations qui aident à une construction d'une identité mathématique professionnelle favorisant l'apprentissage des connaissances à la fois disciplinaires et didactiques. Certes, ces deux derniers aspects sont pris en compte dans la formation actuelle, mais la question d'une meilleure prise en compte de la construction de l'identité mathématique professionnelle se pose : Quelles stratégies de formation initiale pourraient y répondre ? Faut-il un accompagnement pendant les premières années d'exercice du métier ? Si oui quel format cet accompagnement peut-il avoir ? Pour notre part, nous l'envisageons dans le cadre de ce projet de recherche, en particulier parce que la demande vient aussi de la part des FPE suivis, au moins c'est le cas de Marc !

RÉFÉRENCES

- Abboud, M. (2024). L'enseignant de mathématiques aux temps des technologies numériques : un cadre théorique adaptant la double approche pour étudier son activité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (numéro spécial), 165-188. <https://hal.science/hal-04209359v3/document>
- Abboud, M. et Rogalski, J. (2017). Des outils conceptuels pour analyser l'activité de l'enseignant « ordinaire » utilisant des technologies en classe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 37(2-3), 161-216. <https://revue-rdm.com/2017/des-outils-conceptuels-pour/>
- Charlot, B. (1997). *Du rapport au savoir, éléments pour une théorie*. Anthropos.
- Charlot, B. (1999). Le rapport au savoir. Dans J. Bourdon et C. Thelot (dir.), *Éducation et formation : l'apport de la recherche aux politiques éducatives* (p. 17-34). CNRS Éditions. <https://doi.org/10.4000/books.editions-cnrs.31266>

- Chenevotot, F., Galisson, M.-P. et Baheux, C. (2019). Contribution à l'étude du rapport au savoir en mathématiques de neuf professeurs des écoles expérimentés. *Éducation & didactique*, 13(3), 83-108. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.5110>
- Lutovac, S. et Kaasila, R. (2014). Pre-service teachers' future-oriented mathematical identity work. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 129-142. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9500-8>
- Lutovac, S. et Kaasila, R. (2018). Future directions in research on mathematics-related teacher identity. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(4), 759-776. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9796-4>
- Lutovac, S. et Kaasila, R. (2019). Methodological landscape in research on teacher identity in mathematics education: A review. *ZDM*, 51, 505-515. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-1009-2>
- Meard, J. et Zimmermann, P. (2013). La construction identitaire des enseignants débutants et l'émancipation par rapport à la prescription. *Travail et Apprentissages*, 12, 65-78. <https://doi.org/10.3917/ta.012.0065>
- Nanna, A. W. I., Pratiwi, E., Kuriati, D. et Osman, S. (2021). Primary school teachers' identity in mathematics: The aspect of specialist teaching and learning. *Acta Scientiae*, 23(3), 192-217. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6408>
- Pastré, P. (2011). Situation d'apprentissage et conceptualisation. *Recherches en éducation*, (12), 12-25. <https://doi.org/10.4000/rec.5085>
- Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528. <https://doi.org/10.1080/14926150209556538>
- Samurçay, R. et Rogalski, J. (1992). Formation aux activités de gestion d'environnements dynamiques : concepts et méthodes. *Éducation permanente*, (111), 227-242. <https://www.researchgate.net/profile/Janine-Rogalski-2/publication/292032626>
- Smith, E. G. (2007). Developing professional identities and knowledge: becoming primary teachers. *Teachers and Teaching: theory and practice*, 13(4), 377-397. <https://doi.org/10.1080/13540600701391937>
- van Putten, S., Stols, G. et Howie, S. (2014). Do prospective mathematics teachers teach who they say they are? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(4), 369-392. <https://doi.org/10.1007/s10857-013-92650>
- Weill-Fassina, A., Rabardel, P. et Dubois, D. (1993). *Les représentations pour l'action*. Octarès.

Remerciements : nous tenons à remercier l'INSPE de Versailles pour son soutien financier à ce projet ainsi que les formateurs qui y participent, en particulier C. André et L. Picot. Nous remercions également Janine Rogalski pour les échanges éclairants à propos du cadrage théorique de cette étude.

ANNEXES

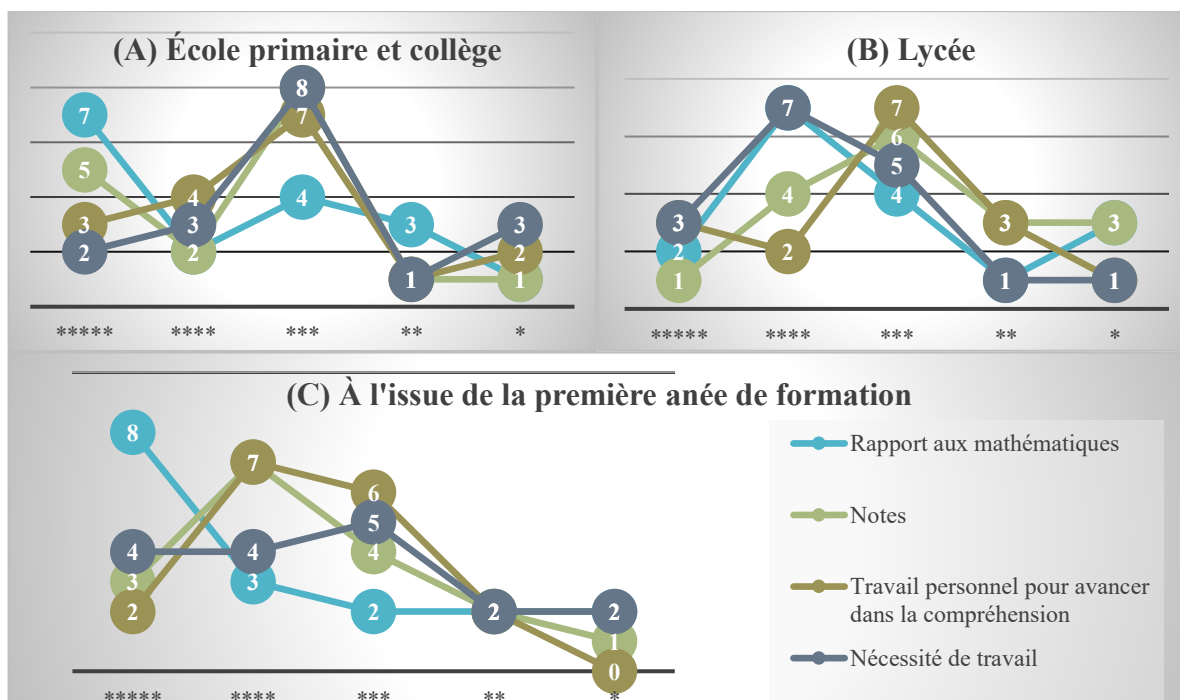


Figure 1 – Évolution du rapport au savoir en mathématiques pendant l'école primaire et le collège (A), pendant le lycée (B) et à l'issue de la première année de formation (C).^{3, 4}



Figure 2 – Image représentative de l'épisode 1



Figure 3 – Image représentative de l'épisode 2

³ Les graphiques montrent l'appréciation des étudiants de la meilleure appréciation représentée avec le signe ***** à la moins bonne représentée avec le signe *.

⁴ Les disques représentés dans chaque graphique correspondent aux effectifs des étudiants pour chaque question.

**GT2 | DISPOSITIFS,
CONTEXTES DE
FORMATION ET ACTIVITÉ
DU FORMATEUR**

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL 2

DISPOSITIFS, CONTEXTES DE FORMATION ET ACTIVITÉ DU FORMATEUR

| MARCHAND* PATRICIA, COULANGE** LALINA ET ADIHOU*** ADOLPHE

I. INTRODUCTION

Le thème du colloque porte sur les enjeux, les défis et les opportunités actuels de l'éducation mathématique des apprenants de différents ordres scolaires face à un monde qui est continuellement en accélération. Le thème de la formation d'enseignants (GT 2), représentant un de ces enjeux, est présent depuis les premiers colloques de l'EMF. Lors de la rencontre de 2022, les échanges ont porté sur le « sujet-enseignant » en collaboration avec d'autres acteurs ainsi que la co-construction de ressources. Ce groupe de travail a poursuivi ces réflexions en 2025 sur les dispositifs de formation en se focalisant sur le « sujet-formateur/chercheur » selon trois axes spécifiques, tous interrogeant les conditions à mettre en place pour de tels dispositifs dans le contexte actuel de formation (densification des activités ; objectifs d'efficacité ; temporalités réduites, etc.). Rappelons qu'

« Un dispositif de formation est une organisation de ressources (humaines, pédagogiques, matérielles, etc.) au service d'une action finalisée. C'est une construction sociale qui, en jouant des contraintes et de la variété des ressources, agence des situations susceptibles d'entrer en résonance avec les dispositions des personnes en formation. » (Carré, 2009, p. 10).

Le premier axe porte sur les conditions et l'élaboration des dispositifs de formation. De tels dispositifs peuvent être très variés selon les intentions didactiques visées (Tempier, Lajoie et Celi, 2023 ; Butlen et Masselot, 2019 ; Mangiante et al., 2019) : comment les dispositifs de formation d'enseignants/formateurs se nourrissent-ils des recherches ? Quelles sont les modalités et mises en œuvre prévues ? Les activités et pratiques du formateur/chercheur représentent le deuxième axe de ce groupe de travail. Ces activités du formateur renvoient nécessairement à la mise en place de conditions permettant aux formés l'acquisition de compétences théoriques/pratiques en contexte de formation (Adihou, Gibel et Blanquart-Henry, 2019 ; Robert et Vivier, 2013 ; Marchand et al., 2023 ; Bednarz et al., 2019). Elles peuvent cibler différents sujets (ex. : personnes enseignantes généralistes/spécialistes, inspecteurs) possédant leurs cadres, enjeux et contextes de pratiques. Étant donné la variabilité des dispositifs et des sujets, quelles sont les pratiques et les activités mises en place par le formateur/chercheur ? Et, qu'est-ce qui les distingue ? Enfin, le troisième axe vise plus spécifiquement les continuités et les ruptures entre les contextes d'apprentissage, d'enseignement (ex. : classes inclusives, spécialisées), de formation (ex. : cours, stages, simulations) et de recherche (ex. : collaborative, ingénierie didactique) pouvant être impliqués dans de tels dispositifs de formation (Bednarz et Perrin-Glorian, 2003 ; Adihou et Arsenault, 2020). Quelles sont ces ruptures/continuités ? Comment pouvons-nous les expliquer d'un point de vue didactique ? Sont-elles souhaitables ou non ?

* Co-responsable du groupe de travail 2 – Université de Sherbrooke

** Co-responsable du groupe de travail 2 – LaB-E3D (EA 7441) – Université de Paris

*** Co-responsable du groupe de travail 2 – Université de Sherbrooke

II. LES SÉANCES DU GROUPE DE TRAVAIL 2

Durant ce colloque, il y a eu cinq séances de travail, deux d'une durée de 1,5 heures et trois de 2 heures. Il y a eu dix communications et une vingtaine de personnes participantes (personnes chercheuses, formatrices, conseillères pédagogiques et étudiantes) venant de cinq pays différents (13 du Canada (Québec), 1 de la Côte d'Ivoire, 1 de Suisse, 4 de France, 1 de Belgique). Il y avait une personne réactrice pour chacune des communications et un temps d'échanges en sous-groupes à chaque séance. La dernière séance a été consacrée entièrement à une réflexion en sous-groupes afin de faire émerger les idées transversales véhiculées tout au long de nos séances de travail. Voici les communications réalisées lors des quatre premières séances de travail :

Séances	Titres et personnes autrices des communications
Séance 1	1-Former à l'égalité en mathématiques, un enjeu crucial pour la réussite de tous en mathématiques. Nathalie Sayac
	2-Formation des enseignants à l'enseignement des mathématiques par une approche en pédagogie universelle – accessibilité au savoir pour tous dans une école inclusive Laurent Pratali, Pierre Eysseric et Anne Gombert
Séance 2	3-Design de matériel de manipulation en formation initiale : agentivités mathématique et didactique Benjamin Nicolas-Noir, Claudia Corriveau et Doris Jeannotte
	4-Une situation de formation continue en géométrie élémentaire par la résolution de problèmes Mériem Arab Hadj-Moussa et Hélène Comby
	5-Processus de coconstruction axé sur les besoins des personnes enseignantes en mathématiques à l'éducation préscolaire ; changements de pratique et réussite des enfants Isabelle Deshaies, Juliette Gonny et Isabelle Flibotte
Séance 3	6-Les variables didactiques de formation dans une situation de formation de type Jeu de Rôles – le cas de la mise en commun Ismail Mili et Claire Guille-Biel Winder
	7-Les mathématiques dans le parcours accéléré Go Teaching : choix de la formatrice et pistes d'amélioration au départ de l'impact perçu par les instituteurs.trices novices Céline Mousset
	8-Les aides didactiques dans la détermination de la limite d'une suite numérique convergente dans l'enseignement secondaire. Parfait Abby-M'Boua
Séance 4	9-Transition formation initiale – formation continue en enseignement des mathématiques au primaire : l'exemple des processus personnels de calcul GREFEM et Mylène Forest
	10-La formation mathématique des enseignants du primaire : Entre les objectifs des programmes et la réalité de la formation initiale Houria Hamzaoui et Adolphe Adihou

Ces communications s'inscrivaient dans un ou plusieurs de ces trois axes de réflexion et de manière globale, la chronologie des séances a été structurée pour traiter de l'axe 1, de l'axe 2 et enfin de l'axe 3. Lors des échanges en sous-groupes, les personnes participantes du groupe de travail ont spontanément choisi de discuter et de faire émerger les ressemblances et les différences entre les facettes des dispositifs de formation mises en évidence par chacune des communications. Nous avons ainsi travaillé sur les contours d'objets de formation et sur les significations attachées à la démonstration de ces objets. Voici un aperçu de ces échanges réalisés en sous-groupes pointant les ressemblances et différences entre les dispositifs de formation :

- Des dispositifs dits ouverts offrant un choix de situations à mettre en place dans leur classe (1)¹ versus d'autres guidant davantage l'organisation des réflexions et des actions des enseignants, comme le profil ou les difficultés des élèves visés (2).
- Des personnes participantes volontairement versus obligatoirement à la formation (4).
- Différents moments et manières d'introduire les résultats de recherche dans la formation. Ils peuvent être exposés au début (2 ; 4), s'appuyer sur une situation vécue par les personnes participantes (4 ; 6), représenter des connaissances en situations comme lors de la construction d'un matériel didactique de manipulation (3) ou encore émerger comme une lunette d'analyse d'une collaboration entre partenaires (9).
- Des contraintes de formation en mouvance, comme la formation initiale accélérée (7 ; 10) ou la formation des personnes non-légalement qualifiées.
- Des approches valorisant une certaine lunette, comme celle du genre (1), ou encore proposant une approche inclusive (2).
- Des partages variés des responsabilités entre les acteurs directs ou indirects de la formation (personnes chercheuses, conseillères pédagogiques et enseignantes) (9 ; 5 ; 8).
- Des prises en compte des connaissances mathématiques des personnes étudiantes en formation initiale à différentes étapes de leur formation (10 ; 3 ; 7 ; 8).
- Deux dispositifs de formation étudiés (4 ; 5) valorisent le méso-espace.

Cette analyse des dispositifs de formation a mené le groupe à mettre en exergue des fils conducteurs ou des principes transversaux. Tous les dispositifs avaient comme préoccupations :

- De ne pas perdre de vue l'activité mathématique des élèves et des formées, malgré les contraintes des milieux de formation.
- De former à des manières de faire et à des manières de voir différemment l'enseignement des mathématiques.
- De transformer les manières de regarder et d'analyser les situations professionnelles, par l'analyse de situations proposées ou coconstruites (4 ; 2 ; 1 ; 8 ; 9), par la réalisation de jeux de rôles (6 ; 9), par la conception d'un matériel didactique comme levier d'une réflexion mathématique et didactique (3), par la production d'un portfolio (7) ou par des situations d'homologie (7).
- De partir des ressources déjà existantes pour les analyser, les questionner, les enrichir et les regarder autrement (5) afin d'augmenter le pouvoir d'agir des personnes enseignantes en service ou en devenir.
- De se rapprocher d'un point de vue didactique, le plus possible, des contraintes de la pratique actuelle en enseignement des mathématiques (2 ; 6).
- De mieux comprendre et de se sensibiliser aux transpositions éventuelles entre la formation initiale et la formation continue des personnes enseignantes en termes d'enjeux, de contraintes, d'accompagnement et de complémentarité.

Dans ces préoccupations, il est possible de constater la réciprocité entre les actions qui sont menées dans les dispositifs de formation et la réalité actuelle du milieu de pratique des personnes enseignantes qui est en mouvance : nous réalisons des actions sur le monde et le monde agit en retour sur ces actions. L'idée est de partir d'une action partagée afin d'ancrer le dispositif de formation sur celle-ci. Globalement, l'enjeu central de la mise en place de ce type de dispositifs de formation demeure

¹ Les numéros entre parenthèses font référence aux numéros des communications attribués dans le tableau 1.

l'adhésion des personnes participantes au projet de formation et à la création d'un espace de collaboration menant à une réflexion partagée.

III. BILAN ET PERSPECTIVES DU GROUPE DE TRAVAIL 2

Dans les échanges en sous-groupes, il a été question d'envisager l'analyse des dispositifs de formation imaginant différents plans en interaction. Par exemple, il y a un premier plan institutionnel de formation selon les cadres mis en place, les choix de cours, les choix théoriques/pratiques, les savoirs mathématiques/didactiques priorisés. Il s'agit du plan de référence pour toute personne formatrice, mais celui-ci reste générique. Ensuite, la personne formatrice a également son propre plan de référence et d'expérience. Elle s'approprie le plan de référence générique selon ses savoirs et ses expériences. Ces deux plans sont en interaction et peuvent générer des points de convergences, mais aussi des points de tension entre les deux. Les dispositifs de formation, initiale ou continue, découlent de cette interaction et génèrent des ressources. De cette discussion a découlé une volonté de réfléchir à une communauté de pratiques pour les personnes formatrices œuvrant dans les dispositifs de formation afin d'avoir un espace d'échange, des points de références, des ressources communes et un langage partagé.

Il a aussi été question des points d'appui communs à l'ensemble des dispositifs de formation proposés à travers les communications. Tous les dispositifs de formation font face à une plus grande mixité des personnes étudiantes (ex. : parcours scolaires différents, parcours accéléré, parcours en emploi, deuxième carrière). La mouvance des dispositifs de formation à l'enseignement s'inscrit actuellement dans deux phénomènes parallèles et opposés : d'un côté l'allongement dans le temps de la formation (ex. : temps partiel ou en emploi) et d'un autre côté, l'accélération de l'entrée sur le marché du travail pouvant avoir des impacts sur le nombre d'heures de formation, les contenus visés ou le profil des personnes étudiantes. De plus, les structures institutionnelles actuelles rendent difficiles les liens éventuels entre la formation initiale et la formation continue. En ce sens, le rôle des didacticiens dans l'offre de la formation continue n'est pas le même selon les pays et il est majoritairement implicite. Il est, par conséquent, difficile d'être en cohérence ou complémentaire à la formation continue. Il a été mentionné précédemment que les dispositifs partaient de situations existantes tout en visant à les enrichir ou à les faire évoluer : « partir du terrain de l'apprenant, mais ne pas y camper! ». Plusieurs questions demeurent néanmoins : quelles peuvent être les contours d'une telle devise ? Ce qui peut tendre à reposer un peu autrement la question des contenus de formation.

En guise de perspectives, voici des questions en suspens dans le contexte actuel de la formation qui est en mouvance et qui subit la pression d'accélération sociétale. Dans un tel contexte :

- Quelles sont les réflexions et les actions qui semblent propices à promouvoir dans les dispositifs de formation ? Quels sont les incontournables ? Comment pourrions-nous « évaluer » ces dispositifs de formation ?
- Qui est l'« expert » de quoi (formation initiale, continue et pour les personnes enseignantes non-légalement qualifiées) ? Le comment, le qui et le quand doivent être revisités.
- Comment pourrions-nous contribuer davantage à la transition entre la formation initiale et la formation continue ? Serait-il possible de créer des espaces d'échanges, des communautés de pratiques, du mentorat, de l'accompagnement, des stages en emploi, ... ?
- Comment pourrions-nous valoriser le partage des pratiques de personnes formatrices ? Comment soutenir les nouvelles personnes formatrices en formation initiale ou continue ?

RÉFÉRENCES

- Adihou, A. et Arsenault, C. (2020). Formation à l'enseignement des mathématiques : opérationnalisation et regard des étudiants sur un dispositif de formation. *Formation et profession*, 28(3), 64-80. <http://dx.doi.org/10.18162/fp.2020.511>
- Adihou, A., Gibel, P. et Blanquart-Henry, S. (2019). Méthodologie pour l'étude didactique d'un entretien formateur/professeur stagiaire en mathématiques dans le cadre d'une visite de classe. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology of Education*, 19, 143-167. <https://doi.org/10.1007/s42330-019-00047-9>
- Bednarz, N. et Perrin-Glorian, M.-J. (2003). Formation à l'enseignement des mathématiques et développement de compétences professionnelles : articulation entre formation mathématique, didactique et pratique. Dans *Actes du colloque EMF 2003, 19-23 décembre 2003, Tozeur, Tunisie*. CNP. https://emf.unige.ch/application/files/6014/5459/4120/EMF2003_Conference_Bednarz.pdf
- Bednarz, N., Maheux, J.-F., Bacon, L., Saboya, M., Lajoie, C. et Thibault, M. (2019). Regards chercheurs-conseillers pédagogiques sur les interactions en contexte de résolution de problèmes mathématiques en classe. *Éducation et francophonie*, 47(3), 140-162. <https://doi.org/10.7202/1066517ar>
- Butlen, D. et Masselot, P. (2019). Enjeux et modalités de formation pour les professeurs des écoles en didactique des mathématiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology of Education*, 19, 91-106. <https://doi.org/10.1007/s42330-019-00048-8>
- Carré, P. (2009). Avant-propos. Dans G. Lameul, A. Jézégou et A.-F. Trollat (dir.), *Articuler dispositifs de formation et dispositions des apprenants* (p. 9-11). Éditions de la Chronique sociale.
- Mangiante, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A., Tempier, F. et Winder, C. (2019). Pratiques de formation en mathématiques des professeurs des écoles : un cadre pour analyser les potentialités de situations de formation. Dans I. Verscheure, M. Ducrey Monnier et L. Pelissier (dir.), *Enseignement et formation : éclairages de la didactique comparée*. Presses Universitaires du Midi.
- Marchand, P., Martin, V., Thibault, M. et Bisson, C. (2023). Postures et gestes de personnes formatrices exploitant les jeux de rôles comme dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques : analyse de récits de pratiques. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, (Thématique 1), 19-53. <https://doi.org/10.4000/adsc.1610>
- Robert, A. et Vivier, L. (2013). Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques : des utilisations contrastées en recherche en didactique et en formation de formateurs – quelle transposition ? *Éducation et didactique*, 7(2), 115-144. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1749>
- Tempier, F., Lajoie, C. et Celi, V. (2023). Les pratiques de formation à l'enseignement des mathématiques : une approche par la recherche en didactique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (Thématique 1), 7-18. <https://doi.org/10.4000/adsc.1570>

FORMER A L'ÉGALITÉ EN MATHÉMATIQUES, UN ENJEU CRUCIAL POUR LA RÉUSSITE DE TOUS EN MATHÉMATIQUES

| SAYAC* NATHALIE

Résumé | Le protocole FÉM (formation à l'égalité en mathématiques) a été conçu pour agir en profondeur et durablement sur les pratiques des enseignant·es du primaire et du secondaire. Il vise à responsabiliser les enseignant·es sans les culpabiliser et s'inscrit dans la démarche de pédagogie de l'égalité préconisée par Collet (2018). Ce dispositif se décline en 3 temps. Une expérimentation menée autour de dispositifs constituant le temps 2 sera présentée lors du colloque EMF.

Mots-clés : formation, égalité, mathématiques, pratique d'enseignant, genre

Abstract | The Equality training in mathematics protocol (ETM) has been designed to have an in-depth and lasting impact on the practices of primary and secondary school teachers. It aims to empower teachers without making them feel guilty, and is in line with the pedagogy of equality approach advocated by Collet (2018). The program is divided into 3 phases. An experiment conducted around the devices making up phase 2 will be presented at the EMF symposium.

Keywords: Training, equality, mathematics, teaching practice, gender

I. INTRODUCTION

La question des inégalités scolaires est une question qui préoccupe bons nombres d'acteurs et actrices de l'éducation dans tous les pays car elle remet en cause une valeur universellement partagée, celle de l'égalité de réussite pour tous les élèves quel que soit leur genre, leurs situations sociale ou familiale. Parmi les inégalités scolaires les plus répandues, l'inégalité de genre en mathématiques est questionnée de manière récurrente et surgit généralement après chaque parution de résultats d'enquêtes nationales (en France, les évaluations Repères et CEDRE) ou internationales (PISA, TIMSS). Même si les mêmes constats d'écarts de performances en mathématiques entre les filles et les garçons sont partagés dans une majorité des pays de l'OCDE, la France se démarque par des écarts encore plus importants. Pour le PISA 2022, l'OCDE a écrit « *En France, les garçons obtiennent toujours de meilleurs résultats que les filles en maths. Cet écart de 10 points se situe toutefois dans la moyenne des pays de l'OCDE (9 points)* ». TIMSS 2023 pointe également des écarts de performances entre les filles et les garçons, en faveur de ces derniers, en mathématiques comme en sciences pour les élèves de grade 4 et grade 8. Ainsi, en mathématiques, l'écart entre filles et garçons au grade 4 est passé en moyenne de 6 points en 2015, à 13 points en 2019 (8 points au grade 8) et à 23 points en 2023 (12 points au grade 8).

Concernant les évaluations nationales françaises, c'est le même refrain, concernant les évaluations cycliques CEDRE, il est indiqué qu'« *en 2019, comme lors des cycles précédents (2008 et 2014), les garçons présentent un score moyen supérieur à celui des filles (9 points de plus)* ». Les évaluations Repères permettent d'évaluer les apprentissages mathématiques des élèves de manière récurrente (tous les ans, à la même période), avec des tests identiques et à l'échelle nationale (tous les élèves d'un même niveau sont concerné·es). Elles sont donc précieuses pour observer finement le comportement des filles et des garçons en mathématiques, à un moment clé de leur scolarité (grade 5 et grade 9), et plus particulièrement celui de l'entrée à l'école élémentaire (grade 1). L'enquête de l'IPP, centrée sur les écarts de performances en mathématiques entre les filles et garçons aux évaluations Repères de CP (grade 1) et de CE1 (grade 2) entre 2018 et 2022 a conclu qu'« *alors qu'il est inexistant au début du CP, un*

* Université Rouen Normandie – LDAR – France – nathalie.sayac@univ-rouen.fr

écart en faveur des garçons apparaît et se creuse en mathématiques au cours du CP. Ce décrochage des filles est observé pour toutes les cohortes évaluées et pour la majorité des exercices évalués (additionner, lire des nombres, résoudre des problèmes, etc.) ». Les chercheur·es qui ont mené cette enquête ont exploré plusieurs pistes explicatives (configurations scolaires, configurations familiales, configurations territoriales), mais ont conclu que *« l'évolution de l'écart en mathématiques entre les garçons et les filles s'observe dans toutes les catégories sociales et configurations familiales, et sur l'ensemble du territoire »*. Cette conclusion nous laisse un sentiment d'insatisfaction car, si l'on souhaite lutter contre le phénomène d'écarts de performances en mathématiques entre les filles et les garçons, il est indispensable de le comprendre et d'en appréhender les ressorts.

En tant que didacticienne des mathématiques intéressée et préoccupée par cette question, j'ai mené une première étude autour des évaluations Repères CP en janvier 2023 (Sayac, 2023). Dans le cadre de cette étude, nous avons mené 35 entretiens avec des enseignantes de CP (grade 1). Nous les avons questionnées sur les raisons qu'elles pouvaient avancer pour expliquer le phénomène de décrochage des filles en mathématiques à partir du 2^e temps¹ des évaluations Repères qui se déroule en milieu d'année de CP. Les réponses récoltées m'ont fortement interpellée. En effet, pour plus de la moitié d'entre elles, les explications données témoignaient clairement d'intégration de stéréotypes de sexe alors même que nous leur avions annoncé l'objet de notre étude. Par exemple, il nous a été rapporté que *« les garçons sont meilleurs en maths que les filles, mais les évaluations de début de CP ne permettent pas de le montrer, elles sont trop faciles »* ou encore *« j'ai le sentiment que les garçons sont plus curieux, qu'ils se lancent des défis, des challenges. Plus que les filles »* et même *« les garçons comptent les buts au foot et comparent leurs scores. Les filles avec leurs cordes ne comptent pas »*.

Ces réponses m'ont fait réaliser que les enseignant·es n'avaient clairement pas conscience d'être, entre autres, partie prenante de la diffusion des stéréotypes de genre et de leur impact sur les performances mathématiques de leurs élèves. Il m'a donc paru indispensable d'agir au niveau de la formation des professeur·es des écoles afin de leur permettre d'une part de prendre conscience des inégalités de genre en mathématiques existant dans les classes, et d'autre part de les engager à agir pour les réduire. J'ai donc conçu un protocole de Formation à l'Égalité en Mathématiques (FÉM) qui a été testé dans des classes de maternelle jusqu'au lycée durant le dernier trimestre scolaire de l'année 2024.

II. LE PROTOCOLE FÉM

1. Fondements du protocole FÉM

Pour sensibiliser les enseignant·es aux causes sociales des inégalités, Duru-Bellat propose que la formation qui leur est destinée soit davantage tournée vers « l'expérience subjective des élèves et la gestion de leur anxiété ». Cette proposition me semble juste, mais en tant que didacticienne des mathématiques j'ajouterais que cette expérience doit s'appuyer sur des contenus mathématiques maîtrisés, tant du point de vue disciplinaire que didactique. C'est-à-dire que l'enseignant·e doit appréhender la complexité du savoir mathématique en jeu dans les situations qu'il ou elle propose, identifier les difficultés potentielles que les élèves peuvent rencontrer et être en capacité d'apporter des feedbacks constructifs, aussi bien aux filles qu'aux garçons car l'anxiété des élèves peut également résulter de décalage entre les attentes réciproques de l'enseignant·e et de ses élèves, c'est-à-dire du contrat didactique en jeu. Je complèterais donc la proposition de Duru-Bellat en précisant qu'il faut

¹ Les évaluations nationales standardisées Repères se déroulent en trois temps : 1^{er} temps (entrée au grade 1), 2^e temps (milieu du grade 1) et 3^e temps (entrée au grade 2).

veiller à **prendre en compte la subjectivité des élèves et la gestion de leur anxiété face à un contenu mathématique maîtrisé proposé dans des situations adaptées.**

Dans sa conception de la formation à l'égalité, Collet (2018) précise que ce type de pédagogie fait partie des pédagogies de conscientisation, c'est-à-dire des pédagogies qui « *permettent de prendre conscience de la réalité socioculturelle qui modèle l'existence, et aussi de croire à sa capacité à changer cette réalité* ». Je retiens cette approche car l'étude menée précédemment (Sayac, 2023) m'a convaincue de l'impératif de cette prise de conscience de la part des enseignant·es. Il est essentiel qu'**ils ou elles réalisent que des inégalités de genre sont à l'œuvre dans leur classe, pour leur permettre d'agir en conséquence.** Par ailleurs, **cette conscientisation doit impérativement se faire sans culpabilisation.**

Pour former les enseignant·es à l'égalité, il me semble primordial de **partir des pratiques ordinaires** de leur(s) classe(s) pour d'une part, faire en sorte qu'il ou elle se sente directement concerné·e et d'autre part, ne pas générer une surcharge de travail qui pourrait impacter la finalité de la formation. Par ailleurs, je pense également comme Salle (2014) l'a expérimenté en formation initiale, que c'est en **confrontant les formé·es à leurs représentations que l'on peut faire émerger une position réflexive sur leurs pratiques** professionnelles, notamment en ce qui concerne le poids invisible des stéréotypes de genre à l'œuvre dans leur(s) classe(s).

2. Description du protocole FÉM

Le protocole que j'ai élaboré pour concevoir des formations à l'égalité en mathématiques repose sur les éléments précédemment présentés. Il peut être proposé aussi bien en formation initiale qu'en formation continue. Sa déclinaison en trois temps doit être respectée, même si ces trois temps peuvent être investis différemment par les formateur·rices, en gardant les objectifs visés pour chacun des temps :

- **Temps 1** : Ce temps doit être conçu pour fournir des données statistiques et des apports scientifiques sur les inégalités de genre, les stéréotypes de genre, les différents effets (pygmalion, golem), menace du stéréotype, etc. Il vise à sensibiliser les formé·es aux inégalités de genre en mathématiques dans le système scolaire français.
- **Temps 2** : Ce deuxième temps vise à faire prendre conscience que des inégalités de genre liées à l'enseignement des mathématiques sont à l'œuvre dans les classes à partir d'outils et/ou de dispositifs spécifiquement élaborés à cette fin.
- **Temps 3** : Ce troisième temps est un temps d'action. Il s'agit, pour les enseignant·es de mener des actions au sein de leur classe, à partir des résultats issus des dispositifs réalisés dans le temps 2. Ces actions peuvent être de différentes natures, soit à destination des élèves, soit à destination des enseignant·es.

Le temps 1 peut être conçu à partir de ressources que l'on peut facilement trouver en ligne ou dans des productions scientifiques ou institutionnelles, c'est pourquoi je détaillerai plus précisément le temps 2, expérimenté au dernier trimestre scolaire 2023-2024 et le temps 3.

Trois dispositifs ont été spécialement conçus pour alimenter le temps 2 du protocole FÉM. Ils s'inspirent de différents travaux menés dans le cadre de projets de recherche ou de recherches collaboratives. L'enjeu de ces dispositifs est que les enseignant·es prennent conscience que les filles et garçons peuvent se comporter différemment du point de vue de leurs performances et de leur activité mathématique selon les situations proposées. Le choix de ces dispositifs doit leur être laissé pour favoriser leur engagement. Ils ont été proposés aux enseignant·es comme suit :

Dispositif 1

Pour observer le comportement et les performances des élèves (filles et garçons) lors de séances de résolution de problèmes (par exemple) et les éventuelles différences, ce 1^{er} dispositif propose de tester deux modalités de composition de groupe. Dans un 1^{er} temps, proposer une séance de résolution de problèmes (ou autre) en groupes mixtes, puis dans un 2^e temps, proposer une autre séance de résolution de problèmes (ou autre de même type) en groupes non mixtes et comparer le comportement social et cognitif des filles et des garçons durant ces 2 séances.

Dispositif 2

Pour observer l'incidence de l'habillage de la tâche² sur le comportement et les performances des élèves (filles et garçons), on peut tester différents habillages pour une activité mathématique identique ou équivalente du point de vue des tâches à réaliser.

On peut, par exemple, proposer de faire passer deux tests³ équivalents en modifiant un paramètre (ordre des questions, habillage de la tâche, temps limité ou non, etc.), puis comparer les performances des élèves (filles et garçons) à ces deux tests. Parmi les habillages différents à proposer, on pourra choisir de proposer le 1^{er} test sans pression évaluative, puis le 2^e avec pression évaluative ou proposer le 1^{er} test sans aucun commentaire particulier, puis le 2^e en indiquant, par exemple, en amont du test qu'aucune différence entre les filles et les garçons n'a été observée lors du 1^{er} test.

Les habillages différents à proposer suivant les tests sont laissés au libre choix des professeur·es de manière à assurer leur engagement et l'adaptation du dispositif qu'il ou elle peut imaginer pour sa classe.

Dispositif 3

Pour observer des différences de confiance en soi des élèves selon leur genre, on peut utiliser l'outil « degrés de certitude » élaboré dans le cadre d'une étude (Sayac et Grapin, 2016). Cet outil comporte une échelle de 4 niveaux que les élèves doivent renseigner pour indiquer dans quelle mesure ils/elles sont assuré·es d'avoir réussi chaque exercice proposé.

1	2	3	4
pas sûr du tout	pas très sûr	sûr	sûr et certain

On peut utiliser cet outil lors de séances d'exercices ou d'évaluation, en proposant à chaque élève de le renseigner individuellement.

En faisant la moyenne des niveaux renseignés et en les comparant suivant le genre des élèves, on peut dégager des différences de confiance en soi entre les filles et les garçons.

Pour le temps 3, qui est celui de l'action, plusieurs propositions peuvent être faites. Les enseignant·es peuvent, sans s'y restreindre :

- Organiser des débats avec leurs élèves (voir Eduscol et autres) à partir des constats établis lors du temps 2. Par exemple, si le dispositif 3 a été testé et a montré des écarts de moyennes entre les degrés de certitudes des filles et des garçons, on peut questionner les élèves sur ces écarts et en débattre avec elles/eux.

² Ce qui est appelé « habillage de la tâche » correspond aux conditions (consignes, modalités de travail, etc.) que l'enseignant·e propose à ses élèves pour réaliser une activité. Selon ces conditions l'élève peut s'engager différemment dans l'activité. Par exemple, des chercheurs ont montré que lorsqu'on active l'identité (sexuée ou sociale) de l'élève avant de réaliser une tâche, cela convoque les stéréotypes attachés à cette identité et l'élève est alors soumis·e à la menace du stéréotype.

³ Test est entendu au sens large de série d'exercices à laquelle on confronte les élèves pour évaluer leurs performances.

- Élaborer des séances spécifiques pour promouvoir les filles/femmes dans les sciences (role models). Il existe des jeux gratuits⁴ et des ressources⁵ spécifiquement conçues à cette fin.

III. EXPÉRIMENTATION DU PROTOCOLE FÉM

1. *Déploiement du protocole*

Afin de tester l'opérationnalité des trois dispositifs proposés pour le temps 2, une expérimentation a été menée durant le dernier trimestre scolaire de l'année 2023-2024. Ces dispositifs ont été testés par des professeur·es volontaires enseignant de la maternelle (MS) au lycée (Seconde). Au total, 10 enseignant·es ont expérimenté dans leur(s) classe(s) un ou plusieurs des trois dispositifs (1 en MS (pré-élémentaire, 2^e année), 1 en MS-GS (pré-élémentaire, 2^e et 3^e années), 1 en CP (grade 1), 2 en CE1 (grade 2), 1 en CE2 (grade 3), 2 en CM1-CM2 (grade 4-5), 1 en Sixième (grade 6), 1 en Seconde (grade 10)) dans des établissements des académies de Paris et de Normandie.

Une fiche descriptive des trois dispositifs leur a été envoyée et commentée soit lors d'une réunion plénière en présentiel (pour les enseignant·es du primaire), soit lors de visios programmées à cette fin (collège et lycée). À l'occasion de ces rencontres (réunion ou visio), des éléments de contexte liés au temps 1 leur ont été exposés. Ainsi, les concepts de stéréotypes de genre et de menace de stéréotype ont été présentés aux enseignant·es, de même que des expérimentations « d'habillage de la tâche ». On peut néanmoins considérer que ces enseignant·es ont bénéficié du temps 1 du protocole FÉM, même si ce premier temps s'est déployé de manière synthétique.

En fin d'année, les enseignant·es ont rendu compte des dispositifs expérimentés en renseignant un questionnaire en ligne où ils/elles devaient indiquer :

- Quel(s) dispositif(s) ils/elles avai(en)t expérimenté(s) et les raisons de leur choix
- La mise en œuvre qu'ils/elles avaient adoptée et les adaptations éventuelles
- Les difficultés éventuellement rencontrées
- L'impact perçu sur leurs élèves
- Les conseils qu'ils/elles donneraient à un·e collègue qui souhaiterait mettre en place le dispositif
- Leur avis sur le dispositif expérimenté

Une réunion-bilan a également eu lieu en fin d'année pour les enseignant·es du 1^{er} degré.

2. *Premiers résultats*

Concernant le dispositif 1 (groupes mixtes/non mixtes)

Ce dispositif n'a été expérimenté qu'en primaire et majoritairement autour de situations de résolution de problèmes, soit dans le cadre de Rallye Maths (CE2 et CM1-CM2), soit dans un cadre de séance ordinaire. Les enseignant·es ont exprimé des difficultés à observer leurs élèves au cours des deux séances. Certaines ont utilisé une grille qu'elles ont renseignée ou abandonnée, mais toutes ont trouvé la charge d'observation trop lourde à réaliser seules. Elles ont proposé de mettre en œuvre le dispositif en demi-groupe ou alors accompagnées par une personne supplémentaire. Cette expérience d'observation les a néanmoins convaincues de l'intérêt de réaliser ces observations car elles ont bien

⁴ Par exemple : <https://www.cite-sciences.fr/fr/au-programme/lieux-ressources/carrefour-numerique2/ressources-en-ligne/jeu-femmes-scientifiques>

⁵ Par exemple, la ressource Canopé : <https://nuage01.apps.education.fr/index.php/s/4yPZ8yLg7rscwLz>

perçu que leurs élèves (filles et garçons) se comportaient différemment selon les deux modalités de groupe testées. En CM1-CM2, l'enseignante a indiqué que « les filles sont plus à l'aise quel que soit leur niveau dans un groupe de filles exclusivement ou alors dans un groupe de garçons à faible niveau ». Une enseignante estime qu'« en groupe mixte, les filles ont moins de place pour s'exprimer ; les garçons imposent davantage leurs idées en parlant fort sans forcément argumenter ». Une autre enseignante a constaté que « lorsque mes élèves ne sont qu'entre filles ou qu'entre garçons les interactions sont différentes. Les filles discutent et échangent calmement. Il y a une résolution plus lente, mais plus interrogée. Elles essayent d'utiliser du matériel pour confirmer leur réflexion. Alors que les garçons entrent eux, ils ont moins de doutes parfois et vont plus rapidement dans les exercices ». En MS, l'enseignante qui a expérimenté les deux modalités de groupe sur une même séance a été étonnée de remarquer que les élèves dans les groupes « non mixte » ne communiquaient pas entre eux durant l'activité.

Presque tous les enseignant·es ayant expérimenté ce dispositif ont indiqué qu'au-delà de la mixité de genre, il leur avait paru important de prendre en compte les différents « niveaux » de leurs élèves car cela avait également une incidence sur les interactions entre élèves. L'enseignante de CE2 a ainsi précisé que « lorsque les élèves sont mixés, ce sont les élèves qui sont reconnus par leur pairs plus forts qui prennent le lead dans le groupe ». Au cours de la séance-bilan, plusieurs enseignant·es ont exprimé le souhait d'expérimenter à nouveau ce dispositif l'année prochaine, en testant différentes modalités de groupes (mixte/homogène, mixte/hétérogène, non-mixte/homogène, non-mixte/hétérogène).

Les avis sur ce dispositif ont été très positifs, globalement proche de ce commentaire :

je trouve ce dispositif assez intéressant et concluant concernant les résultats puisqu'il permet d'observer le comportement des élèves en situation. Ce dispositif correspond à des activités que les élèves peuvent avoir l'habitude de faire en classe en temps normal. Ils restent donc naturels et ne modifient pas leur comportement.

Les conseils donnés ont été ciblés sur l'observation, notamment de « réaliser ce dispositif en demi-groupe afin de faciliter les observations » ou bien de « se filmer, et d'inviter des collègues à observer avec lui ».

Concernant le dispositif 2 (habillage de la tâche)

Ce dispositif a été expérimenté avec une grande liberté de mise en œuvre. Dans les classes de primaire, trois tests de calculs identiques ont généralement été proposés en élémentaire alors qu'en MS-GS des tests correspondant à différents jeux d'écritures de nombres ont été donnés aux élèves sur des fiches à support effaçable. Les choix d'« habillages de la tâche » ont varié selon les professeur·es qui ont fait preuve d'une grande créativité. L'enseignante de CP a choisi de faire précéder la dernière passation de test par une « méditation genrée » qu'elle a imaginée. Cette méditation a consisté à faire fermer les yeux et à faire imaginer aux élèves soit qu'ils étaient des « valeureux chevaliers qui allaient s'attaquer à des dragons » pour les garçons, soit qu'elles étaient « des princesses qui allaient se parer de leur plus belle robe pour aller au bal » pour les filles. L'enseignante de MS-GS a, de son côté, choisi comme habillage de la tâche de préciser en amont de la passation du troisième test que les filles avaient bien mieux réussi le test précédent que les garçons. Les autres enseignant·es ont joué sur le temps imposé pour réaliser les différents tests, en le marquant de manière ostensible avec un chronomètre, généralement pour le dernier test comme indiqué dans la fiche descriptive. En seconde, l'enseignante a choisi de mettre une pression évaluative pour le 2^e contrôle commun de son établissement en indiquant à ses élèves que « c'était l'ultime occasion pour eux de faire mieux ». Les deux contrôles communs n'étaient pas équivalents du point de vue des tâches à réaliser, ce qui différait de ce qui avait été prescrit dans la fiche de présentation de ce dispositif.

Les enseignant·es n'ont pas rencontré de difficulté à mettre en place ce dispositif qu'ils/elles se sont approprié assez facilement avec des variantes d'habillage de la tâche librement choisies. L'impact sur les élèves a été différemment constaté. Plusieurs enseignant·es ayant choisi de jouer sur la durée accordée pour réaliser les différents tests ont indiqué que les filles leur ont semblé « plus stressées » par l'usage du chronomètre. Dans une classe où l'enseignante avait indiqué que les filles avaient mieux réussi le test précédent que les garçons, ces derniers se sont opposés à cette affirmation en arguant que ce n'était pas possible et que c'était faux. Cette contestation a amoindri l'effet voulu et l'incidence sur les performances des filles n'a pas été marquée. Au CP, la méditation genrée n'a pas eu d'effet sur les filles qui ne sont pas rentrées dans le jeu de l'enseignante car ce n'était pas son discours habituel. Par contre, les garçons y sont totalement rentrés avec pour conséquence des résultats bien moins bons au test post-méditation. On peut donc penser que les garçons ont été captivés par la méditation proposée, au détriment de leur activité mathématique.

En MS-GS, l'enseignante a proposé 16 mêmes tâches d'écriture de nombres (lignes à compléter) selon trois modalités⁶. Les résultats qu'elle a compilés sont intéressants, surtout en ce qui concerne la troisième modalité puisque les filles ont grandement amélioré leurs performances (voir figure ci-dessous), même si pour les filles et les garçons les résultats se sont naturellement améliorés au cours des passations du fait de la répétition des tâches.

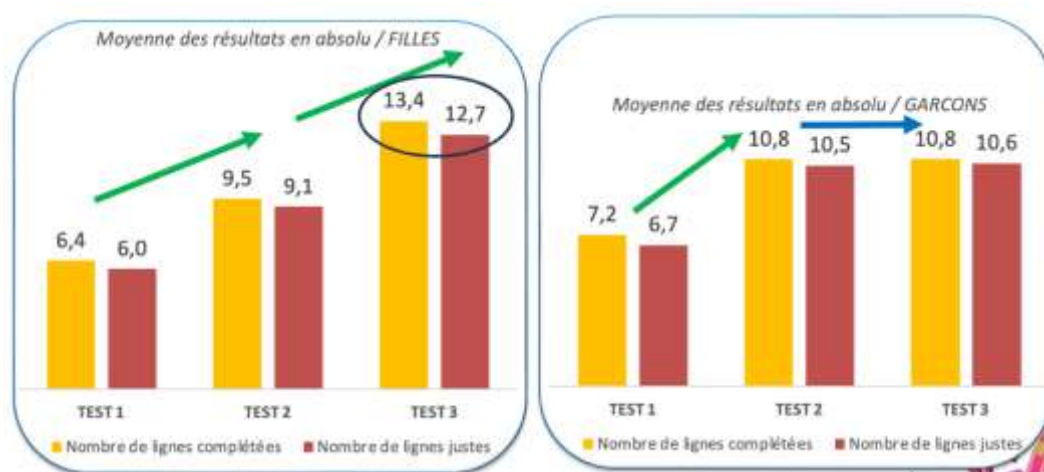


Figure 1 – moyennes des filles et des garçons aux 3 tests donnés suivant des habillages différents

En seconde, l'enseignante a également comptabilisé les résultats de ses élèves aux deux contrôles communs auxquels ils/elles ont participé, le deuxième étant celui où une pression évaluative avait été mise. Elle a indiqué qu'au premier contrôle, ses élèves ont obtenu une moyenne de 11,1 sur 20 (filles : 10,4 / Garçons : 11,9) alors qu'au deuxième, les moyennes étaient plus faibles aussi bien pour les filles que pour les garçons du fait de la complexité plus grande de cette deuxième évaluation (8,7 sur 20 en moyenne dont 8,5 pour les filles et 9,9 pour les garçons : 9,9). Elle a précisé que sur les 14 garçons de sa classe, 2 avaient mieux réussi le 2^e contrôle, 9 ont fait moins bien et 3 ont obtenu le même score. Concernant les 17 filles de sa classe, 4 ont fait mieux, 12 ont fait moins bien et 1 seule a obtenu le même score.

⁶ Test 1, chronométré mais non annoncé comme tel en amont ; Test 2, chronométré et annoncé comme tel en amont ; Test 3, chronométré et annoncé comme tel en amont, avec la précision sur sous cette version ??, les filles ont en général de très bonnes performances.

Ce dispositif a intéressé les enseignant·es l'ayant expérimenté. Ils/elles ont émis des commentaires qu'il conviendra de retenir comme le fait de donner trois fois le même test qui ne leur paraît pas judicieux car les élèves reconnaissent les tâches identiques et sont plus ou moins enthousiastes à les refaire, ou qu'il pourrait être intéressant de croiser les habillages de tâches expérimentés. Par exemple, imposer une durée limitée pour réaliser un des tests en précisant également en amont à la classe que les filles (ou les garçons) le réussissaient généralement mieux. Le dernier commentaire fait par plusieurs enseignant·es concerne la lourdeur des données à récolter et à croiser.

Concernant le dispositif 3 (degrés de certitude)

Le troisième dispositif a été celui qui a été le plus expérimenté. Il a été choisi parce qu'il a semblé facile à utiliser, sans grande perturbation sur les pratiques de classe habituelles. La curiosité vis-à-vis des résultats concernant la confiance en soi des filles a également été avancée par les enseignant·es l'ayant choisi. Les adaptations réalisées concernent les échelles de certitude adoptées. En MS-GS, l'enseignante a proposé un jeu de couleurs variant suivant le degré de certitude des élèves, plus adaptée à leur jeune âge.

En Seconde, un questionnaire a été proposé à l'issue du deuxième contrôle commun où les élèves devaient non seulement indiquer leur degré de certitude pour chacun des sept exercices qui le composait, mais aussi estimer leur note sur 40. Une enseignante de CE1 a jugé trop lourde l'échelle à quatre niveaux de certitude et en a proposé une à trois niveaux (pas sûr du tout/pas très sûr/sûr). En MS, l'autre enseignante ayant expérimenté le dispositif a choisi d'interroger individuellement et à l'oral ses élèves pour mesurer le niveau de certitude accordé à ce qu'ils/elles avaient fait.

Les effets sur les élèves ont été différemment appréciés. En seconde, l'enseignante a relevé que sur les 19 filles de sa classe, 13 ont surestimé leur note, 3 l'ont sous-estimée et 3 ont donné la note obtenue. Sur les 14 garçons, 11 ont surestimé leur note, 1 l'a sous-estimée et 2 ont donné la note obtenue. L'enseignante de Sixième a elle constaté que les filles sont rarement « sûres et certaines » de leurs réponses, quand bien même celles-ci sont exactes. En CM1-CM2, l'enseignante a observé une plus grande confiance en soi des garçons. Ce constat a été fait dans l'autre CM1-CM2 où l'enseignant a relevé des écarts marqués sur les quatre exercices proposés à ses 20 élèves (10 filles et 10 garçons) : 1,25 % des filles ne sont « pas sûres du tout » contre 0 % des garçons ; 11,25 % des filles ne sont « pas très sûres » contre 5 % des garçons ; 13,75 % des filles sont « sûres » contre 23,75 % des garçons et 20 % des filles sont « sûres et certaines » contre 21,25 % des garçons. En CE2, l'enseignante n'a pas remarqué de différences de degré de certitude entre les filles et les garçons, mais a davantage perçu des différences qu'elle a qualifié de « sociales » en précisant que les élèves en difficulté, filles ou garçons, se sont systématiquement positionné·es sur des bas niveaux de certitude, avant même parfois d'avoir réalisé l'exercice. L'enseignante de CE1 a choisi de faire renseigner les degrés de certitude par binôme non mixte, avec pour résultats des effets contrastés selon la nature du binôme (homogène ou hétérogène du point de vue des performances). L'enseignante de MS qui a interrogé oralement ses élèves n'a pas réellement vu de différence, si ce n'est une fille qui « n'était pas confiante du tout dans sa réalisation et elle n'arrêtait de me regarder dès qu'elle faisait quelque chose pour savoir si elle faisait quelque chose de bien ou non, si elle pouvait continuer ou non ».

Les conseils donnés concernent le fait de proposer ce dispositif plus tôt dans l'année et à plusieurs reprises pour relever les évolutions au cours de l'année ou d'entraîner les élèves à utiliser à bon escient l'outil proposé, ou encore de réduire l'échelle à 3 niveaux plutôt que 4.

Les enseignant·es ont trouvé ce dispositif intéressant pour « connaître le degré de confiance en soi des élèves de sa classe. Il permet de mieux se rendre compte de la façon de penser des élèves (ceux qui

réalisent la tâche sans réfléchir et qui reviennent sur ce qu'ils ont fait avant de répondre à la question pour être sûr de dire qu'ils sont sûr, ceux pour qui ce retour n'est pas nécessaire et ceux pour qui, même si la consigne est respectée, ne sont jamais sûr à 100 % de leur réponse) » ou pour « mesurer et accompagner les élèves qui se mettent des barrières face aux mathématiques » ou encore pour « discuter de tout ça avec mes élèves pour travailler sur l'estime de soi et confiance en soi ». Certain·es ont relevé la lourdeur de la récolte des données à compiler et le temps nécessaire pour exploiter les résultats obtenus.

IV. CONCLUSION

Ce texte rend compte d'une étude menée à titre exploratoire, en fin d'année scolaire, afin d'éprouver la validité globale d'un dispositif de formation à l'égalité élaboré dans le but de faire prendre conscience aux enseignant·es des comportements potentiellement différents de leurs élèves filles et garçons lors d'activités mathématiques de classe. Une assez grande liberté a été laissée aux professeur·es ayant accepté d'expérimenter les dispositifs proposés pour faciliter leur engagement et leur implication, mais également pour permettre d'anticiper les biais d'interprétation éventuels des trois dispositifs et leurs écueils potentiels. Cette liberté aurait pu être préjudiciable à la qualité scientifique de l'étude, notamment au niveau de la comparaison des tests suivant les différentes tâches proposées, mais d'une part ce risque a été minimisé par des recommandations appuyées lors de la présentation des dispositifs et d'autre part il a été assumé au regard du caractère exploratoire revendiqué de l'étude.

L'expérimentation des trois dispositifs proposés pour le temps 2 du protocole FÉM a ainsi permis de dégager plusieurs constats :

- Le premier concerne l'opérationnalité des dispositifs qui ont expérimentés sans difficulté de la maternelle au lycée avec, à la marge, des adaptations ne remettant pas en cause les objectifs visés. Leur mise en œuvre par les enseignant·es n'a pas été problématique.
- Le choix laissé aux enseignant·es du ou des dispositifs qu'ils/elles souhaitaient expérimenter dans leur classe a permis une appropriation aisée et un engagement notable. Même si les enseignant·es étaient tous volontaires, ils/elles ont témoigné d'un réel intérêt pour cette expérimentation et ont fait preuve d'une grande créativité pour mettre en œuvre les dispositifs dans leur classe. Ils/elles ont même été force de proposition pour approfondir ou compléter les dispositifs.
- Malgré les difficultés liées à l'observation des élèves ou à la récolte et au traitement des données, les dispositifs ont bien permis aux enseignant·es de réaliser qu'il se passait quelque chose dans leur classe du point de vue du genre lors de séances de mathématiques. Ils ont permis d'éveiller l'attention des enseignant·es sur la question des inégalités de genre en mathématiques, avec pour conséquence l'envie de poursuivre l'expérimentation dès la rentrée prochaine.

En conclusion de ce bilan d'expérimentation, je considère que les enseignant·es ayant testé ces dispositifs ont « chaussé les lunettes de genre » (Plateau, 2011) et qu'ils/elles veilleront à l'avenir à prévenir les inégalités de genre qui pourront advenir dans leurs classes. De manière plus objective, il faudrait définir des indicateurs permettant de mesurer les effets de ce protocole en termes de réduction des inégalités de genre en mathématiques à la fois sur les enseignant·es (au niveau de leur pratique) et à la fois sur les élèves (au niveau de leurs performances et de leur bien-être), ce qui reste à faire.

RÉFÉRENCES

- Collet, I. (2018). Dépasser les « éducations à » : vers une pédagogie de l'égalité en formation initiale du personnel enseignant. *Recherches féministes*, 31(1), 179-197. <https://doi.org/10.7202/1050660ar>
- Duru-Bellat, M. (1994). Filles et garçons à l'école, approches sociologiques et psycho-sociales. *Revue française de pédagogie*, (109), 111-141. <https://doi.org/10.3406/rfp.1994.1250>
- Espinoza, P., Arêas da Luz Fontes, A. B. et Arms-Chavez, C. J. (2014). Attributional gender bias: Teachers' ability and effort explanations for students' math performance. *Social Psychology of Education*, 17, 105-126. <http://dx.doi.org/10.1007/s11218-013-9226-6>
- Kollmayer, M., Schober, B. et Spiel, C. (2018). Gender stereotypes in education: Development, consequences, and interventions. *European Journal of Developmental Psychology*, 15(4), 361-377. <https://doi.org/10.1080/17405629.2016.1193483>
- Loségo, P. et Durler, E. (2023). *Former contre les inégalités. Pratiques et recommandations pour la formation des enseignant·es*. Editions Alphil.
- Morin-Messabel, C., Ferrière, S. et Salle, M. (2012). L'éducation à l'égalité « filles-garçons » dans la formation des enseignant-e-s. Amorce par l'exemple des biais perceptifs d'étudiant-e-s de Master 2 enseignement. *Recherche et formation*, (69), 47-64. <https://doi.org/10.4000/rechercheformation.1709>
- Mosconi, N. (2001). Comment les pratiques enseignantes fabriquent-elles de l'inégalité entre les sexes ? *Les dossiers des sciences de l'éducation*, 5(1), 97-109. <https://doi.org/10.3406/dsedu.2001.953>
- Plateau, N. (2011, 14 février). Chaussons nos lunettes de genre. *Les Cahiers Pédagogiques*. <https://www.cahiers-pedagogiques.com/chaussons-nos-lunettes-de-genre/>
- Salle, M. (2014). Formation des enseignants : les résistances au genre. *Travail, genre et sociétés*, 31(1), 69-84. <https://doi.org/10.3917/tgs.031.0069>
- Sayac, N. et Grapin, N. (2016). Stratégies et degré de certitude des filles et des garçons en mathématiques : quelles différences pour quels résultats ? *Repères IREM*, (104), 43-57. <https://bibnum.publimath.fr/IWR/IWR16015.pdf>
- Sayac, N. (2023). Comment expliquer les écarts de performance entre les filles et les garçons en mathématiques aux évaluations nationales de CP-CE1 ? *Évaluer-Journal international de recherche en éducation et formation*, 9(3), 31-50. <https://doi.org/10.48782/e-jiref-9-3-31>

FORMATION DES ENSEIGNANTS À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES PAR UNE APPROCHE EN PÉDAGOGIE UNIVERSELLE – ACCESSIBILITÉ AU SAVOIR POUR TOUS DANS UNE ÉCOLE INCLUSIVE

| PRATALI* LAURENT, EYSSERIC** PIERRE ET GOMBERT*** ANNE

Résumé | Cet article présente la transformation progressive d'un dispositif de formation d'enseignants et de futurs enseignants aux pratiques de l'école inclusive. Ce changement, opéré progressivement au cours de trois années de mise en œuvre avec divers publics, a été porté par la volonté de se défaire de la logique d'adaptation (longtemps centrée sur la singularité des besoins spécifiques d'un élève) pour passer à une logique de pédagogie universelle permettant l'accessibilité des savoirs scolaires pour tous en prenant en compte les *besoins situés* dans les situations didactiques.

Mots clefs : accessibilité, adaptation, pédagogie universelle, didactique, formation des enseignants

Abstract | This article presents the gradual transformation of a training program for teachers and future teachers in inclusive school practices. This change, which took place gradually over the course of three years of implementation that targeted different types of students and teachers, was driven by the desire to draw away from a logic of adaptation (that focused for a long time on the singularity of a pupil's specific needs) towards a logic of universal pedagogy, making school knowledge accessible to all by taking into account needs that emerged from didactic situations.

Keywords : Accessibility, adaptation, universal pedagogy, teaching, teachers training

I. CHANGEMENT DE PARADIGME DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS SPECIALISES EN FRANCE

En France, jusqu'en 2020, les questions relatives à la scolarisation inclusive étaient portées quasi-exclusivement au sein des formations spécialisées. Plus spécifiquement, la création du CAAPSAIS¹ en juin 1987 marque une rupture majeure avec les précédentes formations en adoptant comme principe fondamental « l'adaptation » des pratiques pédagogiques aux besoins des apprenants que l'on a dès lors cessé de qualifier « d'inadaptés ».

À côté d'un tronc commun de connaissances, la formation était spécifiée en s'appuyant sur une catégorisation des élèves à besoins éducatifs particuliers, entre élèves en grande difficulté scolaire et élèves troublés avec les différentes sous divisions qu'il y avait lieu d'identifier et qui conduisaient à une spécialisation par options correspondantes à ces catégories de public fondées sur leur inadéquation ou leur trouble.

Les enseignants spécialisés construisaient alors leur identité professionnelle sur la base de ce tronc commun et de cette spécification faisant d'eux des « spécialistes » de tel ou tel public d'élèves, et visaient à développer des pratiques pédagogiques « adaptées » qui se devaient de répondre à la « singularité » des élèves.

* INSPE d'Aix Marseille Université – France – laurent.pratali@univ-amu.fr

** INSPE d'Aix Marseille Université – France – pierre.eysseric@univ-amu.fr

*** Centre Psychlé (UR3275) et INSPE d'Aix Marseille Université – France – anne.gombert@univ-amu.fr

¹ Décret n° 87-415 du 15 juin 1987, portant sur la création du certificat d'aptitude aux actions pédagogiques spécialisées d'adaptation et d'intégration scolaires (CAAPSAIS)

La création par décret en aout 2017 du CAPPEI² a fait disparaître cette spécification en fonction d'une typologie d'élèves pour mettre en avant l'idée que l'enseignant spécialisé est avant tout une personne ressource pour l'ensemble de la communauté éducative (en particulier pour ses collègues enseignants « ordinaires »), au service de la réussite de tous. Cela s'est accompagnée d'une réforme de la formation des enseignants spécialisés. Ainsi la formation préparatoire au certificat d'aptitude professionnelle pour les aides spécialisées, les enseignements adaptés et la scolarisation des élèves en situation de handicap³ qui existait jusqu'alors et depuis 13 ans s'est vue abrogée.

À côté d'un important tronc commun de formation, les enseignements ne se déclinent plus sous forme d'options pensées selon une catégorie de public, mais sous forme de modules dédiés, pour partie, à l'identification des spécificités des différents contextes d'exercice que l'enseignant spécialisé, devenu personne ressource au service d'une école pour tous, pourra rencontrer dans son parcours professionnel.

Cette transformation profonde de la formation des enseignants spécialisés entre en tension avec trente ans de pratique(s) des formateurs, autrefois affairés à prôner des actions spécifiques pour un public spécifique et aujourd'hui appelés à être des formateurs aux pratiques pédagogiques permettant l'accessibilité de tous au savoir, définition même de ce qu'est l'école inclusive.

II. RENFORCEMENT DES CONTENUS RELATIFS A L'ECOLE INCLUSIVE EN FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS

En suivant la même logique de transformation des systèmes éducatifs vers l'ambition inclusive (Ebersold, 2024 ; Feuilladiou, Gombert et Ebersold, 2022), la formation des enseignants « ordinaires » a entrepris également sa mue. Cette dynamique envisageait optimalement la mission d'enseignant spécialisé comme une véritable ressource au service de ses collègues déjà sensibilisés aux questions d'accessibilité aux savoirs.

Là encore, plusieurs étapes transformatrices ont été nécessaires puisque le référentiel *former l'enseignant du XXI^e siècle* annexé à l'arrêté du 27 août 2013 avait déjà pris en compte les évolutions paradigmatiques de l'école inclusive en stipulant, par exemple que chaque enseignant doit être en capacité, à la fin de sa formation, de « construire, mettre en œuvre et animer des situations d'enseignement et d'apprentissage prenant en compte la diversité des élèves » (compétence P5 du référentiel) ou encore d'« accompagner les parcours de formation et d'orientation de tous » (compétence CC5 du référentiel). Pour autant, « les contenus de formation restaient comme « peau de chagrin » dans tout le cursus. Ce constat, en demi-teinte, a conduit les instances ministérielles à légiférer sur la formation initiale. L'arrêté, 25-11-2020-JO du 18-12-2020⁴, a imposé aux INSPÉ d'injecter, [...] pour tous les enseignants et personnels éducatifs en formation, un volume horaire de 25 heures explicitement dédiées pour la scolarisation inclusive et l'enseignement à la diversité des publics (Amiot, et al., 2024, p. 199-200).

² Décret n° 2017-169 du 10 février 2017, portant sur la création du Certificat d'Aptitude Professionnelle aux Pratiques de l'Education Inclusive (CAPPEI)

³ Décret n° 2004-13 du 5 janvier 2004, modifié par le décret n° 2005-1299 du 19 octobre 2005, portant sur la création du certificat d'aptitude professionnelle pour les aides spécialisées, les enseignements adaptés et la scolarisation des élèves en situation de handicap et du certificat complémentaire pour les enseignements adaptés et la scolarisation des élèves en situation de handicap (CAPA-SH et 2CA-SH)

⁴ Arrêté n° 0305 du 18 décembre 2020 « cahier des charges des contenus de la formation initiale spécifique pour les étudiants ou fonctionnaires stagiaires se destinant aux métiers du professorat et de l'éducation concernant la scolarisation des élèves BEP »

Précisément, le cahier des charge, annexé à l'arrêté stipule que « les contenus, en référence explicite à l'école inclusive, sont ventilés, soit au sein des UE de compétences communes soit dans un module spécifique nécessairement articulé aux autres éléments de culture commune ».

Ainsi, Il s'agit donc bien d'intégrer la réflexion sur l'école inclusive dans la formation initiale, mais non pas comme une entité « à part », mais bien comme une réflexion « avec et à travers » les contenus abordés dans les différents parcours et ce afin que tous les étudiants et fonctionnaires stagiaires se destinant aux métiers du professorat et de l'éducation atteignent les compétences métiers attendues en fin de la formation.

Il s'agira pour l'enseignant et toujours selon ce cahier des charges d'être capable d'« analyser les tâches scolaires et les contenus d'enseignement » et d'« identifier les besoins des élèves pour construire les réponses didactiques et pédagogiques ».

Ces thématiques de formation sont donc bien ancrées dans la formation initiale au sein même des contenus déjà dispensés, le cahier des charges les mentionnant au titre de la compétence P1 du référentiel métier de 2013 : « maîtriser les savoirs disciplinaires et leur didactique ».

C'est dans ce contexte, en tant que formateurs intervenant à la fois sur la formation initiale et sur la formation des enseignants spécialisés, que nous avons porté une réflexion pour développer un dispositif de formation à l'école inclusive qui tienne compte du changement de paradigme, s'intègre pleinement dans la formation initiale et soit au cœur des savoirs disciplinaires et didactiques.

III. UN DISPOSITIF DE FORMATION VISANT UNE METHODOLOGIE POUR L'ELABORATION D'ADAPATIONS DANS LA PHASE DE CONCEPTION D'UNE SITUATION D'ENSEIGNEMENT

Initialement conçu par Anne Gombert, le dispositif de formation à l'école inclusive proposé aux futurs enseignants et fonctionnaires stagiaires en formation initiale et aux futurs enseignants spécialisés depuis 3 ans fait l'objet d'une réflexion collaborative des trois auteurs de cet article. Dans le scénario l'objectif annoncé explicitement aux participants est d'« *appréhender et mettre en œuvre la logique d'accessibilité pour tous par une approche en pédagogie universelle* ». La consigne initiale est la suivante « *En partant de l'analyse critique d'une situation d'enseignement réelle (Romane et les soustractions), vous allez concevoir, comme si vous étiez l'enseignante de Romane une séance d'enseignement accessible à tous les élèves d'une classe, y compris à Romane, élève présentant des difficultés avérées dans le domaine des mathématiques.* »

Le diaporama de présentation sur lequel nous appuyons l'animation du dispositif de formation présente des références scientifiques en particulier ceux de Gombert et Million-Fauré à travers leur article « Analyse d'une situation en mathématiques pour une élève dyscalculique. Méthodologie pour la conception d'adaptations pédagogiques et didactiques publié dans *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, en 2021.

Le dispositif se décline en huit étapes successives :

Étape 1 : présentation de la situation d'enseignement (support élève, consigne, photo de la classe, organisation spatiale)

Ce premier moment est collectif. Il doit permettre à tous de s'approprier la situation d'enseignement à partir des différents documents fournis : description de la situation d'enseignement/apprentissage et support élève, profil scolaire et cognitif de Romane et des éléments de son bilan logico-mathématique faisant apparaître une dyscalculie sévère.

Tâche des élèves et support

Il s'agit d'un exercice de calcul mental en CM1 nécessitant la mise en œuvre d'une série de soustractions. Dix nombres sont inscrits au tableau par l'enseignante [622 – 850 – 899 – 1001 – 1652 – 2301 – 4010 – 5643 – 9000 – 9991]. Les élèves doivent « soustraire 2 à chaque nombre 5 fois de suite ». Le travail s'effectue par écrit sur une « fiche réponse ».

Passation de la consigne par l'enseignante de Romane

L'enseignante distribue à tous les élèves la « fiche réponse » et les invite à travailler individuellement. Elle présente oralement la consigne suivante : « *vous devez soustraire 2 à chaque nombre, cinq fois de suite* » puis, elle ouvre le tableau sur lequel cette consigne est inscrite ainsi que les dix nombres de départ faisant l'objet des calculs [622 – 850 – 899 – 1001 – 1652 – 2301 – 4010 – 5643 – 9000 – 9991]. Elle relit cette consigne, en précisant que c'est un exercice qu'ils ont déjà effectué et que cela ne devrait pas trop « *poser de problème* ».

Étape 2 : analyse du profil de Romane

Ce deuxième moment est proposé en travail individuel. C'est l'analyse ascendante (Assude, Mercier, Sensevy, 2007) à partir du besoin de cette élève sur la base de son profil (voir Annexe 1). Il s'agit pour chacun.e d'identifier les difficultés et points d'appui de Romane.

Étape 3 : synthèse sur le profil de Romane

Il s'agit ici d'un moment collectif au cours duquel les formateurs, en s'appuyant sur les propositions des étudiant-e-s, effectuent une synthèse des difficultés et points d'appui repérés.

Étape 4 : travail sur les programmes

C'est le moment de l'analyse descendante. Ici il s'agit de regarder quelle est la prescription institutionnelle concernant le calcul mental à l'école. Les étudiant-e-s travaillent individuellement à partir des textes officiels ou à partir d'extraits mis à leur disposition. Malheureusement par manque de temps, ce travail est souvent pris en charge par les formateurs.

Étape 5 : compléments didactiques

Dans ce moment collectif, le formateur en mathématiques qui coanime l'atelier apporte quelques compléments relatifs à l'enseignement du calcul à l'école. Cet apport didactique (voir Annexe 2) s'appuie sur la brochure Calcul mental à l'école primaire (COPIRELEM, 2012) et on y insiste tout particulièrement sur la typologie des modes de calcul s'appuyant sur les modes de fonctionnement cognitif convoqués (réfléchi ou automatisé) et sur les moyens utilisés pour calculer (de tête, avec un écrit, avec un instrument).

La typologie présentée doit permettre à chacun de mieux cerner l'apprentissage visé dans la séance objet de notre analyse.

Étape 6 : inventaire des techniques pour réaliser la tâche

Nous sommes ici dans l'analyse ascendante à partir de la tâche (Assude, Mercier, Sensevy, 2007). En groupes de 4 ou 5, les étudiant-e-s doivent identifier les techniques possibles c'est-à-dire celles que les élèves peuvent utiliser pour effectuer la tâche – ici, soustraire 2 à chaque nombre cinq fois de suite.

Étape 7 : panel des techniques possibles (voir Faure-Millon et Gombert, 2021)

Après les propositions de chaque groupe, nous procédons à une synthèse sous forme de familles de techniques ; ce sont celles-ci que nous présentons ci-dessous. Nous le complétons ensuite avec le repérage des variables de la situation proposée.

Technique 1 : <i>compte à rebours direct par pas de 2</i>	Variante de la technique 1 : <i>compte à rebours par pas de 1 et sélection d'une valeur sur deux</i>	Technique 2 : <i>effectuer mentalement les soustractions</i>	Technique 3 : <i>addition à trous</i>	Technique 4 : <i>Décomposition du nombre de départ</i>
		$622 - 2 = 620$ $620 - 2 = 618$...	$? + 2 = 622$ A quel nombre faut-il ajouter 2 pour trouver 622 ?	$622 = 600 + 10 + 12$ $622 - 2 = 600 + 10 + 10$ $622 - 2 = 620$

Figure 1 – Panel des techniques

Ce panel n'est pas exhaustif. Les groupes avec lesquels nous avons travaillé jusqu'ici ont identifié de nombreuses variantes de ces techniques liées aux différentes variables de la situation qui sont de deux ordres :

Les variables didactiques :

- Le nombre de départ : pair ou impair, nombre à deux, trois ou quatre chiffres, nombre nécessitant ou non un passage de la dizaine ou de la centaine lors des soustractions.
- Le nombre à soustraire : 2 ; 1 ; 5 ; 10 ...
- Le matériel mis à disposition : droite numérique, matériel de numération, ...

Variables pédagogiques :

- Nombre de soustractions
- Nombre d'items

Ces dernières variables sont sans incidence sur les techniques que les élèves pourront mettre en œuvre, mais elles peuvent avoir un effet non négligeable sur l'investissement des élèves dans la tâche. Et il s'agit là aussi de facteurs sur lesquels jouer pour rendre la situation accessible à tous.

Étape 8 : rendre la situation accessible à tous

En groupes de 4 ou 5, les étudiant-e-s doivent sans modifier l'objectif d'apprentissage, aménager la tâche afin de la rendre accessible à tous, et en particulier à Romane.

Leurs propositions doivent se matérialiser dans la production d'« une fiche de préparation » dont nous fournissons la trame.

Ainsi ces huit moments visent l'appropriation par nos étudiant-e-s d'un cadre de pensée pour la mise en œuvre d'une pédagogie universelle.

IV. ANALYSE CRITIQUE DU DISPOSITIF MIS EN ŒUVRE AU COURS DES TROIS ANNEES D'EXPERIMENTATION ET MODIFICATIONS TRANSFORMATRICES

Au cours des 3 années de mise en œuvre nous avons constaté que ce dispositif de formation permettait effectivement d'enrôler l'ensemble des étudiant.e.s ou stagiaires.

En outre, l'analyse du profil de Romane permet de dégager une liste exhaustive de difficultés et de points d'appui. Nous en profitons pour attirer l'attention des formés sur la nécessité d'identifier chez tout élève, quelque soit la nature de ses difficultés, des points d'appui qui seront des leviers incontournables vers la réussite. Nous convenons aussi que cela ne relève pas toujours de l'habitude et demande parfois un effort particulier tant il est plus aisé de pointer les manques plutôt que le potentiel.

L'analyse de la prescription (étape 4) est prise en charge par les formateurs qui complètent par des apports relevant de la didactique de la discipline (étape 5). Ces apports sont appréciés, car ils viennent clarifier et donner du sens aux programmes en les mettant en lien avec l'activité de l'élève.

Cependant, si nous avons toujours été satisfaits de l'engagement des groupes et de la qualité de leur travail sur ces 5 premiers temps du dispositif, il n'en était pas de même pour l'étape 6 concernant l'analyse de la tâche proposée aux élèves dans la situation présentée. En effet nous avons souvent été dans l'obligation de clarifier nos attentes et d'insister sur la recherche du panel le plus large possible de techniques auxquelles tout un chacun pourrait avoir recours.

D'une part, nombreux étaient les étudiant.e.s ou stagiaires nous demandant s'ils devaient « se mettre à la place de l'élève en difficulté ».

D'autre part le panel de technique proposé était peu étoffé et chaque technique était présentée sans trop de précision nous obligeant à relancer la réflexion des groupes et à demander une présentation des plus précise.

Ce constat, récurrent au fil des groupes avec lesquels nous travaillions, nous a conduit à nous interroger sur la conduite de notre atelier et d'opérer des transformations de notre ingénierie pédagogique (Pratali et Eysseric, 2023).

Nous avons alors postulé que le fait de préciser la nature des difficultés de Romane (la référence de l'article que nous donnions dès le début de l'atelier indique que la recherche porte sur une élève dyscalculique) pouvait sinon « enfermer la réflexion » tout au moins la restreindre à une approche adaptative. L'étude du profil de Romane renforce ce phénomène en orientant naturellement vers la recherche de solutions à un problème lié à la singularité d'une élève en les éloignant de l'importance de l'analyse de la tâche « pour elle-même » et de la dynamique universelle recherchée.

En regard de ces constats, la conduite du dispositif a été ajustée en masquant le profil de Romane au lancement de l'activité (étape 1) pour ne l'introduire qu'après une première réécriture de la situation d'enseignement/apprentissage.

Au final, le nouveau scénario favorisant la convocation de la logique de conception en pédagogie universelle se décline comme indiqué dans le tableau ci-dessous, et comporte désormais 9 étapes.

Étape 1	Présentation de la situation d'enseignement par les formateurs (support élève, consigne, photo de la classe présentation son organisation spatiale).
Étape 2	Les étudiant.e.s ou stagiaires procèdent à l'analyse de la tâche en explorant l'ensemble des techniques de résolution de celle-ci.
Étape 3	Synthèse des techniques envisagées.
Étape 4	Les participant.e.s procèdent à l'analyse descendante de la situation (travail sur les programmes).
Étape 5	Les formateurs complètent l'analyse descendante par des apports didactiques complémentaires.

Étape 6	Les étudiant.e.s ou stagiaires procèdent à une première réécriture de la situation d'enseignement dans une perspective universelle, en s'appuyant uniquement sur ce qui ressort de l'analyse descendante et de l'analyse ascendante portant sur la tâche.
Étape 7	Les participant.e.s procèdent à l'analyse du profil d'un élève à besoin éducatif particulier.
Étape 8	Synthèse des éléments de profil (difficultés et points d'appui).
Étape 9	Les étudiant.e.s ou stagiaires confrontent leur première réécriture aux difficultés et potentialités de l'élève à besoin éducatif particulier pour s'assurer que la situation aménagée pour tous lui est effectivement accessible. Le cas échéant ils procèdent à une deuxième réécriture pour faire apparaître les ajustements qui s'avèreraient nécessaires pour cet élève.

Figure 2 – Nouveau scénario du dispositif de formation

V. DISCUSSION CONCLUSIVE

Les transformations opérées dans ce scénario de formation visent à ce que les formés se détachent de la logique adaptative au bénéfice d'une logique d'accessibilité universelle.

L'élève à besoins éducatifs particuliers n'est plus le point de départ de la réflexion pédagogique, mais plutôt une variable à prendre en compte après que la situation d'enseignement-apprentissage élaborée (et en particulier la tâche pour les élèves) garantisse l'accessibilité des savoirs à tous les élèves. Autrement dit il ne s'agit pas ici de débiter la réflexion par les caractéristiques d'un trouble ni par le profil d'un ou de plusieurs élèves à besoins éducatifs particuliers, ce qui conduirait à s'éloigner du travail de transformation de la situation pour la rendre accessible à tous et à focaliser sur les seules adaptations spécifiques à un élève ou quelques élèves.

Plus encore, c'est le risque d'appauvrissement de la tâche et la perte de vue des enjeux d'apprentissage (voire leur disparition) qui est en jeu ici. La double analyse de la tâche (ascendante et descendante) est de notre point de vue une garantie pour pallier ce risque. En effet, cette approche soutenue par la perspective inclusive, relève de la conception universelle, c'est-à-dire penser, dès l'origine, des situations didactiques accessibles à tous les élèves, quelles que soient leurs capacités. Cela n'exclut pas le recours à des mesures de compensation (ex. : aides fonctionnelles, humaines...) ou à des adaptations plus spécifiques pour répondre à un besoin particulier, mais les englobe.

Ce temps réflexif doit être conforté autant en ingénierie de formation (comme nous l'avons proposé) qu'en conception de séance d'enseignement/apprentissage pour les enseignants.

Dans un autre registre, l'entrée par la pédagogie universelle pour former les futurs enseignants aux pratiques de l'école inclusive permet de traverser une dimension ergonomique du travail de l'enseignant : penser des ajustements après avoir recherché l'universalité de la situation peut être bien plus efficace et moins coûteux que de procéder à partir de la réponse spécifique au besoin d'un élève. L'enseignant gagne alors en efficience.

Former les enseignants aux pratiques de l'école inclusive demande donc de les former sérieusement à une démarche de construction de situations d'apprentissage accessibles à tous et appelle une formation didactique de qualité.

RÉFÉRENCES

- Amiot, L., Curien, F., Guillermin, V., Pellan, D. et Gombert, A. (2024). La formation à l'éducation inclusive : où en est-on dans les nouvelles maquettes du master « métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation en France ? Dans J. M. Perez, G. Suau et M. J. Gremmo (dir.), *Formation aux pratiques inclusives : tensions entre reproduction et innovation* (p. 197-213). Éditions de l'Université de Lorraine (EDUL).
- Assude, T., Mercier, A. et Sensevy, G. (2007) L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(2), 221-252. <https://revue-rdm.com/2007/1-action-didactique-du-professeur/>
- Bergeron, L., Rousseau, N. et Leclerc, M. (2011). La pédagogie universelle : au cœur de la planification de l'inclusion scolaire. *Éducation et francophonie*, 39(2), 87-104. <https://doi.org/10.7202/1007729ar>
- Brousseau, G. (2012). Des dispositifs Piagétien...aux situations didactiques. *Éducation et didactique*, 6(2), 103-129. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1475>
- Eysseric, P. (2012, 20-22 juin). *Complément didactique : les différents types de calcul* [Communication]. Colloque de la COPIRELEM « Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève », Quimper.
- Ebersold, S. (2017) *L'éducation inclusive : privilège ou droit ? Accessibilité et transition juvénile*. Presses Universitaires de Grenoble.
- Gombert, A., Bernat, V. et Vernay, F. (2017). Processus d'adaptation de l'enseignement en contexte inclusif : étude de cas pour un élève avec autisme. *Carrefours de l'éducation*, 43(1), 11-25. <https://doi.org/10.3917/cdle.043.0011>
- Gombert, A. et Millon-Fauré, K. (2020). Inclure ou scolariser ? Adapter une situation d'apprentissage en mathématique : le cas d'une élève présentant une dyscalculie. *Ressources pour la formation l'école et les apprentissages scolaires*, 22, 50-63. <https://brgm.hal.science/HAMU/hal-02462022v1>
- Grimaud, F. et Saujat, F. (2012). Des gestes ordinaires dans des situations extraordinaires : approche ergonomique de l'intégration d'élèves en situation de handicap à l'école primaire ». *Travail et formation en éducation*, (8). <http://journals.openedition.org/tfe/1574>
- Millon-Fauré, K. et Gombert, A. (2021). Analyse d'une situation en mathématiques pour une élève dyscalculique. Méthodologie pour la conception d'adaptations pédagogiques et didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 41(2), 143–176. <https://revue-rdm.com/2021/analyse-dune-situation-en-mathematiques-pour-une-eleve-dyscalculique/>
- Pratali, L. et Eysseric, P. (2023, 13-15 juin). *Inclure la formation des professeurs des écoles à l'école inclusive dans la formation aux didactiques disciplinaires* [Communication]. Colloque COPIRELEM « Mathématiques et diversité à l'école : aider les élèves, accompagner les professeurs », Marseille.
- Roiné, C. (2012). Analyse anthropo didactique de l'aide mathématique aux « élèves en difficulté » : l'effet Pharmacéia. *Carrefours de l'éducation*, 33(1), 131-147. <https://doi.org/10.3917/cdle.033.0131>

ANNEXE 1 – PROFIL DE ROMANE

Romane aime l'école et apprendre. La relation avec sa maîtresse et ses pairs est excellente. Elle présente une lenteur, une grande fatigabilité. Elle ne peut pas se concentrer longtemps. Elle est sensible au bruit et à tout élément distracteur.

Romane montre une réelle envie de bien faire pour toutes les tâches scolaires qui lui sont proposées, mais les répercussions de son déficit attentionnel et en mémoire de travail, dans le contexte scolaire, sont nombreuses. Son attention est diffuse, elle manifeste une grande fatigabilité, elle oublie vite la consigne, elle rencontre des difficultés à traiter les consignes multiples et à appréhender les tableaux à double entrée. En ce qui concerne la numération, elle a une bonne connaissance des entiers strictement inférieurs à 100. Mais, du fait de sa dyscalculie, des problèmes apparaissent pour les nombres plus grands : la numération décimale de position n'est clairement pas maîtrisée. Elle a une bonne connaissance de l'algorithme opératoire de l'addition, y compris lorsqu'il y a des retenues et, même si parfois quelques erreurs de calculs sont repérées, ses résultats sont généralement justes. Elle sait également se servir d'un abaque pour réaliser les additions avec ou sans retenues. Elle rencontre cependant plus de difficultés pour effectuer les soustractions notamment lorsque les nombres impliqués sont supérieurs à 100 et qu'il y a des retenues. L'algorithme de la soustraction posée n'est pas acquis et les tables de soustraction ne sont pas maîtrisées. Même avec un abaque, les résultats obtenus lorsqu'elle effectue une soustraction sont souvent erronés]

Ayant des difficultés pour mémoriser les faits numériques et également pour retenir ses résultats intermédiaires, les exercices de calcul mental constituent un réel problème pour elle.

ANNEXE 2 – COMPLÉMENT DIDACTIQUE : LES DIFFÉRENTS TYPES DE CALCUL

MOYEN	TYPE DE CALCUL Calcul réfléchi	TYPE DE CALCUL Calcul automatisé
Papier / crayon	Détailler par écrit les différentes étapes d'un calcul réfléchi ou d'un calcul automatisé. Calcul « en ligne » Calculer le terme manquant de $738 + \dots = 2563$	Effectuer un calcul en colonne en appliquant une technique opératoire connue. Calcul « posé »
« De tête »	Effectuer un calcul de tête ex : 11 fois 15 Calcul « mental »	Réciter les tables d'addition et de multiplication, donner la liste de multiples de certains nombres: 10; 100; 25; 15
Calculatrice	Utiliser le calcul comme auxiliaire dans la conduite d'une résolution de problème. ex : trouver le plus petit nombre multiple de 64 et de 28. Résolution de problèmes ? Calculer avec la calculatrice 64×28 puis sans effacer ni revenir à 0 calculer 64×29	Utiliser la calculette dans sa fonction classique d'outil de calcul. Calcul « instrumenté »

(Source : tiré de Eysseric, 2012)

DESIGN DE MATÉRIEL DE MANIPULATION EN FORMATION INITIALE : AGENTIVITÉS MATHÉMATIQUE ET DIDACTIQUE

| NICOLAS-NOIR* BENJAMIN, CORRIVEAU** CLAUDIA ET JEANNOTTE*** DORIS

Résumé | Dans cet article, nous étudions un dispositif de formation initiale axé sur le design de matériel de manipulation, en termes d'agentivités mathématique et didactique. En adoptant une perspective incarnée et matérielle, nous analysons le dispositif à travers le processus de design d'une étudiante en formation à l'enseignement des mathématiques au secondaire, tel qu'il est documenté dans son Journal de conception.

Mots-clés : formation initiale, didactique des mathématiques, agentivité, design, matériel de manipulation

Abstract | In this article, we explore the contribution of course focused on the design of manipulatives, in terms of mathematical and didactic agencies. Through an embodied and material lens, we analyze the design process of a pre-service secondary mathematics teacher, as documented in her Design Journal.

Keywords: Pre-service teacher education, didactics of mathematics, agency, design, manipulatives

I. INTRODUCTION

Le dispositif de formation présenté dans cette proposition a été mis en place dans le cadre d'un programme de formation à l'enseignement au secondaire au Québec. À l'Université Laval, ce programme se conclut par un cours où les personnes étudiantes sont invitées à intégrer les connaissances théoriques et les compétences pratiques acquises au long de leur formation à travers un projet de fin de formation. En 2023, dans une visée exploratoire, un format particulier de ce cours, basé sur une démarche de design d'un matériel de manipulation pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, a été proposé à dix personnes étudiantes de la voie mathématique. Cinq d'entre elles ont accepté d'y participer.

Le choix d'engager les personnes étudiantes dans une démarche de design repose sur la prémisse que les personnes enseignantes ne sont pas vues comme de simples utilisatrices de ressources conçues par d'autres, mais qu'elles ont la capacité et l'autonomie nécessaires pour créer et développer elles-mêmes ces ressources (Akuom et Greenstein, 2022). Cette perspective sur la profession enseignante, dans laquelle l'agentivité et la créativité sont centrales, influence la façon dont les activités de formation initiale sont élaborées et mises en œuvre. À cet égard, dans cet article, nous examinons un dispositif de formation basé sur le design de matériel de manipulation, en nous appuyant sur les travaux de Schön (1992) concernant le design, ainsi que ceux menés par de Freitas et Sinclair (2012), notamment sur la dimension matérielle des diagrammes en mathématiques et le concept d'agentivité mathématique. Ce dernier nous permet d'élaborer le concept exploratoire d'agentivité didactique.

Dans la première partie, nous situons ce travail par rapport aux recherches sur le design de matériel de manipulation en formation initiale. Nous exposons ensuite les éléments théoriques qui fondent cette approche. Nous poursuivons avec la méthodologie avant de présenter l'analyse du design d'un matériel de manipulation qui travaille les entiers relatifs.

* HEP-Vaud – Suisse/ Université Laval – Canada – benin1@ulaval.ca

** Université Laval – Canada – claudia.corriveau@fse.ulaval.ca

*** UQAM – Canada – jeannotte.doris@uqam.ca

II. RECHERCHES À PROPOS DU DESIGN DE MATÉRIEL EN FORMATION

Les recherches, en didactique des mathématiques, sur la conception de matériel de manipulation en contexte de formation sont récentes et impliquent le recours à la « fabrication numérique », c'est-à-dire à l'emploi d'outils informatiques pour concevoir des objets matériels (par exemple, avec des imprimantes 3D). En 2022, Henrik Stigberg a mené une analyse des recherches à propos du design, par fabrication numérique, de matériel de manipulation pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : il n'a recensé que 17 articles, dont 7 d'une même équipe¹ (*Prospective Teachers Making for Mathematical Learning*, coordonnée par Steven Greenstein). L'analyse met en évidence plusieurs caractéristiques de ces travaux : 1) l'utilisation d'imprimantes 3D est prédominante par rapport à d'autres outils de fabrication numérique (certains outils ont toutefois été éliminés de la recension), tandis que les logiciels utilisés pour la conception 3D varient grandement ; 2) plus de la moitié des articles fondent leur approche sur le constructivisme (ex. Piaget, 1976) ou le constructionnisme (ex. Papert et Harel, 1991). D'autres théories sont également convoquées, portant notamment sur les connaissances mathématiques des personnes enseignantes (Ball, Thames et Phelps, 2008) ; 3) la majorité des études se déroulent en formation initiale, avec quelques occurrences en formation continue ; 4) dans la plupart des recherches, le matériel conçu est destiné à des interventions auprès d'élèves du primaire et du secondaire.

Plus spécifiquement, Stigberg, Stigberg et Maugesten (2022) examinent comment le design de matériel de manipulation peut s'intégrer à un cours de maîtrise au Danemark, portant sur les outils numériques et le matériel de manipulation pour l'enseignement des mathématiques. Le dispositif proposé vise à introduire les technologies de fabrication numérique dans le cadre de la création de matériel de manipulation, en vue de développer, chez les personnes étudiantes, des connaissances mathématiques et une réflexion pédagogique. L'élément central de leur étude concerne l'élaboration d'un cadre théorique à la base du dispositif : le cadre « Trouver-Adapter-Créer-Partager [*Find-Adapt-Create-Share Framework*] » (p. 4). Ce cadre est constitué de quatre composantes, dont les trois premières sont spécifiquement axées sur la conception de matériel de manipulation. Ces trois composantes sont organisées selon une progression de complexité, allant de la recherche de matériel existant, à son adaptation, puis à la création de nouveau matériel. Les ateliers proposés s'inscrivent dans cette progression. Concernant la composante « Partager », les personnes étudiantes soulignent que celle-ci permet d'appréhender la complexité de l'utilisation du matériel pour l'enseignement des mathématiques et considèrent le partage comme essentiel dans le processus de création. Néanmoins, elles restent réticentes à partager leurs créations au-delà du groupe de formation, notamment avec la communauté des personnes susceptibles de fabriquer du matériel.

L'équipe de Greenstein (voir entre autres Greenstein et al., 2024, Greenstein et al., 2022, Akuom et Greenstein, 2022) a également développé un dispositif de formation initiale à l'enseignement exploitant le design de matériel de manipulation. Le travail de recherche mené par cette équipe explore différentes facettes de la construction de l'identité professionnelle des personnes enseignantes à travers une expérience de design. Par exemple, l'étude de Akuom et Greenstein (2022) s'intéresse à la prise de décision, en contexte de design de matériel, de futures personnes enseignantes. Elle cible deux objectifs : l'identification des ressources mobilisées et du rationnel qui permettent la prise de décision lors de la conception ; la façon dont les décisions de conception conditionnent l'utilisation de matériel auprès d'un ou d'une élève. Les chercheurs ont donc analysé les activités de conception des futures

¹ Les sept écrits analysés proviennent du même projet, visant l'implémentation d'une formation intégrant le design et l'impression 3D, ce qui peut influencer l'interprétation des analyses de Stigberg.

personnes enseignantes ainsi que l'utilisation du matériel conçu auprès d'un ou d'une élève. Les résultats montrent que la conception de matériel et son utilisation peuvent fournir un « soutien épistémique matériel » (tangible) aux futures personnes enseignantes, c'est-à-dire un appui à la mobilisation de modèles et de connaissances théoriques développés en formation.

Au sein de ce champ de recherche naissant, nos travaux s'inscrivent dans la continuité des études de Stigberg et al. (2022), dans la mesure où nous cherchons à fonder, sur le plan théorique, notre démarche de formation. Cependant, nous n'avons aucune visée prescriptive quant au développement d'ateliers de formation. Nous visons plutôt le développement d'une proposition théorique pour mieux comprendre la contribution des activités de design à la formation à l'enseignement des mathématiques. En ce sens, nous nous alignons également avec les recherches de Greenstein et de son équipe, apportant un éclairage sur le développement de l'identité professionnelle dans le processus de design.

L'introduction du design dans la formation procède, pour Akuom et Greenstein (2022), d'une intention de mettre en avant « l'agentivité [agency] » propre à l'enseignement. Par l'accès à des technologies de fabrication digitale, la personne enseignante est invitée à créer ses propres « ressources curriculaires [curricular resources] », plutôt qu'implémenter des ressources existantes (p. 110-111). Nous souhaitons ici approfondir la compréhension d'une telle agentivité, celle des personnes étudiantes dans une activité de design de matériel. D'une part, parce que la formation didactique au Québec ne vise ni à transmettre des théories didactiques, ni à diffuser les résultats de la recherche (Bednarz, 2001a, 2001b), mais à immerger les personnes étudiantes dans une culture didactique où la didactique est vivante, élaborée par elles en situation (Corriveau, 2010). D'autre part, parce que nous pensons que les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en tant que processus *matériel* et *incarné* éclairent l'agentivité en jeu dans le design de matériel de manipulation. En particulier, elles donnent à penser cette agentivité sous forme *distribuée*, entre le designer et diverses matérialités, plutôt qu'en termes de « ressources » (Akuom et Greenstein, 2022, p. 110) mobilisées par un individu central et agissant. En étudiant l'agentivité sous cet angle, nous visons donc une meilleure compréhension de l'apport d'un tel dispositif pour la formation à l'enseignement des mathématiques.

III. DESIGN DE MATÉRIEL ET FORMATION : FONDEMENTS THÉORIQUES

Sur le plan théorique, plusieurs questions se posent. D'abord, qu'est-ce que l'activité de design ? Comment s'arrime-t-elle à la formation à l'enseignement des mathématiques ? Et encore, quelle agentivité est-elle susceptible de mobiliser chez les personnes étudiantes ?

Dans le cadre de notre recherche, nous adoptons une **perspective incarnée et matérielle sur le design**. Comme le souligne Schön (1992), le design repose sur une interaction sensorielle entre la personne designer et la « situation de design ». Cette situation inclut des éléments « actuels », dont l'environnement tangible de design et les matériaux à disposition ; et des éléments « virtuels », dont les *esquisses* de design, créées sur papier (dessins) ou à l'aide de logiciels de modélisation (modèles). Les esquisses de design tissent, de plus, un lien entre l'actuel et le virtuel, permettant d'imaginer virtuellement ce qui sera ensuite rendu tangible. Les allers-retours entre les esquisses et les matériaux à disposition permettent donc d'ajuster continuellement le design.

Plus précisément, les esquisses fournissent des informations visuelles et réflexivement, permettent d'en construire le sens. Cela se fait au sein d'une boucle de rétroaction que Schön nomme « voir-dessiner-(re)voir [seeing-drawing-(re)seeing] » (p. 5). Ce processus constitue une « **conversation réflexive** » entre la personne designer et la situation de design (Schön, 1992). En ajustant sans cesse sa création,

la personne designer développe son propre « **monde de conception** », façonnant les significations des éléments du design. L'action de concevoir n'est pas simplement une activité de résolution de problèmes, mais bien un processus sensoriel où le ou la designer crée l'espace de problèmes : le monde de conception d'où il élabore des solutions viables.

Le potentiel des esquisses de design à relier l'actuel et le virtuel résonne fortement avec le potentiel des diagrammes mathématiques, tel qu'analysé par de Freitas et Sinclair (2012). À partir des travaux du mathématicien Gilles Châtelet, les chercheuses montrent comment les diagrammes peuvent fonctionner comme « dispositifs cinématiques de capture [kinematic capturing devices] » (p. 138), invitant des mouvements et des changements de points de vue sur la surface de la feuille : « [e]n ajoutant une ligne pointillée sur une feuille de papier, une nouvelle dimension peut être créée ; une flèche peut forger de nouvelles relations temporelles entre des objets » (p. 138, traduction libre). Les diagrammes mathématiques sont alors le lieu d'un mouvement matériel entre « actuel » et « virtuel » : au sein des éléments assumés comme actuels dans le diagramme (par exemple, en traits pleins), une virtualité (cette fois au sens d'une *potentialité*) est toujours latente, permettant d'inviter de nouveaux mouvements, de nouvelles dimensions dans la feuille. Dans la création de matériel de manipulation, les esquisses de design sont en relation avec les matériaux à disposition et sont donc susceptibles d'inviter des mouvements ou des changements de points de vue. Du point de vue de l'activité mathématique, elles sont susceptibles de mobiliser la potentialité des diagrammes mathématiques.

Sur le plan mathématique, la production de diagrammes — et l'interaction entre matériel et esquisses pour concevoir — est un espace propice à l'invention et à la découverte. L'acte de dessiner ouvre la porte à une exploration créative, au-delà des contraintes apparentes des règles mathématiques habituelles. C'est dans ce contexte que de Freitas et Sinclair (2012) évoquent le concept d'« **agentivité mathématique** » : un « pouvoir d'agir dans le monde matériel » (p. 2), de se constituer comme sujet mathématique par cette exploration et cette invention mathématique. De façon importante, cette agentivité est considérée comme *distribuée* : le pouvoir d'agir n'est pas celui d'un individu, mais d'un réseau d'interactions entre entités matérielles (la personne qui crée le diagramme, la feuille de papier, les objets matériels de son environnement, d'autres personnes...). La production de diagrammes est donc une façon de repenser l'individu et l'activité mathématique. C'est précisément dans ces réseaux matériels, en constante évolution, que se constitue l'invention mathématique, des mathématiques toujours en *devenir*. Sur le plan de la formation, cela implique de considérer la **dimension matérielle** des mathématiques que les personnes étudiantes constituent à travers le design. Cette notion d'agentivité se distingue donc de celle utilisée par Akuom et Greenstein (2022) pour caractériser l'activité de design. Il ne s'agira pas d'étudier les décisions d'un individu central mobilisant des ressources ; mais de comprendre comment le design de matériel de manipulation met en jeu un réseau d'interactions matérielles, notamment dans les esquisses de design.

La constitution distribuée des mathématiques en formation pour l'enseignement repose également sur la dimension sociale du réseau impliqué, puisque ces mathématiques portent une visée d'apprentissage. En effet, le savoir mathématique mobilisé en formation tient compte de différents paramètres du contexte scolaire et de la dynamique de la classe (Jonnaert, 1997 ; Bednarz et Proulx, 2009). En cohérence avec cette dimension sociale, l'activité de design a le potentiel de former à la didactique. En effet, le matériel de manipulation est créé dans le but d'être utilisé en classe, par des élèves. Ceci introduit une certaine responsabilité sociale dans le processus. Comme le note Lloyd (2009), les personnes conceptrices ne sont pas créatives pour le seul plaisir de l'être. Elles explorent consciemment toute une gamme d'options tout en cherchant à intégrer certaines valeurs dans le choix d'une solution (p. 66). Dans notre recherche, il est donc possible de s'attendre à une certaine « **agentivité didactique** ». C'est-à-dire, une agentivité distribuée au même sens que l'agentivité

mathématique, dans laquelle les mathématiques se constituent à travers un réseau d'interactions incluant aussi les élèves. Ce concept exploratoire nous permet d'étudier l'agentivité en jeu dans le processus de design, en mobilisant les apports de Freitas et Sinclair (2012) du point de vue de la personne enseignante plutôt que celle de l'élève.

En résumé, l'activité de design est vue comme incarnée et matérielle, se développant à travers une conversation réflexive : les esquisses offrent des informations visuelles et des significations qui permettent, de manière réflexive, la progression du processus de design. Ces esquisses présentent des caractéristiques cinématiques et sont essentielles à la compréhension du processus de design. Elles ont le potentiel de favoriser le développement d'une agentivité mathématique matérielle et distribuée. Considérant le contexte de formation à l'enseignement, nous supposons également que le processus offre une occasion de développer une agentivité didactique. *Notre proposition vise à explorer comment les agentivités mathématique et didactique se constituent dans le design de matériel de manipulation en contexte de formation.*

IV. MÉTHODOLOGIE

L'étude exploratoire a eu lieu en 2023 et a impliqué cinq personnes étudiantes en dernière année d'une formation de quatre ans. Parmi celles-ci, deux ont conçu du matériel de manipulation destiné à être utilisé à des fins démonstratives. En revanche, trois d'entre elles ont développé du matériel conçu pour être utilisé par les élèves. Nous analysons un de ces trois projets.

Le processus de design s'est déroulé en cycles de trois phases : **1) idéation, 2) conception, 3) confection**. Les personnes étudiantes ont bénéficié d'un accompagnement de la formatrice responsable du cours (deuxième autrice) et d'un technopédagogue, spécialiste de la conception de matériel pédagogique tangible. Elles ont appris à utiliser les logiciels Tinkercad© (2016) et Onshape© (2020) en suivant des tutoriels. Elles ont tenu un *Journal de conception* qui constitue le principal matériau de recherche. Celui-ci pouvait varier d'une personne à l'autre, mais il devait inclure des réflexions, des résumés d'articles, des dessins, des captures d'écran de la conception 3D et des photos de différentes impressions. Dans ce journal, l'objectif était de rassembler les informations pertinentes liées au processus de conception, afin de comprendre l'évolution du projet : comment celui-ci s'est-il précisé, quels moments de questionnement ont émergé, quelles difficultés ont été rencontrées et surmontées, ainsi que les périodes de collaboration et d'échanges, le cas échéant ?

V. ANALYSE

Nous analysons le travail réalisé par Camille. Bien qu'il s'agisse d'un processus cyclique, l'analysons selon les trois grandes phases d'idéation, de conception et de confection. Les informations de chaque phase sont tirées du Journal de conception remis par Camille (35 pages, que nous appelons « Journal »), ainsi que d'un fichier PowerPoint qui documente son travail avec Simone², une autre étudiante en formation (23 diapositives, que nous appelons « Présentation »). Une attention particulière a été portée aux esquisses (dessins et modèles) tout autant qu'à l'environnement matériel dans lequel s'est déroulé le processus de design.

1. Idéation

Un premier élément important dans le journal de Camille est le choix du concept. Elle choisit les nombres entiers relatifs :

² Il s'agit du travail de conception de Camille dans le cadre du cours. Cependant, la collaboration était fortement encouragée. Ainsi, Simone a participé à l'idéation et à la conception du matériel de manipulation.

J'ai décidé de travailler davantage ce concept puisque les opérations avec des négatifs sont une difficulté pour les élèves selon ce que j'ai observé, et ce, même au deuxième cycle. Je pense notamment au fameux « deux moins font un plus » ou à la distributivité d'un moins en algèbre. Certaines règles avec les nombres négatifs sont appliquées comme une recette ou un algorithme plutôt que basé sur la compréhension. Mes expériences de stages et de tutorat m'ont montré que les élèves mélangeaient aussi facilement les différentes significations du « - » (le signe du nombre, l'opérateur, l'inverse). J'espère donc pouvoir concevoir un matériel de manipulation qui servira à mieux comprendre les différents sens du « - » (Journal, p. 4).

La dimension sociale de l'activité de design se manifeste dans le choix d'un concept en réponse à une difficulté observée lors des stages et du tutorat. Camille manifeste le désir d'aider les élèves à comprendre les aspects unaires (la valeur d'un nombre), binaires (l'opérateur de soustraction) et symétriques (la notion d'opposé) du signe « - ».

Elle compare ensuite les modèles utilisés ou recommandés pour travailler les entiers relatifs, tels que le thermomètre, des jetons de deux couleurs, des jetons à double face, la droite numérique et la montgolfière. L'analyse de chaque modèle est réalisée dans un réseau d'interactions formé d'articles (ex. Beswick, 2011 ; Butterfield-Wallbank et Martin, 1998 ; Vig et al., 2014), d'un examen schématisé d'autres matériels et est fondée sur leur capacité à résonner avec les élèves ou à leur poser des difficultés. Elle décrit les usages potentiels de ces modèles, en prenant également en compte les limites qu'elle anticipe. Par exemple, concernant le modèle des jetons de deux couleurs et celui de la montgolfière, elle écrit :

Les élèves comprennent qu'un jeton rouge annule un jeton bleu (et donc $1 + (-1)$ donne zéro), après être passé par-dessus la difficulté que zéro peut être représenté par plusieurs jetons [...] Toutefois, le problème arrive lors de la résolution d'opérations telle que $3 - 5$. Ici, il faut ajouter des paires de jetons (1 rouge, 1 bleu) jusqu'à ce qu'il soit possible d'enlever 5 jetons bleus. Or, cette adaptation ne correspond pas nécessairement au processus mathématique entrant en jeu dans cette opération. Ici, l'adaptation serait vue par les élèves comme un algorithme et ne favoriserait pas nécessairement la compréhension (Journal, p. 6). [...]

[S]i les poches de sable représentent les négatifs et un jet d'air chaud rajouté dans le ballon, les positifs, on peut modéliser tous les types d'opérations et de soustraction. Par exemple, enlever deux sacs de sable revient à faire l'opération $-(-2)$, ce qui va nous rendre plus légers de deux poids, donc le résultat va être positif. [...] Toutefois, un problème arrive lorsque la quantité à retrancher est plus grande que celle qu'on a, par exemple, $-2 - (-3)$. On ne peut enlever 3 sacs de sable alors qu'on en a que deux (Journal, p. 8).

Camille s'inquiète de la relation que les élèves peuvent construire du savoir en jeu à travers les différents modèles. Pour la droite numérique (Fig. 1), elle indique qu'il se fonde sur des règles à retenir plutôt que la compréhension du concept. Un tableau comparatif des modèles lui permet de souligner la façon dont chacun aborde les significations unaires (« Nombres ») et binaires (« Opérations ») du signe « - » (Fig. 1). Elle cherche à créer un matériel qui ne reproduit pas les limites identifiées dans les modèles examinés. En particulier, à réinvestir les expériences liées à l'utilisation du matériel dans les opérations écrites, d'où la critique des « règles » tierces dans le modèle des jetons et de la droite numérique. La nouvelle façon de travailler avec les entiers relatifs repose donc sur la multiplicité de points de vue que Camille emploie : à partir d'une part, de différents modèles existants et de leur comparaison et d'autre part, de l'analyse didactique de ces modèles, conjuguant son rapport au savoir, aux élèves, et celui des élèves au savoir. Cette connexion de points de vue constitue Camille en sujet mathématique et didactique *perméable aux réseaux qui la traversent* (de Freitas et Sinclair, 2012).

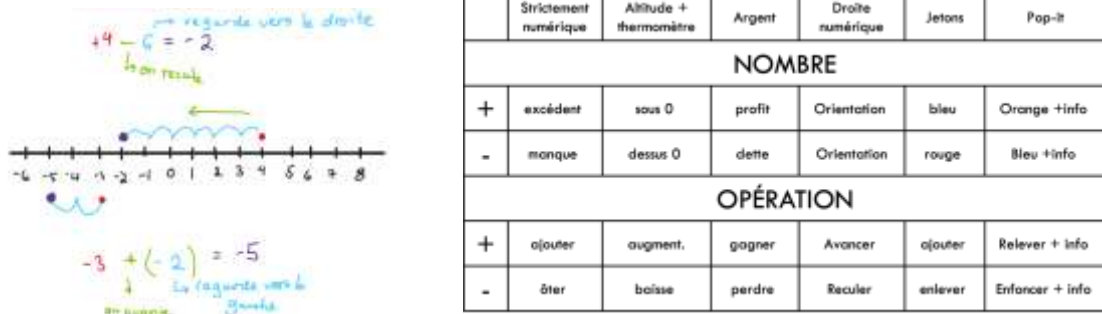


Figure 1 – Examen de la droite numérique (Journal, p. 7) et comparaison de modèles (Présentation, diapo 5)

2. Conception

L'analyse de Camille l'amène à se centrer sur la signification symétrique du signe « - » dans l'utilisation du matériel, c'est-à-dire la possibilité de travailler sur la relation d'opposé sans règle tierce ou référence contextuelle. Pour cela, Simone et Camille s'inspirent du « Pop-it », un jouet de stimulation sensorielle, dans lequel des « boutons » s'enfonçant d'un côté apparaissent en plein de l'autre. Leur objectif est « d'encourager l'action et la verbalisation » (Présentation, diapo 6), en particulier, de lier un mouvement au concept en jeu :

Enfoncer un « pop » équivaut à soustraire une valeur. Par exemple, si orange, cela équivaut à soustraire un entier positif (enfoncer deux « pops » orange implique la représentation de -2). De l'autre côté, le même nombre est représenté. [...] deux « pops » bleus ressortent, ce qui implique $+(-2)$ (Présentation, diapo 4).

Le Pop-it créé relie donc plusieurs significations du signe « - ». Pousser et tirer un bouton correspondent respectivement à la soustraction et à l'ajout d'une unité. Ces actions, visibles sur l'esquisse de la Fig. 2a, impliquent donc l'aspect binaire du signe « - », l'opérateur de soustraction. Cependant, les deux faces du Pop-it étant connectées, pousser un bouton d'un côté correspond à tirer un bouton de l'autre. Par conséquent, ces actions, combinées à celle de « tourner » le Pop-it, impliquent également la relation d'opposé, c'est-à-dire la signification symétrique du signe « - » (Fig. 2a). La feuille de correspondances produite par les futures enseignantes (Fig. 2b) résume la relation entre les actions, l'aspect binaire (quatre premières correspondances) et l'aspect symétrique (deux dernières correspondances) du signe « - ».

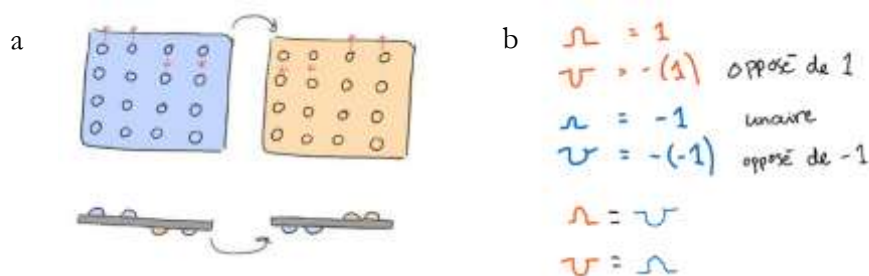


Figure 2 – Esquisses de conception du Pop-it numérique a. (Présentation, diapo 4) b. (Journal, p. 11)

Dans les esquisses de la Fig. 2, nous retrouvons sous plusieurs formes la constitution d'une agentivité mathématique, mise en avant par de Freitas et Sinclair (2012). D'une part, le travail sur la relation d'opposé est rendu possible en invitant des mouvements spatiaux dans le plan de la feuille : une rotation de la plaquette, invitée par une flèche courbe, ainsi qu'un déplacement des boutons dans une direction orthogonale au plan de la feuille, invité par des flèches verticales rouges (Fig. 2a).

L'alternance entre ces points de vue est constitutive de la relation d'opposé, c'est-à-dire de la symétrie des actions effectuées d'un côté et de l'autre de la plaquette. Dans la partie gauche du diagramme, deux boutons bleus sont poussés et deux sont tirés ; à droite, les mêmes actions sont effectuées du côté orange, menant à une configuration symétrique de la première. Cette symétrie se constitue également en dessinant la plaquette vue de haut à chaque étape. La flèche courbe indique donc également un ordre de lecture, une relation temporelle entre les actions. Enfin, dans les correspondances de la Fig. 2b, nous voyons une nouvelle façon de « donner corps », sur la feuille, aux entiers relatifs. La relation d'opposé se constitue en attribuant des déplacements aux symboles usuels 1 et -1 : les égalités $1 = -(-1)$ (cinquième correspondance) et $-(1) = -1$ (sixième correspondance) se constituent par compensation des actions « pousser » et « tirer », ainsi que par la connexion entre les deux faces du Pop-it. Autrement dit, cette relation mathématique se constitue dans les diagrammes de la Fig. 2b, parce qu'ils « capturent » (de Freitas et Sinclair, 2012) les actions avec le Pop-it et relient ces actions aux symboles usuels (de la première à la quatrième correspondance).

3. Confection

La maîtrise des outils de conception et l'avancement du processus se développent simultanément. L'analyse du Journal permet de percevoir la manière dont les connaissances mathématiques, les connaissances technologiques et le design lui-même se construisent à travers les outils à disposition. La Figure 3 illustre le passage de l'utilisation d'un premier logiciel de conception (a) à un deuxième (e). Ce changement s'opère parce que l'objet (b) est difficilement maniable. Camille revoit donc la forme de sa pièce (c, d et e), apprenant à utiliser un nouveau logiciel et convoquant d'autres mathématiques pour configurer cette forme. Les mathématiques, dans le processus de design, se constituent donc aussi à travers la confection du matériel, dans l'ajustement entre les contraintes désirées pour le travail des élèves (ici, une position neutre pour chaque bouton) et les possibilités offertes par la fabrication digitale.

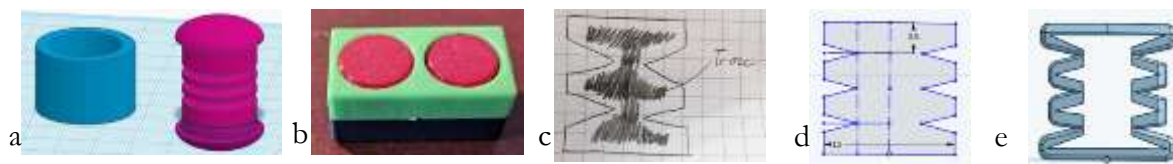


Figure 3 – Évolution des ébauches de conception

VI. DISCUSSION

Notre contribution tente d'interroger la place du design de matériel de manipulation dans la formation initiale pour l'enseignement des mathématiques. Les précédents travaux explorant ce champ, ainsi que le contexte de formation au Québec, nous ont encouragés à étudier l'agentivité que ce processus est susceptible de mobiliser. À partir de la perspective de Schön (1992) sur le processus de design, nous avons élaboré les notions d'agentivités mathématique et didactique. Après avoir analysé comment ces agentivités peuvent se constituer dans le processus de design, nous discutons comment elles interrogent, en retour, le design de matériel de manipulation comme dispositif de formation et, plus largement, la formation elle-même.

D'une part, l'agentivité mathématique interroge l'analyse du design de matériel de manipulation en tant que dispositif de formation. Plutôt que de considérer des productions finales répondant à des décisions et des ressources, elle considère le réseau d'interactions matérielles constitutives du design et des mathématiques en jeu. Elle se focalise donc sur la façon dont les mathématiques se constituent dans ces interactions, orientant le regard vers les esquisses de conception et vers la façon dont, en dialoguant avec le matériel à fabriquer, elles permettent de constituer une agentivité mathématique.

Cette analyse matérielle et distribuée rend compte de la richesse du réseau en constitution, de la « puissance générative » de ce processus (Akuom et Greenstein, 2022, p. 120).

D'autre part, de façon corrélée, l'agentivité didactique interroge la place de la didactique dans la formation. En cohérence avec le contexte de formation au Québec, les personnes étudiantes élaborent ici des mathématiques et des connaissances didactiques en situation (Corriveau, 2010). Cette élaboration s'effectue en réseau, à partir des recherches existantes en didactique (dans la comparaison de modèles des nombres relatifs) et du contexte d'enseignement de la personne étudiante. Tout comme les expériences de diagrammes accordent aux élèves la possibilité d'innovation mathématique (de Freitas et Sinclair, 2012, p. 151), l'expérience de design questionne donc le statut accordé aux personnes étudiantes par rapport aux mathématiques et à la didactique : attendons-nous d'elles qu'elles s'insèrent dans un cadre de pensée didactique délimité, ou qu'elles s'en emparent pour en interroger les contours ?

RÉFÉRENCES

- Akuom, D. et Greenstein, S. (2022). The nature of prospective mathematics teachers' designed manipulatives and their potential as anchors for conceptual and pedagogical knowledge. *Journal of Research in Science, Mathematics and Technology Education*, 5(S1), 109-125. <https://doi.org/10.31756/jrsmte.115SI>
- Ball, D. L., Thames, M. H. et Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bednarz, N. (2001a). Une didactique des mathématiques tenant compte de la pratique des enseignants. Dans P. Jonnaert et S. Laurin (dir.), *Les didactiques des disciplines : un débat contemporain* (p. 57-79). Presses de l'Université du Québec.
- Bednarz, N. (2001b). Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1(1), 61-80. <https://doi.org/10.1080/14926150109556451>
- Butterfield-Wallbank, V. et Martin, S. (1998). Hot air: Making sense of minus and minus. *Mathematics in School*, 27(1), 23–25. <http://www.jstor.org/stable/30211841>
- Corriveau, C. (2010). Que signifie faire des mathématiques dans un cours de didactique des mathématiques ? Dans J. Proulx et L. Gattuso (dir.), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles* (p. 159-163). CRP.
- de Freitas, E. et Sinclair, N. (2012). Diagram, gesture, agency: Theorizing embodiment in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 80, 133–152. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9364-8>
- Greenstein, S., Jeannotte, D. et Pomponio, E. (2024). Making as a window into the process of becoming a teacher: The case of Moira. Dans B. M. Benken (dir.), *The AMTE handbook of mathematics teacher education. Volume 5: Reflection on past, present and future – Paving the way for the future of mathematics teacher education* (p. 423-445). Information Age Publishing, Inc. <https://www.infoagepub.com/products/Reflection-on-Past-Present-and-Future>
- Greenstein, S., Akuom, D., Pomponio, E., Fernández, E., Davidson, J., Jeannotte, D. et York, T. (2022). Vignettes of research on the promise of mathematical making in teacher preparation. Dans F. Dilling, F. Pielsticker et I. Witzke (dir.), *Learning mathematics in the context of 3D printing: Springer spektrum* (p. 73-109). Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-38867-6_4

- Jonnaert, P. (1997). La formation didactique des enseignants en questions. *Cahiers de la recherche en éducation*, 4(2), 163-184. <https://doi.org/10.7202/1017326ar>
- Lloyd, P. (2009). Ethical imagination and design. *Design Studies*, 30(2), 154–168. <https://doi.org/10.1016/j.destud.2008.12.004>
- Papert, S. et Harel, I. (1991). Situating constructionism. *Constructionism*, 36(2), 1–11. <https://pirun.ku.ac.th/~btun/papert/sitcons.pdf>
- Piaget J. (1976). *Psychologie et épistémologie. Pour une théorie de la connaissance*. Denoël/Gonthier.
- Schön, D. A. (1992). Designing as reflective conversation with the materials of a design situation. *Research in Engineering Design*, 3, 131–147. <https://doi.org/10.1007/BF01580516>
- Stigberg, H. (2022, février). *Digital fabrication for mathematics education: A critical review of the field* [Communication]. 12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), Bozen-Bolzano, Italy.
- Stigberg, S., Stigberg, H. et Maugesten, M. (2022, 30-31 mai). *Making manipulatives for mathematics education* [Communication]. 6th FabLearn Europe/MakeEd Conference 2022, Copenhagen, Denmark. <https://doi.org/10.1145/3535227.3535228>
- Vig, R., Murray, E. et Star, J. R. (2014). Model breaking points conceptualized. *Educational Psychology Review*, 26(1), 73-90. <https://doi.org/10.1007/s10648-014-9254-6>

UNE SITUATION DE FORMATION CONTINUE EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE PAR LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES

| ARAB HADJ-MOUSSA* MÉRIEM ET COMBY** HÉLÈNE

Résumé | Ce travail porte sur une étude d'une situation de formation continue en géométrie élémentaire à destination de professeurs des écoles de cycle 2 (élèves de 6 à 8 ans). Ce dispositif de formation a été réalisé pour quatre groupes d'enseignants exerçant dans des établissements scolaires de milieux sociaux professionnels différents. Dans cette communication, nous présentons la situation, puis nous développons les observations qui nous ont permis d'identifier des disparités d'appropriation de cette situation et de mise en place de procédures de résolution.

Mots-clés : formation continue, professeur des écoles, géométrie, résolution de problèmes, manipulation.

Abstract | This work concerns a study of continuing training situation in elementary geometry for school teachers of cycle 2 (pupils aged 6 to 8). This training device has been realised for four groups of teachers working in schools of different socio professional backgrounds. In this communication, we present the situation, then we develop our observations that permitted us to identify the appropriation disparities of this situation and set up the resolution procedures.

Keywords: Continuing training, School teachers, geometry, resolution of problems, manipulation.

I. INTRODUCTION ET CONTEXTE DE LA FORMATION CONTINUE

Dans le dispositif de formation continue des professeurs des écoles en Île de France, nous sommes sollicitées pour une formation (6 heures) autour de la résolution de problèmes en géométrie pour des enseignants d'élèves de 6 à 8 ans (cycle 2). Pour répondre à cette commande des inspecteurs de deux circonscriptions du Val d'Oise, nous souhaitons faire une focale sur des problèmes mettant en place un travail sur deux types d'espaces sensibles :

- Le **micro-espace** est l'espace des interactions liées à la manipulation des petits objets. Le sujet est à l'extérieur de cet espace accessible immédiatement ou complètement par la manipulation ou par la vision. Les déplacements du sujet et des objets sont possibles.
- Le **méso-espace** est l'espace des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue, les objets sont fixes et mesurent entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet. (Brousseau, 1983).

Cette formation nous est demandée deux années de suite, pour deux groupes :

- 2022-2023 : 23 professeurs à Beaumont-sur-Oise et 16 professeurs à Vauréal ;
- 2023-2024 : 24 professeurs à Ableiges et 24 professeurs à Beaumont-sur-Oise.

Dès la première année, la situation que nous proposons semble susciter chez les enseignants en formation un élan de motivation en lien avec le travail sur différents espaces sensibles (méso-espace et micro-espace) (Brousseau, 1983). Ce constat nous conduit à intégrer cet élément dans le scénario de l'année suivante (2023-2024).

* Université CY Cergy Paris Université – France – meriem.hadj-moussa@cyu.fr

** Université CY Cergy Paris Université– France – helene.comby@cyu.fr

Dans cette communication, nous nous intéressons particulièrement à ce que nous avons mis en place et observé durant l'année 2023-24. Nous présentons le contenu prévu et vécu tout en analysant les éléments observés au fil des phases de mise en situation. Enfin, nous concluons sur des éléments qui émergent de cette formation continue.

Nous avons construit un scénario de formation par homologie-transposition (Houdement et Kuzniak, 1996) portant sur une résolution de problèmes de géométrie élémentaire dans le méso-espace, environnement généralement peu exploité par les enseignants. Nous nous interrogeons sur leur capacité à mettre en évidence le travail dans le micro-espace et le méso-espace puis à les articuler. Cette situation met en pratique une modalité de travail sur ces deux espaces simultanément. Nous souhaitons leur faire prendre conscience que des connaissances spatiales mobilisées dans le méso-espace induisent une forte prégnance de la problématique pratique (Berthelot et Salin, 1992).

La situation proposée porte sur une résolution de problème sur l'alignement, notion de géométrie élémentaire pour le public enseignant ciblé et transversale à tous les niveaux du cycle 2.

Pour étudier et analyser cette situation, nous nous basons sur des données sous forme d'enregistrements sonores, de photos et vidéos prises du sol, et de clichés vus de dessus pris à l'aide d'un drone pour garder des traces de productions.

II. PRÉSENTATION, DÉROULEMENT ET ANALYSE DE LA SITUATION

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la place de la **notion de l'alignement dans les programmes** (voir annexe).

1. *Apports didactiques pour introduire la situation*

En amont de la mise en situation du problème, à partir d'un diaporama, nous fournissons aux enseignants des éléments didactiques potentiellement mobilisables lors de la phase de recherche. Ils relèvent :

- des trois types d'espaces (Brousseau, 1983) ;
- des articulations des connaissances spatiales et géométriques et des problématiques qu'elles engendrent :
 - Les **connaissances spatiales** sont les connaissances [...] qui permettent à chacun de maîtriser l'anticipation des effets de ses actions sur l'espace, leur contrôle, ainsi que la communication d'informations spatiales. (Berthelot et Salin, 1992) ;
 - Les **connaissances géométriques** portent sur les objets géométriques et sur leurs relations (Blanquart, 2023).
 - L'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire nécessite l'organisation de problématiques associées à des rapports à l'espace très différents, ces problématiques sont identifiées comme suit :
 - La **problématique pratique** : les objets sur lesquels on travaille sont des objets physiques, la démarche de résolution est pratique, la validation se fait en restant sur l'espace sensible ;
 - La **problématique spatio-géométrique ou de modélisation** : les objets sont physiques et/ou géométriques, les validations sont liées au modèle ou à l'espace sensible qu'il modélise ;

- La **problématique géométrique** : les objets ne sont plus physiques mais théoriques, la démarche de résolution et la validation se font par un raisonnement qui s'appuie uniquement sur des connaissances géométriques reconnues. (Berthelot et Salin, 1995).

2. Description du dispositif

Dans un deuxième temps, les stagiaires découvrent le dispositif de la situation dans le méso-espace. L'organisation matérielle de ce dispositif varie selon le lieu de la formation et la configuration de l'espace dédié.

Matériel concret utilisé : des plots en vrac et des cerceaux disposés sur le sol selon les configurations suivantes :



Figure 1 – Dispositif groupe 1



Figure 2 – Dispositif groupe 2 en vue aérienne

Par ailleurs, d'autres objets sont mis à disposition dans divers coins de l'espace : cordelette, tasseaux, manche à balai, tube, règle de la classe, décimètre et craie.

Une fois le dispositif découvert par les stagiaires, les consignes suivantes sont émises oralement et exécutées au fur et à mesure :

- Consigne 0 : se mettre en deux groupes ;
- Consigne 1 : placer un plot dans chaque cerceau ;
- Consigne 2 : réfléchir et échanger sur des déplacements des plots de sorte qu'ils soient tous alignés en restant dans leur cerceau.

À l'issue des productions, une phase de mise en commun confronte les démarches suivies dans chaque groupe.

Afin de stimuler une diversité d'approches et d'engagements dans la résolution du problème, le matériel mis à disposition – pertinent ou non – ainsi que les consignes et le déroulement de l'activité ont été pensés pour offrir un cadre propice à l'observation des différentes stratégies mises en œuvre par les participants. En particulier, dans la consigne 2, l'usage du mot "tous" ouvre la possibilité à plusieurs interprétations et alignements.

À l'issue du travail dans le méso-espace, nous attendons un passage de la situation vécue vers sa représentation à l'aide d'objets géométriques (points, droite, tracé de droite...). Pour ce faire, suivant les groupes, une variante est mise en place dans le déroulement lors du passage dans le micro-espace.

Seuls certains bénéficient d'images du dispositif vu de dessus (drone) lors de leurs manipulations dans le méso-espace.

Nous présentons et analysons ci-dessous quelques échanges oraux¹ lors de la phase de recherche correspondant à la consigne 2.

Dans tous les groupes, ayant eu accès ou non aux vues aériennes du dispositif, plusieurs questions nous sont spontanément posées autour de cette consigne : [...] *plots alignés entre eux comment ? entre deux plots ?* Ce qui nous amène à redonner la consigne en insistant sur le mot “tous”.

Certains enseignants décrivent directement les déplacements des plots tout en exprimant leurs stratégies. D'autres montrent une difficulté à utiliser un vocabulaire géométrique et sont amenés à accompagner avec le geste certains propos pour mieux justifier leurs actions au sein de leur groupe.

D'autres encore continuent à questionner la consigne à propos de l'alignement des plots : *mais pas forcément entre eux [...] mais tous ?* Face à cette difficulté de compréhension de la tâche, nous complétons spontanément la consigne 2 en ajoutant la possibilité de ne pas prendre en considération deux plots.

Quelques enseignants demandent à sortir les plots des cerceaux. La consigne ne semble toujours pas bien intégrée par tous et l'indication complémentaire “tous sur un même alignement” est peu ou n'est pas exploitée. La non prise en compte immédiate de cette précision nous laisse supposer que cette consigne supplémentaire a été émise de façon trop précoce.

Dans cette phase de recherche, pour le placement des plots, la première démarche entreprise par tous les groupes relève de la technique empirique de la visée à l'œil nu sans se soucier d'une vérification instrumentée. Nous insistons à nouveau sur le fait d'obtenir un seul alignement, ce qui apparaît impossible pour certains. Une discussion finit par s'engager sur les plots à omettre de l'alignement demandé.

Une situation spatiale n'est pas toujours appréhendée globalement, et le trajet du regard, ou le mouvement du corps en développant autant de perceptions successives et variées ; c'est évidemment le cas [...] pour un espace à découvrir ou à parcourir. (F. Boule, 1990)



Figure 3 – Production consigne 1



Figure 4 – Production consigne 2

Phase de mise en commun et restitution : chaque groupe présente sa production à l'oral. Nous les questionnons alors sur des éléments plus précis de validation portant sur l'alignement. Suivant les groupes, nous recueillons divers propos :

- « On a créé plusieurs alignements ».
- « Là-bas on n'a que deux d'alignés ».

¹ Les propos des enseignants sont notés en italique.

- « Un alignement de 1 ce n'est pas vraiment un alignement ».
- « Parce qu'on a mis au-dessus le bâton ». [Nous leur faisons remarquer que le bâton est trop court]. « On l'a fait avec nos yeux ».
- « Là, on a 3, c'est un minimum de 3. Ils sont sur la même droite ».

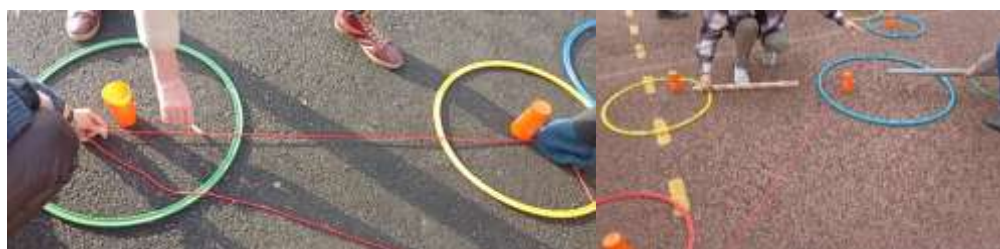


Figure 5 – Phase de recherche

Pour justifier leur production, les enseignants évoquent une technique visuelle approximative. Nous leur demandons d'être plus précis. Certains évoquent des objets comme la corde. Ils s'en servent pour la poser sur les plots des différents alignements réalisés. Nous insistons sur le fait que la corde doit être bien tendue. Cette action permet des prémices de vocabulaire géométrique propre à cette notion ainsi que sa mise en évidence en acte.

Ainsi, dès lors que nous sollicitons l'explicitation des alignements produits, les interactions langagières et dynamiques autour des moyens de validation amènent certains enseignants à questionner le vocabulaire en lien avec l'alignement :

- « Oui, ils sont tous sur une ligne ».
- « Des points alignés, ils sont sur la même ligne, et là ils sont tous sur une même ligne ».
- « C'est pour cela que la ligne est courbe. C'est une même ligne ».
- « Ça peut être une seule ligne brisée. Ils sont tous sur la même ligne, à chaque brisure ».
- « Ou bien ils sont tous sur une ligne différente ».
- « Ils sont tous alignés deux par deux. Ce qu'il faut, c'est donner le nombre de points alignés ».
- « Il y a un souci de vocabulaire. Pour moi, points alignés, c'est au moins 3 ».
- « C'est pas faux, deux points sont toujours alignés. Après, il faut d'abord savoir ce qu'on entend par "aligné" et ce qu'on dit en CE1 ».

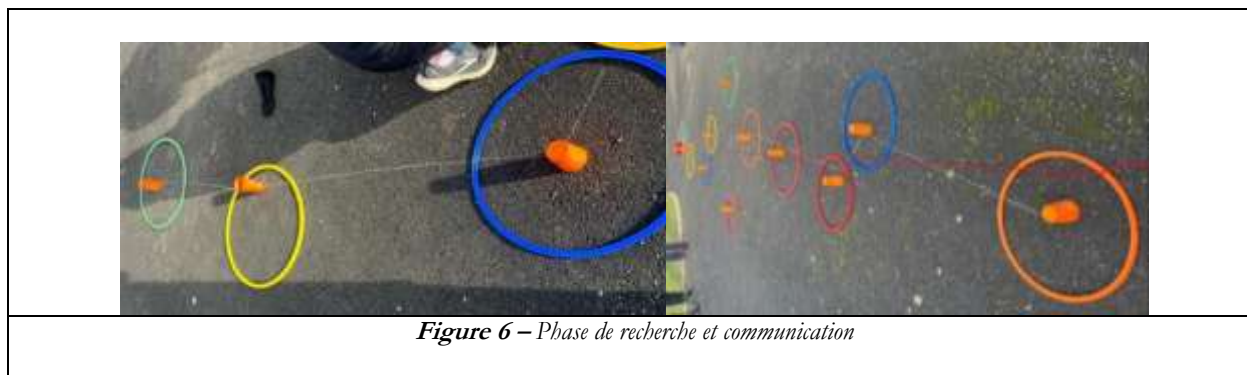


Figure 6 – Phase de recherche et communication

Nous pointons ici des éléments relevant des représentations que semblent avoir ces enseignants qui conduisent à une confusion entre la droite qui passe par deux points distincts du plan, le segment qui a pour extrémités ces deux points et l'alignement de points.

Le répertoire de représentation est un ensemble de moyens connus ou donnés pour effectuer la tâche prévue dans la situation. Il sera constitué de signes, schémas, symboles, figures ; nous y mettons également les outils et leur usage ; on peut y mettre également les éléments langagiers permettant de nommer les objets rencontrés, de formuler les propriétés et les résultats. (I. Bloch et C. Osel, 2009)

Pour d'autres enseignants, la discussion s'oriente sur le mot "alignement", son étymologie et sa signification mathématique :

- « Est-ce qu'une ligne est droite ? »
- « Est-ce qu'elle est rectiligne ? »
- « Une droite donc, c'est forcément rectiligne »
- « On n'est pas matheux »
- « Les points alignés sont dans la même direction ».

Nous abordons la difficulté du vocabulaire polysémique qui, étant commun au langage courant et au langage géométrique, peut créer des obstacles chez certains élèves. Nous insistons sur le rôle primordial du langage dans certains apprentissages de la géométrie. (A.C. Mathé, 2006).

Se pose également la question des influences de l'espace sensible sur la construction d'un vocabulaire géométrique liée à une notion donnée (M. Arab Hadj-Moussa, 2018).

Dans les groupes ayant eu accès aux vues aériennes du dispositif, nous constatons une entrée dans un travail simultané entre les vues mises à disposition et le méso-espace, à travers :

- des actions langagières : le mot "plot" est remplacé par "point" et "corde", par "droite" ;
- des actions physiques : des allers-retours en temps réel de la vue de dessus des diverses productions à l'action dans le méso-espace ont permis un travail de réflexion et d'ajustement efficace.

Pour tous les enseignants, les échanges par la suite soulèvent la question de la place de l'activité dans la séquence d'apprentissage : première rencontre avec la notion, réinvestissement dans le méso-espace d'une connaissance ou évaluation.

Dans la mise en commun, la question des variables didactiques émerge lors des échanges portés sur le matériel et les consignes :

- « Faut-il mettre des intrus ou pas ? »
- « Faut-il indiquer la présence / non présence d'intrus ? »
- « Peut-on faire une phase préalable avec peu de cerceaux ? »
- « Quelle est la nature des objets matériels et en quelle quantité ? »
- « La consigne doit-elle être ouverte ou fermée ? »

Nous accompagnons les professeurs dans leurs propositions sur les variables didactiques en les amenant à réfléchir à l'impact et aux enjeux de chacune des variables de la situation. Une réflexion préalable autour du choix des objets matériels du dispositif dans le méso-espace permettrait de valider les productions au plus près de celles attendues dans le micro-espace, facilitant ainsi le transfert du savoir géométrique.

3. *Passage de la situation du méso-espace vers le micro-espace*

Sans images du dispositif vu de dessus, une enseignante propose un travail avec des jetons, elle n'explique pas davantage. Nous supposons qu'elle souhaite reproduire la situation vécue dans le méso-espace en choisissant un matériel de taille plus petite pour remplacer les cerceaux et les plots. Une autre enseignante propose un dispositif constitué de punaises et de cartons ou encore le matériel Gymprojet².

Nous relevons ici une perception d'un transfert de la situation modifiant seulement la taille des objets du dispositif. Le passage attendu des objets matériels de la situation vécue dans le méso-espace à une représentation à l'aide d'objets géométriques (points, droite, tracé de droite...) n'est pas directement atteint.



Figure 7 – *Vue aérienne d'une production en cours*

Nous pouvons constater, chez ces enseignants, une résistance de la problématique pratique qui continue à fonctionner après le retour en classe. Notre analyse permet de questionner une modélisation progressive passant par des objets matériels dans le micro-espace.

Pour d'autres groupes qui sont toujours dans le méso-espace de travail, nous montrons volontairement des photos du dispositif global en vue aérienne dans le but d'induire une première rencontre avec la modélisation. Cela permet de confronter les enseignants à la vue du dispositif dans le micro-espace tout en continuant d'agir dans le méso-espace.

² <https://www.celda.fr/gymprojet-edra.html>

Nos premières observations vont dans le sens de notre hypothèse. En effet, les photos de cet angle de vue déclenchent chez les enseignants l'utilisation d'un vocabulaire géométrique qualifiant ainsi l'alignement (point, droite...).



Figure 8 – Résolution du problème dans le méso-espace

Lors de la construction de la situation, à des fins d'anticipation d'un travail dans le micro-espace, nous attendions de la part des enseignants la mise en œuvre dans le méso-espace d'une démarche de modélisation utilisant leurs connaissances géométriques en lien avec le concept d'alignement. (Berthelot et Salin, 1993-1994 et Bloch et Salin, 2004).

III. CONCLUSION

L'observation et l'analyse des diverses interactions avec *le milieu* (Brousseau, 1990) visant à résoudre le problème posé ont révélé des disparités d'appropriation de la situation et de mise en place de procédures de résolution. Celles-ci concernent l'ambiguïté référentielle relative au vocabulaire géométrique lié à la notion d'alignement ainsi qu'une maîtrise parfois insuffisante du concept étudié. De plus, l'espace sensible n'a pas permis d'emblée une démarche de modélisation, mais une représentation transitoire (intermédiaire, passerelle) de type maquette. En effet, lors de la phase de réflexion sur le transfert de la situation du méso vers le micro-espace, la présence et l'utilisation ou non de la vue aérienne a mis en évidence deux démarches différentes.

Démarche 1 : le recours à une représentation intermédiaire des objets matériels du méso-espace dans le micro-espace n'induit pas nécessairement une démarche de modélisation. Cette représentation relevant de la mémorisation du dispositif peut-elle alors constituer un obstacle ou un frein à une entrée efficace dans la modélisation mathématique ?

Démarche 2 : durant le travail dans le méso-espace, les vues du dispositif – en vue aérienne et au niveau du sol – ont permis une première entrée dans une problématique géométrique de modélisation. Ce répertoire d'ostensifs (photos aériennes du dispositif) a fonctionné comme des signes représentant des objets matériels, éloignant les enseignants de leur simple représentation empirique. (S. Gobert, 2009)

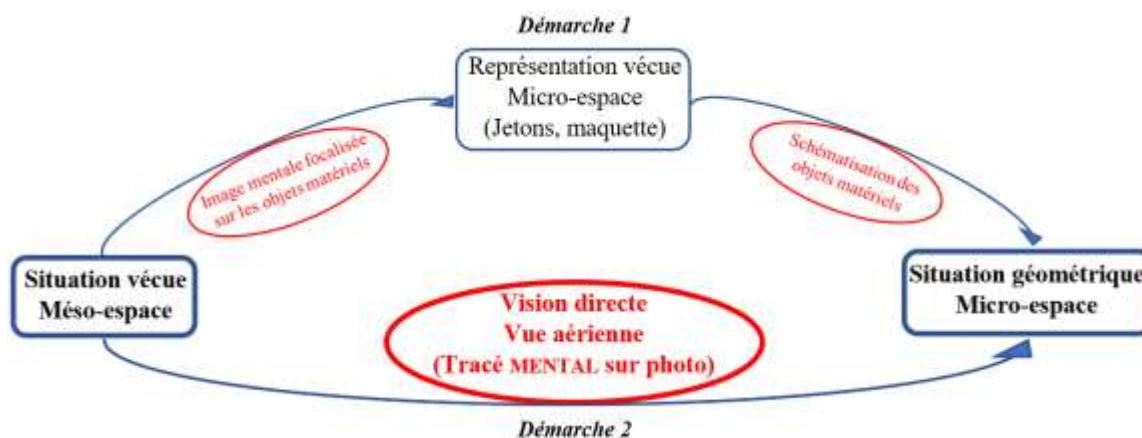


Figure 9 – Schématisation des démarches des enseignants

Finalement, la démarche 1 fait écho aux résultats de Berthelot et Salin (1995) qui préconisent un travail simultané dans les deux espaces afin de confronter les enseignants au plan du dispositif. En revanche, dans la démarche 2, l'apport, dès la phase de production, des photos de vues de dessus du dispositif facilite l'entrée des enseignants dans la modélisation du problème.

Plus généralement, nos constats à l'issue de nos interventions pour cette formation ouvrent à une réflexion plus large : que révèlent certaines actions de formation continue en matière d'appropriation de savoirs de la part des professeurs ?

Par ailleurs, notre méthodologie de recherche a mis en évidence une mobilisation limitée des apports théoriques transmis à tous en amont de la mise en situation. Ces éléments n'ont pas fait l'objet d'un questionnement approfondi en lien avec la situation problème proposée. Ce constat soulève une question concernant la posture adoptée par les enseignants en formation continue : privilégient-ils une approche pragmatique centrée sur la recherche de ressources immédiatement transposables en classe, au détriment d'une réflexion approfondie sur les fondements conceptuels et didactiques de ces ressources ?

RÉFÉRENCES

- Arab Hadj-Moussa, M. (2018). Une séance de géométrie élémentaire prenant appui sur une séance d'EPS a-t-elle un potentiel d'apprentissage en géométrie ? Un exemple au cycle 3. Dans *Actes du Colloque EMF « Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines »* (p. 376-384).
- Berthelot, R. et Salin, M. H. (1995). Savoirs et connaissances dans l'enseignement de la géométrie. Dans G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier et A. Tiberghien (dir.), *Différents types de savoirs et leurs articulations* (p. 187-204). La pensée sauvage.
- Berthelot, R. et Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de la géométrie à l'école dans la scolarité obligatoire* [Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I]. HAL theses.
https://theses.hal.science/file/index/docid/414065/filename/these_Berthelot_Salin.pdf
- Blanquart, S. (2023). Activité mathématique des élèves et construction des apprentissages en géométrie plane. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 2(thématique 1), 5-37.
<https://doi.org/10.71403/wkcqhr89>

- Bloch, I. et Osel, C. (2009). *L'apprentissage de la géométrie à l'école primaire : analyse d'une progression centrée sur les problèmes spatio-géométriques et leurs représentations* [Atelier A3]. XXXVI^e colloque COPIRELEM « L'Enseignement des Mathématiques à l'École : où est le Problème ? », 3-5 juin 2009, IUFM, Auch, France. <https://bibnum.publimath.fr/IWO/IWO10008.pdf>
- Bloch, I. et Salin, M. H. (2003). Espace et géométrie dans le méso-espace à l'école primaire et au début du collège. Dans *Actes du XXX^e colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres* (p. 293-306).
- Boule, F. (1990). Espace vécu et espace représenté chez l'enfant. *Spirale – Revue de recherches en éducation*, (3), 183-199. <https://doi.org/10.3406/spira.1990.1851>
- Brousseau, G. (1983). *Études de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie*. Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, LSD IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 309-336. <https://revue-rdm.com/1988/le-contrat-didactique-le-milieu/>
- Favrat, J. F. et Merle, H. (2009). Place de l'alignement dans l'enseignement de la géométrie au début de l'école élémentaire en France ; propositions de problèmes. Dans *Actes du colloque EMF Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation* (p. 398-411).
- Gobert, S. (2009). Conditions a priori sur les ostensifs du milieu, signes d'un objet de savoir. Dans *Séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, Paris* (p. 109-137). <https://shs.hal.science/halshs-01020914v1/document>
- Houdement, C. et Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16(3), 289-322. <https://hal.science/hal-03198426v1>
- Mathé, A. C. (2006). *Jeux et enjeux de langage dans la construction d'un vocabulaire de géométrie spécifique et partagé en cycle 3* [Thèse de doctorat, Université Claude Bernard-Lyon 1]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-00345659/document>
- Perrin-Glorian, M. J. (2010). Des savoirs disciplinaires à construire pour une formation professionnelle universitaire des maîtres : l'exemple de la formation des enseignants en mathématiques. *Spirale – Revue de Recherches en Éducation*, (46), 43-61. <https://doi.org/10.3406/spira.2010.1145>

ANNEXE

PLACE DE LA NOTION D'ALIGNEMENT DANS LES PROGRAMMES

J. F. Favrat et H. Merle (2009) ont fait une étude comparative des textes officiels jusqu'aux programmes de 2002 :

Tableau 1 – Synthèse de l'examen des programmes officiels du CP au CE1 réunis (Favrat et Merle, 2009)

	Textes avant 2002	Depuis 2002
Notion de droite	Rien	Rien
Propriété d'alignement	Rien	Percevoir, contrôler, produire un alignement d'objets ou de points. L'adjectif « aligné » se trouve dans la liste du vocabulaire à maîtriser.
Usages de la règle	Usage de la règle pour des tracés, dans l'étude des figures géométriques dans des activités de reproduction, de description, de construction, de dessins, plans ou solides. Activités pratiques de mesurage.	En plus des usages cités ci-contre, la règle est un instrument pour travailler sur l'alignement d'objets ou de points. En 2002, dans le même but, d'autres instruments sont cités : une ficelle tendue, une bande de papier, la visée. De tels instruments ne sont plus explicitement cités dans les textes de 2007 ou de 2008

Le programme actuel du cycle 2³ font apparaître le mot “alignement” à plusieurs reprises :

Attendus de fin de cycle

- - (Se) repérer et (se) déplacer en utilisant des repères et des représentations.
- - Reconnaître, nommer, décrire, reproduire quelques solides.
- - Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, construire quelques figures géométriques.
- - Reconnaître et utiliser les notions d'**alignement**, d'angle droit, d'égalité de longueurs, de milieu, de symétrie.

Lien entre propriétés géométriques et instruments de tracé : droite, **alignement** et règle non graduée, angle droit et équerre ; cercle et compas. - Utiliser la règle (non graduée) pour **repérer et produire des alignements**.

Repérer ou trouver le milieu d'un segment, en utilisant une bande de papier avec un bord droit ou la règle graduée : **alignement de points et de segments** ; angle droit ; égalité de longueurs ; milieu d'un segment.

³ <https://eduscol.education.fr/84/j-enseigne-au-cycle-2>

PROCESSUS DE COCONSTRUCTION AXÉ SUR LES BESOINS DES PERSONNES ENSEIGNANTES EN MATHÉMATIQUES À L'ÉDUCATION PRÉSCOLAIRE ; CHANGEMENTS DE PRATIQUE ET RÉUSSITE DES ENFANTS

| DESHAIES* ISABELLE, GONNY** JULIETTE ET FLIBOTTE*** ISABELLE

Résumé | Cet article présente les ajustements des pratiques d'interventions en mathématiques à la suite d'un processus de coconstruction axé sur le soutien en mathématiques. L'analyse de questionnaires, entrevues et journaux de bord auprès de quatre enseignantes à l'éducation préscolaire 5 ans révèle un changement dans les interventions indirectes et directes. La planification en lien avec les moments du quotidien et les opportunités mathématiques demeure un défi.

Mots-clés : éducation préscolaire 5 ans, éveil aux mathématiques, interventions indirectes, interventions directes, planification

Abstract | This article presents adjustments in intervention practices in mathematics following a coconstruction process focused on math support. The analysis of questionnaires, interviews, and logbooks from four preschool teachers (5-year-olds) reveals a change in both indirect and direct interventions. Planning in relation to daily routines and mathematical opportunities remains a challenge.

Keywords: 5-year-old preschool, early math learning, indirect interventions, direct interventions, planning

I. PROBLÉMATIQUE

Actuellement au Québec, les interventions de soutien à l'éveil aux mathématiques à l'éducation préscolaire sont souvent jugées peu optimales. Plusieurs études indiquent que les pratiques enseignantes (l'ensemble des stratégies, méthodes et actions mises en œuvre par une personne enseignante pour favoriser l'apprentissage) ne permettent pas toujours de répondre aux besoins variés des enfants ou d'exploiter pleinement leur potentiel en mathématiques (Deshaies et Boily, 2023 ; St-Jean et al., 2023). En outre, les personnes enseignantes signalent parfois des difficultés à intégrer des concepts mathématiques plus avancés dans un contexte ludique (Deshaies, 2020).

Pourtant, la recherche montre que des interventions pédagogiques spécifiques et bien structurées dans les premières années d'éducation sont essentielles pour soutenir le développement des compétences mathématiques de l'enfant (Clements et Sarama, 2021).

Pour favoriser une compréhension ludique et concrète des concepts mathématiques chez l'enfant, il est essentiel de soutenir les personnes enseignantes dans l'intégration d'interventions efficaces, adaptées au contexte préscolaire. Celles-ci incluent des stratégies directes et indirectes, telles que le questionnement, l'étayage et la création d'environnements de jeu propices (Wickstrom et Pyle, 2021). À l'inverse, un soutien insuffisant risque de freiner l'engagement des enfants dans les situations mathématiques, limitant ainsi le développement de compétences clés favorisant leur réussite future (Pagani et al., 2011).

* Université du Québec à Trois-Rivières – Canada – isabelle.deshaies2@uqtr.ca

** Université du Québec à Trois-Rivières – Canada – juliette.gonny@uqtr.ca

*** Centre de services scolaire de Saint-Hyacinthe – Canada – isabelle.flibotte@cssh.gouv.qc.ca

Pour améliorer la réussite éducative des enfants, il est important de soutenir les personnes enseignantes dans la mise en place d'interventions de qualité, en tenant compte des contextes de jeu et d'exploration, afin de favoriser un apprentissage significatif (CTREQ, 2024). Il semble donc essentiel de soutenir les personnes enseignantes en leur offrant des formations continues, des temps de réflexions sur leur pratique et des outils concrets pour améliorer la qualité de leurs interventions en mathématiques. Cela peut inclure l'utilisation de pratiques pédagogiques de qualité et la mise en place d'interventions interactives, adaptées aux contextes individuels (Clements et Sarama, 2021). Un soutien accru permettrait ainsi d'améliorer les habiletés mathématiques des enfants, entraînant des répercussions positives sur leur parcours éducatif à long terme (Eriksson et Lillvist, 2020).

Ces constats soulèvent une question : un processus de coconstruction des pratiques pédagogiques de qualité en mathématiques pourrait-il favoriser l'adoption de pratiques enseignantes efficaces et, par conséquent, soutenir la réussite de l'enfant ?

II. ASSISE THÉORIQUE

1. *Pratiques pédagogiques de qualité*

Les pratiques pédagogiques de qualité pour soutenir le développement des habiletés mathématiques chez les jeunes enfants reposent sur un équilibre entre interventions indirectes et directes de la personne enseignante. Ces interventions, combinées à des approches centrées sur l'enfant, permettent de soutenir l'éveil aux mathématiques des enfants.

2. *Interventions indirectes*

Les interventions indirectes à l'éducation préscolaire se manifestent lorsque la personne enseignante crée un environnement propice à l'exploration autonome de l'enfant et à son jeu. Ces environnements stimulants encouragent les enfants à manipuler des objets, à résoudre des problèmes et à expérimenter des stratégies de manière autonome (Hirsh-Pasek et al., 2009). L'idée est de permettre à l'enfant de construire ses connaissances mathématiques à son rythme, de façon autonome, tout en étant discrètement soutenu par la personne enseignante. Par exemple, au coin des blocs, les enfants construisent une maison, et en amont, la personne enseignante intervient subtilement en utilisant les blocs mosaïques pour créer le dallage du plancher, faisant ainsi référence à une activité antérieure liée au dallage dans des œuvres plastiques. Par cette intervention, la personne enseignante souhaite que l'enfant utilise de façon autonome une notion vue précédemment dans un autre contexte ; ici le jeu de construction (Deshaies et Boily, 2023). Par cette intervention, la personne enseignante soutient indirectement l'enfant à travers des situations ludiques qui sollicitent l'utilisation d'habiletés mathématiques de façon concrète (le dallage) (Fisher et al., 2013). Ce type d'intervention est alignée avec les théories socioconstructivistes, telles que celle de Vygotsky, qui valorisent l'apprentissage par la découverte dans un cadre social, où l'enfant est à la fois acteur et apprenant (Vygotsky, 1978). L'enfant est ainsi encouragé à faire des connexions entre les concepts dans des contextes diversifiés, consolidant ses habiletés mathématiques.

3. *Interventions directes*

Une intervention directe à l'éducation préscolaire, selon l'approche développementale, consiste en une interaction intentionnelle de la personne enseignante visant à soutenir ou à guider explicitement l'apprentissage de l'enfant. Elle s'appuie sur des stratégies telles que le questionnement, l'étagage et les rôles facilitateurs de la personne enseignante dans le jeu de l'enfant. Ces interventions sont planifiées pour encourager des progrès ciblés, tout en respectant le rythme de développement de l'enfant.

Le questionnement est une méthode clé dans l'intervention directe, permettant à la personne enseignante de guider l'enfant vers la réflexion et la résolution de problèmes. En posant des questions ouvertes, elle stimule la pensée critique et aide l'enfant à organiser ses idées tout en favorisant son autonomie (Deshaies et Boily, 2023 ; Point et Leclaire, 2020). Ce type de questionnement permet à l'enfant de s'engager activement dans son processus d'apprentissage, tout en lui laissant de la liberté dans la recherche de solutions. Ainsi, le soutien sous forme de questionnement invite l'enfant à s'exprimer, à clarifier ses idées et à prendre conscience de son propre raisonnement.

L'échafaudage consiste à ajuster le soutien offert en fonction des besoins spécifiques de l'enfant, en fournissant de l'aide au moment où il en a besoin et en la retirant progressivement à mesure qu'il gagne en autonomie (Wood et al., 1976). L'échafaudage est un concept développé par Bruner (1983) et adapté par Cloutier (2012), qui décrit dix fonctions pédagogiques permettant à la personne enseignante de soutenir l'apprentissage des enfants. Ces fonctions s'appliquent particulièrement bien à l'éducation préscolaire, où le jeu et les interactions sont au cœur des apprentissages. Les dix fonctions de l'échafaudage selon Cloutier (2012) se détaillent ainsi : « 1) l'implication chaleureuse et enrôlement (capter l'attention de l'enfant pour le motiver à accomplir une tâche) ; 2) la complexification du jeu (inciter l'enfant à bonifier son jeu) ; 3) la simplification de la tâche ou du jeu (simplifier une tâche complexe en la décomposant) ; 4) la démonstration ou la présentation d'un modèle (montrer à l'enfant comment accomplir une tâche) ; 5) le maintien de l'orientation de l'enfant (aider l'enfant à rester concentré sur son objectif) ; 6) le contrôle de la frustration (aider l'enfant à gérer ses émotions lorsqu'il rencontre des difficultés) ; 7) mettre l'accent sur les caractéristiques principales de la tâche (souligner de différentes façons ce qui est important dans la tâche) ; 8) l'implication des pairs (reconnaître les pairs comme partenaire de jeu) ; 9) la gestion des règles et du groupe (s'assurer de la bonne gestion des règles) ; 10) l'autonomie (inciter l'enfant à faire ce qu'il est capable et l'encourager à se dépasser) » (p. 94-95). La mise en place des fonctions de l'échafaudage favorise l'autonomie tout en accompagnant l'enfant dans la maîtrise de compétences nouvelles.

Les rôles facilitateurs de la personne enseignante se déclinent sous différentes formes au sein du jeu de l'enfant. En tant qu'observatrice participante, la personne enseignante observe l'enfant en action et le questionne au besoin sur son processus réflexif (Deshaies et Boily, 2021) ; tout en restant disponible pour intervenir lorsque nécessaire. En tant que cojoueuse, elle s'implique directement dans le jeu, créant ainsi des occasions d'apprentissage collaboratif. Enfin, en tant que leader de jeu, elle structure l'activité tout en permettant aux enfants de suivre leurs propres idées et d'expérimenter (Johnson et al., 2005 ; Point et Leclaire, 2020).

4. *Liens entre pratiques de qualité et interventions*

La mise en place d'interventions indirectes et directes des personnes enseignantes à l'éducation préscolaire est essentielle pour soutenir l'éveil aux mathématiques des enfants. Les interventions indirectes, comme la création d'environnements favorisant le jeu autonome, permettent aux enfants de manipuler et d'explorer les concepts mathématiques à leur propre rythme, tout en développant des compétences de résolution de problèmes (Lerkanen et al., 2016). D'un autre côté, les interventions directes, telles que le questionnement, l'échafaudage et la mise en place des rôles facilitateurs, favorisent une réflexion plus approfondie, en renforçant des compétences spécifiques par des interactions ciblées (Weiland et Yoshikawa, 2013). L'équilibre entre ces deux types d'interventions renforce la qualité du soutien pédagogique offert par la personne enseignante. Il permet d'adapter l'encadrement aux besoins des enfants tout en les encourageant à explorer et à découvrir de façon autonome (Mashburn et al., 2008).

5. Objectif de la contribution

L'objectif de cet article est de faire état des ajustements de pratiques d'interventions quant à l'éveil aux mathématiques des personnes enseignantes à la suite d'un processus de coconstruction axé sur les formes de soutien en mathématiques à l'éducation préscolaire

III. MÉTHODOLOGIE

Considérant la nature de notre question de recherche, une méthodologie qualitative avec devis descriptif a été retenue (Fortin et Gagnon, 2016). Cette méthodologie permettra de décrire les différents changements liés à la mise en place d'interventions de qualité quant au soutien de l'éveil aux mathématiques de l'enfant à l'éducation préscolaire.

1. Participantes

Quatre enseignantes à l'éducation préscolaire (enfants de 5-6 ans) ont participé au projet (ENS1-2-3-4). Les seuls critères d'inclusion pour participer à celui-ci étaient d'avoir un intérêt pour la mise en place de pratiques d'interventions de qualité en mathématiques à l'éducation préscolaire et pouvoir expérimenter des interventions en classe d'éducation préscolaire.

2. Déroulement du projet : collecte et analyse de données

Le projet de recherche collaborative (Bourassa et Boudjaoui, 2012), à l'origine de cet article, s'est déroulé sur une année et comprend cinq journées de coconstruction. Il a suivi trois grandes étapes : une première collecte de données en début d'année scolaire, cinq journées de coconstruction espacées de six à sept semaines, puis une collecte finale de données. Ce projet reposait sur un processus itératif de collecte et d'analyse des données. Divers outils et méthodes ont été utilisés pour recueillir des informations sur les besoins des enseignantes concernant la mise en place de pratiques d'intervention de qualité. La Figure 1 permet de visualiser ce processus.

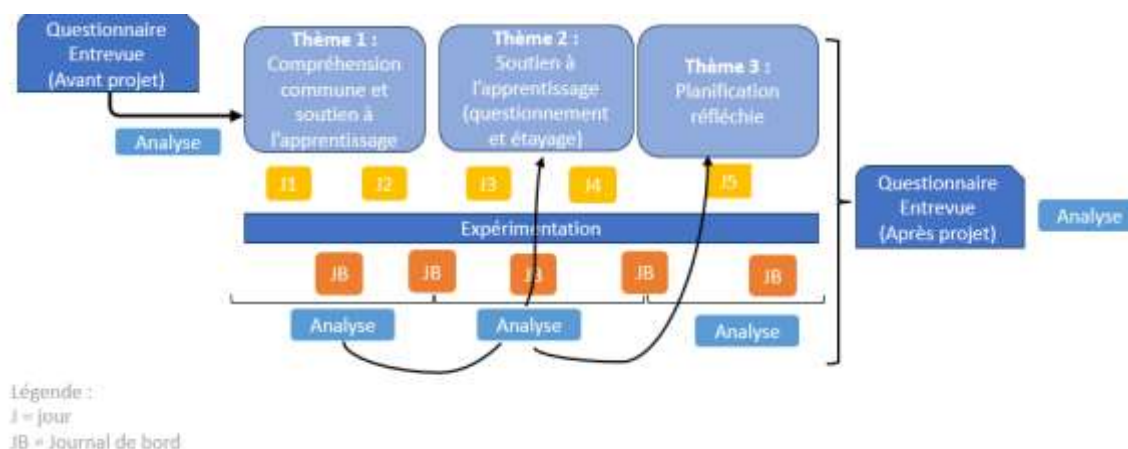


Figure 1 – Déroulement du projet de recherche

3. Outils de collecte de données et analyse

Avant et après les cinq journées de coconstruction de pratiques d'intervention avec les enseignantes, un questionnaire à questions ouvertes et une entrevue furent réalisés auprès de chacune des quatre participantes. Le questionnaire était composé de quatre thèmes : la compréhension de l'éveil aux mathématiques à l'éducation préscolaire (trois questions), la mise en place de pratiques d'interventions

(indirectes et directes) (quatre questions), les interventions lors des différents moments de la classe (routines et transitions, situation initiée par la personne enseignante et jeu libre) (trois questions) et le soutien auprès des enfants en mathématiques (2 questions). L'entrevue était basée sur la même structure et a permis d'exemplifier les réponses issues du questionnaire. Entre les journées consacrées à la coconstruction de pratiques d'interventions de qualité, les enseignantes devaient compléter un journal de bord audio sur les défis et les facilitateurs de l'implantation de ces pratiques d'interventions ainsi que leurs réflexions sur la mise en place de celles-ci. Une analyse de contenus thématiques (Braun et Clarke, 2006) a été réalisée tout au long du projet entre les différentes journées de coconstruction.

Le premier thème, qui a émergé de l'analyse de contenu des réponses aux questionnaires et de l'entrevue, a permis d'établir une compréhension commune de la progression développementale de l'éveil aux mathématiques de l'enfant. Le deuxième thème, issu de l'analyse des journaux de bord, a abordé le soutien à l'apprentissage de la personne enseignante sous la forme d'interventions indirectes (environnement), directes (rôles dans le jeu libre de l'enfant), le questionnement et les dix fonctions de l'étayage selon Cloutier (2012). Le troisième thème, issu de l'analyse des journaux de bord, a traité de l'idée d'une planification réfléchie en synergie au sein de la classe. En fait, ce thème a ouvert la réflexion sur l'importance de la cohérence entre la situation mathématique lors de la routine ou de la transition, de la situation initiée par la personne enseignante ainsi que les interventions dans le jeu libre. En fait, c'est l'idée d'offrir une multitude de contextes pour que l'enfant puisse faire du sens sur ses apprentissages en mathématiques.

IV. RÉSULTATS

La section des résultats sera présentée en deux parties. Les interventions indirectes et directes de soutien, avant et après le processus de coconstruction, des pratiques d'interventions de qualité en mathématiques ainsi que la planification de l'environnement et des interventions.

1. *Les pratiques d'interventions indirectes*

Avant le projet de recherche, le seul matériel mathématique présent dans l'environnement était le calendrier. Les enseignantes utilisaient ce dernier uniquement lors de la routine du matin, sans véritablement créer un environnement propice à l'éveil aux mathématiques. Le calendrier servait principalement à introduire les nombres, la comptine numérique et certaines régularités non numériques. Par exemple, l'enseignante 2 précise que c'est « le chef du jour » qui complétait le calendrier en indiquant la date et en dénombrant les jours du mois. L'enseignante 3 mentionne l'utilisation du tableau interactif, où le calendrier disparaît une fois la routine terminée. Cela révèle une approche très limitée du calendrier, restreinte à une routine quotidienne, sans qu'il devienne un outil accessible pour la construction du sens mathématique tout au long de la journée.

Cependant, après le projet de recherche, les enseignantes ont pris conscience de l'importance d'un environnement riche pour favoriser l'éveil aux mathématiques. Le calendrier est désormais affiché et accessible aux enfants, leur permettant de s'en servir comme outil de référence, notamment pour le dénombrement. Il est aussi intégré dans différents coins de jeu, comme le restaurant ou la maison, pour encourager les enfants à l'utiliser dans leurs scénarios ludiques. Des bandes de nombres ont également été mises à leur disposition, avec une modélisation pour encourager leur utilisation, comme lors d'un paiement dans un coin restaurant. Toutefois, l'intégration d'autres concepts mathématiques tels que la géométrie, la mesure, la statistique et la probabilité reste un défi. Comme le souligne l'enseignante 4 : « C'est facile maintenant pour l'arithmétique. Les enfants utilisent le matériel pour compter, comparer, etc. Mais pour avoir du sens avec la géométrie et la mesure, c'est difficile ; surtout

dans les coins de jeu. » Cela illustre la difficulté à offrir un environnement stimulant qui encourage l'apprentissage des concepts de géométrie et de mesure, en dehors de l'arithmétique.

L'observation a également pris une importance majeure après le projet de recherche, les enseignantes reconnaissant unanimement son rôle pour soutenir les apprentissages des enfants. L'enseignante 3 explique : « Ma compréhension de la progression développementale de l'enfant en mathématiques me permet de mieux voir ce qu'il fait et me donne des idées sur comment le soutenir. » Ces propos mettent en évidence l'importance de comprendre les étapes du développement mathématique de l'enfant pour mieux l'observer et le guider. Cependant, l'enseignante 2 souligne les difficultés liées à la gestion de classe, notamment durant les jeux libres : « ce n'est pas toujours facile de bien observer ; surtout dans les jeux libres, car il y a beaucoup de gestion. » Cela révèle que la gestion de classe, dans ces moments, peut limiter les occasions d'observation et, par conséquent, de soutien au développement des enfants.

Enfin, aucune des enseignantes n'a mentionné l'utilisation d'un rôle de « metteur en scène », une intervention indirecte qui pourrait pourtant favoriser l'autonomie et l'exploration des enfants dans leurs jeux. Cela souligne peut-être une zone d'amélioration dans la façon dont l'environnement éducatif peut être pensé pour encourager davantage l'apprentissage spontané et l'exploration mathématique par des interventions indirectes.

2. *Les pratiques d'interventions directes*

Avant le projet de recherche, les enseignantes utilisaient principalement des questions fermées pour vérifier les connaissances des enfants. « Quand je suis au calendrier, je demande la date du jour, le nombre de jours restants avant la fin de semaine, par exemple » (ENS4). Après le projet de recherche, les analyses montrent un changement dans le type de questions posées aux enfants, qui sont désormais davantage ouvertes. « Maintenant, je veux savoir comment ils réfléchissent, quelle est leur démarche pour mieux les accompagner » (ENS 3). Ces propos mettent en lumière le rôle d'observateur participant dans le jeu de l'enfant.

Avant le projet, les enseignantes parlaient peu de leur rôle facilitateur dans le jeu libre. Seules deux enseignantes évoquaient le rôle de cojoueuse. « Parfois, je joue avec les enfants en participant à leur scénario de jeu » (ENS 2). Cependant, aucune intention pédagogique, notamment mathématique, n'était associée à la présence de l'adulte dans ces moments. En fait, cette participation n'était pas perçue comme une opportunité d'exploitation des connaissances construites par l'enfant dans d'autres contextes en classe. Après le projet, les quatre enseignantes reconnaissent l'importance de leur rôle de cojoueuses dans le jeu. « Maintenant, je profite de ces moments pour encourager les enfants à utiliser leurs connaissances mathématiques. Par exemple, au coin restaurant, je fais exprès de faire des erreurs en payant avec les jetons, ce qui incite les enfants à compter » (ENS 2). Malgré ce changement, les analyses révèlent une certaine difficulté pour les enseignantes à s'impliquer pleinement dans le jeu des enfants. « C'est parfois difficile de comprendre le scénario de jeu et de s'y intégrer. J'ai peur de tout gâcher » (ENS 1).

3. *Les fonctions de l'étalement*

Concernant les fonctions de l'étalement, les analyses ne montrent aucun changement dans les pratiques avant et après le projet de recherche. Les quatre enseignantes mentionnent principalement deux fonctions : la démonstration et la réduction des degrés de liberté. « Quand un enfant ne comprend pas, je m'assois à côté de lui et je modélise la situation. Pour un autre, je fais un petit bout avec lui »

(ENS 4). Bien que ces fonctions soutiennent l'apprentissage de l'enfant, l'absence des autres fonctions d'étagage montre que, malgré le travail de coconstruction sur les pratiques d'interventions de qualité, certaines pratiques restent moins intuitives et claires pour les participantes.

Les résultats mettent également en évidence l'absence du rôle de leader de jeu, qui pourrait pourtant aider à élaborer des scénarios de jeu plus complexes et soutenir le développement des compétences mathématiques des enfants.

4. *La planification de l'environnement et des interventions*

Les analyses montrent que les quatre enseignantes participantes sont réticentes à planifier les opportunités mathématiques de manière cohérente avec les différents moments de la journée en classe. Elles déclarent planifier certaines situations initiées, intégrer des opportunités d'apprentissage dans les routines, les transitions et les jeux libres. Cependant, elles semblent résistantes à l'idée de planifier une continuité entre ces différents moments, environnements et interventions. « Je ne suis pas au préscolaire pour tout planifier. Dans mon quotidien, je suis les intérêts des enfants » (ENS 3).

V. DISCUSSION

Les résultats obtenus dans cette étude révèlent des transformations importantes au niveau des interventions éducatives indirectes et directes, de l'offre d'opportunités d'apprentissage en mathématiques au sein du quotidien, mais une absence de planification en cohérence. Ces changements s'inscrivent dans une démarche de coconstruction pédagogique qui a permis aux enseignantes d'affiner leurs pratiques, bien que certaines résistances et difficultés demeurent.

1. *Interventions indirectes*

La transformation majeure observée est l'évolution de l'utilisation de l'environnement, dont le calendrier, qui est passé d'un simple outil de routine à un instrument accessible et interactif permettant une plus grande appropriation des concepts mathématiques par les enfants. Cette transition s'inscrit dans la lignée des travaux de Clements et Sarama (2014), qui soulignent l'importance de créer des environnements riches pour encourager les apprentissages mathématiques informels dès le plus jeune âge. En effet, les bandes de nombres et la modélisation des situations de jeu proposées dans les coins (ex. restaurant) permettent aux enfants de pratiquer des compétences arithmétiques dans des contextes ludiques (Lee et Ginsburg, 2009).

Cependant, les enseignantes peinent à intégrer des concepts plus complexes, tels que la géométrie et la mesure, dans ces environnements de jeu. Cette difficulté est corroborée par plusieurs études (par exemple Van den Heuvel-Panhuizen, 2020), qui montrent que l'arithmétique est souvent plus intuitivement introduite dans les activités préscolaires, alors que la géométrie et la mesure demandent une planification plus intentionnelle pour être intégrées de manière cohérente.

2. *Interventions directes*

Le passage des questions fermées aux questions ouvertes représente une avancée notable. Cette évolution correspond à une approche plus centrée sur l'enfant, dans laquelle la personne enseignante joue le rôle d'accompagnatrice des processus cognitifs plutôt que de simple vérificateur de connaissances. L'importance de poser des questions ouvertes pour soutenir le développement des compétences de pensée critique a été bien documentée dans les recherches sur les pratiques pédagogiques efficaces (Fisher et al., 2013). En encourageant les enfants à expliciter leur démarche, les

enseignantes favorisent une réflexion métacognitive qui soutient le développement de compétences mathématiques plus profondes.

Cependant, des défis subsistent quant à l'implication des enseignantes dans le jeu libre. Elles expriment une crainte de perturber les scénarios des enfants, ce qui limite leur capacité à intervenir de manière stratégique. Cette crainte est bien fondée, selon Wood et Attfield (2005), qui soulignent l'importance pour les personnes enseignantes de trouver un équilibre délicat entre la guidance et l'autonomie des enfants dans les jeux. L'enjeu pour celles-ci est donc de s'impliquer sans interférer, une compétence qui requiert une observation fine et une compréhension des dynamiques de jeu.

3. *Planification*

Enfin, la réticence des enseignantes à planifier les opportunités d'apprentissage mathématiques tout au long de la journée souligne une tension entre une approche spontanée et une approche plus structurée de l'éveil aux mathématiques. Des études ont montré que l'intégration de la mathématique dans les routines quotidiennes et les jeux libres peut être très bénéfique pour les enfants (par exemple Gifford, 2014), mais cela nécessite une planification préalable pour s'assurer que les occasions d'apprentissage sont pleinement exploitées.

Bien que les enseignantes reconnaissent l'importance d'intégrer les mathématiques dans divers moments de la journée, elles semblent hésiter à planifier de manière systématique cette intégration. Ce phénomène est aussi documenté dans les travaux de Barody et al. (2006), qui soulignent que la planification flexible et adaptative est essentielle pour maximiser les apprentissages des enfants, tout en respectant leur autonomie et leurs intérêts.

VI. LIMITES

Bien que l'étude montre un changement notable dans les pratiques, elle présente des limites. Le faible nombre de participantes (quatre enseignantes) ne permet pas de généraliser les résultats. De plus, l'analyse s'est basée uniquement sur des documents des enseignantes, sans observations en classe, ce qui aurait pu enrichir les conclusions.

VII. CONCLUSION

Cette étude met en évidence des changements significatifs dans les pratiques pédagogiques des enseignantes à la suite du projet de recherche. Si des avancées notables ont été faites, notamment en ce qui concerne les interventions indirectes et directes en mathématiques, la planification demeure un domaine à consolider. Les résultats révèlent en particulier la difficulté, pour les enseignantes, de trouver un équilibre entre la nécessité de planifier des intentions d'apprentissage et le respect du jeu libre des enfants, en particulier dans le cadre du jeu de faire semblant. Cette tension, déjà documentée dans la littérature (Clerc-Georgy et Kappeler, 2020 ; Fleer, 2015), met en lumière la complexité d'un accompagnement pédagogique qui ne verse ni dans l'instrumentalisation du jeu ni dans son abandon au profit de logiques exclusivement scolaires.

Dans cette perspective, il devient essentiel de concevoir la planification non comme une prescription rigide, mais comme un cadre souple, capable d'anticiper des points d'appui pour l'intervention tout en laissant place à l'imprévu et à l'agentivité enfantine (Pramling et al., 2019). C'est dans cette marge de manœuvre que peuvent émerger des situations d'éveil coconstruites, conciliant intentions pédagogiques de l'adulte et intérêts des enfants.

Les recherches futures devraient approfondir cette articulation, notamment pour des contenus complexes comme la géométrie et la mesure, en développant des stratégies compatibles avec un enseignement *play-responsive* — intégrant des savoirs disciplinaires dans un cadre ludique, intersubjectif et imaginaire (Fleer, 2019). Une telle approche contribuerait à mieux concilier visées éducatives et dynamiques du jeu, offrant une réponse concrète au dilemme professionnel vécu par de nombreuses personnes enseignantes en début de scolarité (Hedegaard et Edwards, 2023).

RÉFÉRENCES

- Bruner, J. (1983). *Le développement de l'enfant*. PUF.
- Clements, D. H. et Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (2^e éd.). Routledge.
- Clements, D. H. et Sarama, J. (2021). Early childhood mathematics intervention. *Science*, 333(6045), 968-970. <https://doi.org/10.1126/science.1204537>
- Clerc-Georgy, A. et Kappeler, G. (2020). Tensions dans les premiers degrés de la scolarité en Suisse francophone : vers une didactique des apprentissages fondamentaux. *Revue internationale de communication et de socialisation*, 7(1-2), 75-90. <http://hdl.handle.net/20.500.12162/4457>
- Cloutier, R. (2012). *L'enseignement stratégique : planification, supervision et régulation des apprentissages*. Presses de l'Université du Québec.
- CTREQ. (2024, 24 juin). *Des interventions en mathématiques à l'éducation préscolaire*. <https://rire.ctreq.qc.ca/des-interventions-en-mathematiques-a-leducation-prescolaire/>
- Deshaies, I. (2020). L'apprentissage des mathématiques au préscolaire 4 ans et 5 ans. Dans I. Deshaies et J.-M. Miron (dir.), *Tisserands d'enfance : le développement de l'enfant de 4 et 5 ans* (p. 105-141). JFD Éditions.
- Deshaies, I. et Boily, M. (2023). Le modèle de transposition didactique en mathématique à l'éducation préscolaire : niveaux de jeu des enfants et utilisation des savoirs mathématiques dans le jeu symbolique. *Revue internationale de communication et socialisation*, 10(1), 22-43. <https://www.researchgate.net/publication/377358905>
- Eriksson, A. et Lillvist, A. (2020). Supporting children's mathematical learning in preschool: Preschool teachers' perceptions and practices. *Early Years*, 41(4), 400-416.
- Fisher, K. R., Hirsh-Pasek, K., Golinkoff, R. M. et Gryfe, S. G. (2013). Conceptual split? Parents' and experts' perceptions of play in the 21st century. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 34(6), 310-318. <https://doi.org/10.1016/j.appdev.2013.09.002>
- Fisher, K. R., Hirsh-Pasek, K., Newcombe, N. S. et Golinkoff, R. M. (2013). Taking shape: Supporting preschoolers' acquisition of geometric knowledge through guided play. *Child Development*, 84(6), 1872-1878. <https://doi.org/10.1111/cdev.12091>
- Fleer, M. (2015). Pedagogical positioning in play – teachers being inside and outside of children's imaginary play. *Early Child Development and Care*, 185(11-12), 1801-1814. <https://doi.org/10.1080/03004430.2015.1028393>
- Fleer, M. (2019). Conceptual PlayWorlds as a pedagogical intervention: supporting the learning and development of the preschool child in play-based setting. *Obutchénie: Revista De Didática E Psicologia Pedagógica*, 3(3), 1-22. <https://doi.org/10.14393/OBv3n3.a2019-51704>

- Gifford, S. (2014). A good foundation for number learning for five-year-olds? An evaluation of the English early years foundation stage profile. *Research in Mathematics Education*, 16(3), 219–233. <https://doi.org/10.1080/14794802.2014.895713>
- Hedegaard, M. et Edwards, A. (2023). *Taking children and young people seriously: A caring relational approach to education*. Cambridge University Press.
- Hirsh-Pasek, K., Golinkoff, R. M., Berk, L. E. et Singer, D. G. (2009). *A mandate for playful learning in preschool: Presenting the evidence*. Oxford University Press.
- Lee, J. S. et Ginsburg, H. P. (2009). Early childhood teachers' misconceptions about mathematics education for young children in the United States. *Australasian Journal of Early Childhood*, 34(4), 37–45. <https://doi.org/10.1177/183693910903400406>
- Mashburn, A. J., Pianta, R. C., Hamre, B. K., Downer, J. T., Barbarin, O. A., Bryant, D., Burchinal, M., Early, D. M. et Howes, C. (2008). Measures of classroom quality in prekindergarten and children's development of academic, language, and social skills. *Child Development*, 79(3), 732–749. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2008.01154.x>
- Pagani, L. S., Fitzpatrick, C., Belleau, L. et Janosz, M. (2011). Prédire la réussite scolaire des enfants en quatrième année à partir de leurs habiletés cognitives, comportementales et motrices à la maternelle. *Institut de la statistique du Québec*, 6(1). https://grand-quevilly.circonscription.ac-normandie.fr/IMG/pdf/fascicule_reussite_scol_fr.pdf
- Point, M. et Leclaire, E. (2020). Le jeu au service du développement global de l'enfant d'âge préscolaire. Dans I. Deshaies et J.-M. Miron (dir.), *Tisserands d'enfance, le développement de l'enfant de 4-5 ans* (p. 45–67). JFD Éditions.
- Pramling, N., Wallerstedt, C., Lagerlöf, P., Björlund, C., Kultti, A., Palmér, H., Magnusson, M., Thulin, S., Jonsson, A. et Pramling Samuelsson, I. (2019). *Play-responsive teaching in early childhood*. Springer Open.
- St-Jean, C., Dubé, N. F., Forest, M. P. et Brouillette, M. D. (2023). Besoins en mathématiques à l'éducation préscolaire afin d'aspirer à la bonification des pratiques enseignants. *Revue canadienne des jeunes chercheurs et chercheurs en éducation*, 14(1), 5–11. <https://journalhosting.ucalgary.ca/index.php/cjnse/article/view/77625/56788>
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2020). *Children learn mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Sense Publishers.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Weiland, C. et Yoshikawa, H. (2013). Impacts of a prekindergarten program on children's mathematics, language, literacy, executive function, and emotional skills. *Child Development*, 84(6), 2112–2130. <https://doi.org/10.1111/cdev.12099>
- Wickstrom, H. et Pyle, A. (2024). Supporting early math learning along a continuum of guided play. *Early Childhood Education Journal*, 53(4), 1053–1063. <https://doi.org/10.1007/s10643-024-01650-8>
- Wood, D., Bruner, J. S. et Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem-solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17(2), 89–100. <https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x>
- Wood, E. et Attfield, J. (2005). *Play, learning and the early childhood curriculum* (2^e éd.). SAGE.

LES VARIABLES DIDACTIQUES DE FORMATION DANS UNE SITUATION DE FORMATION DE TYPE JEU DE RÔLES – LE CAS DE LA MISE EN COMMUN

| MILI* ISMAÏL ET GUILLE-BIEL WINDER** CLAIRE

Résumé | Le jeu de rôles constitue un dispositif de formation plaçant les futurs enseignants dans des situations simulant des situations problématiques de classe. Réalisée dans le contexte suisse romand de formation initiale, cette étude vise à éprouver une méthodologie d'analyse *a priori* du dispositif, qui conduit à mettre au jour des « variables didactiques de formation » vues comme des choix du formateur favorisant la mobilisation par les formés de savoirs didactiques ou professionnels.

Mots-clés : jeu de rôles, système de formation, analyse *a priori*, variable didactique de formation, savoirs professionnels

Abstract | Role-playing is a training device that places future teachers in situations simulating problematic classroom situations. Conducted in the context of initial teacher training in French-speaking Switzerland, this study aims to test a methodology for *a priori* analysis of the device, which leads to the identification of “didactic training variables” seen as choices made by the trainer to encourage the mobilization of didactic or professional knowledge by trainees.

Keywords: Role play, training system, *a priori* analysis, training didactic variable, professional knowledge

I. INTRODUCTION

Le Jeu de Rôles est une situation de formation (Lajoie et Pallascio, 2001, Mangiante et al., 2019) qui place les formés dans un contexte proche de l'exercice de la classe et qui s'écarte des stratégies mise au jour par Houdement et Kuzniak (1996). Face aux défis rencontrés par les formateurs lors de la mise en œuvre de ces situations (Guille-Biel Winder et al., 2022), nous avançons l'hypothèse selon laquelle l'identification de variables didactiques de formation (vues comme des choix du formateur favorisant la mobilisation par les formés de savoirs didactiques ou professionnels) peut faciliter le processus d'institutionnalisation de ces savoirs dans le système de formation. L'objectif de cette communication consiste à éprouver une méthodologie d'analyse *a priori* du dispositif (Guille-Biel Winder et Mili, soumis), qui conduit à mettre au jour de telles variables didactiques de formation. Comme lors de nos premières études (Guille-Biel Winder et Mili, 2023; Mili, 2023), nous nous plaçons dans le contexte de formation suisse romand, au travers d'un dispositif prenant appui sur un énoncé invitant les enseignants à effectuer une mise en commun. Après avoir présenté nos points d'appui théoriques puis les données et les éléments de contexte, nous mettons en œuvre la méthodologie d'analyse. À l'issue de cette étude nous formulons des hypothèses quant au lien causal entre certains choix du formateur et les savoirs professionnels travaillés par les enseignants (primaire) au travers de ce dispositif de formation.

II. POINTS D'APPUI THÉORIQUES

Nos travaux s'inscrivent dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), en convoquant notamment les notions de milieu, de variable didactique et d'analyse *a priori* permettant de démêler ce qui relève du nécessaire du contingent (Chesnais et Coulangue, 2022). Nous prenons également appui sur la modélisation d'un système de formation (Guille-Biel Winder, *soumis*), dont

* Université de Fribourg – Suisse – ismail.mili@edufr.ch

** AMPIRIC, ADEF, Aix-Marseille Université – France – claire.winder@univ-amu.fr

l'origine se trouve dans les travaux de Houdement (1995, 2013) et Kuzniak (1994). Dans cette partie, nous présentons le Jeu de Rôles ainsi que les différentes tâches qui le constituent. Nous explicitons dans un deuxième temps la notion de variable didactique de formation et précisons les différentes étapes de notre méthodologie.

1. *Présentation du dispositif Jeu de Rôles et des différentes tâches qui le constituent*

Le Jeu de Rôles est un dispositif qui place les apprenants (ici, des étudiants se préparant à enseigner aux cycles primaires) dans un cadre semblable à celui d'une classe. Il s'agit de résoudre une situation problématique liée à l'enseignement et à l'apprentissage, en mettant en scène un ou plusieurs « élèves » et un « enseignant », ces rôles étant joués par les étudiants eux-mêmes. Le Jeu de Rôles (Lajoie et al., 2019) suit en général le déroulement chronologique suivant en quatre étapes¹ : 1) une mise en situation définit le cadre et le contexte fictif dans lequel les participants évolueront, 2) une phase de préparation, de durée variable, durant laquelle les participants anticipent les éléments nécessaires à l'intervention, 3) la mise en scène de la situation de classe, 4) une discussion collective sur la mise en scène suivie d'une présentation des connaissances par le formateur. Il est possible de revenir de manière itérative entre les temps 3 et 4.

Dans ce contexte, trois catégories de tâches sont mobilisées : des « tâches de formation », des « tâches d'enseignement » et des « tâches mathématiques » (Guille-Biel Winder et Mili, soumis). Les tâches mathématiques (T_M) relèvent du système d'enseignement : elles visent à mettre en relation l'élève avec le savoir mathématique. De leur côté, les tâches d'enseignement (T_E), bien qu'appartenant également à ce système, consistent pour l'enseignant à orchestrer la (ou les) tâche(s) mathématique(s) afin que le savoir soit clarifié et, le cas échéant, institutionnalisé. Enfin, les tâches de formation (T_F) permettent au formateur, au travers de son dispositif de formation, de transmettre ou de faire travailler des « savoirs professionnels » au groupe de formés. La tâche d'enseignement (T_E), mise en scène lors de la troisième étape du dispositif, revêt alors un caractère dual (Guille-Biel Winder et Mili, *soumis*) : elle est en effet à la fois conçue et organisée par le formateur dans le cadre du système de Formation (SF), tout en étant exécutée par un « étudiant-enseignant ». Cette tâche simule une intervention pédagogique, inspirée ou directement issue d'une pratique de classe réelle appartenant au Système École (SE). Cette dualité de la tâche d'enseignement, ancrée dans une pratique de classe concrète, nécessite une méthodologie d'analyse capable de prendre en compte à la fois les dynamiques observées dans la situation d'enseignement d'origine (dans SE) et les choix pédagogiques du formateur concernant la situation de formation (dans SF) (voir section 3).

2. *Notion de variable didactique de formation et méthodologie d'analyse*

Ainsi, à l'instar de ce qui prévaut dans SE où certains choix des enseignants ont une influence sur les procédures des élèves, nous cherchons, au travers d'une méthodologie d'analyse d'une situation de formation de type Jeu de Rôles, à identifier et déterminer l'impact de « variables didactiques de formation » – que nous définissons comme les « choix du formateur ayant un impact qualitatif sur les procédures d'enseignement », et qui sont concrétisées par des gestes professionnels. Pour cela, en

¹ Lajoie et al. (2019) ou encore Guille-Biel Winder et Mili (2023) proposent une description plus précise de chacune de ces étapes.

tenant compte de l'interdépendance des différents systèmes concernés (SE et SF), notre méthodologie s'appuie sur des analyses successives – *a priori*² et *a posteriori* –, déclinées en quatre étapes.

La première, menée dans SE, consiste en une **analyse *a priori* de la situation d'enseignement**, portant sur la tâche mathématique (T_M), l'aménagement du milieu, ainsi que les choix pédagogiques de l'enseignant (en lien avec T_E). Cette analyse permet ensuite une évaluation *a posteriori* de la mise en œuvre en classe (étape 2), réalisée dans le contexte de l'enseignement en Suisse romande. Ces premières analyses alimentent ensuite, dans le cadre de SF, une analyse *a priori* de la situation de formation (étape 3), qui inclut la tâche d'enseignement (T_E), l'aménagement du milieu de formation, et les décisions du formateur concernant la tâche de formation (T_F). Enfin, nous procédons à l'analyse *a posteriori* des différentes mises en œuvre de cette situation de formation (étape 4).

Ce travail nous conduit à examiner les choix spécifiques du formateur en lien avec les variables de la situation de formation et notre question de recherche peut alors se formuler ainsi : cette méthodologie d'analyse *a priori* d'un dispositif Jeu de Rôles permet-elle d'identifier des variables didactiques de formation dans le système de formation ?

III. DONNÉES ET ÉLÉMENTS DE CONTEXTE

Dans cette communication, nous analysons un Jeu de Rôles réalisé en dernière année de formation dans un institut de formation des enseignants du primaire en Suisse romande. Cette situation de formation repose sur un exercice issu des Moyens d'Enseignements 7H – élèves de 10 ans environ – (« Chez le Marchand de Meubles »), ainsi que sur des données recueillies dans la classe d'une école primaire. L'énoncé (présentant T_M) est formulé comme suit :

Chez le marchand de meubles, il y a des tabourets à trois pieds et des chaises à quatre pieds. Louis a compté qu'il y avait 17 sièges (tabourets et chaises réunis) et 56 pieds. Combien y a-t-il de chaises et combien y a-t-il de tabourets ?

Les commentaires³ (indications à l'attention de l'enseignant qui accompagnent l'activité, dès lors présentes dans SE et ensuite réinvesties dans SF) précisent qu'une mise en commun devra être effectuée avec pour objectifs de « tenir compte des essais précédents, [réaliser] l'importance de noter les recherches et leurs résultats, d'ajuster les essais pour diminuer leur nombre ».

Une récolte de productions dans une classe de 7H a permis de dégager 8 productions (Annexe 1) qui ont été retranscrites sous la forme de petites capsules vidéo (1 min chacune environ) par l'équipe de formateurs. Ces vidéos ont ensuite été réinvesties dans le cadre du Jeu de Rôles. La mise en œuvre de la situation de formation a été proposée à trois groupes d'environ 25 étudiants chacun. Nous nous concentrons ici particulièrement sur l'un de ces groupes pour lequel les temps 3 et 4 du dispositif ont été enregistrés (audio) pour être ensuite retranscrits. Étant donné la familiarité des étudiants avec le dispositif (la modalité Jeu de Rôles ayant déjà été utilisée précédemment dans la formation), plusieurs « règles » étaient en place : l'« enseignant » a le pouvoir de mettre fin au jeu ; il peut l'interrompre temporairement à tout moment pour réfléchir ; il peut solliciter l'avis d'un pair en cas de besoin ; il a la possibilité de « revenir en arrière » de quelques minutes si la direction initialement prise ne lui convient pas.

² Nous considérons ici l'analyse *a priori* comme n'étant « pas dépendante des faits d'expérience » puisqu'elle a un sens causal et non prédictif : « le terme de 'a priori' ne signifie donc pas première temporellement » (Margolinas, 1992, p. 131).

³ Disponibles à https://www.ciip-esper.ch/#/sequence/195/activite/4147/ressource/TYPE_MATH_ACTIVITE

IV. MISE EN OEUVRE DE LA MÉTHODOLOGIE

1. Éléments d'analyses *a priori* et *a posteriori* dans SE (étapes 1 et 2)

Concernant l'étape 1, les objectifs de la situation d'enseignement sont relatifs à la résolution de problèmes (faire des essais, les contrôler, chercher plusieurs solutions et les communiquer). L'énoncé mathématique étudié se représente par un système de deux équations du premier degré à deux inconnues de type :

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \alpha_2 y = \beta \\ x + y = \gamma \end{cases} \quad \text{avec } \alpha_1 = 3 ; \alpha_2 = 4 ; \beta = 56 ; \gamma = 17$$

Les principales variables didactiques de la situation sont relatives aux nombres en jeu ($\alpha_1 ; \alpha_2 ; \beta ; \gamma$). Dans le cadre de ce problème, cette équation admet une unique solution (12, 5) et plusieurs stratégies sont envisageables à ce degré d'enseignement : un dénombrement par le dessin, l'étude systématique reliée à toutes les décompositions additives de 17, la recherche des multiples de 3 et 4 dont la somme vaut 56, ... Afin d'alléger la présentation, nous référons le lecteur aux analyses *a priori* de problèmes similaires se trouvant dans la littérature (« Poules et Lapins » dans le guide de l'enseignant du manuel *Cap Maths*, 2003, p. 214, « Aimants » dans Emprin-Charotte et ERMEL, 2006, p. 96-97).

En lien avec l'étape 2, nous présentons dans le Tableau 1 quatre variables didactiques qui apparaissent dans les catégories de productions d'élèves récoltées (Annexe 1). De plus, certaines productions recueillies contiennent des erreurs de calcul, ou font appel à des procédures non valides, qui ne peuvent être attribuées au jeu sur les variables didactiques (voir productions 08 et 03).

Tableau 1 – Quatre variables didactiques de l'énoncé « Chez le Marchand de Meubles »

Variable didactique	Valeur prise dans l'énoncé	Conséquences sur la procédure	Production(s) associée(s)
V₁ : Domaine numérique de la solution	Nombres inférieurs à vingt (12, 5)	Rend le tâtonnement coûteux	Prod 1 et 7
V₂ : Écart entre les coefficients α_1 et α_2	Faible (égal à un)	Favorise la recherche d'un complément	Prod. 2 et 4 : infère l'écart à ajuster sur les couples $(x_i ; y_i)$ au fil des tentatives. Prod. 5 : fixe $y = 0$ au préalable
V₃ : Domaine numérique des nombres β resp. γ	Nombres inférieurs à 100 ($\beta = 56 ; \gamma = 17$)	Permet une exhaustivité dans la recherche des multiples de x resp. y	Prod. 6
V₄ : Domaine numérique de α_1 et α_2	Nombres inférieurs à dix ($\alpha_1 = 3 ; \alpha_2 = 4$)	Permet d'envisager une représentation par le dessin et de diversifier les registres de représentation	Prod 1 et 5

2. Étape 3 : Analyse *a priori* de la situation de formation

La situation professionnelle problématique associée au Jeu de Rôles consiste à réaliser une mise en commun des productions des élèves (T_E dans SF). Le formateur cherche à inciter les étudiants à réfléchir sur la catégorisation des productions d'élèves et sur l'agencement de ces catégories lors de la

mise en commun (T_F). Il souhaite pointer que cette catégorisation nécessite l'élaboration de critères, qui doivent être définis durant la phase de préparation en fonction de l'objectif pédagogique fixé. Nous présentons dans le Tableau 2 ses choix et intentions *a priori*, ainsi que l'aménagement de la situation de formation.

Tableau 2 – Choix du formateur

En amont de la séance	
C ₁	En complément des productions déjà mentionnées, le formateur, au regard de son objectif pédagogique (SF), décide d'introduire également les productions 03 et 08, estimant qu'elles présentent un intérêt pertinent.
C ₂	Une semaine avant la séance (nous sommes ici dans le temps 2 du Jeu de Rôles), le formateur communique l'énoncé du problème (en le détachant du contexte des Moyens d'Enseignement dont il est extrait), annonce qu'une mise en commun devra être effectuée (sans en dévoiler l'objectif) et met à disposition des étudiants les vidéos des productions afin que ceux-ci puissent accéder aux raisonnements des élèves.
Durant la séance, avant la mise en scène	
C ₃	Le formateur invite les étudiants à travailler par groupe de quatre personnes environ lors de la préparation.
C ₄	Toujours en début de séance, le formateur présente l'objectif de la mise en commun, qui, dans le cadre de la tâche d'enseignement (T_E), vise à « expliciter la stratégie des essais successifs », comme l'indiquent les commentaires pédagogiques.
C ₅	Pendant la demi-heure suivante, les étudiants bénéficient d'un nouveau temps de préparation durant lequel ils sont invités à choisir quatre productions parmi les huit.
C ₆	Le formateur procède à l'attribution des rôles juste avant la mise en scène (étape 3).
C ₇	Lors de cette attribution, l'« enseignant » et les « élèves » proviennent de groupes distincts, afin que chacun ignore les détails de la préparation de l'autre.

3. Étape 4 : Analyse *a posteriori* (sur un groupe) dans SF

Nous faisons le choix de porter notre attention sur la mise en œuvre dans laquelle l'« enseignant » prend à sa charge la mise en parallèle des représentations des élèves⁴. Nous en proposons une description succincte (Tableau 3), accompagnée d'extraits verbatim des moments clés durant les temps 3 et 4 du Jeu de Rôles – les interventions de l'« enseignant » (Ens) et des « élèves » (El), ainsi que les débats qui ont suivi avec les observateurs (Obs). Dans ce groupe, les productions 2, 5, 6 et 7 ont été retenues par l'« enseignant ».

Tableau 3 – Choix du formateur

	Rôle	Verbatim ⁵	Éléments d'analyse
Mise en scène			
A	Ens	« il faut que vous réfléchissiez comment vous avez fait votre exercice et si vous arrivez à trouver des similitudes ou des différences entre vous dans vos exercices dans la manière dont vous avez fonctionné. »	Ens se détache de l'objectif annoncé pour la mise en commun.

⁴ À noter que dans un deuxième groupe de formation, il a explicité chacune des productions sélectionnées de manière indépendante et dans un troisième groupe, il a d'abord encouragé les élèves à verbaliser leurs idées avant de leur confier la tâche de mettre en correspondance les différentes représentations.

⁵ Les auteurs souhaitent transmettre leurs profonds remerciements à Mme Manon Delétra pour son aide précieuse lors de la transcription des échanges.

	Rôle	Verbatim ⁵	Éléments d'analyse
Mise en scène			
B	El	« Moi j'ai fait que des calculs et elle a fait des dessins » « Elle elle s'est dit plutôt il y a que des tabourets d'abord et combien il me manque de pieds »	Des conséquences respectives des variables V ₄ et V ₂ . Introduire dans SF des productions diversifiées (C ₁) et proposant de multiples registres (l'enseignant a choisi la production 5) semble donc avoir un impact sur les procédures de l'enseignant.
C	Ens	« Très bien ! [...] Je fais PAUSE parce qu'en fait j'ai l'impression que je sais pas trop où je vais. Enfin c'est pas clair. [...] Si quelqu'un a une idée comment partir »	Rejoint l'objectif du formateur relatif à la détermination d'un objectif pour une mise en commun (C ₄).
D	El	<i>[Les élèves discutent de leurs procédures et sont amenés à venir la retranscrire au tableau]</i>	
E	Ens	« Oui c'est juste. [...]. PAUSE ⁶ je me suis perdue. Je sais pas où aller et je sais pas comment institutionnaliser une essai erreur. [...] C'est trop bien qu'on fasse cet exercice, je vois pas comment mnt à partir de ça y a rien qui est faux mais y'a rien qui est juste [...] Retour en arrière je ne sais pas comment faire. [Prénom d'une élève] tu viens nous dessiner la base de ton tableau ? »	À mettre en lien avec C ₄ . Illustre que, même lorsque l'objectif de la mise en commun est dévoilé, les étudiants ressentent une difficulté à proposer une exposition de connaissances.
Discussion			
F	Obs ⁷	« Nous ce qui nous a surpris c'est que la production avec les chaises de Lisa nous on l'avait pas prise en compte et que c'est la première qui est utilisée alors que l'objectif c'est essai erreur. »	Rejoint l'objectif du formateur relatif aux critères de choix des productions. Peut être mis en lien avec les choix C ₁ et C ₅ .
G	Ens	« C'était pas calculé, j'ai pris les traces comme elles venaient. Dans le sens qu'on a sélectionné ses traces pour faire un peu les différences... »	Rejoint l'objectif de formation qui consiste à considérer l'organisation de la présentation des traces.
H	Obs	C'est ce que je voulais dire en soi je pense que c'est une bonne idée de prendre celle-ci mais de ne pas la présenter dans les premières [...] En fait ce que j'ai l'impression c'est que l'objectif principal de la mise en commun il a été oublié [...] j'ai l'impression que le choix des production n'a pas permis de mettre en avant le processus d'essais-erreur et de l'institutionnaliser avec les élèves.	Rejoint l'objectif du formateur relatif à l'organisation et au choix des productions (C ₁ et C ₄) en fonction de l'objectif d'enseignement.

Il apparaît ainsi que les interventions des étudiants suggèrent que les choix C₁, C₄ et C₅ ont eu un impact sur leurs procédures d'enseignement, ce qui permettrait de les qualifier de variables didactiques de formation. Le choix C₁ est mentionné par les étudiants (intervention F) : il permet la prise en considération d'un objectif différent de celui énoncé par les Moyens d'Enseignement. L'intervention E révèle que le choix C₄, qui pourrait être associé à la variable « préciser l'objectif de la mise en commun », met en évidence que même lorsque cette variable prend la valeur « en amont », les étudiants éprouvent des difficultés à institutionnaliser le savoir attendu (ce qu'ils verbalisent d'ailleurs eux-

⁶ L'enseignante recourt ici à l'une des règles du Jeu de Rôles (le droit de figer la scène pour pouvoir bénéficier d'un moment de réflexion).

⁷ Lors du débat, les observateurs (Obs), qui ont assisté à la mise en situation, sont invités à interagir et poser des questions à l'« enseignant » (Ens) ou aux « élèves » (El).

mêmes). La discussion à l'issue de la mise en scène permet aux observateurs (intervention F) de pointer le choix C₅ en évoquant leurs différentes classifications comme les éventuelles divergences dans l'élaboration des critères de classification.

A contrario, certains choix du formateur ne semblent pas impacter les procédures d'enseignement. Ainsi le choix C₃ semble plus relever de contraintes institutionnelles. Le choix C₆, qui a pour objectif de maintenir les étudiants en analyse le plus longtemps possible, relève plutôt d'un choix pédagogique. Quant au choix C₇, il semble permettre au formateur de faire émerger les « raisons d'être » des savoir professionnels en jeu.

V. CONCLUSION

La mise en œuvre de cette méthodologie d'analyse nous a permis de discriminer des choix du formateur au regard de l'impact de ces derniers sur les procédures d'enseignement mises en œuvre par les étudiants. Cette distinction nous a permis de pointer des variables didactiques de formation dans le système SF. Dans le cas de notre étude, nous en relevons trois : le choix des productions présentées (en lien avec le choix C₁) ; le moment où l'objectif de la tâche d'enseignement est dévoilé aux étudiants (en lien avec le choix C₄) ; la sélection des productions à retenir pour la mise en scène (en lien avec le choix C₅). Ce constat confirme selon nous la pertinence de notre méthodologie d'analyse *a priori* d'une situation de formation de type Jeu de Rôles pour identifier des variables didactiques de formation. Des expérimentations seraient nécessaires pour questionner la portée de cette méthodologie à d'autres situations de formation.

Par ailleurs la prise en compte des deux systèmes (SF et SE) dans l'analyse de la situation de formation permet d'éclairer la relation qui peut prévaloir entre les différentes variables relatives à ces systèmes. Ainsi dans SE, le fait que l'« enseignant » doive prendre en compte la possibilité de l'existence de différents registres de représentation, est permis par les variations sur les coefficients du système de deux équations en jeu (variable didactique V₄). Cela conduit le formateur, dans la situation de formation (SF), à insister sur l'importance pour les « enseignants » d'intégrer ces aspects dans leur pratique (choix C₁). Pour ce faire, il choisit une valeur spécifique, en l'occurrence « oui », pour la variable didactique de formation « sélection de productions ». Ce choix ne se limite pas à la simple verbalisation de la coexistence de différents registres ; il permet également de mettre en évidence la variable didactique V₄. Cette dernière peut cependant rester implicite pour les formés, ce qui nécessite une attention particulière de la part du formateur pour garantir une compréhension approfondie des concepts abordés. Nous faisons donc l'hypothèse que l'identification de ces liens causals permettrait de faciliter l'exercice la « vigilance didactique » (Charles-Pézar, 2010) du formateur dans le système SF.

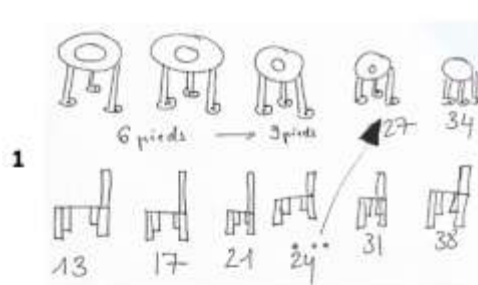
Notre étude révèle aussi que, dans le contexte analysé et en fonction de l'objectif de formation établi, les variables didactiques de formation présentes dans le Système de Formation SF peuvent différer considérablement de celles qui prévalent dans le Système École SE. Ce constat nous pousse à formuler l'hypothèse selon laquelle, dans une situation de formation basée sur l'homologie (Houdement et Kuzniak, 1996), il pourrait exister des variables didactiques de formation plus proches de celles du SE, ce qui n'est pas le cas dans ce Jeu de Rôles.

RÉFÉRENCES

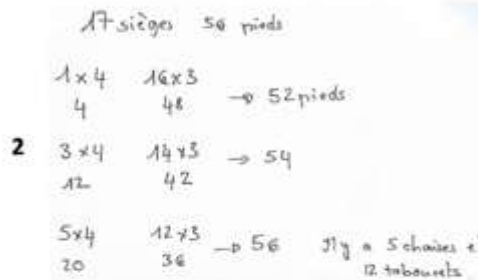
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.
- Charles-Péard, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30(2), 197-261. <https://revue-rdm.com/2010/installer-la-paix-scolaire-exercer/>
- Charnay, R., Dussuc, M.-P. et Madier, P. (2003). *CAP Maths CE1*. Hatier.
- Chesnais, A. et Coulanges, L. (2022). L'analyse a priori, un outil pour « penser » les ajustements didactiques en classe de mathématiques ? *Éducation et socialisation. Les Cahiers du CERFEE*, (66). <https://doi.org/10.4000/edso.21439>
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. La Pensée Sauvage
- Emprin-Charotte, F. et ERMEL Association. (2006). *Collection ERMEL CE1*. (2006). Hatier.
- Guille-Biel Winder, C. (2025). *Point de vue systémique sur l'enseignement et la formation des professeurs des écoles en mathématiques : modélisations, analyses, développement de ressources* [Note de synthèse]. Aix-Marseille Université. <https://amu.hal.science/tel-05101985>
- Guille-Biel Winder, C., Lajoie, C., Mangiante-Orsola, C., Masselot, P. et Tempier, F. (2022). Mise en abyme d'un jeu de rôles pour la formation de formateurs. *Revue de Mathématiques pour l'École*, (233), 151-162. <https://amu.hal.science/hal-03169974v1>
- Guille-Biel Winder, C. et Mili, I. (soumis). *Analyse didactique d'une situation de formation de type jeu de rôles à destination des professeurs des écoles*.
- Guille-Biel Winder, C. et Mili, I. (2023). Un jeu de rôles sur la structuration de l'espace en formation d'enseignants : la transposition de savoirs didactiques en question. Dans F. Wozniak (dir.), *Représenter et modéliser en mathématiques : de l'activité des élèves à la formation des professeurs des écoles* (p. 151-162). ARPEME. <https://www.copirelem.fr/wordpress/wp-content/uploads/2023/06/ACTES-TOULOUSE-Num-de2s51.pdf>
- Houdement, C. (1995). *Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies*. [Thèse de doctorat, Université Paris 7]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-01251608>
- Houdement, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques* [Note pour l'Habilitation à Diriger des Recherches]. Université Paris Diderot.
- Houdement, C. et Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 289-322. <https://hal.science/hal-03198426v1>
- Kuzniak, A. (1994). *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré* [Thèse de doctorat, Université Paris 7]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-01251462v1>
- Lajoie, C. et Pallascio, R. (2001). Role-play by pre-service elementary teachers as a means to develop professional competencies in teaching mathematics. Dans *Proceedings of SEMT '01 - International Symposium Elementary Mathematics Teaching*. Université Charles.
- Lajoie, C., Mangiante-Orsola, C., Masselot, P., Tempier, F. et Winder Guille-Biel, C. (2019). Former à aider un élève en mathématiques : une étude des potentialités d'un scénario de formation basé sur un jeu de rôles. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 19(2), 168-188. <https://doi.org/10.1007/s42330-018-0021-4>

- Mangiante, C., Masselot, M., Petitfour, É., Simard, A., Tempier, F. et Winder, C. (2019). Proposition d'un cadre d'analyse de situations de formation de professeurs des écoles. Dans I. Verscheure, M. Ducrey Monnier, M. Pelissier (dir.), *Enseignement et formation : éclairages de la didactique comparée* (p. 131-142). Presses Universitaires du Midi.
- Margolinas, C. (1992). Éléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 113–158. <https://shs.hal.science/halshs-00458309v1/document>
- Mili, I. (2023). What use of analysis a priori by pre-service teachers in space structuring activities? Dans C. Guille-Biel Winder et T. Assude (dir.), *Articulations between tangible space, graphical space and geometrical space* (p. 264-274). Iste Wiley Editions.

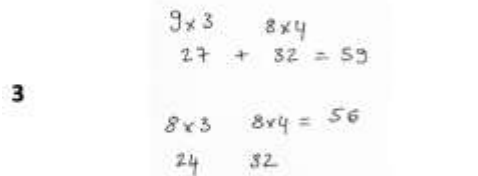
ANNEXE 1 : **PRODUCTIONS D'ÉLÈVES ET VERBATIMS ASSOCIÉS (QUI EXPOSENT LE RAISONNEMENT TENU)** **PROPOSÉS AUX ÉTUDIANTS**



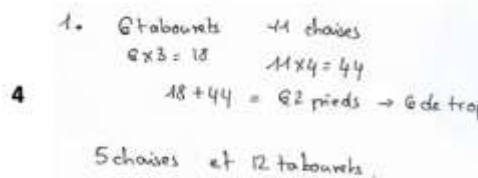
Alors, je dois dessiner des tabourets et des chaises. Donc, je vais commencer par dessiner, j'imagine, des tabourets. Ça va être 3 pieds. Je vais mettre des roulettes, parce que j'ai des roulettes chez moi. Alors là, j'en ai un. Là, j'ai déjà 6 pieds. Je vais encore en faire un de tabouret. Donc maintenant, j'ai 9 pieds. Je dois en avoir 56. Alors maintenant, je vais faire des chaises pour aller un peu plus vite. Donc, 9, 10, 11, 12, ça fait 13. Avec une autre chaise, 14, 15, 17. Et 21. Et je vais arrêter, parce que la maîtresse a dit qu'il fallait arrêter pour discuter.



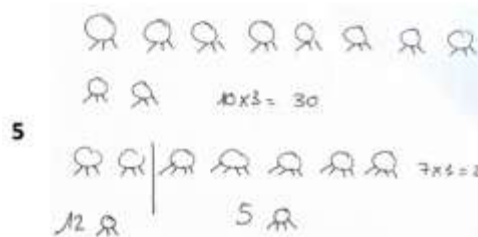
Bon, j'ai 17 sièges avec 56 pieds. Alors, je vais essayer d'abord. Je pense qu'il y a au moins une chaise. Alors, j'essaie avec une chaise et 16 tabourets. Donc, une fois 4, ça fait 4 ; et 16 fois 3, ça fait 48. Donc ici, j'ai 52 pieds. Donc, j'ai trop de tabourets. Il faut que j'aie plus de pieds. Donc, on va essayer avec 14 et 3. Donc là, j'ai 12 pieds avec les chaises et j'en ai 42 avec les tabourets. Donc, j'arrive à 54. Mais du coup, j'ai trouvé ma réponse. Parce que pour passer de 52 à 54, ça m'a rajouté 2 pieds. Donc, j'ai besoin de rajouter juste 2 chaises. Mais on va vérifier. 5 chaises et 12 tabourets : 20 et 36, ça me fait 56. Donc, il y a 5 chaises et 12 tabourets.



17 sièges. Alors, on va essayer moitié-moitié. On va mettre 9 tabourets et 8 chaises. Donc, ça fait 27 plus 32, égal 59. Alors, j'ai trop de chaises de pieds. Alors, on va faire 8 tabourets et 8 chaises. Et puis là, 8 fois 3, ça fait 24 ; 8 fois 4, ça fait 32. Ça fait 56. J'ai trouvé.



Alors, je vais faire mon premier essai un peu au bol. Je vais noter que c'est mon premier essai. Comme ça, je m'en souviens. Je vais mettre 6 tabourets et 11 chaises. Donc, 6 tabourets, ça fait 6 fois 3 qui fait 18 pieds, et 11 chaises 11 fois 4 qui fait 44 pieds. Donc, 18 plus 44, égal 62 pieds. J'ai trop de pieds. J'en ai 6 de trop. Parce que je dois arriver à 56. Donc, il faut que j'enlève des chaises. Et si j'enlève 6 chaises, ça va me faire enlever 6 pieds. Donc, du coup, je devrais arriver au bon nombre. Donc, si j'enlève 6 chaises, ça veut dire qu'il me reste 5 chaises et je dois rajouter des tabourets. J'en ai trouvé 6. Donc, j'en vais rajouter 6 et 12 tabourets. Et voilà.



Je vais faire, vu que j'ai 17 sièges, je vais faire 17 sièges : 1, 2, ...8, 9, 10, 11, 12, ..., 16, 17. Et en fait, ils ont de toute façon 3 pieds. Donc, je vais mettre déjà 3 pieds partout. Là, j'en avais fait 10, donc, 10 fois 3 ça va faire 30. Et ici, 7 fois 3, ça fait 21. Donc, quand j'arrive là, j'ai déjà 51 pieds. Et il fallait que j'arrive à 56. Donc, il me reste 5. Donc, je peux rajouter 5 pieds. Et donc, j'ai 10, 11, 12 tabourets. Et 5 chaises.

6

4 8 12 16 20 24 28 32 36 40
44 48 52 56 60

3 6 9 12 15 18 21 24 27 30
33 36 39 42 45 48 51 54 57

Alors, comme une chaise a 4 et les tabourets ont 3, je vais faire une liste des multiples. Donc, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60. Je vais m'arrêter là parce que de toute façon, on n'a que 56 pieds. Et je vais faire la même chose avec les multiples de 3 : 3, 6, 9, 12. Et je m'arrête à 57 parce que j'ai dépassé les 56. Et maintenant, il faut que je puisse en mettre ensemble pour que ça fasse 56. L'embêtant, c'est que en plus, il faut que j'ai 17. Alors, pour avoir 17, je pourrais prendre 8 et 9. 8, ça fait 32. Et 9, ça fait 27. Alors, 32 et 27, ça fait 59. Donc là, j'ai un petit peu trop. Donc, si je descends de 1 et je monte de 1 sur l'autre, ça me fait 28 et 30. Ça me fait 58. J'ai un peu moins, mais un peu trop. Alors, on va faire la même chose. 24 et 33. Ça fait 57. Et là, j'ai 30 et 26. Ça, ça fait 56. Je vais quand même vérifier. 1, 2, 3, 4, 5. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Ça fait bien 17. Donc, on a 12 tabourets et 5 chaises.

7

chaises (4)	tabourets (3)	Pieds
3 12	14 42	54
14 56	3 9	65
7 28	10 30	58

Donc, j'ai des chaises. J'ai des tabourets. Et ce qui m'intéresse, c'est d'avoir 56 pieds. Les chaises, elles ont 4 pieds. Comme ça, je me souviens. Les tabourets, ils en ont 3. Alors, je vais faire mes essais. Donc, pour commencer, je vais essayer avec 3 et 14 parce que ça doit faire 17 en plus. 3 x 4, ça fait 12. 14 x 3, ça fait 42. Donc, j'arrive à 54. Ça joue pas. Alors, je vais essayer avec 14 chaises et 3 tabourets : 3 x 3, ça fait 9 ; 14 x 4, ça fait 56. Donc, j'arrive à 65. Ça ne fonctionne toujours pas. Alors, qu'est-ce que je pourrais essayer ? Allez, 7 et 10, ça va faire 17 : 4 x 7 qui font 28 ; 10 x 3 qui font 30. Ça fait 58. C'est super long, en fait, parce qu'il y a plein de possibilités.

8

$$13 \times 3 + 4 \times 4 = 39 + 16 = 55$$

Alors, premier essai, je vais essayer avec 13 tabourets. Donc, 13 x 3, plus 4 chaises, donc 4 x 4 : 13 x 3, 39 ; plus 4 x 4, 16 ; ça fait 55. Ok, ça ne fonctionne pas. Alors, j'efface. On va essayer autre chose. Du coup, je vais essayer avec 10 x 3 et 7 x 4 : alors, 30, 28, 58. Ça ne fonctionne pas. Alors, j'efface le 58, puis j'efface le 10 et le 7. Comme ça, je garde le x 3 et le x 4. Du coup, je vais essayer avec 11 : 11 x 3, 17, donc 6 x 4. Alors, ici, j'ai 33, et puis 24, 57. Ça ne fonctionne pas. Alors, j'efface le 57, j'efface le 11 et le 6. Donc, j'en ai trop. Donc, peut-être que je vais mettre un peu plus de tabourets. Ça fait 13. Et puis, 4. Et puis, 13 x 3, 39, 4 x 4, 16. 55. Je crois qu'il n'y a pas de solution. C'est impossible. Je suis toujours tout prêt, mais ça ne fonctionne pas.

LES MATHÉMATIQUES DANS LE PARCOURS ACCÉLÉRÉ GO TEACHING : CHOIX DE LA FORMATRICE ET PISTES D'AMÉLIORATION AU DÉPART DE L'IMPACT PERÇU PAR LES INSTITUTEURS. TRICES NOVICES

| MOUSSET* CÉLINE

Résumé | Cette étude s'intéresse aux cours de didactique des mathématiques à l'intérieur d'un parcours accéléré de formation initiale d'enseignant.es du primaire. Elle fait état des choix didactiques opérés par la formatrice compte tenu du contexte, selon la double approche didactique et ergonomique, puis elle explore la façon dont les premier.ères diplômé.es perçoivent la formation reçue. En confrontant ces deux points de vue d'un même dispositif global, elle en identifie des éléments positifs et des pistes d'amélioration.

Mots-clés : formation d'instituteurs.trices, cursus accéléré

Abstract | This study examines mathematics teaching courses within an accelerated initial training program for elementary school teachers. It reports on the pedagogical choices made by the trainer given the context, according to the dual teaching and ergonomic approach, and then explores how the first graduates perceive the training received. By comparing these two points of view of the same overall system, it identifies positive elements and avenues for improvement.

Key words: Teacher training, accelerated curriculum

I. CONTEXTUALISATION

Depuis plusieurs années, la Belgique francophone connaît une pénurie d'enseignant.es du primaire. Pour contribuer à pallier cela, la Haute École Louvain en Hainaut propose depuis 2020-21 un parcours de formation innovant appelé Go Teaching. Il s'adresse à des adultes possédant déjà un titre de l'enseignement supérieur ainsi qu'une expérience professionnelle d'au moins cinq ans.

Compte tenu des particularités du profil des candidat.es (Brogniet, 2024), le contenu et les modalités de formation ont pu être adaptées dans un format plus court, nécessitant plus d'autonomie de la part de ces adultes en reprise d'études. Des choix ont donc dû être posés par les formateur.trices sur la façon d'optimiser les heures en présentiel de ce cursus accéléré pour répondre aux attendus du métier avec la même qualité que via un parcours de formation classique.

Dans cette étude, nous nous intéressons plus particulièrement à l'ensemble des cours de mathématiques que nous assurons au sein de cette formation d'instituteur.trice primaire qui a été ajustée à son public. Nous tentons de documenter l'amélioration de notre pratique en confrontant l'analyse que nous en faisons avec l'avis des premier.ères diplômé.es sur la formation qu'ils ont reçue.

Depuis de nombreuses années, des recherches tentent de mettre en lien les formations des enseignant.es et leurs pratiques (voir par exemple la synthèse de Butlen et Masselot, 2019). A notre connaissance, aucune ne s'est intéressée au contexte particulier d'une formation accélérée, ce qui peut constituer l'originalité de notre proposition.

* Haute École Louvain en Hainaut (HELHa) - Centre de Recherche et Formation continue (CeREF) – Belgique – moussetc@helha.be

II. CADRE THÉORIQUE ET MÉTHODOLOGIQUE

Tout enseignement naît de l'interaction d'une multitude de facteurs. Pour tenter de les appréhender de façon consciente et pertinente, nous avons choisi, comme le suggère Choquet (2023) pour les formateurs d'enseignant.es, d'utiliser la double approche didactique et ergonomique (Robert et Rogalski, 2002). Celle-ci s'intéresse à cinq composantes de la pratique, plus particulièrement les composantes cognitive et médiative (pour l'approche didactique) et les composantes sociale, institutionnelles et personnelles (pour l'approche ergonomique).

Les composantes cognitive et médiative rendent compte respectivement, des choix opérés avant les séances et pendant les séances en termes de savoirs mathématiques et d'apprentissages des élèves. [...] Les trois autres composantes sont liées à l'exercice du métier et aux contraintes qui en découlent. (Choquet 2023, p. 4)

Dans ce papier, nous analysons donc notre propre pratique enseignante selon ces cinq composantes. Nous verrons (section III.) que ces composantes permettent de faire ressortir les spécificités de la formation accélérée Go Teaching. Notons que l'analyse de la composante cognitive s'appuie sur les travaux de Houdemont et Kuzniak (1996) et Sayac (2012), repris et amplifiés dans Guille-Biel Winder et al. (2019) puis Celi et al. (2023).

La récolte des données concernant l'impact de la formation perçu par les premier.ères diplômé.es s'est faite via un questionnaire Forms envoyé par courrier électronique à chacune des 33 personnes concernées. Il contenait une quinzaine de questions ouvertes (voir annexe), privilégiant une prise d'information globale, indépendante de contenus de formation précis, portant sur l'évolution du rapport aux mathématiques des répondant.es, les qualités, faiblesses et apports perçus de la formation en mathématiques qu'ils ont suivie et son adéquation à leur réalité professionnelle actuelle. Via ces questions, nous tentons de cerner si cette formation atteint ses objectifs (voir section III) en impactant les compétences personnelle, cognitive et méditative de ces enseignants novices. Garantir l'anonymat des réponses nous a semblé pertinent pour éviter la réserve potentiellement occasionnée par notre double casquette de formatrice évaluée et de dispensatrice du questionnaire, et ainsi, augmenter l'authenticité des réponses. Nous avons traité les informations collectées de façon qualitative (section IV.) pour privilégier une finesse de perception des contenus exprimés ; un traitement purement quantitatif aurait de toute façon peu de valeur compte tenu de la taille du groupe des répondant.es (10 personnes).

III. DESCRIPTION DE NOTRE PRATIQUE DE FORMATION

1. Composante institutionnelle

Dans la formation Go Teaching telle que dispensée jusqu'en juin 2025, les apports didactiques sont programmés en trois temps, au sein de trois modules de formation pluridisciplinaires. Au niveau des mathématiques, cela représente au total 48h de cours en présentiel (contre environ 180h dans le parcours classique) et 35h de travail autonome, réparties sur un an et demi ; ce travail autonome constitue l'une des spécificités du parcours. Les compétences professionnelles visées s'amplifient au fil des trois modules, tout en respectant le cadre fixé par un décret de la Fédération Wallonie-Bruxelles, définissant la formation initiale des enseignants (Docu 46261, Article 17 § 1). D'abord, les cours s'emploient à « Développer une expertise dans les contenus enseignés et dans la méthodologie de leur enseignement ». Ensuite, ils prennent en compte ceci en plus : « Concevoir, conduire, réguler et évaluer des situations d'apprentissage qui visent le développement de chaque élève dans toutes ses dimensions ». En fin de parcours, une dernière compétence est visée : « Entretenir un rapport critique et autonome avec le savoir scientifique et oser innover ».

Les évaluations liées à ces modules de didactique portent sur des productions de complexité progressive. Tout d'abord, pour chaque discipline, les étudiant.es doivent rédiger une analyse matière et didactique sur un sujet en lien avec les thématiques abordées en séance et porter un regard critique sur un outil méthodologique en s'appuyant sur les apports du cours. Dans le module suivant, iels doivent proposer une leçon, toujours sur une thématique travaillée au préalable, enseignée en stage, analysée et régulée. L'évaluation finale du 3^e module consiste en la rédaction et la soutenance d'un portfolio contenant des leçons analysées et régulées, mais également situées dans un parcours global de construction d'une identité professionnelle.

Par alignement pédagogique (Biggs, 1996) avec les objectifs et les évaluations, le contexte institutionnel contraint donc les orientations des modules disciplinaires. Il s'agit d'outiller les étudiant.es en propositions méthodologiques argumentées au regard de cadres didactiques théoriques, de savoirs scientifiques. Notons que des tests de maîtrise des contenus disciplinaires sont réalisés en amont et conditionnent l'accès au parcours, ce qui n'est pas le cas pour la formation classique, accessible à tous. Cet élément permet une réelle refonte des contenus et dispositifs de formation habituels, ici résolument centrés sur la didactique.

2. *Composante sociale*

Dans le cadre du parcours Go Teaching, les formateur.trices travaillent en équipe sur des éléments communs qui structurent l'évaluation et donc, par alignement pédagogique, qui guident la formation : consignes pour les analyses a priori, canevas de préparations de leçons, grilles d'évaluation des travaux et des stages. Au terme d'un module, les formateur.trices se concertent également pour attribuer une note globale unique à chaque étudiant.

Cette riche façon de fonctionner permet de mettre en synergie les apports complémentaires des formateur.trices tout en reflétant les différentes facettes imbriquées du métier. Elle génère également une cohérence forte du cadre de formation, appréciée par les étudiant.es. Elle incarne cette recommandation de Bednarz et Perrin-Glorian (2003) : « Les formateurs doivent donc former une véritable communauté d'apprentissage, avoir un message consistant, cohérent ».

3. *Composante personnelle*

Mathématicienne au départ, nous acquérons avec passion depuis 18 ans des compétences d'ordre didactique. Cela se fait dans des allers et retours entre rencontres d'enseignant.es, de formateur.trices et de chercheur.euses, entre lectures et participation à des colloques, groupes de travail et formations. Nous avons aussi mis à l'épreuve plusieurs méthodologies rencontrées via des expérimentations dans les classes. Nos connaissances se situent au carrefour de la pratique et de la recherche, avec la conviction que l'un alimente l'autre.

Bien que la formation Go Teaching soit fort cadrée, les didacticien.nes y ont tout loisir d'y développer leur propre vision de ce que peut être l'enseignement de leur discipline de prédilection. Pour notre part, nous mettons l'accent sur l'importance des images mentales sur lesquelles on peut s'appuyer pour donner du sens, construites notamment via des va-et-vient entre les registres de représentation, et l'enjeu transversal d'amener chaque élève à se poser des questions et devenir un.e citoyen.ne éclairé.e. Ces points font partie de manquements récurrents que nous avons observés dans les classes et les manuels scolaires actuels. Nous pensons donc qu'appuyer ces éléments en formation initiale est essentiel pour amorcer un changement.

4. *Composante cognitive*

Lors des séances de cours, nous essayons à la fois de mettre en lumière de grandes lignes directrices pour l'enseignement des différents champs des mathématiques à l'école primaire et aussi d'outiller la construction des concepts et procédures via des situations paradigmatiques, vécues sous une forme adaptée, puis commentées et replacées dans un cadre théorique plus large. Dans le cas qui nous occupe ici, nous pouvons parler de situations de transposition/homologie (Houdement et Kuzniak, 1996). Nous adhérons à cette idée de Barth (2013) lorsqu'elle parle de démarches inductives :

Comme le disait déjà Saint-Augustin, pour comprendre à quoi se réfère le terme « fromage », il ne suffit pas de le définir verbalement ; il est essentiel d'en avoir goûté ! Il en va de même avec les mots : pour les comprendre véritablement, il est important d'en avoir des expériences singulières et contextualisées.

Par contre, il n'y a que peu de temps imparti à la résolution de problèmes comme outil pour apprendre à chercher. Ces manques propres à cette formation accélérée résultent de choix opérés compte tenu des contraintes de temps et d'objectifs à atteindre. Notre pari initial est que les étudiant.es développent ces aspects par eux-mêmes dans la suite de leur parcours de formation en s'appuyant sur des fondements épistémologiques et didactiques qui, eux, auront été nourris. Nous verrons plus loin si ce pari peut sembler raisonnable.

Les sujets principaux abordés au cours des trois modules de formation sont les suivants :

1. Numération, sens des opérations, calcul réfléchi, calcul écrit
2. Fractions, grandeurs et système métrique, solides et figures
3. Aires et volumes, graphiques, fondements du nombre et des opérations

Et au fil des séances, lorsque l'opportunité se présente, nous élargissons le regard vers des thématiques transversales : malentendus sociocognitifs, situations de communication, démarches inductives, enseignement (socio)constructiviste versus explicite...

Sayac (2012) distingue deux dimensions de savoirs dans une formation professionnelle : les savoirs disciplinaires et les savoirs transversaux, se déclinant chacun en trois types de savoirs (notés D1-2-3 et T1-2-3). Éclairons ici les contenus de notre cours en lien avec cette typologie.

- Compte tenu des tests d'entrée dans le parcours, les connaissances mathématiques pures (D1) ne sont plus enseignées pour elles-mêmes, seulement d'un point de vue épistémologique.
- Les aspects curriculaires sont évoqués rapidement pour chaque thématique, aussi bien d'un point de vue des étapes d'un apprentissage (D2) que relativement aux programmes et instructions officielles (T3).
- Les savoirs relatifs à la didactique des mathématiques (D3) sont au cœur de nos préoccupations de formation.
- Les savoirs transversaux relatifs aux gestes professionnels du métier d'enseignant.e (T1) vont de pair avec les savoirs didactiques lors de la prise de recul sur les activités vécues.
- Les connaissances portant sur les élèves et les apprentissages (T2) sont très peu développés au sein de nos cours ; nous y reviendrons. Notons toutefois notre volonté d'initier à la question des malentendus sociocognitifs.

5. *Composante médiative*

Le timing serré permet peu de souplesse à l'intérieur des séances de cours. Lorsque tout ne se passe pas comme prévu, les ajustements consistent en général à accélérer un peu le rythme, éventuellement

en basculant dans un mode plus transmissif, sans cesser toutefois de s'appuyer sur des réalités matérielles. Nous fournissons aussi des supports écrits qui développent le propos et permettent d'approfondir la question, constituant une ressource précieuse pour le démarrage professionnel des enseignant.es novices (voir IV.3.).

IV. IMPACT PERÇU PAR LES ENSEIGNANTS NOVICES

En annexe se trouve le questionnaire qui a été soumis aux enseignant.es novices (un an ou deux de pratique) issus du parcours Go Teaching. Il a pour but d'identifier un éventuel impact de la formation reçue en mathématiques. L'exploration des réponses est essentiellement qualitative pour analyser plus finement les questions ouvertes que nous avons posées comme s'il avait s'agit d'un entretien semi-dirigé, mais avec l'anonymat garanti via le Forms utilisé.

1. *Description de l'échantillon*

Les deux premières cohortes d'étudiant.es diplômé.es à l'issue du parcours Go Teaching en 2022 et 2023 totalisent 33 personnes. Un questionnaire Forms leur a été adressé via un courrier électronique. Dix d'entre eux.elles ont participé à l'enquête, soit 30 % du public-cible. Tous.les répondant.es travaillent dans l'enseignement, dont la moitié en tant que titulaire d'une classe de primaire. Parmi eux, trois ont été diplômé.es en 2022 contre sept en 2023.

2. *Evolution du rapport aux mathématiques*

À l'entrée dans la formation, la moitié des répondant.es (5) semblaient avoir un rapport aux mathématiques plutôt négatif : « Rapport difficile », « Mauvais souvenirs », « Je suis nulle en maths, les maths c'est ennuyeux », « Peu d'enthousiasme », « Réticente, je suis davantage littéraire ».

Tous.les (10) disent être ressorti.es de la formation avec un rapport qui a évolué positivement. Ils évoquent une meilleure compréhension (2), mais aussi la découverte d'une façon de les enseigner/apprendre (6) qu'ils ne soupçonnaient pas, incluant une recherche, des manipulations, du concret, des ateliers, des activités pratiques, avec du matériel varié.

Oui, j'ai compris qu'on pouvait aborder les maths d'une manière intéressante. Que les savoirs qu'on m'avait transmis tels quels quand j'étais à l'école pouvaient être transmis aux enfants via une construction, une recherche à laquelle ils peuvent prendre part et qui peut être très concrète.

Trois (3) répondant.es amènent des éléments d'ordre affectif (plaisir, aspect ludique). « La formation m'a réconciliée avec les maths ».

Certaines formulations (3) témoignent aussi de prises de conscience au niveau de la didactique : « Complexité didactique de certains apprentissages », « création d'images mentales », « importance des registres de représentation d'un concept ».

La formation en didactique des mathématiques qu'ils ont reçue paraît donc faire bouger les lignes au niveau de leur rapport aux mathématiques et de ce que peut être leur enseignement.

3. *Caractéristiques déclarées de la formation*

La moitié des personnes sondées (5) relèvent comme point fort les ressources fournies (pistes concrètes, supports de cours, lectures, ressources, démarche globale pour enseigner, pour tous les niveaux de primaire). Une moitié (5) pointe les caractéristiques de l'enseignante, le mot « passion » revenant quatre fois. Le fait de vivre des manipulations durant le cours, de passer eux-mêmes par le concret les séduit (3). Dans cette même idée, ils (2) apprécient la démarche de

transposition/homologie. « Une cohérence entre la manière dont on nous a appris et la manière dont on va à notre tour devoir apprendre à nos élèves ».

La séance qui a le plus marqué les répondant.es (7) dans leur formation est celle dans laquelle iels vivent des ateliers autour des grandeurs (longueur, masse, capacité/contenance) et du système métrique. Les raisons qu'ils mentionnent sont l'approche pratique, les liens forts avec la réalité, les informations didactiques fournies en lien avec les activités, mais aussi le plaisir de chercher.

Quand on interroge ces enseignant.es débutant.es sur les points faibles de la formation et/ou les frustrations qu'ils en gardent, les réponses sont majoritairement (6) liées au facteur temps : « Trop court », « L'envie d'en apprendre encore plus, d'aborder plus de points de matière », « Un petit goût de trop peu ! »

Deux d'entre eux.elles (2) nuancent : « On a tout de même balayé large », « Je continue à me former en continu en fonction de ma classe ».

4. *Apports déclarés de la formation*

Au niveau de l'enseignement des mathématiques en général, des répondant.es (4) ont retenu qu'il est possible de les rendre concrètes, notamment via des manipulations, importantes mais toutefois pas suffisantes, à coupler avec une mise en réflexion des élèves. Iels parlent (3) des registres de représentations (sémiotiques) d'un concept entre lesquels les élèves doivent jongler. Iels souhaitent parvenir à montrer pourquoi les maths sont importantes, en quoi elles peuvent servir dans la « vraie vie », le sens qu'elles recèlent (3) et à faire en sorte que les élèves les envisagent comme un jeu et non comme une contrainte (2).

Sur le plan de la posture de l'enseignant.e, iels (7) jugent important de *mettre l'enfant en action*, dans des *situations de recherche*, des *activités qui font sens* et de *l'accompagner dans ses découvertes*, pour *l'amener à construire les apprentissages* (pas uniquement « je te montre puis tu fais »).

5. *Confrontation au métier*

En commençant à travailler, la plupart des personnes sondées (8) se sentaient relativement confiantes par rapport à leur capacité à enseigner les mathématiques à l'école primaire. « Très à l'aise, des facilités à réguler, rebondir, discerner où se situent les difficultés, trouver/inventer des méthodes pratiques pour faire comprendre ».

Deux (2) témoignent d'une certaine déstabilisation par rapport à l'écart entre les recommandations de la formation initiale et les pratiques de leurs nouveaux collègues. « J'étais armée pour comprendre les enjeux derrière les apprentissages mais un peu perdue face aux méthodes / matériels utilisés par les collègues ».

Certain.es (3) sont conscient.es d'être sur un chemin de formation à poursuivre. « Une bonne base à travailler et approfondir constamment ».

Quand on les interroge sur leurs succès, leurs fiertés depuis leur entrée en fonction, les répondant.es s'expriment dans quatre thématiques différentes. La moitié d'entre eux.elles (5) évoquent des aspects liés à leur sentiment de compétence, de légitimité, de reconnaissance par les pairs. « Pouvoir proposer des activités qui motivent les élèves et qui donnent du sens à l'apprentissage », « Faire comprendre l'importance à mes collègues de travailler les 4 registres de représentation », « Mon diplôme, mon engagement dans l'enseignement, la reconnaissance des autres », « Les élèves me trouvent vivantes ».

Iels (4) sont également fiers de pouvoir faire évoluer le rapport aux mathématiques de leurs élèves. « À la fin de l'année, l'entièreté de ma classe se dit aimer les mathématiques ».

Une autre satisfaction évoquée (3) se situe au niveau des apprentissages des élèves, de leur évolution en général. « L'évolution et la compréhension d'enfants rencontrant des difficultés importantes ».

Enfin, iels (3) sont fiers de certaines activités particulières menées avec succès.

La difficulté la plus présente dans les propos des personnes interrogées (4) est le fait de répondre aux difficultés des élèves et de différencier. « Se confronter à l'erreur de l'élève pour ajuster mon enseignement ».

Sont aussi mentionnés des éléments liés à leurs composantes institutionnelles et sociales : le climat scolaire, les arbitrages à faire à cause des contraintes temporelles, la légitimité à défendre à la sortie d'un parcours de formation accéléré. « Faire comprendre que la formation Go Teaching est tout aussi bonne que la classique ».

V. DISCUSSION

Selon Choquet (2023), les composantes personnelles et cognitives des formateur.trices, autrement dit leurs connaissances et leurs conceptions de ce que peuvent être les mathématiques et leur enseignement, influencent directement les conceptions des étudiant.es. La présente étude va complètement dans ce sens. La formation en mathématiques du parcours Go Teaching paraît générer une évolution favorable du rapport aux mathématiques de celles et ceux qui l'ont suivie. Iels y ont pris du plaisir et sont fier.ères de développer ce plaisir chez les élèves. Iels y ont trouvé un modèle d'enseignement plutôt constructiviste auquel iels ont adhéré et dont iels conservent l'empreinte. Comme dans Choquet (2023), « les représentations personnelles de ces professeurs évoluent vers d'autres représentations plus didactiques, tournées vers la nécessité de proposer aux élèves des situations riches les mettant en activité mathématique ».

Iels retiennent l'importance de la construction du sens, incluant les images mentales des concepts, consolidées par la mise en lien de leurs différentes représentations sémiotiques. Leurs réponses témoignent clairement d'un impact marqué sur leur composante personnelle.

Par contre, aucun.e répondant.e ne mentionne le fait que faire des mathématiques, c'est essentiellement résoudre des problèmes. À travers ce constat préoccupant, on peut voir le reflet du moindre temps consacré à ce sujet pour lui-même. Il y a là matière à réflexion par rapport aux objectifs que nous aimerions atteindre en termes de représentations de la discipline et de son enseignement.

Au niveau des situations de formation, malgré le format accéléré de la formation, il paraît essentiel de conserver des démarches de transposition et d'homologie. Elles permettent des basculements au niveau de l'intégration des messages que l'on souhaite faire passer.

Chez Choquet (2023), la composante médiative apparaît comme un enjeu de formation, les enseignant.es novices étant en difficulté à ce niveau. Dans notre sondage, il est fait mention au contraire d'une grande confiance par rapport à la capacité des répondant.es à enseigner les mathématiques. On peut se demander si cela ne découle pas d'une caractéristique transversale propre à des adultes en reconversion professionnelle ; cela mériterait d'être vérifié.

En tout cas, l'absence de révision et d'exercisation des contenus disciplinaires au sein de la formation, choix assumé dans le cadre temporel réduit de ce cursus accéléré, ne paraît pas les mettre en péril. D'expérience, nous ne pourrions pas en dire de même pour des étudiants du parcours classique, qui se trouvent régulièrement en grande difficulté en stage à cause de contenus non maîtrisés.

Une faiblesse identifiée dans notre formation accélérée se situe au niveau de la différenciation et du traitement des difficultés et erreurs. Outre le fait de palier à cela, il serait intéressant de voir en quoi le système d'évaluation du Go Teaching, incluant une forte dimension d'analyse a priori et a posteriori, développe davantage une réflexivité didactique que chez les étudiants du parcours classique n'ayant jamais évoqué ce manquement.

Enfin, pour mieux percevoir l'impact réel de la formation qui nous occupe, il serait vraiment intéressant de compléter le présent travail par un dispositif d'observation de quelques répondants afin de dépasser leur déclaratif et de voir leurs compétences en actes au quotidien.

VI. CONCLUSION

Sous la contrainte d'un temps de formation très court, nous avons fait le pari d'un développement spontané des représentations des enseignant.es novices au sujet de la résolution de problèmes à pratiquer pour elle-même ; il s'avère que c'est un pari manqué. Nous réengageons une réflexion à ce niveau, un premier apport peu coûteux étant la mise en évidence des « gestes mentaux » réalisés lors des différentes activités envisagées dans la construction des concepts (voir par exemple Gilbert (2000) et Ruche (2004)).

Au niveau des contenus de formation transversaux, un point d'attention devrait être la question de l'ajustement aux erreurs et aux difficultés d'apprentissage. Une réflexion plus large pourrait être menée en équipe de formateur.trices afin de voir comment nourrir collectivement cet aspect qui est au cœur de la complexité du métier. Une voie à explorer est l'analyse de production d'élèves via des jeux de rôle (Lajoie et al., 2019).

Guille-Biel Winder et al. (2019) proposent un cadre d'analyse de situations de formations des enseignant.es. Notre cours ne contient pas de réelle problématisation de questions professionnelles correspondant à la posture de praticien.ne-chercheur.euse. Or, depuis septembre 2024, la formation des enseignant.es en Belgique est passée de trois à quatre ans, ce qui implique de viser un niveau 7 de certification européenne. À l'avenir, nous nous devons donc de revisiter nos pratiques en équipe de formateur.trices afin d'y intégrer davantage de situations développant ce profil. Cela se fera aussi via les apports des universités codiplomantes.

Finalement, les constats tirés de cette étude exploratoire rejoignent l'idée soutenue par plusieurs didacticiens (Adihou et Arsenault, 2020 ; Bednarz et Perrin-Glorian, 2003 ; Butlen et Masselot, 2019 ; Marchand et al., 2023 ; Sayac, 2012) qu'une formation qui, d'une part, s'appuie sur des contenus mieux maîtrisés et des connaissances didactiques opérationnelles et qui, d'autre part, mobilise des situations professionnelles comme objet de réflexion a priori et a posteriori permet aux enseignants d'intervenir en classe de façon plus consciente et plus satisfaisante.

RÉFÉRENCES

- Adihou, A. et Arsenault, C. (2020). Formation à l'enseignement des mathématiques : opérationnalisation et regard des étudiants sur un dispositif de formation. *Formation et profession*, 28(3), 64-80. <http://dx.doi.org/10.18162/fp.2020.511>
- Barth, B.-M. (2013). *Élève chercheur, enseignant médiateur*. Retz.

- Bednarz, N. et Perrin-Glorian, M.-J. (2003, 19-23 décembre). *Formation à l'enseignement des mathématiques et développement de compétences professionnelles : articulation entre formation mathématique, didactique et pratique* [Communication]. Colloque EMF 2003, Tozeur, Tunisie.
https://emf.unige.ch/application/files/6014/5459/4120/EMF2003_Conference_Bednarz.pdf
- Biggs, J. (1996). Enhancing teaching through constructive alignment. *Higher Education*, 32(3), 347-364.
<https://doi.org/10.1007/BF00138871>
- Brognet, T. (2024). *Profils et motivations des candidats à une deuxième carrière professionnelle dans l'enseignement primaire* [Rapport de recherche]. CeREF Éducation.
- Butlen, D. et Masselot, P. (2019). Enjeux et modalités de formation pour les professeurs des écoles en didactique des mathématiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 19, 91–106. <https://doi.org/10.1007/s42330-019-00048-8>
- Celi, V., Guille-Biel Winder, C., Mangiante-Orsola, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A. et Tempier, F. (2023). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Tome 2*. COPIRELEM. <https://bibnum.publimath.fr/IWO/IWO22001.pdf>
- Choquet, C. (2023). Comprendre les effets des choix de formateurs sur les pratiques de professeurs de mathématiques débutants. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (Thématique 1), 287-313.
<https://doi.org/10.4000/adsc.1880>
- Gilbert, T. (2000). Quelques instruments de pensée en géométrie. *Math-Ecole*, (193), 10-25.
https://wp.gem-math.be/wp-content/uploads/2024/01/Gilbert2000-QuelquesInstrumentsDePenseeEnGeometrie_sw-md.pdf
- Guille-Biel Winder, C., Mangiante-Orsola, C., Masselot, P., Petitfour, E., Simard, A. et Tempier, F. (2019). *Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Tome 1*. COPIRELEM.
- Houdement, C. et Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 289-322.
- Lajoie, C., Mangiante-Orsola, C., Masselot, P., Tempier, F. et Winder Guille-Biel, C. (2019). Former à aider un élève en mathématiques : une étude des potentialités d'un scénario de formation basé sur un jeu de rôles. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 19(2), 168-188.
<https://doi.org/10.1007/s42330-018-0021-4>
- Marchand, P., Martin, V., Thibault, M. et Bisson, C. (2023). Postures et gestes de personnes formatrices exploitant les jeux de rôles comme dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques : analyse de récits de pratiques. *Annales de didactique et des sciences cognitives*, (Thématique 1), 19-53. <https://doi.org/10.4000/adsc.1610>
- Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528. <https://doi.org/10.1080/14926150209556538>
- Rouche, N. (2004). L'arithmétique du petit Nicolas ou Qu'est-ce que penser mathématiquement ? *Bulletin de l'APMEP*, (451), 185-195. <https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA04019.pdf>
- Sayac, N. (2012). Pratiques de formateurs : la question centrale des savoirs de formation. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Actes du colloque EMF2012 « Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle », 3-7 février 2012, Université de Genève, Suisse* (p. 240–250).
<http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>

ANNEXE QUESTIONNAIRE

Question pour tous.tes les diplômé.es

1. Quel était ton rapport aux maths à l'entrée dans la formation Go Teaching ?
2. Ton rapport aux mathématiques a-t-il évolué durant la formation ? Comment ?
3. Parmi l'ensemble des séances de didactique des mathématiques de ton parcours Go Teaching, quelle est celle qui t'a le plus marqué.e ? Pourquoi ?
4. Qu'as-tu retenu de ta formation Go Teaching concernant l'enseignement des mathématiques ? Et concernant la posture de l'enseignant en mathématiques ?
5. Qu'identifierais-tu comme points forts de la formation que tu as reçue en didactique des mathématiques ?
6. Quels seraient selon toi des points faibles / négatifs / à améliorer ?
7. Gardes-tu des frustrations par rapport à cette formation en didactique des mathématiques dans le parcours Go Teaching ? Si oui, lesquelles ?
8. Aurais-tu des suggestions, des idées à proposer ?
9. En quelle année as-tu été diplômé.e ?
10. As-tu enseigné depuis ?
11. Si oui, dans quel type et quel niveau d'enseignement ?

Si tu as enseigné depuis l'obtention de ton diplôme :

12. En commençant à travailler en tant qu'instituteur.trice, quelle était ton impression générale par rapport à tes compétences à enseigner les maths ?
13. Quels ont été tes succès, tes fiertés depuis ?
14. Quelles difficultés as-tu rencontrées ou rencontres-tu encore ?
15. Ton rapport aux mathématiques a-t-il évolué depuis que tu enseignes ? Comment ?
16. Avant de quitter cette enquête, as-tu envie d'ajouter quelque chose à ce que tu as dit jusqu'ici ?

LES AIDES DIDACTIQUES DANS LA DÉTERMINATION DE LA LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE CONVERGENTE DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

| ABBY-M'BOUA* PARFAIT

Résumé | Ce travail porte sur la nature de la typologie des aides didactiques des enseignants, lors de la détermination de la limite d'une suite numérique convergente. Les résultats obtenus à partir d'un questionnaire montrent une invariance des pratiques enseignantes pour une suite donnée par son terme général. Par contre, dans le cas d'une suite donnée par une formule de récurrence, les enseignants sont moins à l'aise, se sentent relativement libres et leurs aides didactiques diffèrent d'un enseignant à un autre.

Mots-clés : aide didactique, pratiques enseignantes, suite numérique, convergence, limite

Abstract | This work focuses on the nature of teachers' teaching aids when determining a convergent digital sequence. The results obtained from a questionnaire show an invariance of teaching practices in the case of a sequence given by its general term. On the other hand, in the case of a sequence given by a recurrence formula, teachers are less comfortable, feel relatively free, and their teaching aids differ from one teacher to another.

Keywords: Didactic aid, teacher practices, digital sequence, convergence, limit

I. POSITION DU PROBLÈME

Notre recherche présentée ici, s'inscrit dans le prolongement des études menées sur les pratiques des enseignants. Elle s'intéresse aux aides didactiques proposées par des enseignants de mathématiques à leurs élèves, relatives à la notion de limite des suites numériques convergentes. Le choix de ce volet de recherche sur aides didactiques proposées par des enseignants de mathématiques à leurs élèves, relatives à la notion de limite des suites numériques convergentes n'est pas aléatoire. Il a été motivé par plusieurs raisons. D'abord, nous ne considérons pas le terme d'aide didactique dans l'orientation d'un instrument (Astolfi et al. ; 2002), mais comme une stratégie mise en place dans des situations didactiques pour faciliter la réflexion des élèves, dans son apprentissage. Ensuite, la convergence des suites numériques est un cas particulier du prolongement de l'enseignement de limite d'une fonction et cette notion est considérée comme une partie fondamentale dans l'enseignement des Mathématiques, en particulier en Analyse réelle, et occupe une place prépondérante dans les préoccupations de la transition lycée/l'université. Aussi, en didactique des mathématiques, la notion de limite d'une fonction a fait l'objet de nombreux travaux antérieurs reconnus (Cornu ; 1983, Sierpiska ; 1985, Bkouche ; 1996, Trouche ; 1996, Schneider ; 2001, Bosch et al. ; 2002, Le Thai Bao ; 2007 et Allab ; 2008) et aussi celle la convergence des suites numériques (Robert ; 1982 et 1983, Boschet ; 1983, Litim, Zaki et Benbachir ; 2015 et Ghedamsi. et Fattoum ; 2018). Enfin, des études ont été menées sur les ressources documentaires des enseignants (Gueudet et Trouche ; 2008, Margolinas et Wozniak ; 2009 et Leroyer ; 2013). En examinant la plupart des ressources documentaires dans le contexte ivoirien, nous avons constaté que toutes les activités des élèves se rapportant à la recherche de la limite d'une suite convergente, donnée par une formule de récurrence sont déjà orientées par les auteurs de ces ressources, c'est-à-dire qu'aucune initiative n'est donnée aux enseignants, pour aider leurs élèves.

* École Normale Supérieure d'Abidjan – Côte d'Ivoire – abby_mboua@yahoo.fr

Cette étude, qui se situe dans une perspective cognitive, a des implications didactiques importantes ; elle doit contribuer à une meilleure connaissance des modèles cognitifs dont disposent les enseignants, dans la recherche des stratégies de détermination de la limite d'une suite numérique convergente. Elle essaie d'examiner de près dans quelles mesures et comment les enseignants eux-mêmes, sont capables d'élaborer des aides didactiques en direction de leurs élèves se rapportant à la détermination de la limite d'une suite numérique convergente.

II. MÉTHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

1. *Échantillon*

Par rapport au sujet qui nous intéresse, il nous faudrait prendre en compte plusieurs facteurs qui pourraient aussi avoir une influence sur la qualité des réponses du professeur, tels que ses particularités personnelles ou son histoire antérieure ou encore l'état de ses connaissances professionnelles. Il nous faudrait tenir compte aussi du niveau « académique » de ce dernier, etc. Il nous faut donc chercher à réduire au maximum certaines de ces variables qui peuvent rendre complexes nos analyses.

Par nos choix méthodologiques, nous avons tout de même essayé de limiter les facteurs extérieurs, en choisissant dans la mesure du possible, des terrains d'observations appropriés. En particulier, le choix des enseignants et le choix du type de séance de classe nous ont permis de circonscrire au maximum notre recherche.

Nous avons également fait le choix d'annoncer individuellement à l'ensemble des enseignants que d'une part nous n'allons pas assister à une de leurs séances de classe, mais, ils allaient répondre à un questionnaire. Et d'autre part que nous les considérons, pour leur participation individuelle à cette étude, comme des professionnels de l'enseignement. Cette prise de position se justifie par rapport à l'étude elle-même. Il y a là un enjeu très important : nous considérons les enseignants comme étant ceux qui font les choix didactiques et qui en prennent seuls la responsabilité devant leurs élèves. Nous leur avons signifié tacitement notre intention de ne pas leur donner de directives concernant les choix didactiques à faire.

L'échantillon était constitué au départ de l'effectif total des enseignants dans les établissements, dans lesquels, nous avons à encadrer des professeurs stagiaires de niveau CAP/PL¹, durant l'année scolaire 2021/2022. Ces enseignants étaient au nombre de soixante-dix-neuf (79). Selon les critères de la diversification de l'échantillon et de la saturation des réponses (de Huberman et Miles, 1991), nous avons choisi des volontaires, qui enseignaient dans les classes de premières et terminales scientifiques (Première C, Terminale C, Première D et Terminale D), ayant en moyenne une dizaine d'années d'expérience dans l'enseignement et qui avaient déjà terminé leurs enseignements sur la notion de convergente d'une suite numérique. Quarante-trois (43) enseignants ont donc été retenus pour cette étude. Nous les avons tous réunis à l'Ecole Normale Supérieure d'Abidjan pendant les congés de février 2022.

2. *Le questionnaire*

Selon le programme officiel en vigueur en Côte d'Ivoire, la grande partie du cours sur la notion d'une suite numérique est basée exclusivement sur les suites données, soit par une formule générale, soit par une formule de récurrence. Ainsi, avons-nous élaboré le questionnaire (Cf. Annexe),

¹ Certificat d'Aptitude Pédagogique pour les Professeurs de Lycée.

comportant quatre exercices, dont les deux premiers se rapportent à une suite donnée par son terme général et les deux derniers portent sur des suites données par une formule de récurrence.

III. PRÉSENTATIONS ET INTERPRÉTATIONS DES RÉPONSES DES ENSEIGNANTS

Nous rappelons que les enseignants qui ont été sollicités pour cette recherche ont le niveau CAP/PL. Nous avons souhaité que tous proposent des solutions pour les quatre cas, car, logiquement, ils sont tous supposés avoir les connaissances mathématiques universitaires suffisantes et nécessaires pour résoudre convenablement des exercices élémentaires sur la détermination de la limite d'une suite convergente, et proposer des aides didactiques à leurs élèves. Quatre enseignants² n'ont pas rendu leurs questionnaires.

1. Présentation des enseignants ayant rendu leurs questionnaires

Tableau 1 – Répartition des enseignants selon leur classe d'enseignement au cours de l'année scolaire 2021/2022

	Total	
	Effectif	Fréquence %
Première C	5	13
Première D	9	23
Terminale C	6	15
Terminale D	19	49
Total	39	100

On observe dans le tableau, que :

- 13 % de l'échantillon ont une classe de première C
- 23 % ont une classe de première D
- 15 % enseignent Terminale C
- 49 % prennent une classe de Terminale D.
- Les enseignants ayant une classe de Terminale représentent plus de la moitié de l'effectif total, soit environ 64 %.

2. Présentation des résultats obtenus

L'analyse des productions de ces enseignants s'est déroulée en deux étapes. La première a débuté par une catégorisation de toutes les réponses³, qu'ils ont proposées. Ensuite, nous avons interprété l'ensemble des réponses identifiées dans des catégories distinctes afin de caractériser les aides didactiques les plus répandues, dans les consignes à donner aux élèves.

En examinant l'ensemble des productions, la première remarque frappante est que :

- Tous les enseignants n'ont pas résolu en intégralité tous les différents cas.
- La majorité des enseignants a résolu le premier et le deuxième cas.

² Ce sont tous des enseignants qui avaient cette année des classes, de première D.

³ Les réponses qui n'ont pas pu être catégorisées, n'ont pas été prises en compte lors de notre analyse.

- Plus de 60 % des enseignants ont répondu au troisième cas.
- Moins de 10 % a pu répondre à l'intégralité du quatrième cas.
- Les aides didactiques proposées par tous les enseignants sont pratiquement identiques pour le cas 1 et le cas 2.
- Les aides didactiques sont variées chez la majorité des enseignants, qui ont proposé une démarche de résolution pour le cas 3.
- Les aides didactiques sont également variés chez le peu d'enseignants qui ont répondu au quatrième cas.

Dans la suite, nous allons nous intéresser aux aides didactiques proposées par les enseignants. En décortiquant les réponses des enseignants, nous avons constaté que les aides élaborées par les enseignants sont de trois natures, à savoir algébriques⁴ (par calculs), géométriques (utilisation de courbes dans un repère orthonormé) et hybrides (algébriques et géométriques).

Aide didactique de nature algébrique primaire (ADNAP)

On la reconnaît, lorsque la suite est donnée par son terme général. Dans la recherche de la limite d'une suite numérique, on utilise le terme général de la suite numérique. On pourrait y voir une conformité avec les prescriptions institutionnelles données aux élèves, à savoir, pour déterminer la limite d'une suite numérique, donnée par son terme général, on la remplace par une fonction numérique, dont la variable (l'indice) est n .

L'origine de cette démarche peut s'être expliquée par le fait que dans l'enseignement secondaire, une suite est considérée comme la restriction d'une fonction numérique sur l'ensemble des nombres entiers naturels. Et lorsqu'un élève veut calculer la limite d'une suite, il remplace d'abord la variable (l'indice) par x et après des transformations successives, il arrive à trouver un nombre fini, alors ce nombre trouvé est la limite de la suite numérique. C'est cette stratégie que dans l'enseignement secondaire, tous les enseignants, transmettent à leurs élèves dans la recherche de la limite d'une suite numérique.

La règle d'action pédagogique est la suivante : « Si (u) est une suite définie par son terme général, alors pour déterminer la limite de cette suite, on remplace le n par x , et on détermine la limite en plus l'infini ».

Ces aides didactiques sont apparues chez tous enseignants interrogés dans le cas 1 et dans le cas 2. Dans le cas 1, à titre illustratif, on a :

Nous avons eu deux types de réponses relevés chez la majorité des enseignants.

a. Pose $f(x) = \frac{2x^2+5}{x^2+2}$ b. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ c. Donne la limite de la suite $(u)_n$ lorsque n tend vers plus l'infini.	1. Pose $f(x) = \frac{2x^2+5}{x^2+2}$ 2. Justifie que $(f(x) - 2) \leq \frac{1}{x^2}$ 2. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2)$ 3. Donne la limite de la suite $(u)_n$ lorsque n tend vers l'infini.

⁴ Elles sont soit primaires ou secondaires (de premier ordre ou de second ordre)

Dans le cas 2, on a :

- a. Pose $f(x) = (1 + \frac{2}{x})^x$
- b. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
(On fera intervenir la fonction exponentielle)
- c. Donne la limite de la suite $(u)_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Aide didactique de nature algébrique secondaire de premier ordre (ADNASPO)

Elle est utilisée lorsque la suite est donnée par une formule de récurrence. Dans le cas d'une suite donnée par une formule de récurrence, on commence d'abord par utiliser la propriété suivante :

- Soit (u) une suite infinie de réels satisfaisant à la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ (On suppose que f est une fonction continue sur un intervalle $[\alpha; \beta]$ contenant tous les termes de la suite (u) . Si la suite (u) admet un nombre réel l pour limite, alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$).

Puis, ils utilisent la règle d'action pédagogique faisant intervenir une suite auxiliaire, selon le nombre de solution de l'équation :

- « Si la fonction f admet un et un seul point fixe a , alors, on considère la suite (v) , telle que pour tout n , $v_n = u_n - a$. On montre ensuite que la suite (v) est une suite géométrique. On exprime v_n et u_n en fonction n et en utilisant l'aide didactique de nature algébrique primaire, on détermine la limite de la suite (u) ».
- Si f est une fonction admet deux points fixes a et b , alors, on considère la suite (v) , telle que pour tout n , $v_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$. On montre ensuite que la suite (v) est une suite géométrique. On exprime v_n et u_n en fonction n et en utilisant l'aide didactique de nature algébrique, on détermine la limite de la suite (u) ».

Cette aide est apparue dans les cas 3 et 4, chez tous les enseignants ayant une classe de terminale C, mais chez très peu chez les autres enseignants, ayant la classe de terminale D.

Dans le cas 3, on a l'exemple suivant chez plusieurs enseignants

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3u_{n+1} = u_n + 4$
- a. Pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 2$
- b. Montre que la suite $(v)_n$ est une suite géométrique
- c. Dédus l'expression de v_n , puis celle de u_n en fonction de n
- d. Détermine la limite de la suite $(u)_n$.

Certains enseignants ont pu déterminer le point fixe, qui est la limite de la suite, mais n'ont pas pu intégralement proposer des didactiques appropriées. Ils sont plus nombreux parmi les enseignants qui tiennent une terminale D.

Dans le cas 4, on a l'exemple suivant

- a. Pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 5}{u_n + 1}$
- b. Montre que la suite $(v)_n$ est une suite géométrique
- c. Dédus l'expression de v_n , puis celle de u_n en fonction de n
- d. Détermine la limite de la suite $(u)_n$.

Certains enseignants ont pu déterminer les points fixes, mais n'ont pas pu intégralement proposer des didactiques appropriées. Ils sont plus nombreux parmi les enseignants qui tiennent une terminale D.

Aide didactique de nature algébrique secondaire de second ordre (ADNAPSSO)

Elle est utilisée lorsque la suite est donnée par une formule de récurrence.

Dans le cas d'une suite donnée par une formule de récurrence, on commence d'abord aussi par utiliser la propriété suivante :

- Soit (u) une suite infinie de réels satisfaisant à la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ (On suppose que f est une fonction continue sur un intervalle $[\alpha; \beta]$ contenant tous les termes de la suite (u) . Si la suite (u) admet un nombre réel l pour limite, alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Puis, ils utilisent la règle d'action pédagogique faisant intervenir un encadrement, soit de f' , soit de $u_n - l$.

Dans le cas 4, nous allons présenter un exemple

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{6u_n + 5}{u_n + 2}$
- a. Montre que $|u_{n+1} - 5| \leq \frac{|u_n - 5|}{3}$
 - b. Dédus que $|u_n - 5| \leq \frac{|u_0 - 5|}{3^n}$
 - c. Détermine la limite de la suite $(u)_n$.

Cette aide est apparue dans le cas 3 et 4, chez tous les enseignants ayant une classe de terminale C, mais chez très peu chez les autres enseignants, ayant la classe de terminale D.

Les aides didactiques de nature géométrique (ADNG)

Elles font intervenir un repère orthonormé (O, I, J) . Dans ce repère, les enseignants demandent aux élèves de construire la première bissectrice, c'est-à-dire la droite (D) , d'équation $y = x$, et la courbe C_f . Ensuite par lecture, de quelques termes, ils demandent aux différents élèves de faire une conjecture la limite de la suite (u) . Elle est apparue dans le cas 3 et le cas 4.

À titre illustratif pour le cas 4

1. Dans un repère orthonormé (O, I, J) , construis la droite (D) d'équation $y = x$ et (C) , la représentation graphique de la fonction $f: x \mapsto \frac{6x+5}{x+2}$
2. Place les termes suivants u_1, u_2, u_3, u_4 à partir de $u_0 = 1$
3. Quelle peut-être la limite de la suite $(u)_n$?

Cette aide peut être utilisée dans le cas où la limite est un nombre entier relatif.

Dans cet exemple, cette aide ne prouve pas que la suite converge vers 5, mais, le laisse penser, et permet de guider le raisonnement (cela évite de s'égarer dans des recherches qui n'aboutiraient pas)

Les aides didactiques de nature hybride (ADNH)

C'est un mélange d'aides didactiques de nature algébrique et de nature géométrique. L'enseignant commence par les aides de nature géométrique, pour faire une conjecture de la limite et ensuite par l'utilisation des aides didactiques de nature algébrique.

Pour le cas 4, les enseignants ont commencé par l'utiliser, mais un seul a pu utiliser après la règle d'action pédagogique, faisant intervenir un encadrement.

- a. Observe graphiquement le comportement la suite (u_n) .
- b. Prouve que tout entier naturel n , $u_{n+1} - 5 = (u_n - 5) \times \frac{1}{u_n+2}$
- c. Montre que $|u_{n+1} - 5| \leq \frac{|u_n-5|}{3}$
- d. Dédus que $|u_n - 5| \leq \frac{|u_0-5|}{3^n}$
- e. Détermine la limite de la suite $(u)_n$.

IV. CONCLUSION

Ce travail de recherche qui a porté sur la détermination de la limite des suites numériques convergentes est une amorce sur une longue route qui doit permettre d'étudier l'impact des aides didactiques des enseignants dans le processus/apprentissage des notions mathématiques, car ce sont à eux que revient la responsabilité d'élaborer des situations didactiques.

Les enseignements que nous avons tirés de ce travail à partir des résultats du questionnaire papier-crayon peuvent se résumer selon trois axes :

- le répertoire didactique des enseignants est composé de trois aides didactiques suivantes, à savoir, algébriques, géométriques et hybrides
- dans le cas d'une suite donnée par une formule explicite, il y a prédominance de l'algèbre des limites au niveau des connaissances procédurales des professeurs, car, ces enseignants proposent de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$, en opérant les transformations algébriques adéquates sur $f(n)$.
- par contre, dans le cas d'une suite donnée par une formule de récurrence, nombreux d'entre eux sont démunis pour proposer convenablement des aides didactiques

Nous pensons surtout que ce travail inaugure un nouveau champ de recherche en didactique : celui de la prise en compte des aides didactiques proposées par les enseignants.

RÉFÉRENCES

- Astolfi, J. P., Darot, E., Guisburger-Vogel, Y et Toussaint, J. (2008). *Mots-clés de la didactique des sciences : Repère, définitions, bibliographies*. De Boeck Supérieur.
- Bkouche, R. (1996). Point de vue : des limites et de la continuité dans l'enseignement. *Repères- IREM*, (24), 67-76. <https://bibnum.publimath.fr/IWR/IWR96038.pdf>
- Bosch, M., Espinoza, L. et Gascon, J. (2002). El profesor como director de procesos de estudio: analisis de organizaciones didacticas espontaneas. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(1), 79–135. <https://revue-rdm.com/2003/el-profesor-como-director-de/>
- Boschet, F. (1983). Les suites numériques comme objet d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, 4(2), 141–163. <https://revue-rdm.com/1983/les-suites-numeriques-comme-obiet/>
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Pensée Sauvage.
- Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles* [Thèse de doctorat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble].
- Ghedamsi, I. et Fattoum, F. (2018). Étude de l'évolution des images de la convergence des suites lors d'un enseignement ordinaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 38(2), 207-259. <https://revue-rdm.com/2018/etude-de-levolution-des-images-de-la-convergence-de-suites-lors-dun-enseignement-ordinaire/>
- Gueudet, G. et Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Éducation et Didactique*, 2(3), 7-33. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.342>
- Huberman, A. M. et Miles, M. B. (1991). *Analyse des données qualitatives*. De Boeck-Wesmael.
- Leroyer, L. (2013). Le rapport au support dans le travail de préparation en mathématiques des enseignants du premier degré. *Éducation et Didactique*, 7(1), 147-164. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1608>
- Le Thai Bao, T. T. (2007). *Étude didactique des relations entre notion de limite et décimalisation des nombres réels dans un environnement « calculatrice »*. Une étude de cas dans l'enseignement mathématique secondaire au Viêt-Nam [Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier]. HAL theses. <https://theses.hal.science/file/index/docid/169190/filename/These.pdf>
- Litim, B., Zaki, M. et Benbachir, A. (2016). Difficultés conceptuelles d'étudiants de première année d'université face à la notion de convergence des suites numériques. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF2015 « Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage », 10-14 octobre 2015, Université d'Alger, Algérie* (p. 677-686). Université des Sciences de la Technologie Houari Boumediene ; Société Mathématique d'Algérie.
- Margolinas, C. et Wozniak, F. (2009). Usage des manuels dans le travail de l'enseignant : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 35(2), 59-82. <https://doi.org/10.7202/038729ar>
- Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur [Thèse de doctorat, Université Paris 7]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-01250393v1>
- Robert, A. (1983). Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3(3), 305–341. <https://www.researchgate.net/publication/287493411>

TRANSITION FORMATION INITIALE – FORMATION CONTINUE EN ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU PRIMAIRE : L'EXEMPLE DES PROCESSUS PERSONNELS DE CALCUL

| GREFEM* ET FOREST** MYLÈNE

Résumé | Cette recherche collaborative impliquant des chercheurs-formateurs, des conseillers pédagogiques et quatorze enseignantes novices vise à éclairer, sous un angle didactique, la transition entre la formation initiale, les premières années d'exercice et la formation continue. Nous revenons ici sur l'analyse d'une rencontre centrée sur les processus personnels de calcul, permettant d'explorer ce qui se fait en formation initiale et continue sur le plan des activités développées.

Mots-clés : transition, formation initiale, formation continue, processus personnels de calcul, recherche collaborative.

Abstract | This collaborative research involves researchers/teacher-trainers, educational advisors and novice teachers, to shed light, from a didactic angle, on the transition between preservice teachers education, the first years of exercise, and continuing education. We analyze a session allowing us to explore what is done in initial/continuing teacher training in terms of the activities developed.

Keywords: Transition, preservice teacher education, continuing education, personal procedures in arithmetic, collaborative research.

I. CONTEXTE DE L'ÉTUDE

Le GREFEM travaille depuis 2015 avec des conseillers pédagogiques (CPs) en mathématiques au primaire, sur des questions liées à l'enseignement des mathématiques et à l'accompagnement des enseignants. Les travaux développés dans le passé ont porté notamment sur la résolution de problèmes en contexte d'enseignement et l'accompagnement des enseignants à cette résolution (Lajoie et al., 2022), contribuant, en retour, à éclairer le métier de CP en mathématiques (Hanin et al., 2021). Au fil du temps, la question de la transition entre la formation initiale (f.i.) et la formation continue (f.c. - celle prise en charge par les CPs) a émergé comme une problématique à investiguer, afin de mieux comprendre les choix faits de part et d'autre pour soutenir le développement des enseignants dans leur travail avec les élèves. Des rencontres exploratoires entre les chercheurs du GREFEM (aussi formateurs intervenant en f.i. - nous utiliserons l'abréviation CFs) et les CPs ont mis en évidence un moment important à considérer dans cette transition, celui de l'entrée dans le métier, rejoignant autant les préoccupations du terrain que celles de la recherche. Du côté des CPs, les observations rapportées ont mis en évidence le non-maintien d'une réflexion didactique chez les enseignants novices (ENs) côtoyés. Ces observations vont dans le sens d'une rupture temporelle entre la réflexion didactique sollicitée en f.i., où cette dimension est centrale, et en f.c., où les CPs tentent de la maintenir et de l'enrichir. Du côté de la recherche, un abandon des enseignants dans les premières années du métier est au coeur des préoccupations (De Stercke, 2014, Kamanzi et al., 2015), jumelé au peu de connaissances que l'on a de cette transition f.i.-entrée dans le métier sous un angle didactique. C'est

* Le Groupe de Recherche sur la Formation à l'Enseignement des Mathématiques (GREFEM) est un collectif formé des auteurs suivants, en ordre alphabétique : Lily Bacon – Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue ; Nadine Bednarz, Sabrina Héroux, Caroline Lajoie, Jean-François Maheux et Mireille Saboya – Université du Québec à Montréal – Canada – GREFEM@uqam.ca

** Université du Québec à Montréal – Canada – forest.mylene@courrier.uqam.ca

dans ce contexte que s'est dégagé progressivement un objet co-situé, rejoignant les préoccupations des uns et des autres autour de la transition f.i.-entrée dans le métier-f.c., abordée sous un angle didactique.

II. ÉLÉMENTS DE PROBLÉMATIQUE ET OBJECTIF

De nombreuses recherches se sont intéressées à la transition de la f.i. à l'entrée dans le métier. Ces travaux mettent en évidence une entrée vécue comme problématique, voire traumatisante pour un nombre significatif d'enseignants (McCann et Johannessen, 2004, Mukamurera et Gingras, 2004, Veenman, 1984, Worthy, 2005). La f.i. y est questionnée face aux réalités d'exercice du métier, telles que vécues par ces ENs : « leur formation semble à la fois très appréciée mais aussi éloignée des conditions effectives d'entrée dans le métier, d'où le choc de la transition vécue par plusieurs » (Mukamurera, 2004, p.2). Ces travaux mettent également en évidence des taux alarmants d'abandon du métier (Kamanzi et al., 2015, Létourneau, 2014, Schaefer et al., 2012, Tardif, 2020). Dans les études qui cherchent à comprendre les raisons de cet abandon, le manque de formation et de ressources didactiques est entre autres mis en évidence (Kamanzi et al., 2015, Karsenti et al., 2015). Certaines de ces recherches pointent en conséquence une préparation à cette insertion qui doit être pensée dès la f.i. (Bernal Gonzalez et al., 2018, Dufour et al., 2018) ou dans un équilibre à trouver entre f.i. et f.c. (Mukamurera, 2004).

Les analyses de Mukamurera (2014), Deprit et al. (2019) ou De Stercke (2014) montrent, par ailleurs, que les ENs semblent adopter un rapport instrumental aux savoirs, les amenant à apprécier les habiletés qui leur paraissent directement transférables dans la pratique, alors que le métier d'enseignant exige des analyses constantes, beaucoup d'ajustements et de flexibilité. Les ENs se trouvent ainsi confrontés à un manque de ressources et de support leur permettant de s'adapter dans le milieu. Ce même rapport instrumental guide les besoins de f.c. exprimés par ces ENs, en lien avec des aspects concrets de la pratique (Mukamurera et al., 2004). Quelques études pointent l'importance en ce sens d'une réflexion didactique dans ces premières années dans le métier (Deprit et al., 2019, Perez-Roux et Lanéelle, 2015). Cette dernière est au cœur de leur succès à faire progresser les élèves notamment et de la reconnaissance d'une légitimité qui « donne sens au métier » (Perez-Roux et Lanéelle, 2015). Ces quelques travaux montrent la nécessité de s'attarder à cette réflexion didactique dans l'investigation de la transition f.i.-premières années-f.c.

Par une démarche de recherche collaborative (RC) croisant les voix de chercheurs-formateurs universitaires, de CPs et d'ENs, ce projet vise à éclairer, selon un angle didactique, la transition entre la f.i. à l'enseignement des mathématiques au primaire, les premières années d'exercice du métier et la f.c. des enseignants (celle prise en charge par les CPs). Plus spécifiquement, il cherche, d'une part, à mieux comprendre cette transition sur le plan des activités professionnelles développées de part et d'autre et de la réflexion didactique sollicitée. Il vise aussi à éclairer des pistes d'action pour une articulation entre la f.i., les premières années d'exercice du métier et l'accompagnement en contexte scolaire, allant dans le sens du maintien d'une réflexion didactique.

III. APPUIS THÉORIQUES

La transition, telle que conceptualisée dans la littérature, est un processus complexe qui s'inscrit dans une dimension temporelle marquée par des contradictions, des superpositions et des chevauchements de systèmes de références, de modes de pensée, d'actions et de valeurs. Dupuy et LeBlanc (2001) décrivent cette dimension temporelle comme un temps de transaction, où les individus doivent naviguer entre différents registres d'activités et d'expériences. Cette période de transition est donc caractérisée par la nécessité de gérer simultanément plusieurs systèmes de pensée, ce qui peut engendrer des tensions internes et externes pour les acteurs concernés.

La transition implique également des discontinuités et des ruptures. Selon Tapia (2001), ces moments de discontinuité nécessitent une déconstruction et une reconstruction du mode d'appréhension des acteurs vis-à-vis de leur environnement. Autrement dit, les individus doivent réévaluer et parfois remettre en question leurs cadres de référence antérieurs pour s'adapter à de nouvelles réalités. Cette déconstruction-reconstruction est essentielle pour leur permettre de développer de nouvelles stratégies adaptatives, à la fois individuelles et collectives. Ces stratégies peuvent inclure la création de nouveaux modes de collaboration, l'ajustement des pratiques professionnelles, ou encore l'intégration de nouvelles valeurs au sein d'un groupe. Ainsi, la transition ne se limite pas à un passage d'un état à un autre, mais représente un processus dynamique et complexe, marqué par des transactions, des discontinuités et une nécessité d'adaptation constante. Les acteurs doivent naviguer à travers ces changements en mobilisant des ressources individuelles et collectives.

Dans les travaux sur la transition, deux paradigmes principaux émergent, chacun offrant une perspective distincte sur la manière dont cette transition est vécue et interprétée. Le premier considère la transition comme un processus délimité de façon extérieure au sujet qui la traverse. Dans cette perspective, la transition est vue comme une « zone intermédiaire d'expérience » où le changement constitue le moteur principal. Les modifications dans les tâches, les rôles, les attentes, et autres aspects de l'activité professionnelle sont au cœur de cette approche. La transition y est perçue comme un phénomène temporaire ou intermédiaire, marquant le passage entre deux périodes distinctes. Elle se concentre sur les changements externes que rencontre l'individu, en mettant l'accent sur le cadre temporel qui structure ce passage. En contraste, le second aborde la transition en se focalisant sur les processus internes vécus par les acteurs. Plutôt que de se limiter à une définition temporelle ou extérieure, cette approche s'intéresse aux durées variables de la transition selon les individus et au sens que ces derniers donnent aux situations qu'ils rencontrent. Dans ce cadre, la transition est perçue comme un processus subjectif, où l'acteur engage une démarche de re-signification de son activité de travail. Cette re-signification est influencée par les diverses sphères d'engagement et d'expérience qui composent la vie professionnelle de l'individu. L'accent est mis sur l'interprétation personnelle et la construction de sens à partir des expériences vécues.

Nous retenons cette deuxième approche du concept de transition, car elle permet de mieux appréhender la complexité inhérente à ce processus. Contrairement à une vision linéaire ou uniquement temporelle, cette approche reconnaît la transition comme un travail d'inter-signification impliquant différents acteurs. Dans le cadre d'une transition professionnelle, ces acteurs incluent les formateurs en f.i., les CPs accompagnant en contexte de travail, ainsi que les ENs vivant cette transition. Cette perspective reconnaît également que la transition ne se limite pas à l'insertion professionnelle elle-même, mais commence dès la f.i. C'est durant cette phase que se développent des réflexions qui permettent à l'individu de se situer comme enseignant. La transition se poursuit dans la f.c., sous la forme d'un travail de réajustement continu qui s'articule à la pratique. Cette approche du concept de transition offre une vision plus nuancée et plus riche du processus, en tenant compte de la diversité des expériences et des significations que les acteurs attribuent à leur parcours professionnel.

IV. CONSIDÉRATIONS MÉTHODOLOGIQUES

Aborder la transition sous cet angle implique la création d'un espace-temps de co-construction entre les acteurs impliqués. Celui-ci doit être construit au plus près des pratiques professionnelles, afin de prendre en compte l'arrière-plan des trois activités professionnelles distinctes (en f.i., enseignement, f.c.) ainsi que les logiques sous-jacentes qui s'entrecroisent. Sur une durée de cinq ans, une RC (Bednarz, 2013) est actuellement en cours. Celle-ci implique sept CPs responsables du dossier mathématiques au primaire provenant de quatre régions du Québec, ainsi que quatorze ENs (0-

3 années d'expérience au moment de débiter le projet) provenant de ces régions, et les CFs du GREFEM. Ce type de recherche reconnaît la complexité des métiers et l'existence d'un savoir d'expérience et puise à une « double vraisemblance » pour (et par) la recherche et les pratiques. Dans notre étude, la RC amène un éclairage sur la transition f.i - premières années du métier - f.c.

Trois types de rencontres réflexives ont pris place, 1) des rencontres réunissant CPs et CFs, 2) des rencontres « grand groupe » avec tous les ENs, CPs et CFs et 3) des rencontres régionales réunissant les ENs et CPs d'une région ainsi que deux CFs. Dans ce texte, nous nous centrons sur une rencontre CPs - CFs ayant pris place à la troisième année du projet.

V. ANALYSES

Dans une rencontre CPs - CFs de la deuxième année, un questionnement a émergé autour des processus personnels de calcul (PPC). CPs et CFs ont pu échanger autour de leurs différentes interprétations des PPC et des attentes ministérielles à leur endroit (voir en annexe des extraits du document ministériel *Progression des apprentissages au primaire*). Lors de cette rencontre, il a été convenu que la rencontre CP-CFs suivante serait consacrée à éclairer ce qui se fait de part et d'autre autour des PPC. La séance s'est organisée autour des phases suivantes : a) travail en sous-groupe, CFs d'une part et CPs d'autre part afin d'élaborer respectivement une tâche de f.i. et une tâche de f.c. ; b) mise en œuvre des tâches auprès des CPs et des CFs respectivement ; c) retour sur les tâches élaborées et vécues ainsi que sur les intentions guidant les uns et les autres afin d'éclairer la transition, l'articulation entre f.i et f.c.

1. Présentation de la tâche en f.i. : jeu de rôles

Après de brefs échanges sur ce qu'ils observent chez leurs étudiants en f.i. en lien avec les processus de calcul, les CFs s'entendent pour préparer une situation de type « jeu de rôles » (Lajoie et al., 2012) à faire vivre aux CPs. La situation s'organise ici autour de trois phases de travail menées en équipe de deux ou trois CPs : 1) remise de productions d'élèves autour d'une tâche mathématique comportant ou non des erreurs. Chaque équipe en fait l'analyse et élabore une intervention visant à faire progresser les élèves auteurs de ces productions. Tous se préparent à prendre le rôle d'un élève ou celui de l'enseignant lors de la simulation (le « jeu ») ; 2) désignation par le formateur d'une personne pour jouer le rôle de l'enseignant, deux autres pour se mettre dans la peau d'élèves, et mise en scène des rôles/interventions préparés lors de la première phase. Les autres observent et sont appelés à échanger en grand groupe après le « jeu » ; 3) discussion avec tous pour commenter et questionner l'intervention mise en œuvre ainsi que les interactions enseignant-élèves observées. La figure 1 présente la mise en situation préparée par les CFs.

Mise en situation :

Vos élèves de 2^e cycle devaient résoudre le problème suivant :

Martin tond la pelouse comme travail d'été. À chaque semaine, il doit tondre 8 pelouses. Il reçoit 5 dollars pour chaque tonte. Combien d'argent aura-t-il amassé après 4 semaines ?

Vous observez une diversité de raisonnements. Vous invitez deux de vos élèves à venir au tableau expliquer ce qu'ils ont fait (voir leurs productions plus bas). Comment intervenez-vous ?

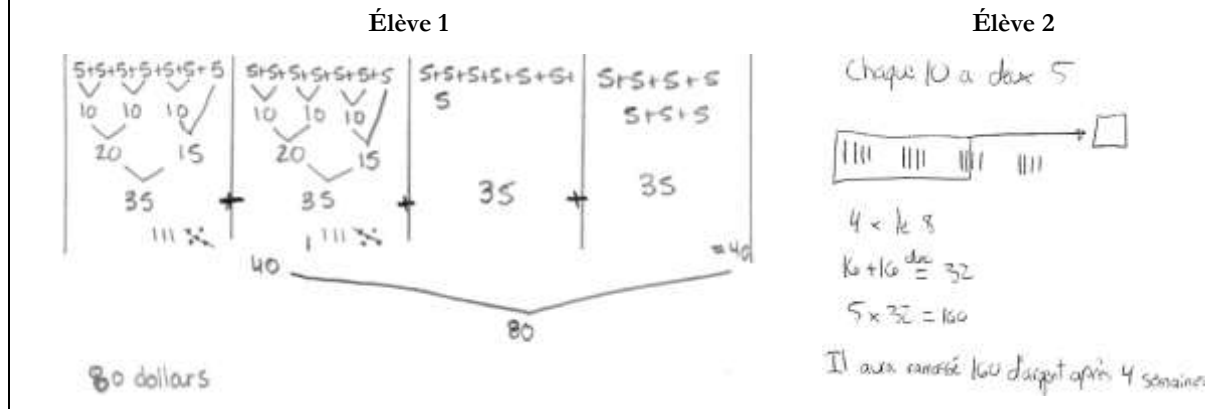


Figure 1 – Tâche préparée pour la f.i.

2. Présentation des tâches en f.c. : Causerie mathématique et calcul mental

Les CP énoncent différentes modalités de formation possibles et s'entendent pour faire vivre trois tâches aux CFs. Ils n'auront toutefois le temps que pour deux : une causerie mathématique et un calcul mental. Ces tâches sont présentées à la figure 2. Il est à noter qu'une causerie mathématique est une courte activité où les élèves d'une classe à qui on présente une image et une question sont invités, en grand groupe, à échanger autour de leurs idées, stratégies et solutions (Morin et Martin, 2024). Cette approche est inspirée de Parrish (2014).

Causerie « Les canards » (5 min.)	Calcul mental (5 min.)
	$87 - 49 =$ « Comment as-tu fait ? Comment ça s'est passé dans ta tête ? »
« Que voyez-vous de mathématique dans cette image ? »	

Figure 2 – Tâches préparées pour la f.c.

3. Analyse de la préparation des tâches dans chacun des sous-groupes

Observations qui guident l'action du formateur en f.i. L'analyse des échanges entre les formateurs au moment de préparer une tâche pouvant prendre place en f.i. rend compte des observations réalisées dans les cours au fil du temps. Un premier constat partagé est le fait que les étudiants sont peu familiers avec ce que le programme (Ministère de l'Éducation du Québec, 2001) identifie comme des PPC. Non seulement il est difficile pour eux d'anticiper des PPC possibles, mais une majorité d'entre eux accordent une primauté aux processus conventionnels de calcul (PCC). Ainsi l'argument présentant les PPC comme permettant de rendre un calcul plus aisé ne convainc pas les

étudiants. Les étudiants considèrent les PCC beaucoup plus aisés et les conçoivent comme les meilleurs processus de calcul auxquels chacun doit aboutir.

D'autres observations concernant l'enseignement des processus de calcul sont aussi partagées. Par exemple, CF3 constate qu'il est difficile pour les étudiants de détailler un projet d'enseignement en lien avec les processus de calcul, i.e. d'explicitier une intention pédagogique, didactique. Elle dit insister auprès de ses étudiants sur cet aspect après avoir observé les planifications produites dans le cadre des stages : « [...] [ils] formulent une intention "L'élève sera capable d'opérer ou sera capable de faire une addition". Je veux qu'ils aillent au-delà de ça, qu'ils soient capables de formuler quelque chose d'un peu plus élaboré. ». CF1 partage pour sa part des observations faites en milieu scolaire : « c'est [que les PCC] sont souvent présentés de façon tout à fait détachée de tout le reste. On perd complètement de vue le sens qu'on a pourtant essayé de construire préalablement [avec les PPC] ».

Observations qui guident l'action du formateur en f.c. Les CPs rapportent eux aussi des observations provenant de leurs expériences sur le terrain. Ils soulèvent rapidement que dans le discours des enseignants, les PPC passent nécessairement par le dessin ou l'utilisation de matériel et donc que cela « est associé beaucoup à la représentation » (CP2). Ils soulèvent aussi le fait que certains enseignants ont du mal à interpréter et à apprécier les PPC. CP1 rapporte avoir déjà été interpellé par des enseignants car « la réponse est bonne, mais je ne comprends pas son raisonnement ». Selon CP4, un enseignant croyait même que l'élève avait moins bien compris puisqu'il avait eu recours à un PPC. Les CPs rapportent également qu'il semble y avoir une primauté des PCC sur les PPC pour les enseignants : les PCC devraient être exigés et les PPC devraient être éventuellement mis de côté. CP6 et CP1 appuient ce constat de questionnements d'enseignants : « quand est-ce que j'exige les PCC ? » et « à partir de quand je vais pénaliser [les élèves qui ont recours aux PPC] ? » Enfin, ils avancent que l'enseignement des PPC consisterait à « montrer » pour les enseignants, qui ont tendance à diriger le travail mathématique de leurs élèves. CP2 illustre cette idée à l'aide d'une réflexion d'une enseignante qui admettait que « c'est beaucoup mon personnel à moi et peu de personnel à eux. »

Synthèse des observations. Pour les deux équipes de formateurs, des difficultés sont soulevées relativement aux PPC. La difficulté est de l'ordre de l'anticipation en f.i. alors qu'en f.c., les PPC ne semblent pas être compris ou appréciés, en plus d'être associés nécessairement à du dessin et à du matériel. Les formateurs ont également soulevé que, pour les formés, les PCC priment sur les PPC. En f.i., cela semble lié à une aisance personnelle alors qu'en f.c. cela serait en lien avec l'évaluation. Pour les CFs, il semble y avoir une difficulté pour les étudiants à détailler un projet d'enseignement en lien avec les PPC (intention pédagogique ou didactique) et leur enseignement des PCC ne prendrait pas appui sur les PPC développés par les élèves. Parallèlement, en f.c., l'enseignement des PPC consisterait à les montrer.

Moment auquel on s'attarde dans l'enseignement et intentions visées. Au moment de construire leurs tâches, les formateurs en f.i. et en f.c. ont choisi de s'attarder à des moments différents de l'enseignement : les relances de l'enseignant face aux PPC de ses élèves pour la f.i., l'émergence elle-même de PPC chez les élèves pour la f.c. Aussi, l'analyse révèle qu'ils ne partagent pas, au moment de la préparation, les mêmes intentions. Il est toutefois possible d'établir un certain parallèle entre celles-ci. La figure 3 présente ces intentions. Le parallèle établi entre elles est mis en évidence par l'utilisation de couleurs.

f.i.	f.c.
• Concevoir à quoi peuvent ressembler des PPC d'élèves • Éviter d'associer les PPC à des procédures incomplètes ou erronées • Envisager différentes relances / Faire des liens entre les intentions et les relances • Voir la richesse de la tâche d'un point de vue mathématique • Amener les enseignants à faire faire des mathématiques aux élèves • S'intéresser au travail de l'élève	• Explorer/Exposer la variété des PPC possibles • Éviter d'associer les PPC à du matériel ou des dessins • Pouvoir transgresser, être créatif et être flexible (autant l'élève que l'enseignant) • Orienter vers l'analyse d'un problème plutôt qu'au recours au calcul • Faire des mathématiques avec les enseignants • Pouvoir mettre en pratique immédiatement dans la classe

Figure 3 – Intentions des uns et des autres au moment de préparer la tâche de formation

Action prévue au moment de la préparation de l'animation de la tâche. Les formateurs en f.i. et en f.c. prévoient des actions différentes pour l'animation des tâches de formation. Pour la tâche de f.i., les CFs conviennent que l'animateur devra s'articuler sur ce qui émergera du groupe lors du jeu de rôles, qu'il devra co-construire avec le groupe, à partir à la fois des observations relevées par le groupe lors du jeu et de ses propres observations. Aussi, ils reconnaissent que la manière de lancer la discussion, et de l'animer, dépendra de l'animateur :

- CF1 : « On le voit dépendant du formateur, le jeu de rôles, il ne va pas à la même place. (...) le formateur (...) pourrait cibler la personne qui a joué le rôle de l'enseignant en lui demandant : "Quelles étaient tes intentions ?" Il pourrait aussi poser la question aux observateurs : "vous avez vu comment l'enseignant a relancé l'élève. D'après vous, c'était quoi les intentions ? Auriez-vous eu les mêmes ?" Pis on peut les expliciter maintenant, ces intentions-là.... »
- CF2 : « Naturellement, une des choses que je ferais, ce serait de dire, "Comment on aurait pu intervenir autrement ?" »

En ce qui concerne la tâche de f.c., il semble attendu de l'animateur qu'il procède par «modelage», soit qu'il anime comme il voudrait que la tâche soit animée dans une classe.

- CP1 : « Si je fais une causerie avec une gang de profs ... ok, j'ai l'intention de leur modéliser une façon de prendre en note. Pis il y a des mises en garde "tu fermes ta boîte". Tu essaies d'écrire ce que l'élève te dit et non pas ce que toi ...". Des trucs comme ça là.»
- CP6 : « J'essaie toujours d'épouser la même posture que ce que je veux voir chez les enseignants.»

Concept organisateur. Au vu de l'analyse précédente, il est possible de dégager une certaine ligne directrice reliant les raisonnements et actions des formateurs. Nous empruntons à la didactique professionnelle (Pastré et al., 2006) la notion de « concept organisateur » pour rendre compte de cette orientation partagée au sujet des situations de travail qui semble organiser l'activité professionnelle des CFs d'une part et des CPs d'autre part. Le concept organisateur commun aux CFs pourrait être formulé ainsi : faire que les étudiants se projettent dans un enseignement possible. Ce concept explique les observations considérées comme significatives par les CFs, de même que les buts qu'ils mentionnent poursuivre : le développement de la compétence à relancer et la construction d'un répertoire d'interventions. Ce concept organisateur rend compte également des choix faits et des actions entreprises par les CFs au moment de la préparation de leur tâche : le recours à une tâche de type « jeu de rôles » permet en effet de « faire entrer » les étudiants dans la classe; de les amener à apprécier / s'intéresser au travail de l'élève; de penser aux intentions pédagogiques, didactiques à poursuivre; de mettre en action les relances préparées; d'observer les autres en train de « jouer » ; de discuter des interventions proposées par les uns et les autres et d'envisager d'autres relances possibles. Les CPs semblent organiser leurs actions autour d'un concept différent. Les tâches sélectionnées et leur manière de les faire vivre témoignent de leur souhait de faire des mathématiques autrement avec les enseignants, pour qu'à leur tour, ils fassent des mathématiques autrement avec leurs élèves. En lien avec le travail sur les PPC, les CPs envisagent deux avenues : a) amener l'enseignant à prendre des risques avec les

tâches qu'il offre à ses élèves (aller vers des activités type « causerie » et sortir des tâches papier-crayon, par exemple); b) remettre en question l'association que font les enseignants entre les PPC et l'utilisation du dessin et de matériel. L'idée de faire des mathématiques autrement est alors envisagée en termes d'un espace qui permet à l'élève d'être créatif, qui ne le contraint pas à répondre ce qui est attendu, et où les PPC peuvent prendre diverses formes.

VI. DISCUSSION ET CONCLUSION

L'analyse des tâches concernant la f.i. et la f.c. met en lumière plusieurs éléments. En f.i., l'accent semble mis sur l'amorce d'un développement professionnel via une projection dans un avenir possible. Les futurs enseignants se familiarisent avec des raisonnements d'élèves et expérimentent ce qui pourrait devenir des interventions en classe. Cette phase vise à ouvrir des perspectives et à leur donner des choses à mettre en œuvre dans leur pratique future, tout en les sensibilisant à la complexité de l'enseignement des mathématiques. En f.c., le développement professionnel semble prendre une forme différente. Il se concentre sur un accompagnement des enseignants dans le but de les aider à sortir de leur routine de classe sans toutefois les bousculer de manière excessive. Il s'agit ici de favoriser un changement qui reste en lien avec les pratiques quotidiennes de la classe, en veillant à ce que les nouveautés proposées soient applicables et pertinentes dans leur contexte. Cette approche cherche à maintenir un équilibre entre l'introduction de nouvelles idées et les contraintes professionnelles des enseignants.

Certaines dimensions apparaissent d'emblée comme travaillées à la fois en f.i. et en f.c. Un des objectifs communs est de décentrer les enseignants de certaines conceptualisations figées ou traditionnelles. Il s'agit de faire voir et apprécier la diversité et la richesse de différentes pratiques en engageant les enseignants à « faire » et à « faire faire ». Une attention particulière est également portée sur ce que les élèves font réellement en classe, ce qui permet de recentrer les réflexions sur les actions concrètes des élèves et sur la portée des interventions. Notre analyse présente par contre des limites importantes. Elle est encore embryonnaire, reposant essentiellement sur l'étude d'une tâche et de quelques propos. Un premier retour sur nos observations avec les participants a ainsi déjà permis aux CFs et aux CPs d'expliquer qu'ils se reconnaissent dans les valeurs et les intentions mises de l'avant par les autres. Entendre le point de vue d'ENs sur cette analyse serait certainement enrichissant. Reste qu'il s'agit selon nous d'une mise en lumière intéressante de la transition entre la f.i. et la f.c..

RÉFÉRENCES

- Bednarz, N. (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante : regarder ensemble autrement*. L'Harmattan.
- Bernal Gonzalez, A., Houssa Cornet, M.-C., Kinet, A., Labalue, F., Salamon, A.-J., Zuanon, E. et Deprit, A. (2018). Les difficultés pressenties par les futurs instituteurs en cours de formation initiale. Dans F. Dufour, L. Portelance, C. Van Nieuwenhoven et I. Vivegnis (dir.), *La préparation à l'insertion professionnelle en enseignement* (p. 13-34). Presses de l'Université du Québec.
- De Stercke, J. (2014). *Persévérance et abandon des enseignants débutants : La relève issue des Hautes Écoles*. [Thèse de doctorat, Université de Mons, Belgique]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-00999263/document>
- Deprit, A., Bernal Gonzalez, A., Collonval, P. et Van Nieuwenhoven, C. (2019). Accompagner l'enseignant débutant. Identifier les tâches spécifiques de l'enseignant débutant et moduler l'accompagnement en fonction de ses besoins. *Éducation et formation*, (e-315), 47-63. <http://hdl.handle.net/2078.1/279578>

- Dufour, F., Portelance, L., Van Nieuwenhoven, C. et Vivegnis, I. (2018). *Préparer à l'insertion professionnelle pendant la formation initiale en enseignement*. Presses de l'Université du Québec.
- Dupuy, R. et Le Blanc, A. (2001). Enjeux axiologiques et activités de personnalisation dans les transitions professionnelles. *Connexions*, 76(2), 61-79. <https://doi.org/10.3917/cnx.076.0061>
- Hanin, V., Lajoie, B., Bednarz, N., Saboya, M. et Bacon, L. (2021). Vers une meilleure compréhension du métier de conseiller pédagogique en mathématiques au primaire : une approche par le genre et les styles. *Phronesis*, 10(1), 52-71. <https://doi.org/10.7202/1076182ar>
- Kamanzi, P. C., Tardif, M. et Lessard, C. (2015). Les enseignants canadiens à risque de décrochage : portrait général et comparaison entre les régions. *Mesure et évaluation en éducation*, 38(1), 57-88. <https://doi.org/10.7202/1036551ar>
- Karsenti, T., Correa Molina, E., Desbiens, J.-F., Gauthier, C., Gervais, C., Lepage, M., Lessard, C., Martineau, S., Mukamurera, J., Raby, C., Tardif, M. et Collin, S. (2015, juin). *Analyse des facteurs explicatifs et des pistes de solution au phénomène de décrochage chez les nouveaux enseignants et de son impact sur la réussite scolaire des élèves* [Rapport de recherche] (2012-RP-147333). FRQSC. https://frq.gouv.qc.ca/app/uploads/2021/08/prs_karsenti_rapport_decrochage-nouveaux-enseignants.pdf
- Lajoie, C., Maheux, J.-F., Marchand, P., Adihou, A. et Bisson, C. (2012). Le jeu de rôles comme approche de formation à l'enseignement des mathématiques. Quels choix ? Pour quelles intentions ? Pour quelle formation ? Dans *Actes du colloque du GDM 2012 « La recherche sur la résolution de problèmes en mathématiques : au-delà d'une compétence, au-delà des constats »*, 23-25 mai 2012, Université Laval, Québec (p. 48-56). <https://www.dropbox.com/scl/fi/4wltod77h724i17fcl7kb/2012-GDM-Actes.pdf?rlkey=6udqjljha1700vi2k4h1yon4w&c=2&dl=0>
- Lajoie, C., Bednarz, N., Saboya, M., Hanin, V. et Bacon, L. (2022). Logiques d'action de conseillers pédagogiques en mathématiques au primaire dans l'accompagnement d'enseignants à la résolution de problèmes en contexte d'enseignement. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, (Thématique 1), 119-166. <https://doi.org/10.4000/adsc.1553>
- Létourneau, E. (2014, 14 mai). *Démographie et insertion professionnelle : une étude sur le personnel enseignant des commissions scolaires du Québec* [PowerPoint]. Colloque « La démographie de demain : innovations, intersections et collaborations », Congrès de l'Acfas, Université Concordia, Montréal. http://www.ciqss.umontreal.ca/Docs/Colloques/2014_ACFAS/Esther%20L%C3%A9tourneau.pdf
- McCann, T. M. et Johannessen, L. R. (2004). Why do new teachers cry? *The Clearing House*, 77(4), 138-145. <https://www.jstor.org/stable/30189884>
- Ministère de l'Éducation du Québec. (2001). *Programme de formation de l'école québécoise (PFEQ)*. Gouvernement du Québec. [Lien](#).
- Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2009). *Progression des apprentissages au primaire : Chapitre 6. Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie*. Gouvernement du Québec. <https://cdn-contenu.quebec.ca/cdn-contenu/education/pfeq/primaire/programmes/PFEQ-mathematique-primaire.pdf>
- Morin, A. et Martin, V. (2024). *Les causeries mathématiques. Un dispositif innovant pour donner la parole aux élèves*. Chenelière Éducation.
- Mukamurera, J. (2014). Le développement professionnel et la persévérance en enseignement. Éclairage théorique et état des lieux. Dans L. Portelance, S. Martineau et J. Mukamurera (dir.), *Développement et persévérance professionnels dans l'enseignement. Oui, mais comment ?* (p. 9-33). Presses de l'Université du Québec.

- Mukamurera, J. (2004, 14-17 avril). *Formation initiale, insertion professionnelle et formation continue : un équilibre à trouver en vue d'une professionnalisation prometteuse de l'enseignement* [Communication]. 7^e Biennale internationale de l'éducation et de la formation, Lyon.
- Mukamurera, J. et Gingras, C. (2004). Les difficultés d'insertion dans la profession enseignante et les facteurs en jeu selon le vécu de jeunes enseignants au secondaire. *Formation et profession*, 10(2), 14-17.
- Mukamurera, J., Dezutter, O. et Uwamariya, A. (2004). L'accompagnement à la prise de la fonction : état des lieux et besoins d'enseignants québécois débutants au secondaire. *La Lettre de l'AIRDF*, 34(1), 12-18. <https://doi.org/10.3406/airdf.2004.1592>
- Perez-Roux, T. et Lanéelle, X. (2015). Pluralité des ressources pour l'action dans les processus de transition formation-emploi chez les enseignants du secondaire. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle*, 48(4), 17-42. <https://doi.org/10.3917/lse.484.0017>
- Parrish, S. D. (2014). *Number Talks: Whole Number Computation. Math solutions*. Heinemann Educational Books.
- Pastré, P., Mayen, P. et Vergnaud, G. (2006). La didactique professionnelle [Note de synthèse]. *Revue Française de Pédagogie*, (154), 145-198. <https://doi.org/10.4000/rfp.157>
- Schaefer, L., Long, J. et Clandinin, D. (2012). Questioning the research on early career teacher attrition and retention. *Alberta Journal of Educational Research*, 58(1), 106-121. <https://doi.org/10.11575/ajer.v58i1.55559>
- Tardif, M. (2020, 1^{er} juillet). Pénurie d'enseignants : raccourcir la formation est-il la bonne solution ? *La Presse*. <https://www.lapresse.ca/debats/opinions/2020-07-01/penurie-denseignants-raccourcir-la-formation-est-il-la-bonne-solution.php>
- Tapia, C. (2001). Éditorial. *Connexions*, 2(76), 7-13. <https://www.lapresse.ca/debats/opinions/2020-07-01/penurie-denseignants-raccourcir-la-formation-est-il-la-bonne-solution.php>
- Veenman, S. (1984). Perceived problems of beginning teachers. *Review of Educational Research*, 54(2), 143-177.
- Worthy, J. (2005). It Didn't Have to Be so Hard: The First Year of Teaching in an Urban School. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, 18(3), 379-398. <https://doi.org/10.1080/09518390500082699>

ANNEXE

EXTRAITS DU DOCUMENT MINISTÉRIEL *PROGRESSION DES APPRENTISSAGES AU PRIMAIRE* (MELS, 2009, p. 12-13) CITANT LES PPC ET LES PCC.

Note : Au Québec, la scolarité au primaire s'étale sur six ans (élèves de six à douze ans) et se divise en trois cycles de deux ans chacun.

Opérations sur des nombres						
→	L'élève apprend à le faire avec l'intervention de l'enseignante ou de l'enseignant.					Primaire
★	L'élève le fait par lui-même à la fin de l'année scolaire.					
	L'élève réutilise cette connaissance.					
A. Nombres naturels (selon les balises de chaque cycle)						
	1 ^{er} cycle	2 ^e cycle	3 ^e cycle	4 ^e cycle	5 ^e cycle	6 ^e cycle
3. Développer des processus de calcul mental						
a. À l'aide de processus personnels, déterminer la somme ou la différence de deux nombres naturels	→	★				
b. À l'aide de processus personnels, déterminer le produit ou le quotient de deux nombres naturels			→	→	→	★
4. Développer des processus de calcul écrit (addition et soustraction)						
a. À l'aide de processus personnels, en utilisant du matériel ou des dessins, déterminer la somme ou la différence de deux nombres naturels inférieurs à 1000	→	★				
b. À l'aide de processus conventionnels, déterminer la somme de deux nombres naturels ayant au plus 4 chiffres			→	★		
c. À l'aide de processus conventionnels, déterminer la différence de deux nombres naturels ayant au plus 4 chiffres dont le résultat est supérieur à 0			→	★		
7. Développer des processus de calcul écrit (multiplication et division)						
a. À l'aide de processus personnels, en utilisant du matériel ou des dessins, déterminer le produit ou le quotient d'un nombre naturel à 3 chiffres par un nombre naturel à 1 chiffre, exprimer le reste de la division sous forme de fraction, selon le contexte			→	★		
b. À l'aide de processus conventionnels, déterminer le produit d'un nombre naturel à 3 chiffres par un nombre naturel à 2 chiffres					→	★
c. À l'aide de processus conventionnels, déterminer le quotient d'un nombre naturel à 4 chiffres par un nombre naturel à 2 chiffres, exprimer le reste de la division sous la forme d'un nombre en écriture décimale sans dépasser la position des centièmes					→	★

LA FORMATION MATHÉMATIQUE DES ENSEIGNANTS DU PRIMAIRE : ENTRE LES OBJECTIFS DES PROGRAMMES ET LA RÉALITÉ DE LA FORMATION INITIALE

| HAMZAOUT* HOURIA ET ADIHOU** ADOLPHE

Résumé | Dans cette contribution, nous présentons une étude en cours portant sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement (CME) des futurs maîtres du primaire. Il s'agit d'une étude exploratoire qui vise à porter un éclairage sur quelques-uns des défis de la formation initiale en contexte de pénurie de personnel enseignant au Québec. Les conséquences de la pénurie ayant conduit à des adaptations dans le dispositif de formation à l'éducation préscolaire et enseignement primaire à l'UQAT, nous tentons d'esquisser un portrait des CME à développer par le dispositif de formation et de celles dont disposeraient les futurs maîtres, le tout à la lumière de la typologie de connaissances mathématiques de Ball, Hoover et Phelps (2008) et du concept de « mathématiques scolaires » développé par Bednarz et Proulx (2009).

Mots-clés : dispositifs de formation, formation à l'enseignement, connaissances mathématiques pour l'enseignement, formateurs, didactique des mathématiques

Abstract | In this contribution, we present an ongoing study on the mathematics for teaching (MfT) of future primary school teachers. This is an exploratory study aimed at shedding light on some of the challenges of initial teacher training in the context of a teacher shortage in Quebec. The consequences of the shortage have led to adaptations in the preschool and primary education training program at UQAT. We attempt to outline the MfT to be developed by the training program and those that future teachers would possess, considering the typology of mathematical knowledge by Ball, Hoover, and Phelps (2008) and the concept of 'teachers' mathematics' developed by Bednarz and Proulx (2009).

Keywords: Training mechanisms, teaching training, mathematical knowledge for teaching, trainers, mathematics didactic

I. INTRODUCTION

La question de la formation à l'enseignement reste un sujet d'actualité au Québec et ailleurs (Tardif, 2018 ; Wentzel et al., 2023). Les réformes successives, la baisse d'attractivité des programmes de formation à l'enseignement et plus récemment la multiplication des formations qualifiantes de courtes durées sont quelques-unes des facettes des défis auxquels la formation à l'enseignement fait face et des difficultés toujours renouvelées à répondre de façon satisfaisante aux attentes institutionnelles et sociales. À la suite de la dernière réforme de la formation à l'enseignement (Gauthier et Mellouki, 2006), les universités québécoises ont été amenées à mettre en place des dispositifs de formation à l'enseignement. Il est entendu que ces dispositifs « visent à outiller les formés à l'exercice de leur métier » par la mise en place des conditions favorisant leur engagement dans leur formation et facilitant l'acquisition des compétences et des connaissances requises pour l'exercice de la profession enseignante (Adihou, Gibel et Blanquart-Henry, 2019 ; Marchand et al., 2023). Par ailleurs, un bref survol des programmes de formation à l'enseignement des mathématiques au primaire – comparativement au secondaire – au Québec (Gouvernement du Québec, 2024) met en évidence la

* Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue – Canada – houria.hamzaoui@uqat.ca

** Université de Sherbrooke – Canada – adolphe.adihou@usherbrooke.ca

faible proportion de temps¹ consacrée à la formation en mathématiques (Bednarz, 2012) comme à toutes les autres disciplines à enseigner au primaire. Cette contrainte (institutionnelle) de temps n'est pas sans effets sur les choix des contenus, des pratiques de formation et des fondements théoriques et méthodologiques qui les sous-tendent dans les dispositifs de formation (Adihou et Arsenault, 2020 ; Houdement et Kuzniak, 1996). En effet, ces choix, qui sont susceptibles d'évoluer en fonction des besoins de la formation elle-même et de l'avancement de la recherche, sont guidés et en même temps limités par plusieurs contraintes institutionnelles, notamment en termes de ressources enseignantes et de crédits alloués à la formation disciplinaire et didactique. À ces contraintes s'ajoutent d'autres défis d'ordre plus contextuel, comme ceux liés à la pénurie d'enseignants. L'enquête du Groupe régional d'acteurs pour la valorisation des enseignants (GRAVE) met en évidence plusieurs conséquences liées à la pénurie dans la région de l'Abitibi-Témiscamingue (Sirois, 2023). La pression sur les équipes-écoles et la forte sollicitation des étudiants encore en formation sont celles qui attirent notre attention en raison de leurs répercussions sur la formation à l'enseignement (Ibid.). À ce titre, le dispositif de formation au baccalauréat en éducation préscolaire et enseignement primaire (BÉPEP) à l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue (UQAT) a une double facette. Il se situe dans « les dispositifs « institutionnels et institués » (niveau macro), souvent dictés par des orientations politiques, d'une part, mais aussi dans les dispositifs « situés d'ordre didactique » (niveau méso), qui correspondent aux stratégies mises en œuvre par les acteurs du dispositif pour répondre aux objectifs des dispositifs institués (Audran 2010). Il a fait l'objet de plusieurs adaptations dans les modalités d'offres de cours pour répondre aux besoins des centres de services scolaires en enseignants, les dispositifs « situés d'ordre didactique » (Audran, 2010).

On note alors, le raccourcissement de la durée de la formation par l'ajout de sessions d'été et la programmation hebdomadaire des cours sur trois journées. À cela s'ajoute un nouveau cheminement à temps partiel au BÉPEP destiné aux enseignants non légalement qualifiés. Dans ce contexte particulier, nous nous intéressons à l'impact de ces adaptations sur le dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques au BÉPEP qui est un dispositif « situés d'ordre didactique » (Audran, 2010). Nous avons choisi une entrée par les connaissances mathématiques pour l'enseignement qu'il vise à développer versus celles qui sont réellement développées et mobilisées par les formés dans les activités de cours.

II. CONTEXTE ET PROBLÉMATIQUE

1. *La formation à l'enseignement des mathématiques au primaire à l'UQAT*

Les dispositifs de formation à l'enseignement qui ont fait peau neuve au début du siècle à l'UQAT ont été le fruit de négociations et de compromis entre les différentes instances et acteurs impliqués dans la révision des programmes (Turgeon 2006 ; Cardin et Couture, 2006). Cette première révision avait impliqué plusieurs changements dans l'organisation et la structure des cours, notamment en raison de l'intégration des compétences professionnelles. Plusieurs modifications ont été apportées au dispositif de formation au BÉPEP, dont celui du renforcement des cours de didactique des mathématiques. On pouvait ainsi compter quatre cours constituant des préalables successifs, soit un premier cours portant sur les mathématiques comme objet d'apprentissage, suivi de deux cours de didactique des mathématiques et d'un dernier cours sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques selon plusieurs perspectives. Plus récemment, la dernière révision du programme en 2019 s'inscrit dans la continuité de la précédente en renforçant la formation didactique par l'ajout d'un

¹ À l'UQAT par exemple, 10 % des 120 crédits d'enseignement sont consacrés aux cours de mathématiques et didactique des mathématiques.

troisième cours de didactique des mathématiques remplaçant le cours sur les difficultés d'apprentissage. Les objectifs du premier cours visent principalement le développement d'une « vision élargie des mathématiques en tant qu'activité et outils culturels »² ainsi qu'une compréhension de ses dimensions historique et épistémologique. Y sont abordés, l'activité mathématique de résolution de problèmes et l'ensemble des concepts et processus mathématiques à enseigner au primaire. Les trois cours de didactique des mathématiques ont pour objectifs le développement « d'une posture critique au sujet de différentes approches didactiques et pédagogiques. »³ Ils visent également la « compréhension du rôle de la résolution de problème dans le développement de l'activité mathématique et les apprentissages » propres aux concepts mathématiques ciblés par chacun des cours, ainsi que le développement des compétences à concevoir et à piloter des situations d'enseignement-apprentissage. Ces derniers couvrent, respectivement, les nombres naturels ; les nombres entiers et les nombres rationnels ; et enfin la géométrie, la mesure et les probabilités et la statistique. Ce nouveau dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques est en vigueur depuis la session d'automne 2021.

2. *La pénurie de personnel enseignant et ses conséquences sur le dispositif de formation*

Depuis plusieurs années, la pénurie de personnel enseignant sévit au Québec et ailleurs (Sirois, Dembélé et Morales-Perlaza, 2022) et affecte considérablement plusieurs sphères de la société. Le rapport final du GRAVE (Sirois, 2023) relève plusieurs conséquences de la pénurie de personnel enseignant dans les régions de l'Abitibi-Témiscamingue et du Nord-du-Québec. Plusieurs de ces conséquences ont un impact direct sur la formation universitaire à l'UQAT, alors que d'autres conséquences seraient de nature plus latente et imprévisible selon nous. Les deux qui nous intéressent sont « *la qualité du service à l'élève et la surcharge pour l'équipe-école* » (Ibid. p. 23) et « *une pression sur les étudiantes et les étudiants ainsi que sur les stagiaires* » (Ibid., p. 24).

Dans ce contexte, les centres de services scolaires (CSS) recrutent des enseignants non légalement qualifiés (ENLQ) pour combler le manque. Toutefois, cette solution « prive les élèves des apprentissages essentiels à leur réussite » (Ibid., p. 23) et augmente les besoins en accompagnement de ces recrues sans formation solide à l'enseignement. Par ailleurs, les ENLQ détenant une autorisation provisoire d'enseigner ont l'obligation, s'il souhaite poursuivre une carrière en enseignement, de suivre une formation universitaire qualifiante. À cet effet, l'Unité d'enseignement (UER) en sciences de l'éducation a lancé, en 2020, le BÉPEP à temps partiel pour répondre aux besoins en formation qualifiante des CSS des régions de l'Abitibi-Témiscamingue, du Nord-du-Québec et de l'Outaouais. Il s'agit du programme de BÉPEP régulier, mais avec plusieurs aménagements permettant la conciliation étude-travail-famille. Ainsi, 25 % des cours sont à distance, un à deux cours sont prévus par session par cohorte, les stages I et II pourraient faire l'objet d'une reconnaissance d'acquis et les salles de cours sont délocalisées vers les CSS ou autres centres et points de service de l'UQAT. Sept cohortes totalisant près de 150⁴ étudiants et étudiantes, provenant de six centres de services scolaires, cheminent actuellement dans le programme. Toutefois, l'enthousiasme des débuts s'est heurté à une réalité très complexe et à laquelle aucune solution ne se laisse entrevoir. En effet, le premier défi pour l'UER a été de gérer cette offre supplémentaire de cours avec tout ce que cela implique en disponibilité des formateurs universitaires pour assurer des cours en soirée ou en fin de semaine, et ce sur plusieurs sites. S'ajoute à cela la multiplication des cheminements individuels des étudiantes qui, pour la plupart ne pouvant être libérées par leurs CSS, ne suivent plus le cheminement de leur cohorte. La résultante

² Extrait du plan de cours maître du cours MAE3126 Les mathématiques comme objet d'apprentissage.

³ Extrait des plans de cours maître des cours de didactique des mathématiques I, II et III (resp. DID3225, DID4225 et DID5225)

⁴ Les quatre cohortes qui cheminent au BÉPEP à temps plein totalisent environ le même nombre d'étudiants et étudiantes (Statistiques internes en 2024).

de tout cela est que ces étudiantes sont contraintes de suivre certains cours avec l'une ou l'autre des cohortes du BÉPEP à temps plein pour avancer dans leur formation. D'un autre côté, la forte sollicitation des futurs maîtres du BÉPEP dès la première année « pour faire de la suppléance ou pour prendre des contrats rémunérés en remplacement du stage IV » (Sirois, 2023, p. 24) les prive de leur pleine formation. On constate également, une augmentation du taux d'absentéisme dans les cours universitaires en formation à l'enseignement (Ibid.).

À la lumière de ce qui précède, commence à se dessiner, le portrait de beaucoup de groupes-cours au BÉPEP à temps plein. Se retrouveraient ainsi dans un même groupe, la jeune étudiante qui arrive du cégep⁵ et qui n'a aucune expérience en enseignement – ce qui était le cas de la plupart des étudiants en formation à l'enseignement dans un passé très proche, l'étudiante qui arrive du cégep aussi, mais qui, à l'occasion, accepte des offres de suppléances dans une ou plusieurs écoles. Finalement, se retrouverait également l'enseignante non légalement qualifiée, ayant pour certaines des contrats de longue durée plus réguliers en enseignement ou en orthopédagogie, et ce, depuis plusieurs années. Cette situation met au défi le dispositif de formation, notamment du fait qu'il soit orienté exclusivement vers les connaissances à développer par les futurs maîtres (Bednarz et Proulx, 2017). Or, de plus en plus d'étudiantes semblent avoir acquis/développé – à des degrés variables – des « connaissances mathématiques » liées à leurs pratiques d'enseignement, à l'accompagnement reçu d'une enseignante plus expérimentée ou d'une conseillère pédagogique, ou encore en formation continue dans les CSS. À ce stade, il nous semble intéressant d'explorer ces connaissances mathématiques qui pourraient s'apparenter aux *mathématiques scolaires* exploitées en formation continue par Bednarz et Proulx (2010). D'autant plus que dans le cadre de la formation initiale, ces « connaissances mathématiques » prennent de plus en plus de place et se manifestent de façon spontanée, ce qui laisserait peu de marge de manœuvre au formateur pour en tirer le plein potentiel dans le cadre des activités de cours planifiées. Ces activités étant conçues autour des connaissances mathématiques à développer, nous nous posons les deux questions suivantes : Quelles sont les connaissances mathématiques à développer ciblées spécifiquement par le dispositif de formation au BÉPEP ? Quelles sont les connaissances mathématiques réellement travaillées dans les cours ? Et enfin, quelles sont les connaissances mathématiques des étudiantes du BÉPEP à temps plein et à temps partiel ?

Les réponses à ces questions nous permettraient d'esquisser un portrait de l'articulation de ces types de connaissances mathématiques dans le cadre de la formation initiale en mathématiques des enseignants du primaire, et nourrir la réflexion sur celle-ci dans le contexte particulier de la pénurie de personnel enseignant en Abitibi-Témiscamingue.

III. CADRE DE RÉFÉRENCE

Dans ce contexte complexe et en constante évolution, nous nous sommes basés sur le cadre théorique de Ball, Thames et Phelps (2008) pour interroger les types de connaissances mathématiques pour l'enseignement (CME) ciblés par le dispositif de formation lui-même, les types de connaissances réellement abordées dans les activités déclarées dans les plans de cours et enfin les connaissances mathématiques des formés. Pour ces derniers, nous faisons également appel au concept de « mathématiques scolaires » développé par Bednarz et Proulx (2009, 2017).

⁵ Collège d'enseignement général et professionnel (premier niveau d'enseignement supérieur)

1. Les connaissances mathématiques pour l'enseignement

Plusieurs écrits scientifiques ont abordé le sujet des connaissances des enseignants, particulièrement depuis la publication des travaux de Shulman (1987). Pour le contenu spécifique aux mathématiques, plusieurs recherches se sont intéressées à préciser davantage la nature des connaissances liées à l'enseignement de cette discipline (Ball, 1988 ; Ma, 1999), particulièrement ce qui caractérise la nature de la connaissance pédagogique du contenu. Ball et al. (2008) se sont intéressés à l'enseignement des mathématiques et aux mathématiques utilisées dans l'enseignement. Ce modèle porte sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement (CME) et se décline en deux catégories. La première aborde les connaissances du sujet (discipline) et se décline en trois sous-catégories, soit les connaissances mathématiques communes (CMC) qui se composent notamment de techniques et méthodes mathématiques intervenant dans diverses disciplines faisant appel aux savoirs mathématiques ; les connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement (CMS) permettent l'enseignement et l'apprentissage des contenus et vont au-delà de ce qui est enseigné aux élèves. La troisième sous-catégorie est la connaissance de l'horizon mathématique (CHM) c'est-à-dire la connaissance des liens entre les concepts mathématiques dans l'ensemble du programme de mathématiques. Elles favorisent l'articulation et le lien entre les contenus mathématiques. La deuxième catégorie aborde les connaissances pédagogiques et didactiques du contenu et se décline également en trois sous-catégories, soit les connaissances du contenu et de l'enseignement (CC) c'est-à-dire les connaissances mathématiques auxquelles l'enseignant se réfère pour planifier les situations d'enseignement-apprentissage; les connaissances de l'élève et de l'apprentissage du sujet ou de la matière (CE) basées sur l'interaction entre la connaissance du contenu mathématique et celle des élèves, de leur raisonnement mathématique et de ce qui favorise leur engagement cognitif ; et la connaissance des programmes (CP) c'est-à-dire la connaissance du contenu d'autres disciplines et la capacité de l'enseignant à faire des liens avec le contenu mathématique enseigné. Elles sont liées aux contenus déterminés dans les programmes et curricula et renvoient aussi à des connaissances liées aux supports matériels.

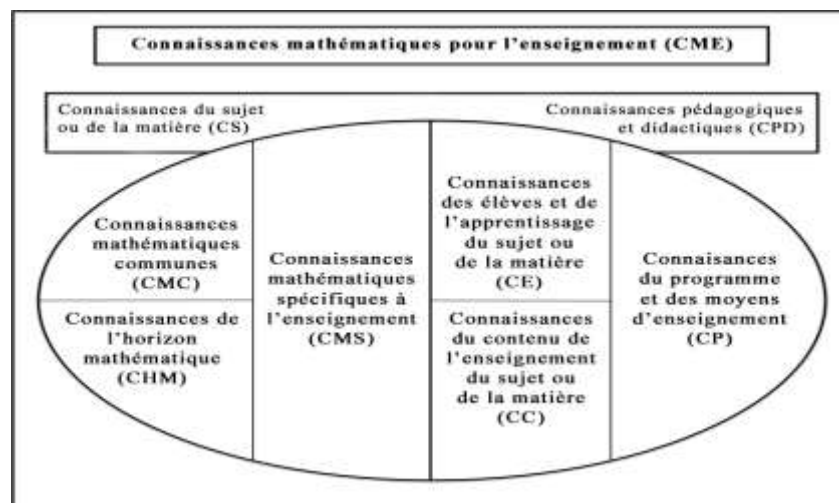


Figure 1 – Typologie des connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball et al., 2008)

2. Les « mathématiques scolaires »

Dans le contexte particulier de notre étude et en l'absence de suffisamment de données scientifiques sur les réalités scolaires des ENLQ et des suppléants de longue date, nous avons choisi comme deuxième cadre de référence, le concept de « mathématiques scolaires » développé par Bednarz et

Proulx (Bednarz et Proulx, 2011 ; Proulx et Bednarz, 2009, 2010). Les « mathématiques scolaires » seraient constituées, en plus des concepts prescrits par les documents ministériels, par « les éléments et événements mathématiques qui entourent et émergent de l'enseignement des mathématiques en classe, incluant les mathématiques produites par l'enseignant dans sa pratique même. » (Bednarz et Proulx, 2010, p. 22).

Bien que ce type de connaissances soit attribué à une catégorie spécifique de professionnels de l'enseignement, en l'occurrence les enseignants ayant complété une formation universitaire menant à un brevet d'enseignement, nous y faisons appel pour tenter d'approcher et de décrire les connaissances mathématiques des étudiantes faisant de la suppléance de façon régulière et celles des étudiantes engagées par les centres de services scolaires comme enseignantes non légalement qualifiées⁶. Pour appuyer ce choix, nous nous fions à la récente enquête sur l'état actuel de la situation des ENLQ au Québec, où environ « 57 % des répondantes et répondants⁷ affirment enseigner depuis deux ans ou moins, et 82 %, depuis cinq ans ou moins, alors que 13 % affirment enseigner depuis plus de 11 ans. » (Harnois et Sirois, 2024, p. 11)

Nous poursuivons ainsi, les objectifs spécifiques suivants :

1. Décrire les traces des CME dans les plans de cours maîtres⁸ et les plans de cours classes⁹ ;
2. Décrire la manière dont les plans de cours s'articulent autour des CME ;
3. Décrire les CME et les « mathématiques scolaires » des formés ainsi que la manière dont ils les maîtrisent et les mobilisent dans des mises en situation didactiques¹⁰.

IV. CADRE MÉTHODOLOGIQUE

Notre étude est de type exploratoire ayant pour objectifs de décrire les connaissances mathématiques gravitant dans la formation des futurs maîtres du primaire. Nous avons opté pour un devis mixte concomitant triangulé (Fortin et Gagnon, 2016). Nous croisons plusieurs outils de collectes de données, soit l'analyse de tous les plans de cours maîtres et plans de cours classes des cinq dernières années du programme de BÉPEP, le questionnaire en ligne et l'entrevue semi-dirigée. La triangulation des données recueillies devrait nous permettre d'assurer la validité de la recherche. Les critères d'inclusion sont d'être étudiante ou étudiant au BÉPEP à temps plein ou à temps partiel à l'UQAT et d'avoir complété le cours MAE3125 Les mathématiques comme objet d'apprentissage minimalement¹¹.

Pour tenter de répondre aux deux premiers objectifs spécifiques, nous avons collecté et entamé l'analyse des 4 plans de cours maîtres de mathématiques et de didactique des mathématiques, ainsi que

⁶ Ces deux catégories, suppléantes et ENLQ ne sont pas toujours distinctes. Il arrive que les CSS accordent des postes de suppléants au personnel non légalement qualifié n'ayant pas obtenu l'approbation ministérielle d'enseigner (tolérance d'engagement) (Harnois et Sirois, 2024)

⁷ (N = 203)

⁸ Un plan de cours maître est un document officiel décrivant notamment les objectifs et les contenus du cours, les compétences professionnelles visées et les modalités d'évaluation. Il s'agit d'une exigence du Comité d'agrément des programmes de formation à l'enseignement (CAPFE).

⁹ Un plan de cours classes est produit par la ressource enseignante à partir du plan de cours maître, selon un gabarit prédéterminé. Le plan de cours classes comporte plus de détails sur le déroulement spécifique des séances de cours et sur les modalités d'évaluation.

¹⁰ Les mises en situation didactiques utilisées dans cette étude sont celles développées par Ma (1999) et traduites en français et adaptée par Clivaz (2011).

¹¹ Ce cours est suivi en formation à distance au BÉPEP à temps partiel. Les modalités pédagogiques sont donc différentes de celles du cours MAE3126 Les mathématiques comme objet d'apprentissage suivi dispensé en présentiel au BÉPEP à temps plein. Les deux cours ont le même plan de cours maître.

de 37 plans de cours classes. La grille d'analyse (annexe 1) a été bâtie sur la base des catégories de CME de Ball et al. (2008). Elle a pour finalité de nous donner un aperçu de l'importance accordée à chacune des catégories des CME pour chaque plan de cours séparément et pour le dispositif de formation comme continuum. Nous souhaitons également décrire comment les CME visées par les plans de cours maîtres se traduiraient dans les plans de cours classes.

Pour répondre au troisième objectif spécifique, nous avons réalisé deux collectes de données : la première par l'entremise d'un questionnaire en ligne envoyé à l'ensemble des cohortes du BÉPEP (temps plein et temps partiel). Un questionnaire avec échelle de Likert à cinq niveaux, composé de 44 questions a été administré en utilisant l'outil de sondage en ligne LimeSurvey. Les questions sont réparties en six sections portant sur les informations sociodémographiques (n=4), le cursus scolaire (n=3), le rapport aux mathématiques et le sentiment de compétence en mathématiques¹² (n=9) et la formation mathématique au BÉPEP (n=4). Une section du questionnaire comporte des questions (n=24) sur les CME (Ball et al., 2008), avec des énoncés du type : « Il faut donner des « trucs » aux élèves pour les aider à réussir. » (CC/CE) ou « Je me sens à l'aise d'enseigner certains concepts mathématiques dans un contexte interdisciplinaire (exemples : Langue, Science et technologie, Univers social, etc.). » (CHM) ou encore « Les processus des élèves constituent une source d'apprentissage pour les enseignantes et les enseignants. » (CC/CP). Une analyse statistique descriptive simple devrait nous permettre d'avoir un aperçu des types de CME mis en évidence par les réponses au questionnaire et de les comparer à celles qui se dégageraient de l'analyse des plans de cours.

La deuxième collecte de données consiste en des entrevues semi-structurées d'environ une heure. Il s'agit de quatre mises en situation didactiques traduites en français et adaptées par Clivaz (2011) à partir des questions de Ma (1999, 2010). Ces mises en situation ciblent respectivement les connaissances mathématiques liées aux valeurs de position et algorithme de soustraction, l'algorithme de multiplication, la division par une fraction et l'aire et le périmètre. Les entrevues nous permettent d'apprécier entre autres, comment les formés mobilisent leurs connaissances mathématiques dans la représentation d'une situation mathématique, ou dans l'introduction d'un nouveau concept, ou encore dans l'analyse d'erreur et le traitement de l'erreur. Au moment de la réalisation des entrevues, nous n'avions pas encore envisagé les « mathématiques scolaires », celles-ci se sont imposées de façon spontanée dans certaines d'entre elles. Nous les traiterons avec plus de prudence dans la perspective de les explorer davantage dans les suites de l'étude. Les entrevues ont toutes été réalisées sur la plateforme Teams en raison de la localisation des participantes sur un vaste territoire et pour maintenir une uniformité dans les modalités de la collecte de données.

V. QUELQUES RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES POUR CONCLURE

L'analyse des données n'ayant pas encore été complétée, nous nous limiterons ici à quelques constats et résultats préliminaires. Concernant le questionnaire en ligne, nous avons enregistré 26 réponses dont seulement 17 sont complètes. Plus de 88 % sont des femmes et 70 % sont âgés de 35 ans et plus. Un peu plus de 58 % cheminent au BÉPEP à temps plein. Environ 76 % des participants ont été admis au programme sur la base d'un diplôme d'études collégiales. 47 % des répondants déclarent n'avoir suivi aucun cours de mathématiques postsecondaire avant d'intégrer le BÉPEP. Environ 12 % ont complété uniquement le premier cours *Les mathématiques comme objet d'apprentissage*, et 12 % ont complété les quatre cours de mathématiques et de didactique des mathématiques. La préanalyse des réponses au questionnaire ne laisse pas apparaître de traces des « mathématiques scolaires ». Cela pourrait être dû à la formulation des questions ou à l'interprétation

¹² Nous avons repris plusieurs questions de l'étude de Theis, Morin, Bernier et Tremblay (2006)

de l'objectif de l'étude par les participants. En ce qui a trait aux CME, l'ajout d'une section pour les commentaires aux questions permet de nuancer l'interprétation des scores obtenus. Par exemple, à une question qui relève des *connaissances du contenu* (CC) et des *connaissances de l'élève* (CE), près de 59 % des participants sont en accord ou très en accord avec l'énoncé « Il faut donner des « trucs » aux élèves pour les aider à réussir. », alors que 29 % environ sont en désaccord ou complètement en désaccord et près de 12 % ne savent pas. Parmi les commentaires recueillis, on peut lire : « Oui, [...] fournir des stratégies aux élèves peut aider à réussir, mais cela doit être complété par un enseignement qui met l'accent sur la compréhension profonde des concepts mathématiques. », ou « Il faut plutôt les aider à se trouver des trucs qui font du sens pour eux et qu'ils comprennent! » ou encore « Il faut les aider à explorer et ne pas imposer nécessairement nos stratégies. Cependant, les trucs peuvent être bénéfiques pour aider un élève à progresser dans sa propre compréhension et dans l'élaboration de ses propres stratégies ».

Cela nous semble constituer une manifestation des CC et des CE à travers la distinction qui est faite entre « réussir » et « comprendre ». Ainsi, le score élevé observé ne constituerait pas un indicateur suffisant de l'absence de ces types de connaissances.

Par ailleurs, six entrevues ont été réalisées. Parmi les participantes, cinq cheminent au BÉPEP à temps plein. Toutefois, trois d'entre elles l'ont intégré après un parcours d'au moins 30 crédits (sur les 120 requis) au BÉPEP à temps partiel ou au certificat en accompagnement à l'enseignement primaire qui est un programme à temps partiel entièrement à distance destiné aux suppléants. L'ensemble des cours du Certificat fait aussi partie du BÉPEP à temps partiel. Seulement une étudiante avait complété les quatre cours de mathématiques et de didactique des mathématiques. Quatre d'entre elles font de la suppléance et deux sont des enseignantes non légalement qualifiées, dont une qui a un contrat en orthopédagogie. La mise en situation portant sur la division par une fraction est celle qui a posé le plus de défis pour toutes les participantes particulièrement en raison de la difficulté à en faire une représentation.

RÉFÉRENCES

- Adihou, A. et Arsenault, C. (2020). Formation à l'enseignement des mathématiques : opérationnalisation et regard des étudiants sur un dispositif de formation. *Formation et profession*, 28(3), 64-80. <http://dx.doi.org/10.18162/fp.2020.511>
- Adihou, A., Gibel, P. et Blanquart-Henry, S. (2019). Méthodologie pour l'étude didactique d'un entretien formateur/professeur stagiaire en mathématiques dans le cadre d'une visite de classe. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 19, 143-167. <https://doi.org/10.1007/s42330-019-00047-9>
- Audran, J. (2010). *Dispositifs et situations : contribution à l'étude anthropologique et communicationnelle des environnements d'apprentissage en ligne dans l'Enseignement supérieur* [Mémoire de synthèse pour l'Habilitation à la direction de recherches, Université Paris 5 Descartes]. HAL theses. <https://hal.science/tel-01345875v1>
- Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education* [Thèse de doctorat inédite]. Michigan State University, East Lansing.
- Ball, D. L., Hoover, M. et Phepls, J. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <http://dx.doi.org/10.1177/0022487108324554>

- Bednarz, N. (2012). Formation mathématique des enseignants : état des lieux, questions et perspectives. Dans J. Proulx, C. Corriveau et H. Squalli (dir.), *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques : pratiques, orientations et recherches* (p. 13-54). Presses de l'Université du Québec.
- Bednarz, N. et Proulx, J. (2010). Processus de recherche-formation et développement professionnel des enseignants de mathématiques : exploration des mathématiques enracinées dans leurs pratiques. *Éducation et formation*, (e-293), 21-36. <https://www.researchgate.net/publication/316065175>
- Bednarz, N. et Proulx, J. (2017). Teachers' mathematics as mathematics-at-work. *Research in Mathematics Education*, 19(1), 42-65. <https://doi.org/10.1080/14794802.2017.1287000>
- Cardin, J.-F. et Couture, C. (2006). Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue : La refonte du programme du baccalauréat en éducation primaire et enseignement primaire. Dans C. Gauthier et M. Mellouki (dir.), *La formation des enseignants au Québec à la croisée des chemins : conditions et promesses de l'approche de formation par compétences*. Presses de l'Université Laval
- Clivaz, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire* [Thèse de doctorat, Université de Genève]. <http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047>
- Gauthier, C. et Mellouki, M. (dir.). (2006). *La formation des enseignants au Québec à la croisée des chemins : conditions et promesses de l'approche de formation par compétences*. Presses de l'Université Laval
- Gouvernement du Québec, (2024). *Listes des programmes de formation à l'enseignement menant à une autorisation d'enseigner*. <https://www.quebec.ca/gouvernement/travailler-gouvernement/metiers-education/enseignant-formation-generale-jeunes-professionnelle-adultes/devenir-enseignant/programmes-formation-enseignement>
- Harnois, V. et Sirois, G. (2022). Les enseignantes et enseignants non légalement qualifiés au Québec : état des lieux et perspectives de recherche. *Éducation et francophonie*, 50(2). <https://doi.org/10.7202/1097038ar>
- Houdement, C. et Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16(3), 289-322.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Marchand, P., Martin, V., Thibault, M. et Bisson, C. (2023). Postures et gestes de personnes formatrices exploitant les jeux de rôles comme dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques : analyse de récits de pratiques. *Annales de didactique et des sciences cognitives*, (Thématique 1), 19-53.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23. <http://dx.doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Sirois, G. (2023). *Diagnostic des enjeux de la pénurie de personnel enseignant en Abitibi-Témiscamingue et au Nord-du-Québec* [Rapport final]. Groupe régional d'acteurs pour la valorisation des enseignants.
- Sirois, G., Dembélé, M. et Morales-Perlaza, A. (2022). Pénuries d'enseignantes et d'enseignants dans la francophonie canadienne et internationale : un état de la recherche. *Éducation et francophonie*, 50(2). <https://doi.org/10.7202/1097031ar>

- Tardif, M. (2018). La formation à l'enseignement au Québec : bilan des 25 dernières années et perspectives pour l'avenir (Partie 2) [Chronique]. *Formation et profession*, 26(2), 110. <https://dx.doi.org/10.18162/fp.2018.a148>
- Theis, L., Morin, M.-P., Bernier, J. et Tremblay, Y. (2006). Les impacts des connaissances mathématiques sur l'attitude envers son enseignement chez les futurs enseignants du primaire. Dans *Actes du colloque de l'EMF2006 : « L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés »*, 27-31 mai 2006, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada. https://emf.unige.ch/application/files/9314/5388/8695/EMF2006_GT2_Theis.pdf
- Turgeon, J. (2006). *Une aventure de cœur et de raison. Recherche documentaire sur l'histoire de l'UQAT – 1970-2006*. Service de l'information et des affaires publiques, Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue. https://www.uqat.ca/historique/doc/aventure_coeur_raison.pdf
- Wentzel, B., Sirois, G., Mukamurera, J., Lakhal, S., Dembélé, M., Tardif, M., Borges, C., Morales-Perlaza, A. et Voyer, B. (2023). Choisir de se former à l'enseignement au Québec : profil sociodémographique, motivations et perspectives de carrière des étudiant.es. *Apprendre et enseigner aujourd'hui*, 12(2), 47–50. <https://doi.org/10.7202/1101213ar>

ANNEXE 1

ANALYSE DES PLANS DE COURS DE MATHÉMATIQUES ET DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES AU BÉPEP

Les catégories de connaissances mathématiques selon la typologie de Ball et al. (2008)

I- Les connaissances du sujet ou de la matière

Les connaissances mathématiques communes

- Y a-t-il dans les plans de cours des techniques ou des méthodes générales propres aux mathématiques ?

Les connaissances de l'horizon mathématique

- Y a-t-il dans les plans de cours des savoirs mathématiques qui sont traités en tant qu'objet/ en tant qu'outil ?
- Y a-t-il dans les plans de cours des liens qui sont faits entre les différents domaines mathématiques ?
- Y a-t-il des concepts théoriques mathématiques abordés dans les plans de cours ?
- Y a-t-il des définitions mathématiques de ces concepts théoriques dans les plans de cours ?
- Y a-t-il des propriétés mathématiques liées à ces concepts (commutativité, distributivité, etc.) dans les plans de cours ?

Les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement

- Quels sont les contenus mathématiques abordés dans les plans de cours et qui sont prévus par le PFÉQ (savoirs essentiels relatifs à chaque domaine) ?
- Les plans de cours traitent-ils de conceptions erronées ou des fausses conceptions en lien avec les savoirs essentiels relatifs à chaque domaine ?
- Les plans de cours traitent-ils de diverses méthodes de résolution de problème ?
- Les plans de cours traitent-ils de différentes propriétés mathématiques expliquant les méthodes de résolutions, des erreurs et certaines conceptions erronées ?

II- Les connaissances pédagogiques et didactiques

Les connaissances de l'élève et de l'apprentissage du sujet ou de la matière

- Y a-t-il dans les plans de cours des activités sur les différentes conceptions de l'apprenant ?
- Y a-t-il dans les plans de cours des activités sur les connaissances intuitives ou primitives de l'apprenant ?
- Y a-t-il dans les plans de cours des activités sur les phases de développement de certains concepts mathématiques ?
- Y a-t-il dans les plans de cours des activités qui permettent de cerner les difficultés des élèves ?

Les connaissances du contenu de l'enseignement du sujet ou de la matière

- Y a-t-il dans les plans de cours des activités sur des situations d'enseignement et d'apprentissage à proposer aux élèves qui permettraient de donner du sens aux concepts mathématiques ?
- Y a-t-il dans les plans de cours des activités sur des situations d'évaluation, de réinvestissement, d'objectivation à proposer aux élèves pour cerner le degré de développement de concepts mathématiques ?

Les connaissances du programme et des moyens d'enseignement

- Y a-t-il dans les plans de cours des activités spécifiques visant à cerner les différents contenus mathématiques du PFÉQ et connaître les liens entre les différents niveaux ?
- Y a-t-il dans les plans de cours des activités spécifiques traitant des compétences disciplinaires du PFÉQ ?
- Y a-t-il dans les plans de cours des activités spécifiques à l'organisation et à la gestion didactique de l'enseignement ?
- Y a-t-il dans les plans de cours des activités sur des situations de manipulation, de recours aux jeux mathématiques et de l'enseignement par résolution de problèmes à proposer aux élèves qui permettraient de donner du sens aux concepts mathématiques ?

**GT3 | DIFFÉRENTES
PENSÉES
MATHÉMATIQUES**

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL 3

DIFFÉRENTES PENSÉES MATHÉMATIQUES

| BEN NEJMA* SONIA, GBAGUIDI** AHONANKPON FLORENT, JEANNOTTE*** DORIS ET
SQUALLI**** HASSANE

I. INTRODUCTION

La thématique relative aux *différentes pensées mathématiques* occupe une place centrale et récurrente dans les colloques de l'Espace Mathématique Francophone (EMF) traduisant l'intérêt soutenu porté par les chercheurs, formateurs et praticiens du champ de l'éducation mathématique. Depuis EMF 2015, le choix d'aborder la question sous l'angle des *différentes pensées mathématiques* permet d'élargir le champ de réflexion. Il ne s'agit plus de penser une pensée mathématique unifiée, mais bien d'explorer une diversité de formes de pensée (arithmétique, algébrique, fonctionnelle, géométrique, algorithmique, proportionnelle, probabiliste, etc.) dans leurs spécificités, leurs articulations et leurs liens éventuels avec des domaines d'étude en mathématiques. Pour la sixième édition consécutive, cette thématique est reconduite dans le groupe de travail 3 du programme d'EMF 2025. Les différentes contributions au GT3 peuvent être classées selon trois axes : épistémologique et historique, didactique et curriculaire. Sur le plan épistémologique et historique, cette thématique conduit à repenser la nature même de l'activité mathématique en tant que pratique multiforme trouvant ses origines dans l'histoire des mathématiques et à réfléchir sur les différents modèles épistémologiques proposés du point de vue de leur ancrage théorique, de leur spécificité culturelle et de leur complémentarité éventuelle. Sur le plan didactique, elle interroge la manière dont les diverses formes de pensée mathématique peuvent être mobilisées, développées et articulées dans les parcours d'apprentissage depuis le préscolaire. Sur le plan curriculaire, elle invite à repenser les contenus, les pratiques d'enseignement-apprentissage et les programmes d'étude et de formation des enseignants en tenant compte de la diversité culturelle francophone.

Vingt-trois personnes ont participé au GT3 et représentent différents pays (Canada, France, Liban, Maroc, Tunisie). Onze textes ont donné lieu à des présentations qui touchent à différents niveaux d'enseignement allant du préscolaire jusqu'à l'enseignement supérieur et ont eu lieu durant les différentes plages de travail, 9 présentations orales (20 minutes) et deux présentations par affiche (10 minutes), chacune suivie d'une période de discussion équivalente au temps de présentation. Enfin, nous avons pu travailler collectivement durant la dernière séance (environ 1h20) afin de dégager les idées clés discutées, soulever les différents objectifs et explorer des pistes de réflexion futures. Quoiqu'ils puissent appartenir à plus d'un axe, trois textes s'inscrivent plus spécifiquement dans le premier, six dans le second et deux dans le dernier. Ensuite, un bilan a été présenté lors de la clôture s'inscrivant ainsi dans une continuité tout en marquant une actualisation, en phase avec les avancées de la recherche en didactique des mathématiques, les transformations du paysage éducatif et les défis

* Co-responsable du groupe de travail 3 – Université de Carthage – Faculté des sciences de Bizerte-Tunisie – sonia.bennejma@fsb.ucar.tn

** Co-responsable du groupe de travail 3 – Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques – Benin – florent.gbaguidi@imsp-uac.org

*** Co-responsable du groupe de travail 3 – UQAM – Canada – jeannotte.doris@uqam.ca

**** Co-responsable du groupe de travail 3 – Université de Sherbrooke – Canada – hassane.squalli@usherbrooke.ca

posés par les évolutions curriculaires et sociétales. Ce rapport fait la synthèse des présentations et discussions

1. L'axe 1: épistémologie et histoire

Les questionnements d'ordre épistémologique et historique ont eu pour objectif de mettre en évidence les points de convergence et de divergence entre divers champs de recherche en mathématiques et les différents modèles théoriques pour une meilleure compréhension de la nature même de la pensée mathématique.

Abdallah El Idrissi s'intéresse au rôle fondamental du jeu des cadres mathématiques, tel que défini par Douady (1986) dans le développement et la mobilisation de diverses formes de la pensée mathématique. Ce processus est mis en lumière dans diverses situations au fil de l'histoire, constituant ainsi un levier puissant pour favoriser la compréhension conceptuelle et la flexibilité cognitive chez les élèves. L'auteur s'intéresse, plus particulièrement, à la notion d'aire, envisagée comme un outil de preuve au sein de situations historiques variées. Il montre comment cette notion a été mobilisée différemment selon les contextes : en géométrie pour justifier des relations de congruence ou de proportion, en analyse pour fonder des raisonnements intégratifs, en algèbre pour établir des identités, ou encore en combinatoire pour visualiser des structures discrètes. Cette analyse souligne à la fois la richesse épistémologique de la notion d'aire et sa capacité à soutenir le développement de multiples formes de la pensée mathématique, à la croisée de cadres conceptuels distincts. Cette contribution convoque des questions vives au sein du groupe :

Hamid Chaachouaa et **Stéphanie Dewyspelaere** abordent cette thématique par une approche épistémologique et en s'appuyant sur la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1985) dans le domaine de l'algèbre élémentaire, se démarquant ainsi des travaux ayant abordé le développement de la pensée algébrique d'un point de vue cognitif. L'auteur propose de la caractériser par le biais d'un modèle praxéologique de référence (MPR) élaboré à partir du modèle conceptuel de l'activité algébrique, dit « GTG » (Kieran, 2004), ainsi que d'autres modèles épistémologiques. L'auteur questionne ensuite ce modèle à la lumière d'autres modèles théoriques tels que le MPRPA de la pensée algébrique (Squalli et Jeannotte, 2022) et celui de MER de l'algèbre (Pilet et Grugeon Allys, 2021). Le travail présenté apporte un enrichissement aux recherches portant sur le développement de la pensée algébrique à partir de ce qu'il qualifie de « pré-algèbre » envisagé à la fois comme un champ de travail autonome dans une perspective curriculaire et comme un objet d'étude pour les conditions d'élaboration de praxéologies didactiques facilitant l'entrée dans l'algèbre élémentaire. Des questions ont enrichi la discussion autour de cette contribution :

Pour sa part, **Vincent Laurence-Rouleau** aborde cette thématique sous un angle original, celui d'une nouvelle conception de la notion de fonction pour qu'elle puisse être au cœur d'usages contemporains en mathématiques et dans d'autres domaines d'application, notamment en modélisation et en informatique. L'auteur présente le résultat d'une analyse mathématico-épistémologique de cette notion dans une perspective de conception active (Laurence-Rouleau, 2023). Ce travail s'inspire des modèles de compréhension d'un objet mathématique par dualité « processus-objet » (voir p. ex. Sfard, 1991) et de la théorie mathématique des catégories. Cela lui permet de décrire et d'illustrer les conceptions de certains élèves du secondaire et de repenser les liens entre pensée mathématique, pensée algorithmique, informatique ou logique en mettant, particulièrement, l'accent sur la composition de fonctions (morphisme) comme étant un levier de transition d'une conception à une autre, voire d'une pensée à une autre.

2. L'axe 2: didactique

La majorité des présentations (au nombre de six) se situe dans l'axe didactique. Dans cet axe, les propositions traitent des différentes pensées mathématiques dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques.

Sonia Ben Nejma et **Hend Hraimi** se sont intéressées à la pensée proportionnelle comme tremplin pour le développement de la pensée fonctionnelle. Pour ce faire, elles ont analysé les démarches de résolution mobilisées par les élèves pour résoudre des problèmes de proportionnalité. Pour faire l'analyse, elles proposent un cadre bidimensionnel enrichi par celui des représentations sémiotiques. Spécifiquement, les outils de la TAD ainsi que des champs conceptuels ont permis de mettre de l'avant le potentiel de la pensée proportionnelle pour le développement d'aspects de la pensée fonctionnelle. En particulier, l'utilisation spontanée par les élèves d'une variété de représentations sémiotiques semblait renvoyer à diverses techniques de résolution de problèmes de proportionnalité et pourrait servir de levier pour développer la pensée fonctionnelle.

Nathalie Bisailon et ses collaboratrices se sont intéressées à l'aspect raisonnement mathématique de la pensée mathématique. Leur étude a porté sur l'analyse des raisonnements d'élèves de 4^e année déployés lors de la résolution d'une énigme logique impliquant le langage courant. Pour ce faire, elles proposent un cadre multicouche permettant de mettre en évidence les pas de raisonnement, la nature des éléments d'un pas, mais aussi la façon dont ces pas s'enchaînent. L'analyse met en évidence la non-linéarité des enchaînements de pas de raisonnement, des enjeux liés aux fondements d'un pas de raisonnement ainsi que des enjeux en lien avec des changements de registres de représentation. L'importance des traces dans la constitution des chaînes de raisonnements apparaît alors centrale pour être en mesure de progresser dans la résolution de l'énigme.

La proposition d'**Elena Poloskoia** et ses collaborateurs contribue au développement d'un modèle de développement d'une pensée relationnelle dans la lignée des travaux de Davidov (2008). Ce texte explore comment la pensée relationnelle, préalable à la pensée algébrique, peut être développée dès la première année du primaire à travers des activités non numériques. En s'appuyant sur le cadre théorique de Davydov (2008), les auteurs analysent deux leçons où des élèves résolvent des problèmes écrits à l'aide de schémas. Un modèle bidimensionnel est utilisé pour évaluer la qualité des relations exprimées et le niveau d'abstraction des outils sémiotiques employés. Les résultats montrent que certains élèves manifestent une pensée relationnelle avancée, tandis que d'autres peinent à exprimer leur raisonnement. L'étude souligne l'importance de varier les modes de communication (gestes, schémas, langage) pour mieux interpréter et soutenir le développement de la pensée mathématique.

Céline Constantin et ses collaborateurs explorent comment des élèves de 6 à 7 ans développent une pensée structurale en arithmétique à travers des tâches centrées sur l'égalité et ses représentations symboliques. En s'appuyant sur une approche sémio-linguistique, les auteurs analysent les stratégies de deux élèves confrontés à des égalités numériques. Deux propriétés arithmétiques liées aux quantités sont identifiées comme leviers pour structurer la pensée mathématique. L'utilisation de tâches de comparaison d'états au sens de Vergnaud est apparue porteuse pour le développement de cette forme de la pensée mathématique.

Nathalie Anwandter et ses collaboratrices explorent comment des enfants du préscolaire (4 à 6 ans) développent une pensée relationnelle dans un contexte non numérique, à travers un jeu d'équivalence de poids avec des balances. En observant leurs gestes, discours et stratégies, les chercheuses identifient différentes formes de raisonnement : quantitatif, qualitatif et explicite. Trois cas d'enfants illustrent des niveaux variés de compréhension des relations d'équivalence. Les résultats montrent que la pensée relationnelle peut émerger avant l'introduction des nombres, en s'appuyant sur

les grandeurs. L'étude propose ainsi un cadre pour analyser cette pensée chez les jeunes enfants sans recours au symbolisme mathématique

Enfin, **Geneviève Barabé** s'est intéressée à comment la résolution collective de tâches routinières peut susciter des pratiques mathématiques authentiques en classe. Ancrée dans la théorie de l'enaction, l'étude montre que ces pratiques collectives génèrent de nouveaux problèmes mathématiques à résoudre. L'analyse d'une séance en 5e année du primaire illustre l'émergence de plusieurs problèmes collectifs à partir d'une tâche simple sur la divisibilité. Les résultats permettent de nourrir l'étude de la pensée mathématique du point de vue du collectif, mettant en lumière de nouveaux enjeux de recherche.

3. *L'axe 3: Le curriculum*

La prise en compte de différents travaux de recherche autour de la pensée mathématique pour l'analyse des curricula des différents pays francophones est un axe omniprésent et questionne leur place dans les programmes, les manuels, les ressources pour les enseignants et dans les pratiques d'enseignement et de formation.

Edward Bankoussou Mabiala s'intéresse au potentiel des suites non numériques à motif répété dans le développement de la pensée algébrique chez les élèves à travers une analyse du programme d'études de la maternelle à la deuxième année du primaire du Nouveau-Brunswick. Ce travail se base sur la théorie des représentations sémiotiques (Duval 1995) pour l'étude des régularités en tant qu'approche pour introduire l'algèbre et renforcer les connaissances des élèves en arithmétique. Selon l'auteur, cette initiation doit se faire de manière progressive, par une diversification des situations en amenant les élèves à identifier la régularité dans une suite puis à la prolonger, ce qui pourrait contribuer à faire entrer les élèves dans la pensée algébrique. La reconnaissance et l'analyse des suites fournissent ainsi une base pour le développement de cette forme de la pensée mathématique offrant aux enfants l'opportunité d'observer et de verbaliser des généralisations, ainsi que de les représenter symboliquement (Warren et Cooper, 2007).

Samia Oueslati aborde le développement de la pensée fonctionnelle dans une perspective interdisciplinaire avant l'introduction formelle du concept de fonction et propose une grille d'analyse multidimensionnelle des manuels scolaires du collège tunisien. Ce travail s'inscrit dans le cadre de la TAD et s'appuie sur des travaux conduits dans ce contexte institutionnel (voir p. ex. Najar et al., 2021). Ce travail a généré plusieurs questionnements au sein du groupe.

II. SYNTHÈSE DES DISCUSSIONS

Les échanges à la suite de chacune des discussions et durant la discussion finale ont mis en évidence une grande diversité dans les façons de parler de la pensée mathématique, parfois porteuses de tensions conceptuelles, mais aussi d'une richesse qui ouvre une compréhension mutuelle. Cette diversité souligne l'importance de maintenir des dialectiques entre différents domaines des mathématiques (algèbre, arithmétique, analyse, etc.), mais aussi de reconnaître la pertinence d'étudier la pensée mathématique avant même l'introduction formelle des objets de savoir. Cela nous amène à réfléchir aux liens entre ces domaines et d'autres disciplines scientifiques et à considérer la trajectoire de développement des différentes pensées mathématiques comme un objet d'étude en soi.

Pour les prochaines années, plusieurs pistes de réflexion sont identifiées au sein de ce groupe de travail. Il apparaît nécessaire de clarifier l'objet même de notre étude puisque certains semblent étudier la pensée mathématique en général, d'autres des formes spécifiques liées à des concepts ou à des domaines. Une réflexion collective sur nos conceptualisations est toujours à propos, notamment pour

modéliser ce que nous savons déjà, identifier les invariants et les différences (ex. : qu'est-ce qui rend une pensée algébrique ?). L'usage de cadres sur les représentations sémiotiques, notamment sur les représentations et leur lien aux concepts, mérite aussi d'être précisé. En effet, plusieurs présentations ont abordé l'aspect sémiotique sans toutefois bien circonscrire ce qui était entendu par là. Enfin, la question de la généralisation – qu'elle soit empirique, constructive ou théorique – pourrait structurer nos travaux futurs, en particulier pour distinguer les processus propres à l'arithmétique et à l'algèbre. Ces éléments pourraient nourrir un futur appel du groupe de travail pour EMF 2029.

RÉFÉRENCES

- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Éditions La Pensée Sauvage.
- Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction. A theoretical and experimental psychological study*. Nova Publisher.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31. <https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/>
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Dans D. Tall (dir.), *Advanced Mathematical Thinking* (p. 95-126). Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151. <https://www.researchgate.net/publication/228526202>
- Laurence-Rouleau, V. (2023). *Vers une conception active de la fonction mathématique* [Thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus. <https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/33485>
- Pilet, J. et Grugeon-Allys, B. (2021). L'activité numérico-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. *Éducation et Didactique*, 15(2), 9-26. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.8580>
- Najar, R., Squalli, H., Adihou A. et Abouhanifa, S. (2021). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : Pour un état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. *ITM Web of Conferences*, 39, article 01004. <http://dx.doi.org/10.1051/itmconf/20213901004>
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>
- Squalli, H. et Jeannotte, D. (2022). Un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique élémentaire. *Revue Québécoise de Didactique des Mathématiques, Numéro thématique 2*(Tome 2), 66-101. <https://doi.org/10.71403/www4e62>
- Warren, E. et Cooper, T. J. (2007). Repeating patterns and multiplicative thinking: Analysis of classroom interactions with 9-year-old students that support the transition from known to the novel. *Journal of Classroom Instruction*, 41-42(2-1), 7-17. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ780288.pdf>

LA NOTION D'AIRES COMME OUTIL DANS LA PREUVE MATHÉMATIQUE : QUELQUES CAS HISTORIQUES

| EL IDRISSE* ABDELLAH, AIT OUNEJJAR** LAHOUSSEINE ET ROUAN*** OMAR

Résumé | L'article présente des situations historiques où la notion d'aire intervient à titre d'outil pour justifier ou prouver des résultats mathématiques n'ayant a priori aucune référence à la notion d'aire. Les exemples sont empruntés à des cadres ou domaines mathématiques différents, géométrie, analyse, algèbre et combinatoire. Nous analysons la place de la notion d'aire dans chaque preuve et distinguons les aspects, les caractéristiques et les manières spécifiques à la notion d'aire qui sont exploités.

Mots-clés : aire, preuve, épistémologie, cadres, outils, algèbre, géométrie

Abstract | The paper presents some historical problems where the notion of area is used as a tool to justify or prove mathematical results that, at first glance, have no reference to the concept of area. The examples are drawn from different mathematical contexts or fields, including geometry, analysis, algebra, and combinatorics. We analyze the role of the concept of area in each proof and distinguish the specific aspects, characteristics and ways this concept is utilized.

Keywords: Area, proof, epistemology, fields, tools, algebra, geometry

I. INTRODUCTION

La notion d'aire a été envisagée de plusieurs points de vue : comme objet d'enseignement, objet de recherche didactique, mathématique et historique. Historiquement, les problèmes de surfaces et de calcul d'aires, dits de « quadrature » ont joué un rôle dynamique et fructifiant dans le développement des mathématiques aussi bien anciennes que modernes. Comme objet d'enseignement, plusieurs recherches didactiques en ont traité et se sont intéressés aux difficultés de calcul et de mesure d'aires de surfaces, aux relations entre surface et périmètre, aux formules de calculs d'aires, aux unités de mesure d'aires et leurs conversions, etc. (Castenbaum, 1988 ; Douady et Perrin, 1986, 1987 ; Moreira Baltar et Comiti, 1993).

Ce texte s'attarde sur le triplet « aire-outil-preuve » en examinant certaines situations historiques où la notion d'aire intervient comme un outil inattendu permettant la justification de résultats mathématiques recherchés. Nous traiterons d'exemples glanés dans divers domaines des mathématiques et à diverses époques. Notons d'emblée que notre préoccupation principale n'est pas d'ordre didactique, ni historique ; elle est d'obédience épistémologique.

Trois types de travaux ou d'éclairages théoriques y seront investis ; ils se rattachent à la notion d'aire, à la notion de sens et partiellement aux notions de cadre et d'outil.

II. ÉCLAIRAGES THÉORIQUES

Depuis quelques décennies, on constate un recours constant à l'histoire des mathématiques non seulement dans le but d'éclairer les analyses didactiques de concepts mathématiques mais aussi afin d'éclairer et fonder les concepts didactiques. Ainsi, pour Sierpinski (1989), « La signification d'un concept ne se réduit pas à sa définition mais est la résultante de l'histoire du concept et de ses diverses

* ENS, UCA, Marrakech – Maroc – abdellah_elidrissi@yahoo.fr

** ENS, UCA, Marrakech – Maroc – laitounejjar@hotmail.com

*** ENS, UCA, Marrakech – Maroc – omarrouan@gmail.com

applications aussi bien dans le passé que dans le futur ». Quant à Vergnaud (1990), il propose de rattacher le sens d'un concept à quatre composantes complémentaires, ce sont les composantes 1) langage, 2) propriétés, 3) techniques et 4) problèmes », cette dernière réfère justement aux problèmes que le concept a permis de résoudre.

Douady (1986) dans l'introduction de la notion de changement de cadres, souligne que l'analyse de l'évolution historique des mathématiques passé, récente montre que le travail du mathématicien consiste principalement à « ... interpréter les problèmes, à changer de point de vue, à les reformuler autrement, à les transporter d'un cadre dans un autre... », elle note à propos de ce transport que la traduction d'un problème dans un second « cadre conduit à poser de nouvelles questions et suggère le recours à des outils autre que ceux initialement sollicités. » Concernant la notion de cadre elle-même, Douady y intègre aussitôt les cadres algébrique, géométrique, arithmétique, etc. relatifs aux branches mathématiques connues mais elle l'enrichie par d'autres cadres (dynamique, algorithmique) et surtout par l'intégration « d'images mentales associées » et suggérées lors de la résolution de problèmes. Nous verrons que c'est à cette dynamique que renvoient les exemples dont nous traitons.

Pour la notion d'aire, Castenbaum (1988) se situant dans un contexte scolaire, dresse la liste des opérations ou procédés à l'aide desquels on peut opérer sur des surfaces lorsqu'on veut déterminer ou comparer leurs aires. Elle distingue cinq opérations principales et qui font consensus notamment entre différents éditeurs de manuels scolaires, ce sont :

1. La superposition de figures. En plus de sa participation dans la construction même du sens de la notion d'aire, la superposition est le premier moyen primitif de comparaison puisqu'on ne peut se fier à une observation intuitive dans plusieurs cas et le résultat de la comparaison par superposition est souvent immédiat.
2. Le pliage. Il suppose une certaine symétrie dans la surface et nécessite la possibilité de plier d'abord et de retourner dans certains cas.
3. Le découpage et recombinaison. Le découpage-recombinaison se prolonge par la superposition. Mais on doit justement avoir la possibilité de découper, de déplacer et d'ajuster les surfaces soumises à l'examen.
4. Le quadrillage. Le quadrillage est un support qui, s'il n'est pas présent peut être adjoint à une figure donnée. Il permet par un comptage de carreaux d'avoir une mesure d'aire exacte ou approximative.
5. Le pavage. Il se distingue par la présence d'un patron et par l'itération de ce patron en vue de couvrir une surface. Le pavage tient au quadrillage mais dans le cas du pavage, le quadrillage intervient à posteriori.

Il va de soi qu'à ces procédés élémentaires peuvent être ajoutées d'autres, résultant notamment de combinaisons valides. Nous tiendrons compte de ces opérations ou procédés dans l'analyse de nos exemples issues de l'histoire et examinerons si des procédés inédits ou particuliers peuvent être identifiés.

III. LA PREUVE PAR L'AIRES

Pour présenter notre propos, partons du théorème de Pythagore. Quoiqu'il puisse être formulé à l'aide de distances, considérons le tel qu'énoncé dans les éléments d'Euclide.

Dans un triangle rectangle, le carré sur le côté « soutenant » l'angle droit est égal à la somme des carrés sur les côtés contenant l'angle droit (Euclide).

D'emblée, signalons que cette figure illustre bien le théorème et tient lieu de support indispensable à sa démonstration (Euclide, 1993 ; Heath, 1921).

La preuve consiste à montrer les égalités d'aires suivantes :

Aire AEDC=2.aire DCB=2.aire CIA= aire CIJK et aire GBAF=2.aire GBC=2.aire BHA= aire BHJK.

Ce qui suffit pour justifier le résultat annoncé.

L'aire est traitée via un certain nombre d'opérations de découpage, de comparaisons et d'assemblage de portions d'aire, opérations qui prennent appui sur et se justifient par des propositions géométriques justifiées par ailleurs. Toutefois, par le fait que l'énoncé de ce théorème est justement présenté avec et sur la notion d'aire il nous intéresse moins. La notion d'aire y est explicitement sollicitée et il est normal qu'elle apparaisse dans la preuve.

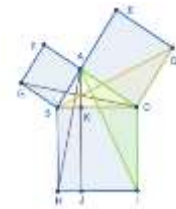


Figure 1

Les exemples dont nous traiterons ci-dessous revêtent un intérêt historique intrinsèque certain et notre mérite, si mérite il y a- est de les avoir repérés, assemblés et analysés sous l'œil du triplet « aire-outil-preuve ».

IV. LA NOTION D'AIRE ET LA PREUVE EN « GÉOMÉTRIE ».

Le théorème de Thalès est une proposition historiquement très riche quoique surchargée de mythes. Son utilisation première semble être dans une situation très particulière, en géodésie, dans une configuration de triangle rectangle isocèle et sans preuve aucune. Selon le mythe, *au moment où la longueur « du bâton », la cane de Thalès (VT AC) égale celle de son ombre, la hauteur de la pyramide égale aussi celle de son ombre*. Quoi de plus évident. Le théorème de Thalès, mieux que celui de Pythagore repose sur un résultat assez fascinant. A partir du parallélisme de deux droites, propriété purement géométrique on ressort des égalités de rapports de longueurs, une propriété métrique.

Voici comment Euclide énonce et justifie le théorème que nous disons de Thalès.

Dans un triangle ABC, si une droite MN parallèle à BC coupe AB en D et AC en E alors les longueurs AD, AB et les longueurs AE, AC sont dans le même rapport. La réciproque est également vraie.

La démonstration du théorème de Thalès par Euclide consiste à montrer des égalités des aires de portions construites sur la figure par différents segments de droites. Elle s'appuie sur une propriété primordiale sur les aires de triangles, la proposition 1 du livre VI qui s'énonce comme suit : « Les triangles (et les parallélogrammes) qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases » (Euclide VI, 1, 1993). (Figure 2)

La preuve du théorème de Thalès.

Les triangles ADE et ABE ont le même sommet E et la même hauteur. Leurs aires sont dans le même rapports que leurs bases, comme dirait Euclide : $\frac{\text{aire ADE}}{\text{aire ABE}} = \frac{AD}{AB}$ (Figure 2).

De même, les triangle AED et ACD ont le même sommet D et la même hauteur. Leurs aires sont dans le même rapports que leurs bases : $\frac{\text{aire AED}}{\text{aire ACD}} = \frac{AE}{AC}$.

Or les triangles ECD et DBE, de même base ED sont situés entre deux parallèles ; ils ont donc la même aire : $\text{aire ECD} = \text{aire DBE}$

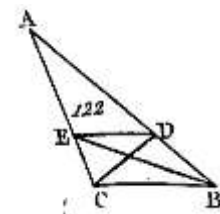


Figure 2

On en déduit $\text{aire } ACD = \text{aire } ABE$ et par suite $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. CQFD.

Le théorème de Thalès est un théorème qui met en relation une propriété métrique et une propriété géométrique ; partant de parallélisme de deux droites on aboutit à une proportion entre longueurs de côtés. La notion d'aire y intervient comme subterfuge ingénieux amenant à la justification ; l'astuce : « *insérer des segments appropriés dans un triangle* ». La propriété des aires de triangles de même hauteur permet de transférer le rapport entre les aires de triangles construits sur ces mêmes segments vers leurs aires. En fait, on utilise deux fois les propriétés sur la notion d'aire :

- La propriété sur la parallèle qui permet d'inférer une égalité d'aires (37, I).
- La propriété de proportions qui relie des rapports d'aires à des rapports de longueurs (1, VI).

La représentation figurale est importante et le choix des triangles et des segments est cruciale. On opère sur la figure, qui doit être « attestée conforme », respecter les propriétés de l'énoncé, par des considérations de figures ou de morceaux, des recollements virtuels, des comparaisons en tenant compte de parties communes entre figures : « *une certaine algèbre des aires* ». Dans les lemmes utilisés, on constate un procédé de « complétion d'une figure » afin de la rendre conforme à une configuration habituelle. En fait, en plus des procédés que nous avons mentionnés il est considéré que deux figures étant données, lorsque on « rajoute ou on enlève » une partie « commune », la comparaison des parties résultante est la même que celle des figures d'origine.

V. LA NOTION D'AIRES ET LA PREUVE EN « COMBINATOIRE ».

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets. Son but est d'apprendre à compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini mais de grande cardinalité (techniques de dénombrement). On peut déjà deviner que la recherche de régularités et de généralisations y soient importants.

Soit à calculer la somme des nombres impairs jusqu'à un ordre donné n , ou à l'aide de symboles : $\sum_{p=0}^{p=n} (2p + 1)$. Pour commencer, considérons le calcul de la somme des 8 premiers termes de cette suite : $1+3+5+7+9+11+13$. On pourrait très bien procéder de manière calculatoire en recherchant une régularité arithmétique qu'on pourrait généraliser d'emblée ou éventuellement justifier par un recours à la loi d'induction complète (récurrence).

On peut également considérer les nombres à additionner comme des « *nombres de* » et faire comme si on avait à additionner des portions d'aires qu'on pourrait disposer de manière convenable et pertinente. On constatera que la somme $(1 + 3)$ forme un carré de côté 2, que $(1+3+5)$ forme un carré de côté 3, que la somme $(1+3+5+7)$ forme un carré de côté 4, etc. (Figure 5)

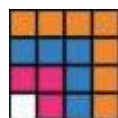


Figure 3

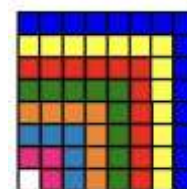


Figure 4

La configuration montre que, partons de 1, chaque nombre impair, $(2p+1)$ ajouté permet de compléter un carré de côté $(p+1)$ et donc d'aire $(p+1)^2$. Le constat est évident pour tous les nombres jusqu'à 8, (Figure 3) et on ne voit pas de raison pour qu'il ne soit pas juste pour tout nombre impair choisi $N = (2p+1)$ (Figure 4).

Nous aurons donc : $1+3+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$ ou alors $\sum_{p=0}^{p=n} (2p+1) = n^2$.

Ce procédé peut être appliqué moyennant certaines précautions pour calculer des termes de suites décroissantes, comme la série de terme général $(\frac{1}{2})^n$, soit $\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{2^p}$ (Figure 5).

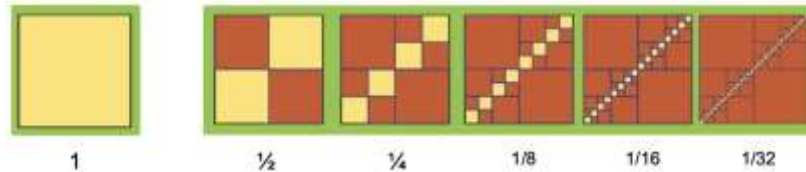


Figure 5

Le calcul combinatoire est très ancien et on en retrouve des traces depuis les Grecs, les Chinois et les Arabes appliqués à divers problèmes. Mais les recherches se sont accentuées pendant le vingtième siècle et le recours aux preuves géométriques sur les configurations est devenue plus familière pendant les cinquante dernières années que l'avènement de l'informatique et des fractales ont sans doute permis d'accélérer.

Les preuves de ce type, basées sur des configurations sont nombreuses et permettent de calculer des résultats assez importants et parfois complexes. Certains les qualifient de preuve sans mots ou « *proof without words* » (Delahaye, 2008). Le raisonnement serait toujours vrai en remplaçant les carreaux par des lapins ou des laitues tout en conservant la configuration. Le raisonnement, quoiqu'il opère sur les aires peut être pris sur les emplacements, la configuration. Néanmoins, la notion d'aire est bien plus familière dans ses manipulations et par ses formules de calcul ; elle est spontanément accessible à nos sens, notamment notre vision et semble saisissable d'emblée pour notre intuition.

Pour cette somme, la configuration est importante. Le choix des éléments d'aires qui puissent représenter les éléments à additionner doit être judicieux, voire opportuniste. On fait représenter aux termes de la suite les morceaux susceptibles de nous faire aboutir au résultat recherché. Ceci, se fait fort heureusement dans le respect total des règles géométriques et arithmétiques permises. La procédure peut être assimilée à un pavage spécifique ou le modèle, le gabarit est appelé à changer de grandeur tout en conservant la même forme, la même configuration.

En fait, on est bien en présence d'un changement de cadre, du cadre numérique ou combinatoire dans un cadre géométrique. Aussi, on est contraint de choisir une unité de mesure d'aire « carrée » et de s'y conformer tout au long du raisonnement, qui se veut discret et seule la formule du calcul d'aire du carrée est sollicitée. Cependant, pour le théorème de Thalès, il n'y a pas de changement de cadre apparent, tout se déroule dans un cadre géométrique mais le traitement peut être dit continue avec des propositions géométriques générales sur les aires.

VI. LA NOTION D'AIRES ET LA PREUVE EN « ALGÈBRE ».

L'algèbre mathématique est une branche qui permet de manipuler des quantités inconnues à l'aide de symboles, tout en opérant sur elles librement comme si elles étaient connues.

C'est dans un contexte analogue qu'est apparue la preuve que nous analysons (Djebbar, 2001). Elle est due à Al-Khwarizmi et marque un tournant dans l'émergence et le développement de la pensée algébrique.

Dans son traité, Al-Khwarizmi se propose de résoudre des équations de premier et de second degré dont la suivante $x^2 - 10x + 21 = 0$, approchée plutôt sous la forme $x^2 + 21 = 10x$. En fait, l'équation n'est pas formulée de la sorte. Al-Khwarizmi énonce ses équations à l'aide de trois notions ou paramètres : 1) le nombre, 2) le mal, qui réfère au bien (x^2), et 3) la racine du mal (x). Ainsi, dans ce cas nous avons « un bien et 21 équivaut à dix racines du même bien ». En supposant que $x < 10$, il construit un rectangle ABGH d'aire $10x$ sur lequel il déploie son raisonnement. *Encore une aire, dirons-nous !*

Soit à résoudre l'équation $x^2 + 21 = 10x$

Al-Khwarizmi représente x^2 par un carré ABCD. On a donc $AB = AD = BC = DC = x$. Il complète ce carré par un rectangle FABE de largeur AB ($= x$) et de longueur EB, arbitraire. Le rectangle résultant FAGE doit avoir une aire égale à 21. Pour rendre l'équation vérifiée, l'aire totale du grand rectangle FDGE doit être égale à $10x$ et la longueur EC égale à 10.

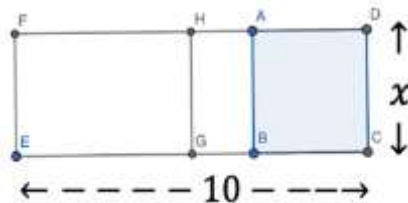


Figure 6

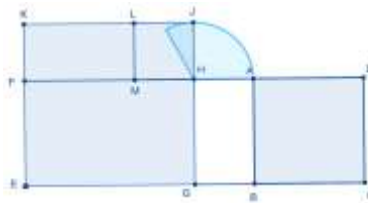


Figure 7

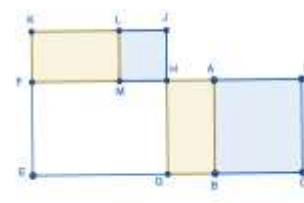


Figure 8

La démarche de résolution. On construit le rectangle KJGE tel que $AH = HJ$. Or, $GH = DA$.

Alors $GJ = DH (=CG = EG = EK)$. KJGE est donc un carré.

Or G est le milieu de EC, et $EG = 5$ et l'aire de KJGE = 25.

On construit les points L et M tel que LJHM soit un carré, on aura $FM = KL = AB$.

L'aire du rectangle KLMF est égale à celle du rectangle HABG.

Rappelons que l'aire du rectangle FAGE est égale à 21. L'aire du carré LJHM est donc égale à $25 - 21 = 4$ et alors $JH (=LJ)$ mesure 2. Par suite KL, qui n'est autre que x mesure 3.

Vérifions. On voulait : $x^2 + 21 = 10x$. Or $3^2 + 21 = 9 + 21 = 30$ et $10 \times 3 = 30$

Al-Khwarizmi, sans se soucier de l'exactitude des dimensions de la figure dessinée, qu'il ne connaît pas d'ailleurs, a pu raisonner sur la figure comme si elle répondait au problème et, ayant retrouvé une figure avec des composants reconnaissables, il a procédé aux calculs nécessaires. C'est le propre du raisonnement algébrique de permettre ces deux opérations : supposer le problème résolu et rechercher les conditions nécessaires pour cette résolution. C'est la modélisation par l'aire qui lui a permis toutes ces opérations. Ainsi, il a été amené à construire :

- Un carré, figure dont il connaît la forme justement avec une aire arbitraire,
- un rectangle dont il connaît l'aire et une seule dimension,
- un rectangle identique en forme et en aire à un rectangle donné,

Il a enfin dû compléter par un petit carré, une figure tronquée pour en faire un grand carré.

La constitution de la figure lui a permis de calculer le côté du petit carré et par un raisonnement, « à reculons », il a pu déterminer la mesure du côté du carré de départ, soit x , l'inconnue de son équation. Nous croyons que ce raisonnement n'a été rendu possible, applicable et vérifiable avec autant de latitude que parce qu'il s'appuie sur la notion d'aire. La notion d'aire comme modélisation de l'inconnue assure une capitalisation sur les formules de calcul d'aire, les procédés de calcul et de comparaison d'aires et sur tous les acquis des constructions géométriques. Comme nous l'avons mentionné plus haut, il est aussi accessible à nos sens et sollicite favorablement notre observation. Dans ce cas, Al-Khwarizmi a eu recours à des formes très régulières. Nous constatons également que d'apparence, nous sommes partis d'un problème formulé dans un cadre algébrique et l'avons traité dans un cadre géométrique. Il faut d'emblée souligner que, notamment dans le cas présent, cette assertion doit être nuancée, voire, nous amener questionner le choix de la notion de jeu de cadres comme cadrage théorique à notre analyse globale. En fait, peut-on dans ce cas précis parler de changement de cadre dans le sens de Douady, alors que la situation dont nous traitons a participé à la création, la naissance justement d'un nouveau cadre ?

VII. LA NOTION D'AIRES ET LA PREUVE EN « ANALYSE ».

Ptolémée, dans son *Almageste* entreprend la construction d'une table de cordes, où il cherche à associer à chaque arc, la longueur de la corde correspondante (Toomer, 1998). Les calculs algébriques provenant de l'addition, la soustraction, la duplication ou la division en deux des arcs connus ne lui permettent pas d'avoir la mesure de la corde d'un arc de 1° , disons : $\text{crd } 1^\circ$. En fait, les manipulations algébriques permettent de calculer $\text{crd } 3^\circ$ et la formule de la corde de la moitié lui donne d'abord $\text{crd } (1.5^\circ)$ puis $\text{crd } (0.75^\circ)$ avec une précision satisfaisante. C'est alors que Ptolémée s'est ingénié à encadrer « d'assez près » $\text{crd } 1^\circ$.

Ptolémée considère deux arcs de cercles $\text{arc } AB$ et $\text{arc } BC$ tels que $\text{arc } AB < \text{arc } BC$, et affirme que : $\frac{BC}{AB} < \frac{\text{arc } BC}{\text{arc } AB}$, ou autrement $\frac{\text{crd } BC}{\text{crd } AB} < \frac{\text{arc } BC}{\text{arc } AB}$. Sur la figure 9, on a BD bissectrice de $\widehat{ABC}$, E point d'intersection de la bissectrice et de la corde AC .

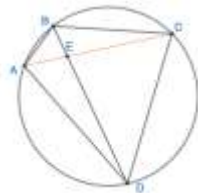


Figure 9

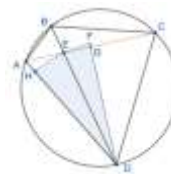


Figure 10

On a alors : $AE < EC$, car $AB < BC$ (BD n'est pas une médiane) et $AD = CD$, car le triangle ADC est isocèle.

Si G est la projection de D sur AC , alors $AD < ED < GD$, car DAG est rectangle en G (Figure 10). On construit le cercle de centre D et de rayon DE .

Ce cercle rencontre DA en H et DG en F , donc $DH < DA$ et $DG < DF$

Et par suite $\text{sect } DHE < \text{Aire } DAE$ et $\text{Aire } DEG < \text{sect } DEF$

Alors $\frac{\text{aire } DEG}{\text{aire } DAE} < \frac{\text{sect } DEF}{\text{sect } DHE}$ et on a aussi $\frac{\text{aire } DEG}{\text{aire } DAE} = \frac{EG}{EA}$ et $\frac{\text{sect } DEF}{\text{sect } DHE} = \frac{\widehat{EDF}}{\widehat{HDE}}$

donc : $\frac{EG}{EA} < \frac{\widehat{EDF}}{\widehat{HDE}}$ et en additionnant. $\frac{EG}{EA} + \frac{EA}{EA} < \frac{\widehat{EDF}}{\widehat{HDE}} + \frac{\widehat{HDE}}{\widehat{HDE}}$ et par suite $\frac{AG}{EA} < \frac{\widehat{HDF}}{\widehat{HDE}}$,

En doublant on obtient : $\frac{AC}{EA} < \frac{\widehat{HDC}}{\widehat{HDE}}$,

Puis en soustrayant, $\frac{AC}{EA} - \frac{EA}{EA} < \frac{\widehat{HDC}}{\widehat{HDE}} - \frac{\widehat{HDE}}{\widehat{HDE}}$, ce qui donne $\frac{EC}{EA} < \frac{\widehat{EDC}}{\widehat{HDE}}$.

Or les triangles BEC, BAD et AED sont semblables, en combinant les différentes proportions on aboutit à :

$$\frac{EC}{EA} = \frac{CB}{BA} \quad \text{d'où enfin} \quad \frac{BC}{AB} < \frac{\text{arc}BC}{\text{arc}AB}$$

Par un double usage de cette même inégalité et en comparant $\text{crd}1^\circ$ à $\text{crd}(0.75^\circ)$ d'une part et à $\text{crd}(1/5^\circ)$ d'autre part, Ptolémée encadre $\text{crd}1^\circ$ puis en donne une valeur approchée.

La preuve de Ptolémée peut être décomposée en trois étapes. La construction géométrique de base et le choix de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ est une première étape importante. Si le choix technique de la bissectrice est justifié son indication heuristique demeure mystérieuse et exige davantage d'investigation historique (Lemme de la bissectrice). La deuxième étape est une application d'une inégalité avérée par observation visuelle à des arcs et cordes particuliers.

La troisième étape, pertinente pour notre propos, consiste dans la construction du cercle de centre D et de rayon DE, une construction qui permet une riche exploitation des notions de surface et d'aire. Partant de constats et d'observations visuelles d'une situation d'inclusion de portions de surfaces, des triangles et des sections de cercles, Ptolémée tire des conclusions sur les aires des surfaces correspondantes, puis, en appliquant des formules de calcul à ses aires il déduit des relations de comparaisons entre des rapports de longueurs, qui sont en fait des longueurs d'arcs et de cordes.

En fait, cette propriété combinant des cordes et des arcs est rendue possible grâce à un passage par les aires de surfaces, résultat d'une observation fine de la figure. La dimension analytique est incarnée dans le fait que même en modifiant la figure, en réduisant les paramètres l'observation-propriété demeure « juste ». D'ailleurs, en langage analytique, la relation prouvée est équivalente à dire que la fonction $\frac{\sin x}{x}$ est décroissante sur $[0, \pi/2]$.

VIII. CONCLUSIONS

En conclusion, nous ferons une courte synthèse des propos énoncés et formulerons deux observations, la première est rétrospective, la seconde est prospective.

Les exemples dont nous avons traités sont empruntés à différents domaines et pour chaque domaine, des opérations spécifiques sont effectuées sur la notion d'aire. A chaque fois, la notion d'aire est inattendue et à chaque fois elle intervient pour permettre une opération mathématique particulières. A chaque fois elle sollicite des capacités cognitives et des images mentales appropriés. Elle a permis successivement : en géométrie, de déduire une relation métrique à partir d'une condition typiquement géométrique, en combinatoire de déterminer la somme des termes d'une suite numérique, en algèbre, de représenter une quantité inconnue, d'opérée sur celle-ci et de la calculer, en analyse, de justifier une relation d'inégalité entre des rapports de longueurs d'arcs et de longueurs de cordes.

Nous nous sommes permis d'évoquer la notion de changement de cadre dans nos analyses, mais il importe de signaler que c'est un choix peu approprié. L'exemple dit d'algèbre est très problématique à cet égard puisqu'il participe même au fondement de la pensée algébrique. Le cas de Ptolémée nous

revoie à une époque où la mathématique était une, où les frontières entre « domaines » étaient nuancées et le passage d'un domaine à un autre se fait de manière spontanée et fluide.

Enfin, nous nous sommes demandé s'ils existaient d'autres notions pouvant jouer des rôles similaires à celui que joue la notion d'aire dans la preuve mathématique. Une première exploration d'ordres didactique et historique nous a orienté vers trois notions qu'il faudra explorer : la notion de volume, la notion de levier et la notion de vecteur. Peut-être que l'étude de ces notions dans cette même perspective révélera des dimensions cachées de ces notions et de l'heuristique de la notion de preuve.

RÉFÉRENCES

- Al-Khwarizmi, A. (1937). *Le livre d'al-Jabr et al-Mukabala*. Paul Barrey, Le Caire.
- Archimède. (1971). *La quadrature de la parabole, Tome II* (Texte établi par C. Mugler). Les Belles Lettres.
- Castenbaum, M. (1988). Les procédés utilisés dans la mesure des surfaces. *Grand N*, (42), 47–54.
- Delahaye, J.-P. (2008). Preuves sans mots. *Revue Accromath*, 3, 14-17. <https://accromath.uqam.ca/wp-content/uploads/2013/04/Preuves-sans-mots.pdf>
- Djebbar A. (2001). *Une histoire de la science arabe : entretiens avec Jean Rosmorduc*. Seuil.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31. <https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/>
- Douady, R. et Perrin, M.-J. (1986). Aires de surfaces planes en CM2, Partie 1. *Grand N*, (39), 5-33.
- Douady, R. et Perrin, M.-J. (1987). Aires de surfaces planes en 6^e, Partie 2. *Grand N*, (40), 5-30.
- Euclide. (1993). *Les œuvres d'Euclide* (F. Peyrard, trad.). Librairie A. Blanchard.
- Heath, T. L. (1921). *A history of Greek mathematics, 2 volumes*. Clarendon Press.
- Moreira Baltar, P. et Comiti, C. (1993). Difficultés rencontrées par des élèves de 5^e en ce qui concerne la dissociation aire-périmètre pour les rectangles. *Petit x*, (34), 5-29.
- Sierpiska, A. (1989). Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. Dans N. Bednarz et C. Garnier (dir.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits* (p. 130-147). Agence d'Arc.
- Toomer G. J. (dir.). (1998). *Ptolemy's Almagest* (G. J. Toomer, trad. et annotation). University Press.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-170.

APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE DE LA PENSÉE ALGÈBRIQUE

| CHAACHOUA* HAMID ET DEWYSPELAERE** STÉPHANIE

Résumé | Ces dernières décennies, la notion de « pensée algébrique » a émergé, élargissant les connaissances traditionnellement associées à l'algèbre élémentaire. En s'appuyant sur la théorie anthropologique du didactique, cette communication propose de caractériser la pensée algébrique à travers un modèle praxéologique de référence. Ce modèle est ensuite questionné par rapport à deux autres modèles.

Mots-clés : pensée algébrique, praxéologie, modèle praxéologique de référence, curriculum

Abstract | In recent decades, the notion of “algebraic thinking” has emerged, expanding the knowledge traditionally associated with elementary algebra. Drawing on the anthropological theory of didactics, this paper proposes to characterize algebraic thinking through a praxeological reference model. This model is then compared to two other models.

Keywords: Algebraic thinking, praxeology, praxeological reference model, curriculum

I. INTRODUCTION¹

La pensée algébrique, bien qu'étroitement liée à la pensée mathématique générale, possède des caractéristiques distinctes qui se manifestent à travers différentes activités cognitives.

Tout d'abord, la notion de pensée peut être vue comme processus cognitif selon Pierre Steiner (2017), penser implique plusieurs actions comme réfléchir, discerner, comparer ou généraliser. Cette description générale de la pensée s'applique aussi aux mathématiques avec des spécificités. Selon Piaget (1976), deux types de pensée s'opposent dans l'activité mathématique, « la pensée logique opératoire » et la « pensée naturelle », tandis que Stacey (2006), en s'appuyant sur les travaux de Burton et Masson, décompose la pensée mathématique en spécialisation, généralisation, conjecture et preuve.

Dans le cas de l'algèbre, Lins (1992) et Kieran (1996) introduisent l'idée que la pensée algébrique ne se limite pas à la manipulation symbolique des lettres et aux techniques opératoires classiques. Selon Lins (1992), elle se manifeste comme une intention, une manière d'organiser et de modéliser le monde, même lorsque les outils algébriques formels ne sont pas encore maîtrisés. Cette approche met en avant le rôle de la pensée dans la structuration des relations mathématiques, indépendamment de leur expression symbolique. Kieran (1996) élargit cette vision en intégrant les apports des technologies numériques, qui offrent de nouvelles représentations pour appréhender les relations quantitatives. Ainsi, la pensée algébrique se définit comme l'usage de diverses représentations pour comprendre et manipuler les structures mathématiques de manière relationnelle, dépassant ainsi une approche strictement formelle de l'algèbre.

Squalli (2015, 2020) et Radford (2012) enrichissent ces points en précisant que la pensée algébrique se concrétise à travers des raisonnements analytiques, des généralisations et des opérations symboliques. Le positionnement de la caractérisation de la pensée algébrique par rapport au registre symbolique est fondamental. Le langage mathématique, notamment en algèbre, est un hybride entre le langage naturel et les symboles mathématiques (Laborde, 1983). Duval (1993) insiste sur la nécessité

* Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LIG, 38000 Grenoble – France – hamid.chaachoua@univ-grenoble-alpes.fr

** Lycée G Fauré, 74000 Annecy – France – Stephanie.Dewyspelaere@ac-grenoble.fr

¹ Ce travail a été motivé pour contribuer à un renouveau du curriculum sur les activités numériques du cycle 3 dans le cadre du projet PEGASE. « Opération soutenue par le pôle Pégase et l'Etat, dans le cadre de l'action « Territoires d'innovation pédagogique » du programme d'investissement d'avenir, opéré par la Caisse des Dépôts ».

de coordonner ces registres de représentation pour permettre aux élèves de conceptualiser des notions algébriques. Si le registre symbolique est vu actuellement comme une caractéristique de l'algèbre, il ne l'est pas pour la pensée algébrique. Ainsi, Squalli (2020) précise que l'on ne peut pas distinguer le caractère algébrique de la pensée ou de l'activité mathématique dans la nature des ostensifs au sens de Bosch et Chevallard (1999), mais qu'il est possible de le faire dans la nature des non ostensifs, c'est-à-dire dans les significations des concepts ainsi que dans la nature des raisonnements impliqués. Pour préciser les caractéristiques des raisonnements dans des activités de nature arithmétique avant une entrée dans l'algèbre (résolution de problèmes déconnectés), Squalli et Adihou (2020) proposent une classification des modes de raisonnements en trois catégories selon leur degré d'analyticité :

- Raisonnement non analytique : calcul direct, par essai-erreur sans ajustement, essais numériques avec ajustement simple ; l'élève opère sur des données et des relations connues, dans un registre numérique ; le domaine de validité de ce type de raisonnement englobe les problèmes de type « connectés » (Bednarz et Janvier, 1996) ou solvables par essai-erreur ;
- Raisonnement fonctionnel à tendance analytique : raisonnement hypothético-déductif de type fausse-position dans un registre numérique ou intermédiaire, raisonnement fonctionnel avec des tables de valeurs numériques (dans un scenario de généralisation arithmétique où l'élève infère la régularité observée grâce à la relation fonctionnelle entre les variables), raisonnement avec mathématisation mais l'élève n'opère pas sur les représentations ;
- Raisonnement analytique : raisonnement avec des inconnues et des équations explicites avec ou sans perte du lien avec le contexte, dans un registre symbolique.

Cela est renforcé par les approches de Chevallard (1989) et Squalli (2020) sur la modélisation et la généralisation comme sources clés de la pensée algébrique. Les activités de modélisation et de généralisation ressortent comme des déclencheurs essentiels de la pensée algébrique. Ces activités nécessitent des raisonnements analytiques qui peuvent alors être classés en différents degrés selon leur niveau d'analyticité. En particulier, la capacité à opérer sur des symboles, à raisonner sur des relations fonctionnelles ou à conceptualiser des structures est cruciale.

En somme, la pensée algébrique se distingue par sa capacité à opérer de manière relationnelle et analytique, en utilisant diverses représentations pour organiser, modéliser et manipuler des situations quantitatives. Les différentes contributions étudiées mettent en évidence un continuum allant de l'arithmétique à l'algèbre, où la nature des raisonnements et des activités joue un rôle fondamental dans le développement de cette pensée.

La référence à la pensée algébrique dans les travaux en didactique des mathématiques a été motivée par la volonté d'apporter une réponse didactique aux difficultés que pose l'apprentissage de l'algèbre, et plus précisément pour identifier les activités facilitant l'entrée dans cette discipline. Leur spécificité est de ne pas recourir au registre symbolique. Cependant, ces travaux s'inscrivent principalement dans des approches cognitives, ce qui conduit à les caractériser principalement à partir des raisonnements mobilisés par les élèves.

Dans cet article, nous proposons de caractériser la pensée algébrique d'un point de vue épistémologique, c'est-à-dire à partir du savoir sans prendre en compte le point de vue cognitif.

II. UN MODÈLE PRAXÉOLOGIQUE DE RÉFÉRENCE

Comme tout objet à enseigner, l'algèbre enseigné est un construit résultant d'un processus de transformations, le plus souvent à partir de l'institution qui l'a produit -ce que Chevallard (1985) caractérise comme le processus de transposition didactique-. Par conséquent, il existe une diversité de

constructions possibles d'un objet à enseigner et des curricula dans lesquels il s'insère (Artigue, 2018 ; Wijayanti et Bosch, 2018).

Pour comprendre le processus de transposition didactique, le chercheur a besoin d'élaborer un modèle épistémologique de référence (MER).

Research in didactics needs to elaborate its own models of reference to be able to avoid being subject to the different institutions observed, especially the 'dominant' ones. There is no privileged reference system for the analysis of the different bodies of knowledge of each step of the didactic transposition process [...]. (Bosch and Gascón, 2006, p. 57)

Un tel modèle permet de définir ce qu'est un domaine de savoir, et permet en particulier d'analyser un curriculum existant ou pouvant exister mais également différents phénomènes didactiques. Comme beaucoup de recherches nous désignent l'algèbre qu'on enseigne ou qu'on pourrait enseigner au secondaire par l'algèbre élémentaire. Différents travaux ont développé leur propre MER qui répond à des problématiques spécifiques. Chacun d'eux présente une « définition » de l'algèbre élémentaire (ou activités algébriques) et des outils pour l'analyse d'un curriculum. Dans La Théorie Anthropologique du Didactique TAD (Chevallard, 1992), les MER sont décrits comme des séquences ou des arborescences de praxéologies (Bosch et Gascón, 2006). Cette théorie propose de modéliser les activités humaines, et en particulier les activités mathématiques, par le concept de praxéologie. Les praxéologies sont formées de types de tâches T , des techniques τ qui les réalisent, des technologies θ qui permet de les expliquer, les justifier, de les adapter voire de les produire et les théories Θ associées qui justifient à leur tour les technologies. Une praxéologie est ainsi représentée par le quadruplet $[T, \tau, \theta, \Theta]$, et on désigne le couple $[T / \tau]$ par la praxis et $[\theta / \Theta]$ par le logos. Quand le MER s'appuie sur la praxéologie pour modéliser les connaissances, il est désigné par Modèle Praxéologique de Référence (MPR). Un tel modèle se présente comme une déclinaison d'une praxéologie globale en plusieurs praxéologies régionales, chacune liée à une même théorie. Ces praxéologies régionales se subdivisent ensuite en praxéologies locales, chacune étant relative à une même technologie. Enfin, les praxéologies locales se déclinent en un petit nombre de praxéologies ponctuelles.

Plusieurs MER ont été développés dans des travaux de recherche pour caractériser les activités algébriques. Dans un premier temps, nous proposons un MER qui intègre et restructure certains modèles présentés ci-après. Ensuite, nous caractériserons les activités de la pensée algébrique par rapport à ce MER.

Les deux premiers modèles, issus des travaux de Grugeon (1995) et de Kieran (1996), ne s'inscrivent pas dans le cadre de la TAD.

Le premier modèle est issu des travaux de Grugeon (1995) qui expose une structure multidimensionnelle pour analyser les compétences algébriques du côté de l'enseignement et du côté de l'élève (Grugeon et al., 2012). Du côté savoir, Grugeon s'inspire des dimensions outil et objet des concepts mathématiques selon Douady (1986). Ainsi, l'algèbre peut être mobilisée comme outil de résolution via la modélisation pour résoudre des problèmes « arithmétiques » formulés en langue naturelle sous forme d'équations, et au-delà, pour résoudre des problèmes intra ou extra-mathématiques sous forme de relations fonctionnelles entre données et variables. Dans sa dimension objet, l'algèbre est un ensemble structuré d'objets avec des propriétés spécifiques, des représentations sémiotiques associées à différents registres et des modes de traitement.

Le deuxième modèle est celui de Kieran (1996, 2004) qui propose une modélisation de l'activité algébrique à partir de la classification des sources de signification de l'algèbre de Radford et des représentations mathématiques au sens des registres sémiotiques de Duval (1993). Ce modèle décrit 3 catégories d'activités : Les activités Génératives qui impliquent la génération d'expressions algébriques et d'équations, qui sont les objets de l'algèbre ; les activités Transformationnelles qui se réfèrent à

l'usage de règles de transformation relatives à la réduction de termes, à la factorisation, au développement d'expressions, à la substitution, à la résolution d'équations, à la simplification d'expressions entre autres ; et les activités Globales à un niveau méta qui mobilisent l'usage de l'algèbre comme outil pour résoudre différents types de problèmes. Ce modèle est désigné par l'acronyme GTG, pour Génératives, Transformationnelles et Globales.

Les autres modèles s'inscrivent dans la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). Certains ont proposé une classification des types de tâches, que nous articulons avec les deux premiers modèles (Figure 1). Nous avons rattaché aux trois types d'activités du modèle de Kieran des types de tâches génératrices au sens de Chaachoua (2020) pour structurer les sous-types de tâches à partir des variables. Par exemple, dans les activités de transformation, nous associons cinq types de tâches², comme « Factoriser une expression algébrique », auxquelles sont associées des variables (degré, nombre de termes, etc.), dont l'instanciation à des valeurs génère des sous-types de tâches. Pour ces cinq types de tâches, les travaux de Croset (2009), Ferraton (2011), Jolivet et al. (2022), Chaachoua (2010) et Pilet (2012) décrivent et affinent les générateurs de types de tâches associés.

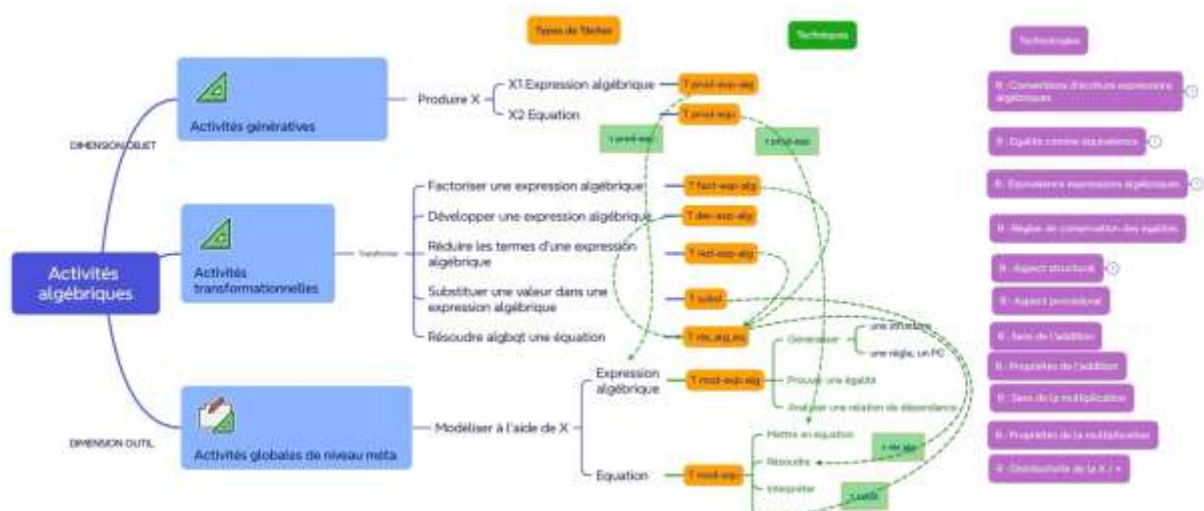


Figure 1 – MPR activités algébriques

Dans la figure 1, nous avons représenté un type de relation « être ingrédient de » entre les types de tâches par la technique (flèches en pointillés). En effet, Chaachoua (2020) propose de décrire une technique comme un ensemble de types de tâches. Ainsi, les types de tâches « Factoriser une expression algébrique », « Réduire une expression algébrique » et « Développer une expression algébrique » sont des ingrédients d'une technique accomplissant le type de tâche « Résoudre algébriquement une équation », qui est lui-même un ingrédient d'une technique qui accomplit le type de tâches « Modéliser à l'aide d'une équation », relevant des activités globales de niveau méta. Nous avons également indiqué les éléments technologiques, sur la partie droite de la figure, sans expliciter leurs liens avec les techniques.

Comme nous l'avons dit plus haut, nous souhaitons caractériser les praxéologies facilitant l'entrée dans l'algèbre qui ne nécessitent pas l'usage du registre symbolique. Pour cela, notre choix s'est porté d'abord sur les technologies identifiées dans des travaux de recherche comme sources de difficultés des élèves et qui ont un sens pour des expressions numériques. Prenons le cas de la technologie «

² Dans Kieran, on trouve 6 types de tâches. Nous avons regroupé « simplifier » et « réduire les termes » en un seul. De même nous avons restructuré les types de tâches des activités globales.

Aspects structural et procédural des expressions algébriques ». Ces deux aspects ont été distingués par Sfard (1991) : structural, où l'expression est perçue comme un objet, et procédural où elle est considérée comme un processus. La littérature souligne les difficultés que rencontrent les élèves à considérer une expression algébrique selon son aspect structural. Pour cette raison, des propositions ont été faites pour travailler cet aspect dans les expressions numériques avant l'introduction du symbolisme ; par exemple, à travers des types de tâches de conversion (Duval, 1993) qui correspondent aux des activités génératives (Kieran, 1996). Un exemple de type de tâches de conversion d'expression numérique vers le registre arbre a été développé dans un micromonde d'algèbre Aplusix (Chaachoua et al. 2012). La figure ci-contre illustre un exercice dans lequel la consigne est « Remplacer les points d'interrogation dans les arbres de manière à obtenir des expressions équivalentes à l'expression $2+4\times 5+1$. L'opérateur du plus haut niveau donne la forme de l'expression, ici la somme.

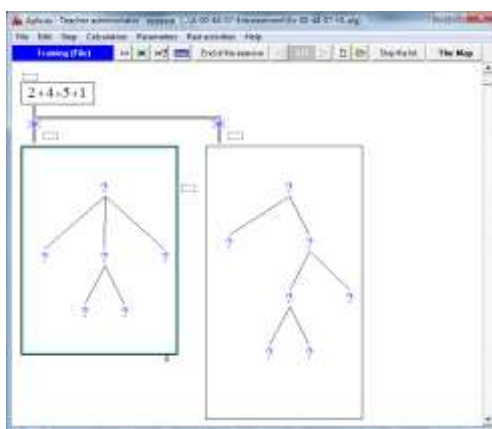


Figure 2 – Représentation en arbre

À partir des considérations précédentes, nous définissons le pré-algèbre comme un domaine d'organisation praxéologiques engendrées par les technologies suivantes : θ_{num_1} « Égalité comme équivalence entre expressions numériques » ; θ_{num_2} « Équivalence des expressions numériques » ; θ_{num_3} « Règles de conservation des égalités entre expressions numériques » ; θ_{num_4} « Aspects structural et procédural des expressions numériques » ; θ_{num_5} « Priorité des opérations » ; θ_{num_6} « Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans une expression numérique ». Nous formulons l'hypothèse que les praxéologies de ce domaine constituent des conditions nécessaires à l'élaboration des praxéologies didactiques du domaine de l'algèbre.

La figure 3, présente des filiations possibles entre les technologies de ce domaine et celles des deux domaines : arithmétique et algèbre. Les pointillés représentent un changement de point de vue nécessaire.

Les technologies du domaine pré-algèbre ont été mise à l'épreuve quant à leur potentiel de faciliter l'entrée dans l'algèbre dans plusieurs travaux. C'est le cas de l'élément technologique de la distributivité (θ_{num_6}) pour lequel Constantin et Coulange (2017) s'interrogent sur les potentialités des savoirs à enseigner et enseignés autour de la multiplication à l'école primaire, convoquant la propriété de distributivité, pouvant favoriser l'entrée dans une pensée algébrique. Nous pensons que cet élément technologique trouve son intérêt dans le pré-algèbre à travers des praxéologies comme celles du calcul mental (Butlen, 2007), qui peuvent également contribuer à travailler les transformations des expressions numériques. Cela s'inscrit aussi dans la technologie θ_{num_2} sur les équivalences d'expressions numériques.

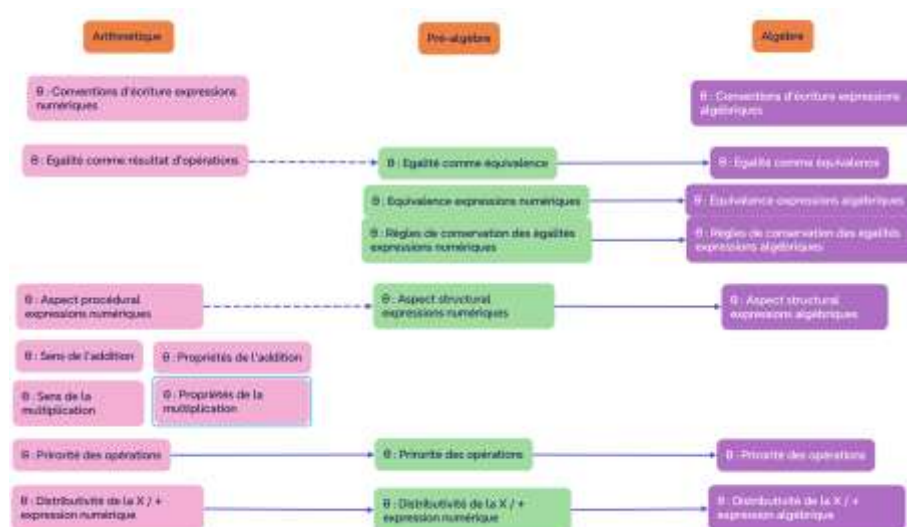


Figure 3 – Les technologies des 3 domaines : arithmétique, pré-algèbre et algèbre

De notre point de vue, nous considérons le domaine du pré-algèbre comme un champ de travail à part entière. Il peut être structuré de la même façon que celui de l'algèbre (Figure 1) selon les trois types d'activités pré-algébriques : génératives, transformationnelles et globales. Les deux premières permettent de travailler la dimension objet du pré-algèbre et la troisième sa dimension outil. Cependant, un enjeu didactique majeur demeure : trouver des raisons d'être pour motiver l'entrée dans l'algèbre. Notre hypothèse est que l'efficacité de ces raisons d'être sera plus grande si le domaine du pré-algèbre est suffisamment exploré et travaillé.

Les travaux sur l'élaboration des praxéologies pouvant motiver l'introduction des objets de l'algèbre sont nombreux. Ces praxéologies sont rattachées aux activités globales autour de la généralisation et plus généralement de la modélisation. C'est le cas des problèmes de généralisation où on trouve les exemples pattern qui permettent l'entrée dans l'« algèbre avant la lettre » (Bronner, 2015 ; Radford, 2014). Dans le cas d'activités de généralisation de patterns figuratifs, plusieurs recherches montrent que les élèves du primaire et du début du secondaire peuvent produire des généralités algébriques sans recourir aux lettres (Mary et al., 2014 ; Radford, 2014 ; Squalli, 2015 ; Vlassis et al., 2018).

Pour la modélisation, on peut citer les travaux Ruiz-Munzon (2010) qui explore l'idée de Chevallard d'une entrée dans l'algèbre à travers un processus de modélisation à l'aide de programmes de calculs [PC]. Un modèle épistémologique de référence propose un curriculum algébrique de l'école primaire jusqu'au lycée. Ce MPR décrit un processus d'algébrisation des organisations praxéologiques en trois étapes. La première correspond à la traduction d'un programme de calcul donné en langage naturel en une expression algébrique (activité générative). Ce système correspond notamment aux problèmes arithmétiques se résolvant par l'exécution d'un programme de calcul à l'aide de la méthode d'analyse-synthèse. La deuxième étape correspond à la production d'une expression algébrique en vue de la généralisation d'une régularité ou d'une propriété éventuellement dans un processus de modélisation (activité globale de niveau méta). La troisième correspond à l'étude de l'équivalence de deux programmes de calculs (activité globale de niveau méta).

Notre question porte alors sur le type de travail dans le domaine pré-algèbre qu'il faut faire pour faciliter cette progression. Ce questionnement est analogue à celui posé par Pilet et Grugeon Allys (2021) à propos de la première étape :

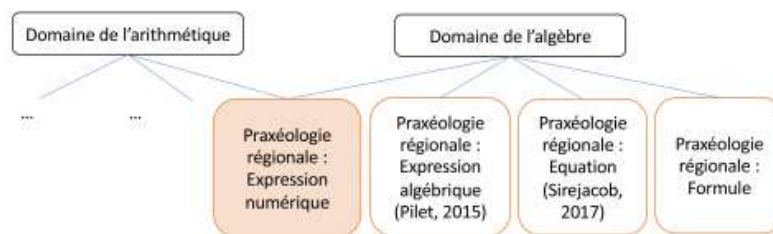
Au début du secondaire, il semble peu envisageable d'attendre des élèves la production d'une telle expression algébrique sans un travail préalable sur les écritures numériques et leurs propriétés. Quelles sont alors les étapes

intermédiaires ? Comment préparer les élèves à produire des expressions numériques parenthésées « en ligne » dont il faut analyser la structure pour pouvoir les simplifier ? En définissant l'activité numérico-algébrique, nous cherchons à caractériser cette richesse en identifiant l'équipement praxéologique nécessaire pour permettre aux élèves d'aborder dans des conditions optimales la première étape du processus d'algébrisation. (*ibid.*, p. 12)

Les auteurs proposent un travail préalable dans des activités appelées numérico-algébriques dont les aspects épistémologiques sont :

L'analyticité, la représentation des relations entre les données connues et inconnue(s) d'un problème par un modèle symbolique, le calcul s'appuyant sur des propriétés des nombres et des opérations et sur l'égalité comme relation d'équivalence, la dénotation et le sens des expressions numériques, les caractères structural et procédural d'un concept. (*ibid.*, p. 17)

On voit bien une proximité d'approches avec certaines nuances. Les activités numérico-algébriques sont situées, pour les auteurs, dans une organisation praxéologique régionale, autour d'une théorie non explicitée dans l'article pour faire des ponts entre l'arithmétique et l'algèbre.



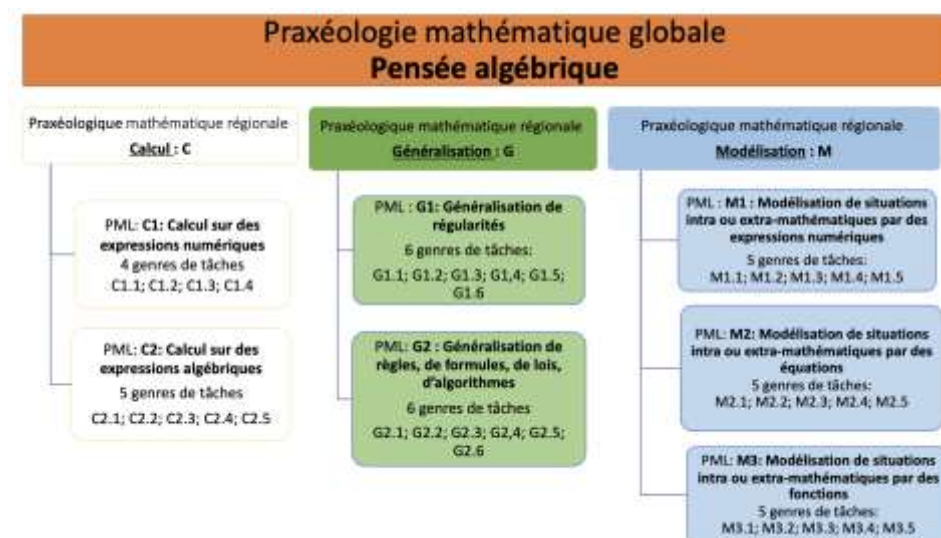
(Pilet et Grugeon Allys, 2021 p. 18)

Figure 4 – Extension de la praxéologie de référence du domaine de l'algèbre

Dans notre approche, nous avons défini le pré-algèbre comme un domaine au même niveau que les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre pour au moins deux raisons. La première est que les technologies retenues dans le pré-algèbre relèvent de plusieurs théories, la deuxième est que la structuration de ses praxéologies peut être similaire à celle de l'algèbre par catégorisation en trois types d'activités (génération, transformationnelles, et globale de niveau méta) avec la double dimension objet et outil. De plus, le domaine de pré-algèbre peut fournir des conditions pour des praxéologies didactiques facilitant l'entrée dans les fonctions.

Notre approche est plus proche de celle de Squalli et Jeannotte (2022) qui situe la pensée algébrique au niveau globale (figure 5).

Si on regarde de près les organisations praxéologiques régionales, on trouve les activités génératives et transformationnelles dans la praxéologie régionale « Calcul - C », et les activités globales de niveau méta réparties dans les deux praxéologies régionales « Généralisation – G » et « Modélisation – M ».



(Squalli et Jeannotte, 2022, p.76)

Figure 5 – Modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique

III. CONCLUSION

Le travail présenté ici constitue une contribution aux recherches sur le développement de la pensée algébrique. Plus précisément, nous avons cherché à caractériser les activités de la pensée algébrique dans un domaine de savoir par une approche épistémologique. Nous proposons le terme de "pré-algèbre", vu à la fois comme un domaine de recherche et une perspective curriculaire (Carragher et Schliemann, 2007). À cette fin, nous avons présenté la genèse de notre modèle épistémologique de référence, élaboré à partir du modèle conceptuel de l'activité algébrique, dit « GTG » (Kieran, 2007), ainsi que d'autres modèles épistémologiques. Nous avons choisi d'explorer les éléments technologiques identifiés dans des travaux de recherche comme sources de difficultés pour les élèves et qui sont pertinentes pour les expressions numériques. Nous définissons la pré-algèbre comme un domaine d'organisation praxéologique engendré par ces technologies, structuré de manière similaire à celui de l'algèbre selon les trois types d'activités pré-algébriques GTG. Ce domaine est envisagé à la fois comme un champ de travail autonome dans une perspective curriculaire et comme un objet d'étude pour les conditions d'élaboration de praxéologies didactiques facilitant l'entrée dans l'algèbre élémentaire. Le domaine pré-algébrique n'est pas juxtaposé entre les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre mais il se développe en parallèle avec eux. L'arithmétique doit créer des conditions pour le pré-algèbre qui à son tour crée des conditions pour l'algèbre élémentaire.



Figure 6 – Les 3 domaines arithmétique, pré-algèbre et algèbre

Nous avons souligné la proximité de notre approche avec celles de Pilet et Grugeon Allys (2021) et Squalli et Jeannotte (2022), tout en mettant en évidence quelques nuances. Il semble pertinent de développer un programme commun fondé sur ces trois modèles comme perspective de recherche.

RÉFÉRENCES

- Artigue, M. (2018). Implementing curricular reforms: A systemic challenge. Dans Y. Shimizu et R. Vithal (dir.), *School mathematics curriculum reforms: Challenges, changes and opportunities. Proceedings of the twenty-fourth ICMI study conference* (p. 43–52). ICMI. <https://hal.science/hal-03357048>
- Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Objet d'étude et problématique. Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Bosch, M. et Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, 58, 51-64.
- Bronner, A. (2015). Développement de la pensée algébrique avant la lettre – Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : Enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (p. 247-264). Université d'Alger.
- Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique : recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution de problèmes numériques*. Presses Universitaires de Franche-Comté.
- Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.
- Chaachoua, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique ELAH. Étude de cas : La modélisation des connaissances des élèves*. HDR. Université Joseph Fourier. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00922383/document>
- Chaachoua, H. (2020). T4TEL : Un cadre de référence pour la formalisation et l'extension du modèle praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 22(4), 103-118. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p103-118>
- Chaachoua, H., Chiappini, G., Pedemonte, B., Croset, M.-C. et Robotti, B. Y. (2012). Introduction de nouvelles représentations dans deux environnements pour l'apprentissage de l'algèbre : ALNUSET et APLUSIX. Dans L. Coulangue, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire : Bilan et perspectives* (p. 253-281). La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Partie 2. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, (19), 43-72.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.
- Constantin, C. et Coulangue, L. (2015). Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ? Dans D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chamris, G. Cirade, S. Clivaz, S. Gobert, C. Hache, M. Hersant et C. Mangiante-Orsola (dir.), *Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif. Recueil des communications de la 17^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 315-332). La Pensée Sauvage.

- Croset, M.-C. (2009). *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel d'algèbre. Études des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte* [Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-00444557v1>
- Douady, R. (1984). *Dialectique outil/objet et jeux de cadres* [Thèse de doctorat, Université Paris VII]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-01250665>
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5–31. <https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/>
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Ferraton, G. (2011). *Rapport institutionnel à l'objet calcul littéral au collège : Construction et utilisation d'un modèle praxéologique de référence pour les trois types de tâche réduire, développer et factoriser une expression littérale* [Mémoire de Master M2 inédit].
- Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevotot-Quentin, F. et Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques, Hors-série*, 137-162.
- Grugeon, B. (1995). *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement* [Thèse de doctorat, Université Paris VII – Diderot]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-01252058v1/file/Theses%20Grugeon.pdf>
- Jolivet, S., Chaachoua, H. et Desmoulin, C. (2022). Modèle de description didactique d'exercices de mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 42(1), 53-102.
- Kieran, C. (1996). The changing face of School Algebra. Dans *8th International Congress on Mathematical Education Selected lectures* (p. 271-286). SAEM THALES.
- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.
- Laborde, C. (1983). Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique : Langue naturelle et écriture symbolique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 199-203.
- Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is* [Thèse de doctorat, University of Nottingham]. <https://eprints.nottingham.ac.uk/13227/1/316414.pdf>
- Mary, C., Squalli, H. et Schmidt, S. (2014). Activité de généralisation et de justification chez des élèves en difficulté. Dans C. Mary, H. Squalli, L. DeBlois et L. Theis (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : regard didactique* (pp. 163-186). Presses de l'Université du Québec.
- Piaget, J. (s.d.). *Fondation Jean Piaget*. <https://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/accueil/index.php>
- Pilet, J. et Grugeon-Allys, B. (2021). L'activité numérico-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. *Éducation et Didactique*, 15(2), 9-26.
- Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic and development issues. Dans *The proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (p. 209-228). Springer.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.

- Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* [Thèse de doctorat, Universitat Autònoma de Barcelona].
<https://www.educacion.gob.es/teseo/mostrarRef.do?ref=906861>
- Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. et Gascón, J. (2013). Comparing approaches through a reference epistemological model: The case of school algebra. Dans B. Ubuz, Ç. Haser et M. A. Mariotti (dir.), *Proceedings of the 8th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 2870-2979). Middle East Technical University.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF2015 « Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : Enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage », 10-14 octobre 2015, Université d'Alger, Algérie* (p. 346-356). <https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF15083.pdf>
- Squalli, H. (2020). Early algebra: Genèse d'un domaine de recherche, évolution et perspectives. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (coord.), *Développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire : recherches et perspectives curriculaires*. Centre de recherche et d'intervention sur la réussite scolaire.
- Squalli, H. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux Cahiers de la Recherche en Éducation*, 22(1), 36-62.
- Squalli, H., et Jeannotte, D. (2022). Un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique élémentaire. *Revue Québécoise de Didactique des Mathématiques*, Numéro thématique (Tome 2), 66-101.
- Stacey, K. (2006). *What is mathematical thinking and why is it important?*
<https://www.researchgate.net/publication/254408829>
- Steiner, P. (2017). *Qu'est-ce que la pensée ?* Librairie philosophique J. Vrin.
- Vlassis, J., Demonty, I. et Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 9(1), 1-19.
- Wijayanti, D. et Bosch, M. (2018). The evolution of the knowledge to be taught through educational reforms: The case of proportionality. Dans Y. Shimizu et R. Vithal (dir.), *School mathematics curriculum reforms: Challenges, changes and opportunities. Proceedings of the twenty-fourth ICMI study conference* (p. 173–180). ICMI.

POUR UNE PENSÉE FONCTIONNELLE ANCRÉE DANS L'ACTION

| LAURENCE-ROULEAU* VINCENT

Résumé | Nous proposons qu'une certaine conception dite *active* de la notion de fonction puisse être au cœur d'usages contemporains en mathématique ou dans d'autres domaines d'application, notamment en modélisation et en informatique. Dans cet article, nous allons décrire et illustrer cette conception en donnant un aperçu de la façon dont elle s'exprime chez certains élèves du secondaire.

Mots-clés : pensée fonctionnelle, conception, fonction, algorithme, logique

Abstract | We propose that a certain *active* conception of the notion of function may be at the heart of contemporary mathematics and applications in other fields, namely in modelling and computer science. In this paper, we describe and illustrate such a conception by presenting how it is expressed among some high school students.

Keywords: Functional thinking, conception, function, algorithm, logic

I. INTRODUCTION

Dans les dernières années, une pensée fonctionnelle est mise en lumière par différents chercheurs (Robert et al., 2018 ; Ben Nejma, 2020), notamment caractérisée en termes de variation (continue) de la variable ou de *covariation* (dans le sens de Carlson et al., 2002). Cela s'accorde bien aux fonctions (réelles) pour lesquelles on s'intéresse à une propriété associée à la notion de variation telle la *dérivabilité* ou plus généralement la *continuité*.

Nous aimerions contribuer à la poursuite de la réflexion sur la pensée fonctionnelle en ouvrant la porte à une diversité de fonctions pour lesquelles sont valorisées des propriétés qui ne font pas nécessairement intervenir la notion de variation, par exemple la *calculabilité*, c'est-à-dire l'existence d'un algorithme pour expliciter ce que fait une fonction donnée. En particulier, on peut penser aux fonctions définies par *récurrence*, par exemple la fonction *factorielle* $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(0) = 1$ et $f(n) = n \cdot f(n-1)$ pour $n > 0$. Nous croyons que de telles fonctions peuvent trouver des usages diversifiés dans différentes branches de la mathématique ou dans d'autres domaines d'application, par exemple en informatique ; cela pourrait par le fait même entretenir des liens entre une pensée fonctionnelle et d'autres pensées - algorithmique, informatique ou logique.

1. La fonction conçue comme une action

Dans sa définition de *fonction*, Euler n'accordait pas d'importance aux différents processus (équivalents) qui la décrivaient ; par exemple, $u = 2 - 3z + z^2$ et $u = (1 - z)(2 - z)$ représentaient une même fonction (Youschkevitch, 1976). De nos jours, cela s'exprime en théorie des ensembles lorsqu'une fonction est définie essentiellement par son *graphe*¹. Certains auteurs apportent parfois des nuances ; ainsi Nicholson (1993) donne une première définition comme graphe, suivie d'une seconde, qualifiée de « *Working Definition* » et se rapprochant mieux selon lui de la façon dont un mathématicien conçoit la fonction, comme une règle qui fait correspondre chaque élément du domaine à exactement un élément du codomaine. L'auteur mentionne que le processus pour définir une fonction consiste à

* Pensionnat du Saint-Nom-de-Marie – Canada – vincent.laurence-rouleau@umontreal.ca

¹ Par *graphe* d'une fonction f , nous entendons l'ensemble des couples $(x, f(x))$ pour tout x du domaine, et non pas la représentation par des points dans le plan cartésien ; autrement dit, le graphe est une *relation* (fonctionnelle).

spécifier les domaine et codomaine, puis à définir l'« action » de la fonction, c'est-à-dire comment attribuer l'image à chaque élément du domaine.

Pour exprimer cette apparente dichotomie, nous avons suggéré l'existence de deux pôles conceptuels pour situer les différentes significations entendues de la fonction ; nous les désignons par les expressions *conception figée* et *conception active* de la fonction (Laurence-Rouleau, 2023). Toute définition, description ou représentation de la fonction où la formation des couples est donnée *a priori* s'inscrit dans ce que nous appelons une *conception figée* de la fonction. Cela inclut notamment la représentation graphique du graphe d'une fonction réelle dans le plan cartésien, où les coordonnées d'un couple sont amalgamées en un point. Notons que cette conception figée coïncide avec l'idée de concevoir la fonction comme étant « statique » mentionnée par d'autres auteurs (par exemple Sierpinski, 1992) ; cependant, nous n'y référons que pour la distinguer de la conception active qui nous intéresse. Lorsque l'on indique en premier lieu *comment* les éléments du domaine d'une fonction ont été transformés en leurs images, un à un ou dans leur ensemble, nous y voyons plutôt une *conception active* de la fonction. Cette conception est « dynamique » dans un sens qui s'approche de celui de Sierpinski (1992), mais il ne doit pas être confondu avec d'autres formes de dynamisme ; par exemple, le raisonnement covariationnel, bien que dynamique dans un sens, s'inscrit dans une conception figée dans le nôtre puisqu'il s'opère sur des couples du graphe. La fonction conçue activement est présente dans plusieurs branches de la mathématique, notamment lorsqu'il est question d'agir sur des objets (par transformation, projection, codage, etc.) ou encore de montrer qu'une structure est incluse dans une autre (par un monomorphisme) ou est équivalente à une autre (par un isomorphisme). On peut aussi la retrouver au cœur des fonctions définies par récurrence utilisées notamment en modélisation ; pensons au modèle SIR de propagation d'une épidémie².

Afin de caractériser cette conception active, nous avons adopté un changement de point de vue intra-mathématique menant à une définition du concept de fonction qui capture son aspect opérationnel (Laurence-Rouleau, 2023), motivé didactiquement par les modèles de compréhension d'un objet mathématique par dualité « processus-objet » (Gray et Tall, 1994 ; Dubinsky, 1991 ; Sfard, 1991), où une conception *opérationnelle* de l'objet contribue à une conception *structurelle*. Ainsi, plutôt que de concevoir *a priori* une fonction comme un graphe dans la théorie des ensembles, on la conçoit d'abord comme un *morphisme* dans la théorie des *catégories* ; cela met de l'avant une caractéristique opérationnelle de la fonction : la *composition*, opération fondamentale sur les morphismes. De plus, on construit la fonction à partir d'un autre morphisme, appelé *cheminement*, qui contient le mode opératoire ou l'action de la fonction. Intuitivement, un cheminement consiste en un ensemble de *chemins* dont chacun explicite comment chaque élément du domaine a été transformé en son image. Évidemment, on pourrait exprimer différents cheminements pour une même fonction, et c'est justement l'idée : une fonction peut ainsi être définie *a posteriori* comme une classe de cheminements *équivalents*³. La fonction s'exprime donc opérationnellement par l'un ou l'autre de ses représentants (cheminements), à l'instar d'un nombre rationnel qui peut être représenté par différentes fractions (conçues comme divisions d'entiers) équivalentes à des fins calculatoires.

² Dans un tel modèle, des fonctions S , I et R indiquant le nombre de personnes susceptibles d'être infectées $S(n)$, le nombre de personnes infectées $I(n)$ et le nombre de personnes retirées $R(n)$ (guéries ou décédées) selon le nombre n de jours écoulés sont définies à partir de $S(n-1)$, $I(n-1)$ et $R(n-1)$.

³ Nous préférons omettre les détails techniques des définitions de cheminement et de fonction comme classe de cheminements équivalents pour alléger ce texte ; on peut les trouver dans d'autres publications (Laurence-Rouleau, 2023 ; Rouleau, 2021)

II. QUELQUES ÉLÈVES EN ACTION

Dans le cadre d'un projet de recherche (Laurence-Rouleau, 2023), quelques problèmes ont été élaborés autour d'une conception active de la fonction et présentés à des dyades ou triades d'élèves québécois de niveau secondaire. Nous proposons de mettre en lumière l'activité mathématique déployée lors de la résolution d'un de ces problèmes : **soit deux fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, appelées respectivement le *plancher* et le *plafond*, telles que $f(x) = \lfloor x \rfloor$ et $g(x) = \lceil x \rceil$; décrivez g à l'aide d'une composition de f et d'opérations arithmétiques.**⁴

Une première solution⁵ exprimée par un participant de 3^e secondaire, surnommé Srinivasa, avait été la fonction définie par parties g telle que $g(x) = f(x) + 1$ si x n'est pas un nombre entier, et $g(x) = f(x)$ sinon. Son coéquipier Fiodor avait alors poursuivi en faisant un lien avec la programmation et la fonction logique « si ... alors ... ». Bien qu'une telle solution ait été facilitée par des connaissances en informatique de la part de Srinivasa, nous croyons toutefois qu'il est peu probable qu'elle ait pu être obtenue en adoptant seulement une conception figée de la fonction ; en particulier, une représentation graphique du graphe dans le plan cartésien de chacune des fonctions *plancher* et *plafond* – dont la forme rappelle les marches d'un escalier – peut au mieux permettre d'imaginer des réflexions (géométriques) permettant de superposer les lieux de points l'un sur l'autre. Cela nous semble d'autant plus improbable pour la seconde solution proposée par Srinivasa, $g(x) = \lfloor x \rfloor - \lfloor -x + \lfloor x + 1 \rfloor \rfloor + 1$, qui reflète le processus de son raisonnement par un seul enchaînement opérationnel.

La troisième solution de Srinivasa était celle à laquelle nous nous attendions *a priori*, $g(x) = -f(-x)$, mais l'explication donnée par le participant nous semblait inattendue :

Le plancher c'est l'inverse du plafond... donc c'est comme le même concept quand tu veux faire un... un AND genre quand tu programmes... tu peux faire un NOT... bien comme un NOT sur chacun des *inputs*, et tu mets un OR, puis un autre NOT... puis là le $-x$ comme c'est le NOT, puis là c'est la fonction inverse... le plancher au lieu du plafond... puis là tu inverses... tu ré-inverses.

Nous interprétons cela comme une « analogie » avec une des *lois de De Morgan* ; l'énoncé « A et B » est équivalent à « $\text{non}(\text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(B))$ », mais pour des fonctions unaires « *plancher* » et « *plafond* » en lieu et place des fonctions binaires « *ou* » et « *et* » : $\text{plafond}(x) = \text{non}(\text{plancher}(\text{non}(x)))$. Ce rapprochement avec la logique n'est pourtant pas nouveau d'un point de vue mathématique ; depuis Leibniz, diverses modélisations de différentes logiques (sur le plan sémantique ou syntaxique) ont vu le jour – algèbres de Boole, algèbres de Heyting, algèbres « multi-valuées » (*MV-Algebras*), etc. Dans une perspective didactique, nous y entrevoyons un aspect de l'activité mathématique qui consiste à faire des liens entre des idées distinctes à première vue mais qui possèdent une *structure* commune. Notons que cela peut inviter subséquemment à chercher à expliciter la correspondance entre ces idées ou structures, c'est-à-dire à décrire l'action du morphisme qui permet de passer de l'une à l'autre.

⁴ Par opérations arithmétiques, on entendait les fonctions unaires qui consistent à additionner, multiplier, soustraire ou diviser par un nombre donné ; aussi, les fonctions plancher et plafond étaient respectivement la fonction qui transforme un nombre réel en le plus grand entier qui lui est inférieur ou égal et la fonction qui transforme un nombre réel en le plus petit entier qui lui est supérieur ou égal.

⁵ Précisons que les participants avaient la possibilité de faire usage d'applications informatiques, appelées *outils d'exploration*, créées à l'aide du logiciel *GeoGebra* afin de représenter graphiquement la composition de fonctions et les cheminements équivalents (pour des fonctions unaires réelles à arguments réels). Le lecteur intéressé peut avoir accès à l'outil d'exploration B à l'adresse suivante : <https://www.geogebra.org/classic/g4hgvznr>

III. CONCLUSION

En résumé, nous avons soulevé la possibilité qu'une conception active de la fonction, caractérisée par les notions de composition et de cheminements équivalents, puisse entretenir des liens avec un raisonnement favorable à la découverte d'algorithmes, et par le fait même avec la programmation en informatique ; notons que tout cela s'inscrit plus largement dans un esprit de logique *intuitionniste*⁶.

RÉFÉRENCES

- Ben Nejma, S. (2020). Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement secondaire tunisien. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 1, 38-69.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. et Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Dans D. Tall (dir.), *Advanced mathematical thinking* (p. 95-126). Kluwer Academic Publishers.
- Gray, E. et Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.
- Laurence-Rouleau, V. (2023). *Vers une conception active de la fonction mathématique* [Thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus. <https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/33485>
- Nicholson, W. K. (1993). *Introduction to abstract algebra*. PWS Publishing Company.
- Robert, V., Squalli, H. et Bronner, A. (2018). La pensée fonctionnelle : une analyse praxéologique du potentiel de son développement précoce. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMF2018 « Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines », 22-26 octobre 2018, Gennevilliers, Paris* (p. 284-293). IREM de Paris. <https://www.researchgate.net/publication/337198899>
- Rouleau, V. L. (2021). Autour des classes d'équivalence. *Bulletin AMQ*, 61(1), 26-49.
- Sierpiska, A. (1992). On understanding the notion of function. Dans E. Dubinsky et G. Harel (dir.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (p. 25-58). Mathematical Association of America.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16(1), 37-85.

⁶ La logique *intuitionniste* (ou logique *constructive*) se distingue notamment de la logique *classique* en ce que la preuve d'un énoncé quant à l'existence d'un objet doit indiquer comment « procéder » pour construire ledit objet (et n'admet pas des raisonnements comme le « tiers exclu »).

UNE ANALYSE DIDACTIQUE DES DÉMARCHES MOBILISÉES PAR DES ÉLÈVES DU PRIMAIRE POUR RÉSOUDRE DES PROBLÈMES DE PROPORTIONNALITÉ

| HRAIMI* HEND ET BEN NEJMA** SONIA

Résumé | Cette recherche analyse les démarches mises en œuvre par des élèves du primaire pour modéliser des problèmes de proportionnalité et le rôle des représentations dans le développement de la pensée proportionnelle. L'étude s'inscrit dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et celle du champ conceptuel des problèmes multiplicatifs. L'analyse bidimensionnelle, de nature épistémologique et sémiotique conduite met en lumière le potentiel de développement d'aspects fonctionnels chez les élèves.

Mots-clés : proportionnalité, primaire, aspects fonctionnels, sémiotique, épistémologique.

Abstract | This research analyzes the approaches used by primary school pupils to model proportionality problems and the role of representations in the development of proportional thinking. The study is based on the anthropological theory of didactics and the conceptual field of multiplicative problems. The two-dimensional analysis, of an epistemological and semiotic nature, highlights the potential for developing functional aspects in pupils.

Keywords: proportionality, primary school, functional aspects, semiotics, epistemology.

I. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

Dans l'approche constructiviste de l'apprentissage des mathématiques, l'accent est mis sur la modélisation de problèmes contextualisés dont le modèle de proportionnalité est souvent implicite (Douady, 1986). L'élève est amené à identifier le nombre de grandeurs en jeu, leurs natures et le (s) type (s) de relations entre ces grandeurs et à réaliser des changements de registres sémiotiques (Duval, 1995) pour modéliser un énoncé concret, un graphique... et le convertir en une relation de proportionnalité entre nombres, mesures ou grandeurs (fixes ou variables) afin de résoudre le problème. Souvent, les élèves ne sont pas initiés à des tâches de reconnaissance de la relation de proportionnalité (Simard, 2012), ce qui pourrait expliquer, en partie, les difficultés rencontrés. Plusieurs recherches ont exploré les démarches mises en œuvre par des élèves pour résoudre des problèmes classiques de proportionnalité. Vanluydt, E., Verschaffel, L., et Van Dooren, W. (2022) suivent l'évolution du raisonnement proportionnel chez les jeunes pour mieux comprendre ses fondements conceptuels en contexte scolaire. Dans leur étude, trois situations sont considérées, la règle de trois, la vérification et la comparaison pour mettre en évidence le rôle des variables didactique, dans l'usage erroné du modèle de proportionnalité. Belmas (2001) développe le point de vue selon lequel l'apprentissage conceptuel de la proportionnalité ne se substitue pas à l'apprentissage des techniques mais le complète. Comin (2002) propose une vision de la proportionnalité sous l'angle de la relation fonctionnelle en mettant en avant l'importance de la propriété de linéarité multiplicative, qu'il nomme « rapport interne » comme un levier pour introduire les fractions dès les premières années du primaire. Hersant (2005) souligne que l'application linéaire est souvent conçue comme le modèle mathématique institutionnel qui s'est substitué aux problèmes de la règle de trois et de la théorie des proportions.

* Université Virtuelle de Tunis – ISEFC – Tunisie – hendhrami@gmail.com

** Université de Carthage – FSB, LR16ES08, Larina, 7000, Bizerte – Tunisie – sonia.bennejma@fsb.ucar.tn

Voisin (2017) s'appuie sur ces travaux pour approfondir sa réflexion autour des techniques mobilisées en vue de donner progressivement un sens au coefficient de proportionnalité. L'apprentissage conceptuel est alors envisagé en prenant compte des valeurs numériques afin de choisir au mieux les modalités de résolution. Il met en avant que l'identification d'un facteur de linéarité multiplicative et sa transformation en un coefficient de proportionnalité relève de l'étude des grandeurs et des liens entre leurs mesures. Dans sa thèse Levain (1997) relève trois catégories de situations de proportionnalité qui peuvent être problématique pour les élèves, La première renvoie aux problèmes qui se résolvent par une multiplication ou une division ou par la quatrième proportionnelle. La seconde s'organise autour du passage de la proportionnalité simple à l'enchaînement d'isomorphismes. La troisième réside dans l'évolution des problèmes d'isomorphismes vers les problèmes de proportion double. Nelson et al. (2022) explorent la manière dont les représentations (figuratives, analogiques...) sont mobilisées par les élèves en difficulté.

Cette revue de littérature met en avant différentes facettes liées à l'apprentissage de la proportionnalité dans des contextes institutionnels variés. Dans le contexte tunisien, la proportionnalité est considérée comme une notion fondamentale dans le socle des compétences exigibles à l'école primaire. Elle se présente dans le cadre de la résolution de problèmes classiques (recettes...) puis des problèmes d'échelle, pourcentages, vitesses et conversions d'unité. Ce n'est qu'au début du secondaire que la notion de proportionnalité est mise en rapport avec l'étude des fonctions linéaires. Les relations de proportionnalité sont alors mis en lien avec des aspects fonctionnels (variable, dépendance, correspondance et modèle linéaire) que les élèves manipulent par l'usage de représentations sémiotiques (Ben Nejma, 2020, 2023).

Dans cette recherche, nous explorons les démarches mises en œuvre par des élèves du primaire pour modéliser des problèmes de proportionnalité en se centrant sur le rôle des représentations (symbolisme, graphiques, tableau, Schéma, diagramme...) dans la communication de la solution. En effet, l'évolution de situations issues de la théorie des proportions, adaptée au cadre discret à celles de linéarité, adaptée au cadre continu constitue un saut épistémologique important entre l'utilisation des propriétés additives et multiplicatives (addition/multiplication) et le retour à l'unité (division). Cette évolution est souvent accompagnée de schématisations et de représentations graphiques initiant les élèves au développement de la pensée fonctionnelle. Notre ambition est de mettre en avant l'importance de la dimension sémiotique dans le développement de composantes liées à la pensée fonctionnelle (Stooling, 2008) qui se déploie dans des activités de proportionnalité. C'est par le moyen de ces représentations qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. Nous faisons l'hypothèse que diverses représentations mises en avant dans les productions des élèves du primaire (11-12ans) déterminent en partie la signification qu'ils accordent à certains aspects fonctionnels et peuvent nous renseigner sur la validité du raisonnement proportionnel déployé. Cette étude s'inscrit dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique abordée à travers deux dimensions d'analyse, une dimension épistémologique et une dimension sémiotique des praxéologies que nous développons dans la section suivante.

II. CADRE THÉORIQUE

Cette étude prend appui sur le concept de praxéologie issu de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1991) qui permet de modéliser toute activité humaine, sociale ou mathématiques de manière à accomplir une tâche t d'un certain type T , au moyen d'une technique τ , justifié par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ . La description des praxéologies développées par les élèves de 6^e année du primaire autour de la proportionnalité permet de caractériser le rapport personnel à cet

objet de savoir et de questionner également son idonéité au rapport institutionnel. Il s'agit pour nous de déterminer la manière dont les démarches déployées par les élèves dans des tâches de proportionnalité nous renseignent sur les techniques et les technologies en jeu. Les techniques utilisées peuvent être reliées à des propriétés de la fonction linéaire utilisés de manière implicite, la technique additive qui au secondaire s'exprime par $f(x+y) = f(x) + f(y)$, la technique scalaire qui peut être exprimée par $f(ax) = a f(x)$ avec le cas particulier du passage à l'unité ou « règle de trois » et la technique de combinaison linéaire faisant intervenir les deux propriétés précédentes. Une procédure fonctionnelle est basée sur l'utilisation du coefficients de proportionnalité et une procédure graphique via une représentation graphique ou une lecture graphique peuvent également être convoqués dans certains types de tâches. Ces techniques son en rapport étroit avec le développement précoce de la pensée fonctionnelle sans l'usage d'un formalisme algébrique et peuvent êtres décelées au moyens de représentations sémiotiques porteuses de conceptions signifiant/signifié autour d'aspects fonctionnels.

Ce cadre théorique est nourri par la théorie des champs conceptuels des problèmes multiplicatifs (Vergnaud, 1995) et la théorie des registres sémiotiques (Duval, 1993,1995). Ce réseautage de cadres théoriques fournit un modèle praxéologique bidimensionnel des démarches mobilisées par les élèves. *La dimension sémiotique des praxéologies* permet d'approcher l'activité cognitive de l'élève dans sa perception des concepts ou des relations entre des objets de savoirs grâce à des signes et des symboles nécessaires à l'acquisition des concepts auxquels ils renvoient. La dimension *épistémologique des praxéologies* renvoie à la proportionnalité en tant que notion mathématique qui se distingue par trois types selon les problèmes multiplicatifs en jeu, en référence aux travaux de Vergnaud (1994) : la proportionnalité simple directe, la proportionnalité simple composée et la proportionnalité multiple. Un problème de proportionnalité simple met en jeu deux grandeurs dont on ne considère, pour chacune, que deux valeurs. En tout, trois données et une inconnue sont la plupart du temps rencontrées. Les problèmes de quatrième proportionnelle font partie de cette catégorie de même que les problèmes d'agrandissement et de réduction de figures. La structure de proportion en jeu dans ces problèmes fait souvent appel à des techniques précises (multiplication, division quotient, division partition) et met en jeu quatre quantités appartenant à deux espaces de mesure différents. Un problème de proportionnalité simple composée met en jeu plus de deux grandeurs, il s'agit, pour la résolution, d'appliquer successivement la proportionnalité simple à deux paires de grandeurs. Dans ce cas, il apparaît également une seule inconnue plutôt liée à plusieurs données dépendant les unes des autres. Cette structure est le résultat d'une composition de deux (ou plusieurs) proportions simples qui traduit une composition de deux proportions simples comportant trois espaces de mesure nommés M1, M2 et M3. Dans ces espaces de mesures, il y a une fonction f implicite qui permet le passage de M1 à M2 et une fonction g qui permet de passer de M2 à M3. Ainsi, on applique la fonction linéaire $f \circ g$ pour passer de M1 à M3. Ici on a une grandeur qui varie proportionnellement à une autre grandeur qui à son tour varie proportionnellement à une troisième. Un problème de proportionnalité multiple met en jeu plus de deux grandeurs mais dans ce cas, il est impossible de se ramener à un ou plusieurs problèmes successifs de proportionnalité simple Vergnaud (1990).

III. MÉTHODOLOGIE

1. *Un aperçu sur le contexte institutionnel et les programmes du primaire autour de la proportionnalité*

Le système éducatif tunisien est composé de deux cycles, l'enseignement de base qui est un cycle complet de 9 ans accueillant des élèves de la première année (6 ans) jusqu'à la 9^e année (14-15 ans). Il se subdivise en deux cycles, le primaire (6-11 ans) d'une durée de 6 ans dispensé dans des écoles

primaires, et le cycle préparatoire d'une durée de 3 ans dispensé dans les collèges. Nous disposons, pour chaque niveau d'enseignement, d'un manuel officiel unique qui représente la principale référence à suivre par l'enseignant et les élèves. Concernant la proportionnalité au primaire, elle fait sa première apparition en 4^e année dans la rubrique « Exploitation des données numériques » puis en 5^e année dans le cadre des grandeurs avant de devenir une notion explicite d'enseignement en 6^e année, en tant qu'« outil » de résolution de problèmes. Cet objet de savoir n'est pas institutionnalisé et les techniques de résolution des problèmes multiplicatifs ne sont pas explicitées et laissées à la charge des élèves et des enseignants. Selon l'approche par compétence adoptée, trois compétences exigibles apparaissent : C 1. Reconnaître une situation de proportionnalité, C2. Mettre en œuvre un mode de résolution adapté, en choisissant la méthode la plus appropriée compte tenu des données en jeu et C 3. Modéliser une situation de proportionnalité par des relations entre nombres ou grandeurs

Par ailleurs, les concepteurs du programme accordent une importance au développement du raisonnement proportionnel exprimé dans le registre du langage naturel, en particulier dans les problèmes de quatrième proportionnelle. Le choix de travailler avec le coefficient de proportionnalité « en particulier » dans le cas où les grandeurs proportionnelles sont de même nature, même s'il permet d'éviter l'utilisation visible de grandeur-quotient ne facilite probablement pas la différenciation entre coefficient de proportionnalité et rapport scalaire car il ne met pas en évidence la distinction entre coefficient de proportionnalité et rapport scalaire.

2. *Choix du questionnaire et méthodologie d'analyse*

L'expérimentation a été conduite (Hraimi, 2022) sur un échantillon varié de 168 élèves de 6^e année à partir d'un questionnaire comportant des problèmes classiques de proportionnalité simple et double. Le questionnaire est composé de deux parties, chacune comporte 5 problèmes à résoudre individuellement par deux groupes d'élèves pour éviter que la surcharge de 10 problèmes n'engendre un effet de lassitude chez les élèves. Une analyse a priori de ces problèmes a été réalisée en fonction des techniques de la typologie des problèmes multiplicatifs. Les productions recueillies sont codées ensuite analysées quantitativement (en termes d'échec ; réussite ; non-réponses) puis qualitativement en fonction des techniques mises en œuvre par les élèves. Ces techniques sont explorées à la lumière des représentations mobilisées qui représentent des ingrédients de ces techniques et qui peuvent nous renseigner sur la forme de pensée déployée (proportionnelle ou fonctionnelle). Les critères retenus pour l'élaboration du questionnaire sont les suivants :

- Le contexte : numérique, échelle, pourcentage, vitesse...
- Les registres sémiotiques : numérique, langage naturel, tableau de valeur, graphique, géométrique.
- Les grandeurs en jeu : aucune grandeur, une grandeur ou deux ou plus (mesures, unité de mesure, ou autres, grandeurs de même nature (exemples, échelle, côté d'un carré et son périmètre...), même nature ou nature différentes (Problèmes de vitesse, prix/kilo, prix/unité, distance/temps.).
- Le type de proportionnalité et techniques en jeu : proportionnalité simple, double ou inverse, type de techniques (isomorphisme numérique, partage proportionnel, isomorphisme de grandeurs, partie/partie, partie/tout, répartition, calcul de pourcentage, augmentation/ réduction ou échelle, enchaînement d'isomorphismes)
- Les types de tâches : calculer un pourcentage, simplifier une fraction, calculer une quatrième proportionnelle, compléter un tableau de proportionnalité...

IV. ANALYSE DES PRODUCTIONS

1. L'exemple du problème 1

Nous présentons ici, un exemple d'analyse que nous avons conduit sur l'ensemble des productions, le problème 1 est un problème concret relativement simple dont l'énoncé est le suivant : Selma a acheté 4 stylos à 6D, calculer le prix de 10 Stylos, le prix de 14 stylos, le prix de 42 stylos. Ce problème fait référence à une relation de proportionnalité simple entre deux grandeurs de nature différentes : le nombre de stylos et le prix. Les tâches proposées relèvent du même type : « Calculer le prix de n stylos sachant que 4 stylos coutent 6 D » dont la technique se base sur la recherche de la quatrième proportionnelle. Les valeurs attribuées à l'entier n (variables didactiques) pour chaque tâche permet de générer des démarches de résolution différentes. La situation revêt un indice fort de proportionnalité dans la mesure où la possibilité pour un élève de penser au prix d'un seul stylo (réduction à l'unité est implicite). D'autre part, le choix des variables didactiques en attribuant les valeurs 4 et 10, 14 peut rendre la tâche problématique si l'élève se met à la recherche de régularités numériques et vouloir chercher à multiplier ou à diviser directement. La tâche pourrait paraître simple et se baser sur une technique intuitive (problèmes multiplicatifs) lorsqu'il s'agit de passer, par exemple, du prix de 4 stylos à celui de 24 stylos. Le choix de la variable didactique (prix à l'unité : 1,5D) peut aussi poser des difficultés aux élèves du fait que la valeur du rapport externe soit non entière. Ainsi différentes techniques possibles peuvent être mise en œuvre : multiplication par les rapports internes, multiplication par le coefficient de proportionnalité, réduction à l'unité, proportion, produit en croix, linéarité et repérages de régularités numériques. Pour ce problème, bien que 53,33% ont réussi la résolution, une part importante des productions est soit erronées soit vides de réponses, comme l'illustre le tableau suivant :

Tableau 1 – Pourcentages des réussite ou d'échec au problème 1

Nature des réponses	Réponse correcte (RC)	Réponse erronée (RE)	Pas de réponse (RP)
Pourcentages	53.33%	22.5%	24.17%

Nous avons ensuite catégorisé les registres sémiotiques les plus convoqués par les élèves pour résoudre ce problème. Trois registres apparaissent, le registre du tableau (RT), le registre numérique (RN) et le registre discursif (RD) avec une forte dominance du registre des expressions numériques traduisant des opérations de multiplication ou de division (RN).

Tableau 2 – Pourcentages des registres convoqués dans le problème 1

Registre mobilisé	RT		RN		RD	
	RC	RE	RC	RE	RC	RE
Fréquence	0%	1.67%	63.42%	31.58%	3.33%	0%
Taux d'apparition	1.67%		95%		3.33%	

Nous présentons une analyse des techniques identifiées pour accomplir les types de tâches convoqués dans ce problème. Nous les synthétisons dans le tableau suivant en fonction de la fréquence d'apparition de chaque technique.

Tableau 3 – Pourcentages des techniques mises en œuvre dans le problème 1

Technique	RC	RE	Taux d'apparition
Multiplier par les rapports internes	5%	0%	5%
Multiplier par le coefficient de proportionnalité	6.67%	3.33%	10%
Produit en croix	21.67%	10%	31.67%
Réduction à l'unité	8.33%	13.33%	21.66%
Technique basée sur la linéarité et les repérages de régularités numériques	23.34%	8.33%	31.67%

Les procédures les plus mobilisées par les élèves sont celles qui renvoient au produit en croix (31.67%) et le repérage de régularités (31.67%). La réduction à l'unité est également assez utilisée. Les techniques de multiplication par le coefficient de proportionnalité et de multiplication par les rapports internes semblent les moins convoqués par les élèves. Ce constat nous a paru intéressant, en dépit d'une explicitation de ces techniques dans le manuel officiel et de la recherche spontanée selon un retour à l'unité, les élèves optent pour des techniques de linéarité, même si certaines sont vouées à l'échec, comme l'illustre les exemples suivants :

Figure 1 shows handwritten work by student E12. It includes the following calculations:

$$15 = \left(\frac{6}{2}\right) + \left(\frac{4}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{2}{2}\right)$$

$$35 = \left(\frac{4}{2}\right) + \left(\frac{6}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{2}{2}\right)$$

Figure 1 – Production de l'élève E12

Sur une autre copie on peut cependant, voir des réponses correctes sur la base de combinaisons linéaires obtenues d'abord en identifiant le coefficient de proportionnalité 1,5 puis par exemple le prix de 14 stylos et celui de la somme de 15 stylos et de 6 stylos ou encore celui de 42 stylos est celui de 38 stylos auquel on rajoute le prix de 4 stylos.

Figure 2 shows handwritten work by student E5. It includes the following calculations:

$$14 = 10 + 4$$

$$27 = (10 \times 1.5) + 6$$

$$42 = (10 \times 1.5) + 6$$

$$57 = (1.5 \times 38) + 6$$

Figure 2 – Production de l'élève E5

Par ailleurs, pour le produit en croix, près d'un tiers des copies révèlent des représentations sémiotiques différentes pour l'application de cette technique au moyen de flèches traduisant différemment les relation de correspondance entre les données, comme on peut le voir sur ces extraits.

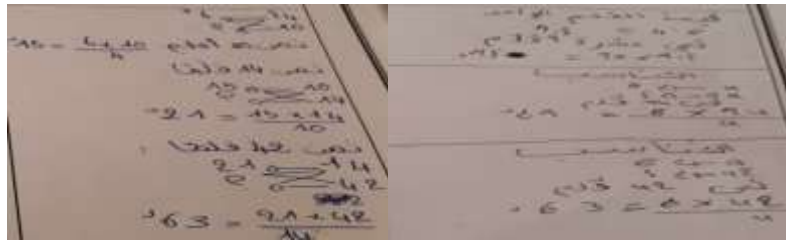
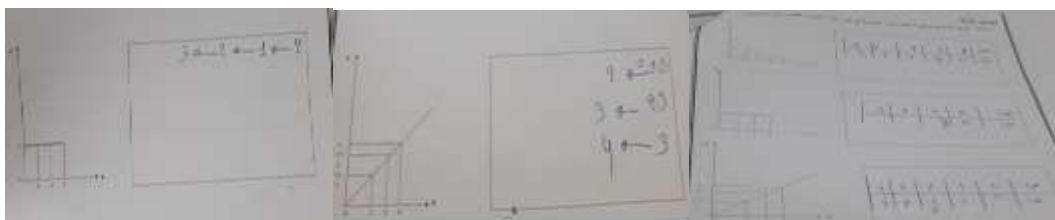


Figure 3 – Production de l'élève E114

2. Bilan des analyses

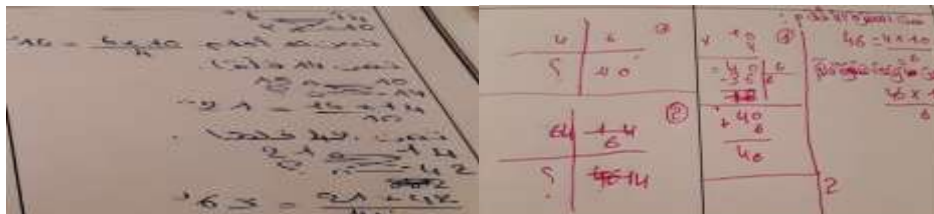
Les résultats de cette étude révèlent des phénomènes intéressants, les élèves tentent de se représenter la proportionnalité entre les nombres proposés de plusieurs manières, on peut voir une variété de représentations sémiotiques qui renvoient implicitement à certaines techniques (quatrième proportionnelle, relations additives, relations multiplicatives). La technique additive, souvent mise en avant n'implique pas forcément une maîtrise du raisonnement de proportionnalité. Par ailleurs, les techniques basées sur le coefficient de proportionnalité et le retour à l'unité sont les moins mobilisées alors que le produit en croix et le repérage de régularité sont plus favorisés par les élèves. De plus, lorsque le registre du tableau n'est pas convoqué par l'énoncé, les élèves ne le mobilisent pas spontanément, alors que cette représentation pourrait servir de levier pour développer des aspects fonctionnels tels que correspondance et dépendance ainsi que le concept de linéarité comme le souligne Simard « Le tableau de proportionnalité devrait encore apparaître comme une aide à la formulation sans pour autant entraîner la conception « tableau = proportionnalité » (Simard, 2012, p50).

Par ailleurs, même si le repérage de régularités est présent au niveau des productions, la stratégie additive est la plus souvent mise en œuvre dans le cadre d'un raisonnement qui n'implique pas toujours la maîtrise du raisonnement proportionnel. Lors de l'expérimentation, les schématisations, par rapport aux problèmes de quatrième proportionnelle les plus complexes, ont contribué en particulier à penser la nécessité de rechercher la valeur unitaire. C'est souvent une visualisation qui facilite la prise de conscience de l'existence d'une question intermédiaire : la recherche de la valeur unitaire. Les représentations de type tableau fléché semblent être, en ce sens, les plus performantes. Elles mettent en évidence la possibilité de raisonner verticalement ou horizontalement. Les schémas sont, pour la majorité des élèves, en interaction avec la construction du raisonnement de proportionnalité. En ce sens, le changement de registre de représentation, proposé par le médiateur, est source de pensées nouvelles formulées par les élèves. Par ailleurs, la reconnaissance d'une situation de proportionnalité à partir d'un graphique semble encore problématique, plusieurs représentations sémiotiques sont mises en évidence pour une lecture graphique des relations et la recherche d'une relation de proportionnalité (tableau, fractions égales, correspondances par des flèches, expression dans le langage naturel, des confusions entre coefficient de proportionnalité et fonction constante, la conceptualisation de l'opérateur « scalaire » en jeu se confond souvent avec l'opérateur implicite « fonction » comme l'illustre les figures suivantes :



Figures 4-5-6 – Productions des élèves E12, E51, E128

Dans la même dynamique, on constate une prépondérance de démarches fondées sur le produit en croix (qualifiée de règle de trois) que les élèves appliquent à tous les coups. En revanche dans certaines productions, des liens semblent être établis entre le tableau en croix et le tableau fléché témoignant d'un niveau élaboré de conceptualisation entre raisonnement vertical « scalaire » et raisonnement horizontal « fonction ».



Figures 7-8 – Productions des élèves E12, E98

V. CONCLUSIONS ET DISCUSSIONS

La maîtrise de la proportionnalité est une compétence fondamentale à développer chez les élèves dès les premières années du primaire. La résolution des problèmes constitue une niche favorable au développement de la pensée proportionnelle mais aussi d'aspects fonctionnels implicites (variable, correspondance, dépendance et variation linéaire). Il semble donc important de s'interroger sur les conditions d'une meilleure conceptualisation de la proportionnalité et ce, dès le plus jeune âge. Le premier apport de cette recherche a été de proposer une méthodologie d'analyse bidimensionnelle qui s'appuie sur des concepts théoriques issus de la TAD et de la théorie des champs conceptuels et nourrie par une approche sémiotique en termes de registres. Le second apport est de nature empirique dont l'objectif a été d'analyser les démarches mise en œuvre par les élèves et les moyens sémiotiques utilisés. Les résultats obtenus montrent que les élèves sont capables de changer de techniques de résolution en fonction des critères retenus pour la conception des problèmes posés, notamment, en fonction de la relation interne et externe liant les valeurs du problème entre elles. Dans la plupart des cas, ils utilisent le produit en croix (4^e proportionnelle) et le repérage de régularités et semblent bénéficier d'un répertoire de techniques mais seules deux d'entre-elles semblent avoir un sens pour eux. Ceci témoigne de leur capacité à développer une pensée fonctionnelle même si ces relations se réduisent souvent à des relations additives. Des difficultés apparaissent dans l'identification des régularités de nature multiplicatives ou mixtes (application implicite des théorèmes d'isomorphismes). Par ailleurs, les schémas sont, pour la majorité des élèves, en interaction avec la construction du raisonnement de proportionnalité et témoignent du fait qu'ils perçoivent les relations de correspondance et même de dépendance en diversifiant les schématisations en flèches. Ainsi ces schématisations permettent de mettre en évidence les relations entre les divers éléments qui constituent la proportionnalité. C'est en fait une activité cognitive liée l'appréhension du concept de proportionnalité et à sa structure mathématique que l'élève met en œuvre. La qualité de sa schématisation va dépendre de la pertinence de la relation signifié/signifiant qu'il aura élaborée. Il nous semble que cette diversification d'outils sémiotiques mis en œuvre par les élèves de manière spontanée mériterait d'être à la fois un objet de recherche mais aussi un levier pour l'argumentation et le développement de la pensée fonctionnelle que les enseignants peuvent exploiter dans leur pratique.

RÉFÉRENCES

- Belmas, P. (2001). *Apprentissage de la proportionnalité et symbolisations chez des élèves en échec scolaire* [Thèse de doctorat, Université Paris V].
- Ben Nejma, S. (2020). Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement secondaire tunisien. *Revue Québécoise de didactique des mathématiques*, 1, 38-69. <https://doi.org/10.71403/4q29sj75>
- Ben Nejma, S. (2023). Une analyse bidimensionnelle du développement de la pensée fonctionnelle au début du secondaire. *Revue méditerranéenne en éducation mathématique, scientifique et technologique*, 1, 40-50.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.
- Comin, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22(2.3), 135-182.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherche en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine : sémiotiques registres et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères*, (59), 5-41.
- Hraimi, H. (2022). *Rapports institutionnels et personnels des élèves du cycle primaire à la proportionnalité dans le contexte scolaire tunisien* [Mémoire de master de recherche en didactique des mathématiques, Université virtuelle de Tunis-ISEFC].
- Levain, J. P. (1997). *Faire des maths autrement : développement cognitif et proportionnalité*. L'Harmattan.
- Nelson, G., Hunt, J. H., Martin, K., Patterson, B. et Khounmeuang, A. (2022). Current knowledge and future directions : Proportional reasoning interventions for students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 45(3), 159-171. <https://doi.org/10.1177/0731948720932850>
- Stölting, P. (2008). *La pensée fonctionnelle des élèves de 10 à 16 ans – Analyse comparative et études empiriques de son enseignement en France et en Allemagne* [Thèse de doctorat, Université Denis Diderot et Université Regensburg].
- Vanluydt, E., Verschaffel, L. et Van Dooren, W. (2022). The early development of proportional reasoning: A longitudinal study of 5- to 8-year-olds. *Journal of Educational Psychology*, 114(6), 1343–1358.
- Voisin, S. (2017). L'enseignement de la proportionnalité : Une expérimentation en classe de SEGPA. *Petit x*, (103), 33-56. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/103x3_1568365881165-pdf
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 133-170.
- Vergnaud, G. (1994). Proportionnalité simple, proportionnalité multiple. *Grand N*, (56), 55-66.
- Simard, A. (2012). Proportionnalité en CM2 et Sixième. *Petit x*, (90), 35-52.

ANALYSE DE RAISONNEMENTS D'ÉLÈVES DE 4^E ANNÉE DU PRIMAIRE LORS D'UNE ACTIVITÉ DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE IMPLIQUANT LE LANGAGE

COURANT

| BISAILLON* NATHALIE, DUFOUR** SARAH ET JEANNOTTE*** DORIS

Résumé | Cet article propose une analyse de raisonnements d'élèves de 4^e année du primaire lors de la résolution d'une énigme logique, où ils doivent compléter une grille de lettres à partir d'indices donnés sous forme de courtes phrases. Notre analyse nous a conduits à porter un regard multicouche sur le raisonnement : les pas, les enchaînements de pas et la nature des éléments en jeu.

Mots-clés : raisonnement, logique, résolution de problèmes, école élémentaire, Toulmin

Abstract | This paper analyzes the mathematical reasoning of 4th graders as they solve a logic puzzle in which they must complete a grid of letters based on clues given in the form of short sentences. Our analysis led us to take a multi-layered look at their reasoning: steps, chains of steps and the nature of the elements in play.

Keywords: Reasoning, logic, problem solving, elementary school, Toulmin

I. INTRODUCTION¹

Le raisonnement mathématique est au cœur de l'activité mathématique (Mason et al., 2010). Son importance se reflète dans divers programmes d'études et documents institutionnels (par exemple, le Programme de formation de l'école québécois, 2001). Un élément récurrent dans ses définitions est son association avec la logique. Par exemple, pour Baruk (1992), la logique mathématique est une branche des mathématiques qui étudie «la formation d'un raisonnement mathématique valide» (p. 668). Des recherches récentes et de plus en plus convergentes soulignent l'importance de l'enseignement de la logique à l'école primaire : «La pensée logique n'est pas un talent naturel [...], mais une compétence qui peut être entraînée, comme on entraîne les muscles à la gym» (Adkhamjonovna, 2022, p. 915).

Cet article présente un projet qui s'inscrit dans la continuité d'une étude ayant exploré le potentiel des tâches de logique, sous la forme de jeux de logique, pour faciliter la construction de représentations mentales, au sens de Julot (2002), d'un problème mathématique. Une série de tâches de logique mathématique², introduisant de manière progressive le langage écrit et les concepts arithmétiques, a été soumise à deux groupes d'élèves de 4^e année dans une école primaire (Bisaillon et Lyons, 2023). Les résultats de cette expérimentation indiquent que ce type d'activités permet aux élèves de mobiliser des stratégies clés associées à la résolution d'un problème mathématique (Bisaillon et Lyons, 2023). De plus, les deux enseignants participant au projet ont rapporté avoir constaté une amélioration de la part des élèves à justifier et argumenter, processus associés au raisonnement mathématique, que ce soit en classe ou lors de la résolution de problèmes écrits. Pour approfondir cette observation, nous avons

* Université de Montréal – Canada – nathalie.bisaillon@umontreal.ca

** Université de Montréal – Canada – sarah.dufour.3@umontreal.ca

*** Université du Québec à Montréal – Canada – doris.jeannotte@uqam.ca

¹ Projet financé par : PVX20020-Subvention institutionnelle du CRSH - Subventions d'exploration

² La série des tâches qui ont été expérimentées se retrouvent sur le site suivant : <https://videos.defimath.ca/#projet>

voulu examiner plus en détails la manière dont les tâches de logique peuvent contribuer au développement du raisonnement mathématique.

Dans Bisaillon et al. (2024), nous avons analysé la première tâche de la série de tâches à l'étude avec ce nouvel angle sur le raisonnement. Cette première tâche (Figure 1), présentée sous la forme d'un jeu, a pour but de placer neuf pièces géométriques dans une grille de 3X3 cases, en suivant les indices visuels fournis. Une vague indique que la pièce va à cet endroit tandis qu'un X précise qu'elle n'y va pas. D'autres indices réfèrent à la couleur de la pièce, à sa forme ou encore à une pièce précise. Les grilles ne sont pas toujours complètes lors de la présentation des indices, ce qui mène à différentes possibilités.



Figure 1 – Jeu logique (Lyons and Sabinin, 2015)

Dans Bisaillon et al. (2024), nous avons identifié divers enjeux liés à l'élaboration des tâches et à leur résolution par les élèves. Parmi nos observations, nous avons constaté que, même dans un environnement « contrôlé », les élèves rencontrent des défis lors de l'enchaînement de certains pas de raisonnements. Par exemple, lorsque le traitement local d'un indice mène à des affirmations qui peuvent être utilisées pour valider ou invalider des affirmations préalablement établies comme possibles, les ajustements ne se font pas toujours automatiquement. Notre analyse met également en évidence le défi que représente la gestion des traces lors de la résolution d'une tâche mathématique. Nous avons constaté, entre autres, leur rôle crucial dans l'élimination progressive des incertitudes.

L'objectif du présent article est de poursuivre l'étude des raisonnements par l'analyse des raisonnements mathématiques d'élèves de l'école primaire lorsqu'ils résolvent un deuxième type de tâche logique, soit la deuxième dans la série de tâches proposée. Cette tâche, présentée à la Figure 2, qui prend aussi la forme d'un jeu, diffère de la première du fait que les indices sont donnés en mots et que les objets à placer sont les lettres de A à I.

II. CADRE THÉORIQUE

1. Le raisonnement et les enchaînements de pas de raisonnement

Le modèle de Toulmin (2003) s'est révélé pertinent pour analyser le potentiel du raisonnement mathématique dans ces tâches de logique. Ce modèle met en avant les aspects argumentatifs, logiques et persuasifs du raisonnement, apportant ainsi une compréhension plus approfondie des processus cognitifs à l'œuvre. En soulignant l'importance du contexte, il permet également de saisir comment les élèves ajustent leur raisonnement en fonction des règles spécifiques du jeu.

Ce modèle met l'accent sur trois éléments clés qui définissent un pas élémentaire de raisonnement : les données, la garantie et l'affirmation. À partir de données et d'une garantie parfois implicite, il est possible de formuler une affirmation. Pour étayer une affirmation, il est nécessaire de présenter des preuves qui constituent les données. Néanmoins, il est également nécessaire de se convaincre, c'est-à-

dire d'accepter comme valide ou plausible le lien entre les données et l'affirmation. C'est le rôle de la garantie. Elle soutient l'inférence reliant des données à l'affirmation (Toulmin, 2003). Trois autres éléments caractérisent un pas de raisonnement : le fondement, le qualificateur et la réfutation. Le fondement renforce la garantie en reposant sur des éléments acceptés par une communauté donnée. Le qualificateur se réfère à la valeur épistémique de l'affirmation, déterminant sa valeur de vérité ou sa plausibilité. Une façon de décider du statut de cette valeur épistémique est d'utiliser une réfutation. Une réfutation est une déclaration qui, si elle est prouvée vraie, conduit à la réfutation de l'affirmation, en admettant qu'elle soit fausse. Ainsi, le modèle de Toulmin (2003) permet de mettre en évidence les étapes du raisonnement et de décrire les différents pas de raisonnement. Cela facilite l'étude de ce que Knipping (2003) appelle un enchaînement de pas de raisonnement ; un raisonnement se déroule dans le temps et est constitué de plusieurs pas de raisonnement. Cette auteure a observé que ces enchaînements sont souvent bien plus complexes qu'on peut le penser. Il ne s'agit pas uniquement de recycler les affirmations inférées en données dans un pas ultérieur.

2. *La nature des données, affirmations et traces*

Afin de décrire les éléments constitutifs d'un pas de raisonnement de façon plus fine, il est possible de s'intéresser à la nature de ces derniers. Plusieurs auteurs s'intéressant au raisonnement mettent de l'avant le rôle particulier des différentes représentations (Duval, 1995 ; Cobb, Yackel et McClain, 2000 ; entre autres). L'activité mathématique met en œuvre différentes actions sur des représentations : produire une représentation, traiter une représentation, convertir d'un mode de représentation à un autre, articuler deux ou plusieurs modes de représentation. Ces actions demandent d'identifier les informations particulières à chaque représentation afin de les mettre en relation avec les informations particulières à d'autres représentations que ces représentations soient dans le même mode (traitement) ou non (conversion). Janvier (1983) illustre ce travail par un iceberg étoilé dans lequel bien qu'une seule représentation soit « visible » à la fois, cette dernière repose sur toutes les autres. Différentes représentations permettent l'accès à un regard plus approfondi sur une situation, un contexte, un concept.

Lors d'un pas de raisonnement, on peut donc penser que les données, les affirmations, les fondements ne sont pas toujours dans le même mode de représentation. Le pas de raisonnement devra inclure des actions sur ces représentations. Par exemple, si les données sont en mode verbal et que l'on formule une affirmation en mode schématique, cela implique de convertir d'un mode de représentation à un autre, et ce, en s'appuyant sur la garantie et les fondements. En somme, dans cette étude, les raisonnements des élèves sont modélisés à l'aide des éléments constitutifs des pas de raisonnement (données, affirmations, fondements, etc.), des enchaînements observés et aussi en qualifiant la nature des éléments en jeu par leur mode de représentation.

III. MÉTHODOLOGIE

Pour atteindre notre objectif d'analyser le raisonnement mathématique d'élèves de 4^e année du primaire, nous avons sélectionné une tâche de logique et entrepris une étude de cas descriptive. Cette méthodologie offre une compréhension globale du processus de raisonnement mathématique en permettant une description approfondie (Yin, 2018). La tâche logique étudiée dans cet article a été expérimentée lors d'un projet de recherche en résolution de problèmes mené pendant une année entière dans deux classes de 4e année (enfants de 9 et 10 ans). Les chercheurs se sont rendus dans les classes une ou deux fois par mois pour présenter de nouveaux types de tâches, qui ont ensuite été réinvestis par les enseignants au cours des semaines suivantes. Deux fois au cours de l'année, en janvier

et en mai, les chercheurs ont interrogé individuellement quatre élèves afin d'étudier leur activité mathématique de manière plus approfondie. Toutes les tâches réalisées par les élèves ont été filmées. Les analyses réalisées dans la présente étude sont issues de tâches réalisées lors de rencontres individuelles.

1. La tâche de logique

L'objectif de ce jeu de logique est de placer neuf lettres (de A à I) dans la grille, en respectant tous les indices (Lyons et Lyons, 1999). L'environnement utilise un langage écrit simple, sans concept arithmétique. Chaque indice fournit des informations sur l'emplacement d'une lettre dans la grille ou sur la position d'une lettre par rapport à une autre. La Figure 2 montre un exemple de ce type de problème. Un lexique visuel accompagnait la grille pour aider les élèves à comprendre ce que signifie, par exemple, « à gauche de » (voir Annexe A). Ils l'ont utilisé en classe, mais ils ne l'avaient pas sous les yeux pour la résolution de la tâche lors des rencontres individuelles. Ce lexique représente des fondements sur lesquels les élèves s'appuient pour réaliser la tâche. Dès lors, on peut souligner que les données sont proposées en mode verbal, mais que les participants doivent proposer une ou des affirmations dans un nouveau mode, celui de la grille. La grille s'appuyant principalement sur des repères spatiaux, nous y référerons comme étant le mode « grille ».

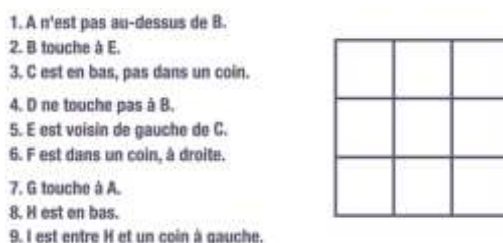


Figure 2 – Grille de lettre (Lyons et Lyons, 1999)

2. Analyse des données

Nous avons choisi une analyse qualitative pour répondre aux objectifs de l'étude. Nous avons examiné le sens sous-jacent de l'activité mathématique de quatre élèves (E1, E2, E3 et E4) lors de la résolution de cette tâche. L'analyse s'est appuyée sur les concepts théoriques présentés précédemment. Ainsi, nous avons pu réaliser des modèles des raisonnements observés en nous appuyant sur les pas de raisonnement observés, en termes du modèle de Toulmin (2003) et de leur façon de s'enchaîner (Knipping, 2003). De plus, nous avons analysé les pas de raisonnement de façon plus fine en identifiant ce qui menait à la réalisation de ce pas ou ce qui causait des difficultés. Nous avons ainsi porté un regard sur la nature des données et des traces.

IV. RÉSULTATS

Notre analyse de l'activité mathématique des élèves nous a permis d'observer différents enchaînements de pas de raisonnement. Pour décrire ces différents enchaînements, non seulement nous avons pris en compte les éléments constitutifs de ces pas et leur nature, mais aussi les stratégies de résolution adoptées, l'interprétation des fondements et les traces que les élèves ont laissées dans la grille.

D'abord, trois stratégies de résolution ont été observées. Deux élèves ont fait plusieurs lectures séquentielles à partir du début (E1 et E4) ; ils lisent une première fois tous les indices et les relisent jusqu'à ce qu'ils puissent placer une lettre. Un élève a fait des retours aux indices déjà consultés (E2),

il retourne aux indices déjà lus sans avoir fait une première lecture complète des indices. Un dernier a recherché les indices dits « faciles » (E3), il survole les indices, mais s'arrête seulement à ceux qui lui permettent de placer directement une lettre. Ces différentes stratégies sont associées à l'ordre dans lequel les indices sont abordés et jouent un rôle important dans la construction des traces laissées par les élèves dans la grille et sur l'utilisation de ces traces pour résoudre l'énigme. Ces trois stratégies sont caractérisées par des enchainements de pas de raisonnement différents (Figure 3). Chaque colonne de couleur est associée à une lecture des indices, les numéros dans un disque de couleur représentent les indices de la tâche que l'élève lit à voix haute. Un élément à droite du numéro signifie que l'élève a laissé une trace dans la grille : le losange noir souligne que la trace est une affirmation certaine, un gris, une affirmation probable et un rouge, une affirmation erronée. Lorsqu'il n'y a pas d'autres éléments à droite du numéro, cela signifie que l'élève a lu l'indice à voix haute sans ajouter d'informations sur la grille. Tous les élèves étaient à l'aise avec le fait de laisser des informations en suspens pour y revenir plus tard. Les flèches noires représentent les pas de raisonnement, les flèches vertes illustrent un enchainement de pas menant au changement de valeur vraisemblable à vraie réalisé à partir d'une trace mentionnant la position incertaine d'une lettre tandis que les flèches roses illustrent un enchainement de pas menant au changement de valeur vraisemblable à vraie réalisé à l'aide d'une trace certaine. L'étoile grise représente des traces incomplètes laissées par l'élève.

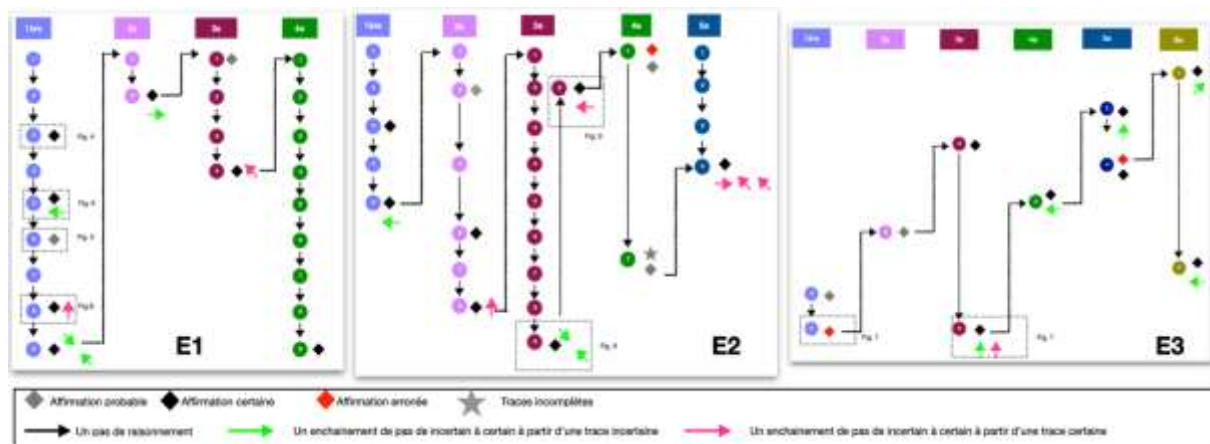


Figure 3 – Enchainements des pas de raisonnement de E1, E2 et E3

Nous avons analysé différents pas de raisonnements qui, combinés, créent des enchainements différents. Ces enchainements sont influencés par l'utilisation des fondements et par la gestion des traces. Nous présentons le résultat de nos analyses dans les prochains paragraphes. Pour mieux les illustrer, nous reprenons en exemple certains pas de raisonnement. Ces derniers sont encadrés en pointillés dans la Figure 3.

L'interprétation des fondements permet aux élèves d'aller au bout d'une conversion d'un mode de représentation verbal au mode de représentation « grille ». Ce mode de représentation « grille » est donc privilégié afin de laisser des traces au fur et à mesure des pas de raisonnement. Parfois le pas de raisonnement mène à la formulation d'une affirmation à valeur épistémique vraie qui se traduit par l'ajout de la lettre en majuscule à l'endroit établi par l'affirmation, comme le présente la Figure 4 (◆). D'autres fois, l'enchainement de pas de raisonnement ne permet pas de formuler des affirmations vraies, mais plutôt vraisemblables. Dans certains de ces cas, ces affirmations se traduisent par l'ajout de lettres en minuscule dans la grille (◆), tel qu'illustré dans la Figure 5. Dans ces cas, les participants ont tendance à laisser des traces s'il y a seulement deux possibilités, à quelques exceptions près.

Lorsqu'ils en voient plus de deux, leur choix semble plutôt de passer à l'indice suivant. Comme si plus de deux possibilités seraient trop « lourd » à gérer en termes de traces.

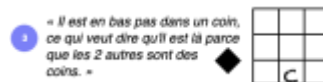


Figure 4 – Affirmation valeur épistémique vraie : ajout d'une lettre majuscule

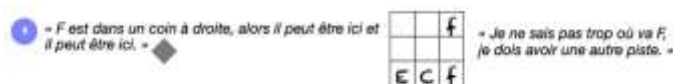


Figure 5 – Affirmation valeur épistémique vraisemblable : ajout de lettres minuscules

Trois types de difficultés ont été observées par rapport aux fondements : l'interprétation des fondements dans le mode verbal, la conversion d'un mode de représentation à un autre et le repérage spatial. Nous avons relevé que certains élèves rencontraient des défis à interpréter les fondements liés aux données et garanties présentées en mode verbal. En particulier, la négation a été source de difficulté E2 et E4 ; ils interprétaient l'indice comme s'il était positif ; « D ne touche pas à B » devenait donc « D touche à B ». D'autres élèves interprétaient correctement la forme verbale d'un indice, mais avaient des soucis au moment de la conversion sous le mode « grille ». Les mots « voisin » et « touche » ont particulièrement posé problème. Enfin, pour E3 et E4, c'était plutôt le repérage spatial qui a été complexe, avec la « gauche » et le « centre », par exemple.

Il a aussi été observé que l'interprétation adéquate des indices en mode verbal n'est pas toujours suffisante pour inférer une affirmation qui mènera à compléter la grille (mode « grille »). Non seulement l'interprétation correcte des fondements est nécessaire, mais la gestion des traces laissées précédemment est essentielle. Ces traces jouent un rôle dans la construction des enchaînements de raisonnement. Pour placer une lettre dans la grille, il faut parfois se servir des traces qui sont déjà présentes. Un premier cas de figure est le cas où des lettres majuscules (affirmations certaines), présentes dans la grille, permettent aux participants d'éliminer des possibilités, ce qui les mène à pouvoir placer une nouvelle lettre en majuscule dans la grille. Dans l'exemple de la Figure 6, le fait que C soit déjà placé dans la grille permet au participant de placer E directement et de manière certaine.



Figure 6 – Affirmation valeur épistémique certaine permettant de placer une nouvelle lettre majuscule

La présence d'une lettre majuscule peut ainsi faciliter l'interprétation des indices. Par exemple, E3 n'avait pas encore inscrit le C dans la grille au moment de traiter l'indice « I est entre H et un coin ». À ce moment, il avait inscrit un *h* minuscule dans chacune des cases de la rangée du bas. Il n'envisage alors qu'une possibilité pour *I*, à savoir le centre de la rangée du bas (voir *Première lecture* de la Figure 7). Il réussit à placer son *I* au bon endroit seulement après avoir placé son C, donc lorsqu'il élimine la possibilité que *I* soit dans la case du centre de la rangée du bas et qu'il envisage finalement la possibilité que *I* puisse être au centre (voir *Troisième lecture* de la Figure 7).



Figure 7 – Effet de l'absence et de la présence d'une lettre majuscule dans la grille

Le fait de placer le C dans sa position certaine ne semble pas qu'éliminer une position possible, mais semble permettre également la reconnaissance d'une nouvelle position possible pour I.

Un deuxième cas de figure est le cas où un indice mène à placer directement une lettre majuscule dans la grille, ce qui permet, du même coup, d'éliminer une des possibilités, identifiée avec une lettre minuscule. Cela mène donc à changer la valeur épistémique de la possibilité « restante ». Dans l'exemple de la Figure 8, le participant commence l'indice 8 en ayant deux possibilités pour positionner la lettre F. L'indice 8 lui permet de placer la lettre H à une de ces deux positions possibles pour F, laissant ainsi, une seule position possible pour F.

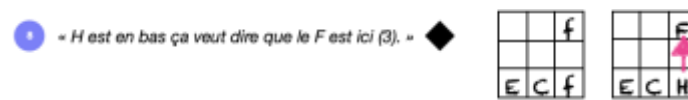


Figure 8 – Élimination de possibilités

Enfin, l'ordre dans lequel les indices sont traités a une conséquence sur les traces qui sont laissées et sur la suite des enchainements, que ce soit pour des affirmations vraies ou vraisemblables. C'est le cas de E2 qui, puisqu'il a fait plusieurs allers-retours, a été en mesure de placer un b minuscule dans la grille rapidement. Au moment de placer son I, il est en mesure de confirmer la place du B, comme le montre la Figure 9.

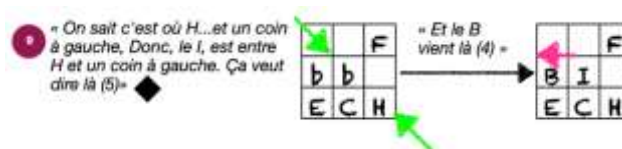


Figure 9 – Influence des traces

V. DISCUSSION

L'analyse des raisonnements des élèves à partir des pas, des enchainements de pas et de la nature des éléments en jeu a mené à une modélisation caractérisée par trois niveaux. Ce regard multicouche sur le raisonnement a permis d'en approfondir notre compréhension en termes d'opportunité et de complexité des raisonnements, et en termes de difficultés rencontrées.

Le découpage en pas de raisonnement (voir les flèches noires de la Figure 3) a permis d'identifier les nœuds ou difficultés rencontrées par les élèves. Ce processus nous a rapidement conduits à étudier les enchainements de ces pas et à approfondir notre analyse en examinant la nature des éléments en jeu.

Nous observons donc, dans cette tâche, une complexité dans les enchainements de pas de raisonnements. La non-linéarité de ces derniers (passage d'une affirmation aux données du prochain pas et ainsi de suite) ne suffit pas à les décrire. Souvent, des combinaisons d'affirmations plausibles et vraies, de données et aussi de fondements sont parfois nécessaires afin de permettre un nouveau pas de raisonnement (Bisaillon et al., 2024). Notre analyse nous a permis d'identifier différentes chaînes de raisonnements permettant de compléter la grille. Ces chaînes nous rappellent les observations de

Knipping (2003) concernant la preuve. Bien que nous ne soyons pas dans un contexte de preuve, toutes les stratégies de résolution que nous avons observées présentent des enchaînements de pas de raisonnements nécessitant un retour en arrière dans la structure logique pour progresser. En effet, on peut constater cette situation lorsque les participants positionnent des affirmations vraisemblables (lettres minuscules). Ces lettres minuscules seraient le résultat d'un pas abductif au sens de Jeannotte (2015) qui servent ensuite dans la construction de pas déductifs qui, eux, permettent de modifier la valeur épistémique de ces « nouvelles données » de vraisemblables à vraies (voir Figures 8 et 9).

La nature des éléments en jeu dans la tâche et dans le raisonnement en tant que tel révèle qu'afin de mettre en œuvre un pas de raisonnement, les participants ont besoin de s'appuyer sur des fondements. Dans le cas de cette tâche, le lexique travaillé au préalable en classe, représente un des fondements particulièrement utiles (voir Annexe A). Le fait que les indices soient en mode verbal et que ces fondements (lexique) soient dans le mode « grille » demande, dès lors, de convertir ces informations d'un mode verbal à un mode « grille ». Or, cela ajoute une difficulté potentielle. Que ce soit dans le travail sur la représentation verbale ou la représentation « grille » ou la conversion entre les deux, les participants rencontrent un nœud. Donc, le pas de raisonnement, l'inférence nécessaire à la formulation de nouvelles affirmations, est tributaire de l'accessibilité de fondements, mais aussi de leur articulation dans différents modes de représentation.

Enfin, il est aussi intéressant de souligner la façon dont ces multicouches sont interreliées pour permettre la construction de ces raisonnements complexes. En effet, cette structure non linéaire d'enchaînement de pas de raisonnement a aussi des conséquences sur les traces laissées. Réciproquement, les traces auront des conséquences sur les enchaînements de pas de raisonnement. Nous avons pu observer que, non seulement les traces soutenaient les enchaînements des pas de raisonnement, mais qu'elles en étaient également constitutives (voir les Figures 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9).

VI. CONCLUSION

La tâche étudiée dans cet article est la deuxième tâche d'une série de tâches de logique élaborée pour soutenir le développement de la compétence des élèves à résoudre des problèmes mathématiques. L'étude des raisonnements mathématiques des élèves, lorsqu'ils résolvent ces tâches de logique, nous a menées à poser un regard multicouche sur leur activité mathématique.

Nous avons constaté que les traces, coordonnées avec les indices, permettent la réalisation des enchaînements de pas de raisonnement. Leur rôle est donc crucial pour résoudre la tâche. Ainsi, comme le soulignent Allard et Moussy (2021), au lieu de survaloriser le produit fini de la résolution, il devient important de travailler sur les compétences des élèves à laisser des traces et à apprendre à les utiliser. Elles ne servent pas uniquement à communiquer la solution. Ce sont les traces laissées au fur et à mesure du processus qui constitue le raisonnement et le processus de résolution de problème. Ce n'est pas sans nous rappeler l'importance de l'opérationnalisation (mise en action) chez Julo (2002) qui mène à une structuration et une restructuration de la représentation mentale du problème.

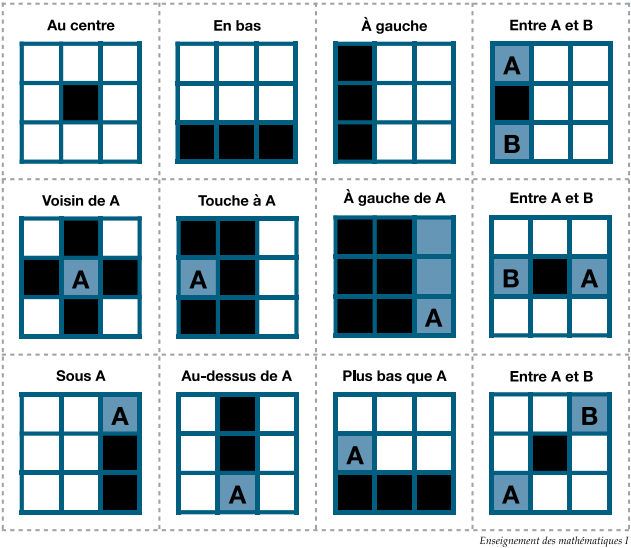
Cela souligne la nécessité de poursuivre les recherches sur les enchaînements de pas de raisonnements, que ce soit dans des activités de logique ou plus largement dans des activités de résolution de problèmes et les liens qu'il est possible de faire avec les processus de résolution de problèmes.

RÉFÉRENCES

- Adkhamjonovna, K. M. (2022). Development of logical thinking of junior school children. *Web of scientist: International Scientific Research Journal*, 3(10), 914-919.
<https://wos.academiascience.org/index.php/wos/article/view/2620/2493>
- Allard, C. et Moussy, C. (2021). LÉA 2 territoires en mathématiques : résoudre des problèmes complexes au cycle 3, exemple d'un dispositif de travail collaboratif. Dans *Actes du 47e colloque COPIRELEM, Grenoble 2021*. <https://bibnum.publimath.fr/IWO/IWO22011.pdf>
- Bisaillon, N., Dufour, S. et Jeannotte, D. (2024). Analysis of a grade 4 student's mathematical reasoning in a mathematical logic task. Dans *Actes de la 46e rencontre annuelle du International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American (PME-NA46), Cleveland, États-Unis* (p. 592–596).
- Bisaillon, N. et Lyons, M. (2023). *Exploring the components of the competence to construct a mental representation of mathematical problems in a fourth-grade student during mathematical logic problem solving* [Communication]. 13e rencontre annuelle du European Society for Research in Mathematics Education (CERME 13), Budapest, Hongrie. <https://hal.science/hal-04413427>
- Baruk, S. (1992). *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Éditions du Seuil.
- Cobb, P., Yackel, E. et McClain, K. (2000). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: perspective on discourse, tools and instructional design*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781410605351>
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Exploration. P. Lang.
- Janvier, C. (1983). Représentation et compréhension. Un exemple : le concept de fonction. *Bulletin de l'AMQ*, (3), 22–28. <https://www.amq.math.ca/wp-content/uploads/bulletin/archives/1983-3-part7.pdf>
- Jeannotte, D. (2015). *Le raisonnement mathématique : proposition d'un modèle conceptuel pour l'enseignement et l'apprentissage au primaire et au secondaire* [Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. <https://archipel.uqam.ca/8129/>
- Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, (69), 31-52. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/69n4_1555591199676-pdf
- Knipping, C. (2003). *Argumentation structures in classroom proving situations*. 3e conference of the European society in Mathematics Education. Bellaria, Italy: ERME. <http://erme.site/cerme-conferences/cerme3/cerme-3-proceedings/>
- Lyons, M. et Lyons, R. (1999). *Défi mathématique*. Chenelière Éducation.
- Lyons, M. et Sabinin, P. (2015). *Gym Logique* [logiciel]. Expertises didactiques Lyons inc. <https://apps.defimath.ca/gym-logique/>
- Mason, J., Burton, L. et Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically* (2e éd.). Pearson.
- Ministère de l'Éducation du Québec. (2001). *Programme de formation de l'école québécoise, éducation préscolaire, enseignement primaire*. Gouvernement du Québec. https://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/dpse/formation_jeunes/prform2001.pdf
- Toulmin, S. (2003). *The uses of argument*. Cambridge University Press.
- Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications: Design and methods* (6e éd.). SAGE.

ANNEXE A
 LEXIQUE

Lexique



DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE RELATIONNELLE : ÉTUDE DES ACTIVITÉS AU DÉBUT DU PRIMAIRE

| POLOTSKAIA* ELENA, FREIMAN** VIKTOR, BANKOUSSOU-MABIALA*** EDWARD ET
SAVARD**** ANNIE

Résumé | Les chercheurs de l'école de Davydov (2008) suggèrent que la pensée relationnelle constitue une base essentielle pour le développement de la pensée algébrique. En s'appuyant sur l'analyse de deux leçons de résolution de problèmes écrits menées auprès d'élèves de première année du primaire, cette communication contribue à affiner le modèle de développement de la pensée relationnelle chez les élèves au début du primaire.

Mots-clés : pensée relationnelle, pensée algébrique, résolution de problèmes écrits, enseignement au primaire

Abstract | Researchers from the Davydov (2008) school of thought suggest that relational thinking is foundational for the development of algebraic thinking. Based on two lessons on solving word problems conducted in the first year of primary school (ages 6–7), this paper contributes to the development of a model of relational thinking at the very beginning of the schooling.

Keywords: Relational thinking, algebraic thinking, word-problem solving, primary school

I. PROBLÈME

Les débats autour de l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre se sont intensifiés au cours de 30 dernières années tant du côté de francophonie qu'ailleurs dans le monde. Ce débat a permis de bien documenter les difficultés des élèves et les obstacles qui peuvent être attribués, entre autres, à l'emphase sur la pensée arithmétique (opérationnelle) dès le début de scolarité de l'enfant. Dans ce contexte, le développement de la pensée arithmétique précédait, en tant que préalable (et c'est encore le cas dans certains pays) celui de la pensée algébrique (relationnelle). À la fin du XX^e siècle, il est devenu évident qu'un nombre important d'élèves du secondaire étaient confrontés à des difficultés dans l'apprentissage de l'algèbre. Par exemple, de nombreux élèves interprétaient le signe d'égalité (« = ») de manière opérationnelle comme « calculer le résultat » plutôt que de manière relationnelle comme « les expressions gauche et droite sont équivalentes » (voir plus d'exemples dans Kieran, 2018). C'est ainsi que le mouvement Early Algebra est né comme recherche de solutions pour réduire l'écart entre l'arithmétique et l'algèbre dans le but de faciliter une transition entre les deux modes de pensées en introduisant, entre autres, les activités qui permettent de solliciter le raisonnement algébrique tôt au primaire (ex., Kaput, 2008 ; Kieran, 2018).

La conceptualisation du développement du raisonnement algébrique chez les élèves au cours des premières années de la scolarité obligatoire a été mise en avant, entre autres, par Blanton et ses collègues (2018). Les chercheurs utilisaient une définition de la pensée algébrique formulée par Kaput (2008) comme cheminement vers les généralisations et l'expression de ces généralisations sous forme symbolique. Pour les jeunes enfants, le langage naturel et certaines représentations visuelles

* Université du Québec à Ottawa – Canada – elena.polotskaia@uqo.ca

** Université de Moncton – Canada – viktor.freiman@umoncton.ca

*** Université de Moncton – Canada – eeb7988@umoncton.ca

**** Université McGill – Canada – annie.savard@mcgill.ca

culturellement acceptées sont également considérés comme représentations sémiotiques bien valables (et même préférables).

Toujours dans le cadre de ce mouvement, les chercheurs comme Carpenter et coll. (2003) se sont intéressés aux potentialités de l'arithmétique et des connaissances numériques opérationnelles comme contexte pour introduire, chez les jeunes enfants, les idées liées aux propriétés fondamentales des opérations et les propriétés basiques de l'égalité. Selon nombreux chercheurs (ex., Squalli, 2015 ; Radford, 2014 ; Venant et Migneault, 2017), le contexte arithmétique permet de véhiculer une vision plutôt structurale de nombres et des opérations.

Une autre école de pensée (ex., Davydov, 2008 ; Schmittau, 2005) suggère qu'une certaine pensée relationnelle est préalable à l'arithmétique et peut servir de base au développement de la pensée algébrique. Pour Davydov, cette pensée relationnelle inclut une compréhension de la notion d'équivalence dans les contextes non numériques, notamment des propriétés physiques des objets (longueur, poids, volume, etc.). Elle inclut également une compréhension de certaines relations entre ces quantités comme, par exemple total composé de deux parties, c.-à-d. la quantité totale est équivalente à l'ensemble de deux quantités. Il faut souligner que ces quantités ne sont pas mesurées ni exprimées en nombres ; l'équivalence est déterminée par la comparaison directe des objets ou par déduction (si $A=B$ et $B=C$, donc $A=C$).

Dans cette optique, les expériences menées au Québec (Polotskaia et coll., 2023 ; elenapolotskaia.com) ont permis de concevoir des activités qui engagent les élèves dans une étude de structures additives dans un contexte non numérique, toujours dans le but de développer une perspective relationnelle. Cette approche équilibrée vise à favoriser une compréhension plus profonde et holistique des structures additives et des propriétés des opérations d'addition et de soustraction, au-delà de leur simple application arithmétique. En mettant cette approche sur une perspective longitudinale de développement de la pensée algébrique (relationnelle), Polotskaia et ses collègues (2024) se sont penchées sur un cadre d'analyse qui permettra de capter et clairement décrire la pensée relationnelle des élèves dans des contextes non numérique et mixte (numériques-schématiques) au début d'apprentissage.

II. CADRE CONCEPTUEL

Polotskaia et coll. (2024) se sont basées sur les quatre pratiques essentielles qui reflètent des aspects fondamentaux de Kaput (2008) pour définir leur cadre conceptuel d'algèbre précoce : généraliser, représenter, justifier et raisonner avec une structure et des relations mathématiques (Blanton et al., 2018). Une autre ligne de pensée qui a influencé leur travail provient de l'approche développementale proposée par le psychologue russe Vasily Davydov et ancrée dans l'école de pensée vygotskienne. Dans le cadre de cette approche, de nombreuses expériences (par exemple, Davydov, 1982 ; Mellone et coll., 2021 ; Eriksson et Eriksson, 2020) ont démontré que les jeunes enfants peuvent travailler avec des quantités continues (volume, longueur, etc.) sans compter ni utiliser des expressions numériques. Les enfants peuvent comprendre des relations entre des quantités, les exprimer symboliquement ($<$, $>$, $=$), et justifier leurs solutions logiquement. Ils existent donc des contextes (longueur, poids, etc.) accessibles aux jeunes apprenants pour étudier des relations quantitatives. Dans ces contextes, les enfants peuvent étudier, plus tôt dans leur parcours, des idées algébriques comme l'équivalence, l'utilisation de lettres, l'évaluation des expressions comme vraies/fausses, etc. Ainsi, si des contextes non numériques sont utilisés pour étudier les relations et les structures, les modes de communication et de représentation (modélisation) devraient également être non numériques.

Des chercheurs de Early Algebra (par exemple Radford, 2011 ; Boily et coll., 2020) ont montré que les enfants de 4 à 8 ans peuvent exprimer leur raisonnement sur les relations en utilisant des mots et des gestes spéciaux. Par exemple, pour exprimer la croissance d'une séquence non numérique, un enfant peut dire « en montant » et produire un geste correspondant (Boily et coll., 2020) ; un enfant peut utiliser des gestes pour attirer l'attention sur des aspects généraux de plusieurs structures (images) (Radford, 2011). Dans les expériences de Davydov (2008), la notation des lettres et les représentations schématiques ont été utilisées dès le début et ont aidé les élèves à exprimer leur compréhension. Plus tard dans le parcours, les élèves peuvent utiliser tous ces moyens de représentation et de communication dans des contextes de résolution de problèmes écrits ou d'équations.

En tenant compte du fait que la pensée mathématique des élèves peut refléter une compréhension complète ou partielle des structures ou des relations, et que les élèves peuvent exprimer leur pensée en utilisant des outils sémiotiques de différents niveaux d'abstraction, Polotskaia et coll. (2024) ont proposé le cadre bidimensionnel suivant pour analyser la pensée algébrique des enfants dès l'âge préscolaire dans des contextes non numériques ou mixtes. La première dimension reflète la qualité des relations qu'un élève utilise pour argumenter : relations partielles (plus grand, plus petit, identique) ou relations au sens de Davydov (1982) (équation). La deuxième dimension reflète le niveau d'abstraction des outils sémiotiques utilisés par l'élève : manipulation directe sans commentaires, utilisation du langage naturel et/ou de gestes pour exprimer sa pensée relationnelle, argumentation utilisant un système sémiotique formel culturellement partagé (autre que le langage naturel) (Annexe 1, Tableau 1).

Les auteurs (Savard et Polotskaia 2017; Polotskaia et coll., 2023) ont distingué deux paradigmes dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au primaire par la résolution de problèmes: celui dit opérationnel et un autre dit relationnel. Il a été démontré le potentiel du paradigme relationnel dans le contexte de problèmes écrits pour faire émerger, chez les élèves de 6 à 8 ans, un niveau d'abstraction accrue, notamment par l'utilisation de la modélisation des relations entre les quantités à l'aide de schémas pour en déduire l'opération arithmétique. Toujours dans ce paradigme, une forme spécifique de tâches a été conçue et expérimentée dans des classes de 1^{re} année (6 ans) au Québec (Savard et Polotskaia, 2017). Dans ce qui suit, nous analysons des extraits de deux leçons lors desquelles les enseignantes, formées lors de nos projets de recherche, utilisent les tâches expérimentales avec leurs élèves.

C'est la première fois que le modèle bidimensionnel est utilisé dans le contexte de la résolution de problèmes écrits. Ce contexte est habituellement traité de façon numérique et dans le paradigme opérationnel. Cependant, les deux enseignantes tentent d'utiliser des schémas des relations quantitatives et travaillent ainsi dans le paradigme relationnel. C'est ce traitement relationnel qui sera analysé pour détecter des éléments de la pensée relationnelle ou algébrique des élèves. Nous cherchons ainsi à opérationnaliser notre modèle, toujours en construction.

III. LES TRACES DE LA PENSÉE RELATIONNELLE DANS L'ANALYSE DE SITUATIONS ADDITIVES CHEZ LES ÉLÈVES DE PREMIÈRE ANNÉE

La **première leçon** propose aux élèves l'énoncé contenant des données incohérentes. *Cédric a 15 cartes. Samuel lui en donne 3. Cédric a maintenant 20 cartes.* Les élèves devaient détecter l'incohérence et analyser la situation à l'aide de schémas. Cet énoncé présente une relation additive de composition de type équation (total composé de deux parties), notamment, l'ensemble des cartes de Cédric à la fin est composé de ses cartes au début et celles données.

En lisant l'énoncé, un élève (E1) dit immédiatement que '*ce n'est pas bon (le problème), car ça ne fait pas 20, ça fait 18*'. Et à la question de l'enseignante : pourquoi tu penses que ça ne fait pas 20 ? E1 dit que '*15 plus 3, ça fait quinze, seize, dix-sept, dix-huit*'. Un autre élève (E2) dit qu'il faut en ajouter plus pour que ça fasse 20. L'enseignante demande de préciser ce qu'il faut avoir plus. E2 dit '*2 autres de plus*'. L'enseignante : ce qu'on te (à Cédric) donne ou ce que tu as déjà ? E2 affirme que c'est ce qu'on lui donne.

Dans cet épisode, l'élève E1 utilise une façon mathématique (*système sémiotique culturellement partagé*) pour argumenter sa conclusion que 20 « n'est pas bon ». Apparemment, il met en relation les nombres de cartes au début, des cartes données et l'état final pour formuler et réaliser l'opération correspondante (*une relation complète*). À son tour, E2 s'exprime en forme de relation (2 de plus) en faisant référence implicite à la relation entre les trois quantités en question (*une relation complète*) et aussi entre le 18 et le 20 (écart de 2). En plus, E2 identifie le rôle de « 2 autres » dans la relation principale comme les cartes données, ce qui est correct. Il communique dans un langage mathématique (*système sémiotique culturellement partagé*). Dans les deux cas, les élèves communiquent le fruit d'une *réflexion relationnelle avancée*.

Ensemble avec les élèves, l'enseignante a construit un schéma non numérique pour solliciter davantage la pensée relationnelle des élèves (Figure 2). Elle aide les élèves à associer chacun des trois segments à une quantité mentionnée dans l'histoire. Les réponses des élèves, bien que courtes, ne contenaient toutefois aucune référence explicite à une valeur numérique.



Figure 2 – Schéma représentant la relation dans sa forme générale

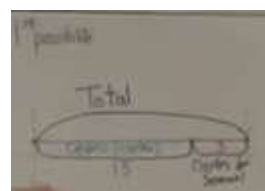


Figure 3 – Schéma analysant le cas 1 (on cherche le total)

La classe se met ainsi à examiner les trois hypothèses sur une donnée erronée (ce qui ne va pas dans l'énoncé). Le premier cas (le total de 20 ne va pas) ne semblait pas avoir posé des difficultés aux élèves. À partir de nombres qui étaient 'bons' (15 cartes au départ et 3 cartes données par Samuel), un élève a su poser la question (sur demande de l'enseignante) : *Il y a combien de cartes au total ?* et lorsque l'enseignante avait demandé de préciser, 'les cartes de qui', l'élève a reformulé la question : *Cédric a combien de cartes au total ?* Un autre élève (E3) appelé au tableau pour 'écrire une phrase mathématique' n'a pas hésité à mettre $15 + 3 = 18$. Ensuite, l'enseignante a demandé la précision de ce que le nombre 18 signifierait. E3 répondait que c'est 18 cartes de Cédric. Enseignante insiste pour éclaircir, 18 de Cédric, maintenant ou au départ ? E3 répond : *c'est les cartes de Cédric maintenant*.

On peut interpréter l'argumentation de E3 comme l'utilisation d'un *système sémiotique culturellement partagé* pour communiquer sa compréhension d'une *relation complète*.

En revenant au texte de l'énoncé initial (Figure 1) et le schéma général (Figure 2), l'enseignante demande quelle pourrait être la 2^e possibilité (de quelque chose qui ne va pas). Un élève propose que le nombre 3 (pointé par l'enseignante dans l'énoncé) qui représente *les cartes que Samuel donne à Cédric* pourrait ne pas être bon. L'enseignante dessine, avec la contribution des élèves, le schéma représentant cette possibilité en mettant de l'emphase sur la signification de rôle de chaque segment et de la quantité qu'il représente (Figure 4). Elle demande, entre autres, d'indiquer la quantité que l'on recherche (point d'interrogation), les quantités que l'on considère 'bonnes' dans l'énoncé initial (15 cartes de Cédric au départ et 20 cartes de Cédric à la fin) et la question que l'on se pose pour savoir la quantité recherchée.

Une fois le schéma construit et le rôle de chaque nombre dans la situation établi, les élèves sont appelés à formuler une phrase mathématique pour trouver le nombre de cartes que Samuel a donné à Cédric. L'enseignante explicite davantage (en pointant sur le schéma) : si on connaît le nombre de cartes de Cédric au départ et son nombre de cartes maintenant, que faire pour calculer le nombre de cartes que Samuel lui donne? Un élève appelé au tableau avait toutefois besoin d'aide d'un autre collègue de classe (E4) qui propose $20 - 15$.

Comme dans les cas précédents, nous pouvons faire l'hypothèse que E4 a utilisé une pensée relationnelle qui n'est d'ailleurs pas perceptible, mais qui se déploie dans l'action de communication explicite d'une opération arithmétique adéquate.

L'analyse s'est poursuivie avec le 3^e cas pour lequel le schéma a été construit de la même manière en mettant le point d'interrogation sur le segment représentant la quantité de départ. Encore, comme dans le 2^e cas, les élèves ont été capables, avec l'aide de l'enseignante, d'associer différentes quantités aux segments de schéma pour déterminer celles qui sont connues ('bons') et celle qui était inconnue ('pas bonne') en posant une question appropriée pour la retrouver (Figure 5). L'enseignante invite alors un élève (E5) de se présenter au tableau.

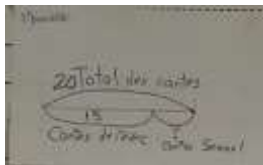


Figure 4 – Schéma représentant des relations dans le cas 2 (on cherche les cartes données par Samuel)

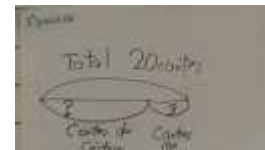


Figure 5 – Schéma représentant des relations dans le cas 3 (on cherche les cartes de Cédric de départ)

- Ens : Es-tu capable de me trouver la phrase mathématique ? (Élève vient au tableau). Regarde ces chiffres. Quelle phrase mathématique tu déciderais ?
- E5 : (écrit 15 au tableau ; en disant quelque chose qui n'est pas audible).
- Ens : (l'enseignante dit non et essaie de l'aider) Qu'est-ce qu'il y a sur le diagramme ici ; qu'est-ce que (sur le diagramme) qu'on sait (qui) est vrai ?
- E5 : Cédric en avait 20 ; Samuel lui a donné 3 autres.
- Ens : Oui
- E5 : Là Cédric en a 23.
- Ens : Non, au début Cédric n'en avait pas 20 (fait appel à un autre élève qui dit $20 - 3$, ce qui est, par la suite, écrit par l'élève au tableau).
- Ens : (au premier élève qui est toujours au tableau) : il manque quelque chose dans ta phrase ($20 - 3$)
- É5 : (ajoute un '+' à la fin de la phrase) $20 - 3 +$
- Ens : Non il faut mettre '='. Elle fait appel à un autre élève (calculateur) qui donne la réponse (obtenue avec la calculatrice). La phrase mathématique apparaît au tableau, par la suite : $20 - 3 = 17$.

Ici, on voit bien les difficultés de E5 de raisonner à l'aide des relations. Il semble être confus quant au rôle de chaque composante numérique (pas de relation partielle ou complète) et n'arrive pas à

trouver une opération mathématique adéquate et même utilise un symbole mathématique « + » incorrectement (la communication mathématique peu adéquate).

Une autre leçon (dans une autre classe) est organisée de la même façon, mais la situation à discuter présente une relation de comparaison : *C'est la fête de Zachary aujourd'hui. Zachary dit : il y a 3 filles de plus que de garçons à ma fête. Karolanne dit : il y a 7 filles. Charle-Olivier dit : il y a 5 garçons.*

Comme dans la leçon précédente, l'enseignante amène les élèves à remarquer l'incohérence des valeurs numériques dans l'histoire, discute et construit une représentation non numérique (schéma, Figure 6). Le groupe choisit une valeur « pas bonne » (le nombre de filles de plus que de garçons), formule la question sur la valeur à trouver et construit au tableau un schéma doté de données numériques et de point interrogation (Figure 7).

L'enseignante demande aux élèves de proposer une phrase mathématique pour calculer la valeur inconnue.

- E6 : Ah, je sais ! $7+5$.
- Ens. : (Écrit la phrase au tableau.) Ça devrait donner le nombre de filles de plus, que j'ai (ici).
- Plusieurs élèves : Non !
- Ens. : Montre sur le schéma : Ça veut dire que je prends mes 7 filles (montre la ligne des filles). Je vais rajouter mes 5 garçons (montre la ligne des garçons). Ça va me donner combien j'ai de plus de filles (montre le segment « de plus »)?
- Un élève : Oui !
- Plusieurs élèves : Non !
- Ens. : Vous n'avez pas l'air d'accord ! C'est comme si tu prenais ta ligne ici-là (montre la ligne des filles, dessine un segment au tableau), 7 filles, et je rajoute mes 5 garçons (ajoute un autre segment à droite du premier).
- Ens. : Et ça va me donner combien que j'ai des filles de plus ?
- Plusieurs élèves : Non.

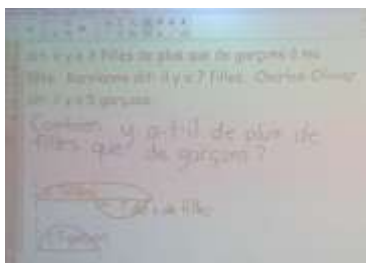


Figure 6 – L'énoncé et le schéma du cas 1 (la recherche de « filles de plus que de garçons »)



Figure 7 – Schéma additionnel (à droite) représentant le sens de la phrase $7+5$

Dans cet épisode, E6 propose une opération qui ne concorde pas avec la relation discutée. L'enseignante essaie d'aider les élèves à interpréter cette proposition en utilisant la représentation relationnelle, notamment de créer du sens relationnel à l'expression mathématique proposée par E6. En se référant au schéma construit, elle graduellement construit une autre représentation non

numérique où la ligne composée de deux segments représente le résultat de l'addition. Les élèves, qui observent cette démarche de l'enseignante, acceptent que la ligne ainsi obtenue ne corresponde pas à ce qu'on cherche. Évidemment, on ne peut pas juger si les élèves, en ce moment, pensent de façon relationnelle ou juste voient que la ligne est trop longue par rapport au segment recherché. C'est l'enseignante qui les guide et finit par divulguer la réponse, c'est elle qui pose des gestes sur la représentation schématique, pas les élèves.

À la suite de cet épisode, une autre élève (E7) propose une soustraction 7-5. L'enseignante l'invite à expliquer cette opération sur le schéma, mais l'élève demeure à sa place.

- Ens. : Où est le 7 ? Avec tes mains ici. Montre-moi ici (montre le schéma) ce qui doit se passer. (Elle attend, mais E7 ne répond pas.) Regarde, je prends 7 (elle montre avec ces mains la ligne de filles sur le schéma). Je vais en enlever quoi ?
- E7 : Moins 5.
- Ens. : Y est où le 5 ? Sur la représentation ici, où est mon 5 ?
- E7 : (regarde sur le schéma, mais ne s'y approche pas.) C'est Charle-Olivier (qui dit : il y a 5 garçons).
- Ens. : (montre la ligne de 5 garçons sur le schéma.) On prend 7, les amis (montre la ligne de 7 avec ses deux mains) et je vais y enlever le 5 (elle cache une partie du schéma avec un carton, Figure 8).
- Un élève : Ah !
- Ens. : Est-ce que c'est vrai que ça va me donner les filles de plus ?
- Plusieurs élèves : Oui !

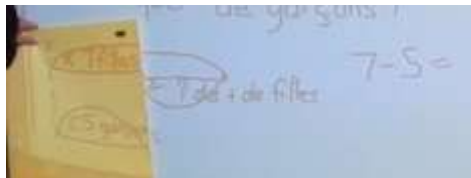


Figure 8 – L'enseignante cache une partie du schéma avec un carton.

Dans cet épisode, nous interprétons l'idée de E7, qui suggère 7-5, comme indice de la présence d'une pensée relationnelle, car cette opération ne peut pas être une traduction directe de l'expression « de plus que » et l'élève est capable d'établir une correspondance entre la valeur 5 et un élément de la représentation. Cependant, on ne peut pas valider cette interprétation avec certitude. La communication de l'élève est limitée à une réponse orale qui n'est pas complète. Si l'enseignante réussissait à faire poser des gestes et expliquer l'opération sur le schéma par l'élève, cela augmenterait notre certitude.

Dans la leçon, l'enseignante invite les élèves à interpréter le schéma en vue de tester leur compréhension à l'aide des paroles, des gestes et des expressions mathématiques. Cependant, peu d'élèves font de référence au schéma pour expliquer leur solution.

IV. DISCUSSION ET CONCLUSION

Nous avons analysé les communications de 7 élèves lors des discussions mathématiques en classe en 1re année du primaire (6-7 ans). Les élèves ont participé dans l'analyse des situations porteuses d'un

potentiel à développer leur pensée relationnelle. Dans ce contexte, nous avons utilisé le modèle de la pensée relationnelle développé précédemment pour le tester.

Dans le cas de la leçon 1, nous constatons que les élèves E1, E2 et E3 communiquent le fruit d'une réflexion bien avancée sur la relation donnée et le font de façon mathématique. Grâce aux questions de clarification posées par l'enseignante, nous pouvons confirmer notre hypothèse sur la nature de la pensée des élèves. Bien que la communication de E4 puisse elle aussi témoigner d'une pensée relationnelle, ni l'attribution de rôle à des quantités ni des gestes ne sont observés, car l'élève ne les a pas réalisés et l'enseignante ne les a pas demandés.

Dans le cas de la leçon 2, l'enseignante déploie beaucoup d'efforts pour solliciter des gestes et des explications de ses élèves. L'interprétation de la communication de E7 pose un problème, car l'élève refuse de manipuler sur le schéma pour expliquer davantage sa pensée. Il se peut qu'il n'ait pas encore appris à le faire. Son explication orale n'est pas développée non plus.

Quant à E5 de la leçon 1 et E6 de la leçon 2, notre modèle nous aide à identifier l'absence de la pensée relationnelle, car ce que ces élèves disent ou font ne correspond pas aux rôles des quantités dans l'histoire (la relation entre eux). Cependant, nous n'avons pas assez d'information pour identifier la place de communications de ces élèves dans notre modèle.

Finalement, nous devons constater que nos résultats semblent aller dans un sens plutôt binaire. Soit on identifie une pensée relationnelle avancée, soit on n'arrive pas à l'identifier avec certitude. La gestion de la discussion par l'enseignante et la capacité (limitée) des élèves de verbaliser leur pensée pourraient expliquer la difficulté d'associer le discours de l'élève au modèle proposé. Dans les deux leçons, ce sont les enseignantes qui parlent, qui construisent les schémas et qui les manipulent plus que les élèves. Il est possible que leurs élèves n'aient pas beaucoup d'expérience de travail avec des schémas et ne sachent pas trop les inclure dans le discours à l'aide de gestes ou paroles. Il est aussi possible qu'il y ait un manque de formation des enseignantes par rapport à la gestion de l'activité sollicitant la pensée relationnelle des élèves. Par exemple, dans la leçon 1 (dans les épisodes analysés), l'enseignante n'invite pas les élèves à montrer quoi que ce soit sur le schéma. Dans la leçon 2, l'enseignante questionne beaucoup ses élèves sur les rôles des quantités et les invite à montrer leur raisonnement sur le schéma. Cependant, elle analyse le schéma beaucoup plus par elle-même. Une troisième possibilité est que la construction du schéma dans l'activité n'est pas la responsabilité des élèves. Il n'y a pas donc d'occasion de les observer poser de gestes comme c'est prévu dans le modèle.

Pouvoir interpréter la communication d'un élève durant une leçon est très important pour les recherches sur le développement de la pensée algébrique. Une interprétation adéquate aide à évaluer l'état d'avancement de l'apprentissage de l'élève et de suggérer des interventions pertinentes. Cependant, une communication pas suffisamment riche, qui n'inclut pas de modalités variées (parole, phrase mathématique, schéma, geste, manipulation), ne joue pas à la faveur de l'interprétation didactique. Notre analyse à l'aide du modèle bidimensionnel démontre la nécessité d'accorder une importance spéciale au développement de modes de communication variés chez l'enseignante et chez l'élève pour enrichir le discours mathématique en classe et pour faciliter l'interprétation du raisonnement mathématique des élèves. Cette conclusion est en lien avec la vision du programme de formation du Québec qui insiste sur l'utilisation du matériel de manipulation et le développement de la compréhension profonde. Cependant, en classe du primaire, l'utilisation du matériel de manipulation est souvent réduite à la représentation des nombres ou des opérations sur des nombres. Les relations quantitatives dans le sens de Davydov ne font pas partie de ce programme.

L'idée d'utiliser de nombreux outils de communication dans un discours mathématique s'aligne bien avec la théorie de Duval (2006) qui explique que le transfert de la pensée d'un registre sémiotique à un autre est ce qui peut confirmer une compréhension mathématique.

Revenant à notre modèle, nous proposons qu'il doive être complété par une méthode d'observation active. Une observation passive peut ne pas rapporter assez d'information. L'observateur (ou dans notre cas l'enseignante) doit proposer à l'élève de communiquer une même idée via différents registres. Pour les cas de problèmes écrits, cela peut inclure la parole, la construction d'un schéma ou la manipulation avec un schéma donné, des expressions mathématiques, des gestes, etc.

Dans des travaux sur la pensée relationnelle et algébrique (Davydov, 2008; Eriksson, et Eriksson, 2020; Polotskaia et coll., 2024), on avance l'idée que l'étude des relations quantitatives de base doit être une des préoccupations centrales au début de l'apprentissage des mathématiques. L'idée de relation au sens de Davydov (1982) doit être explicitement incluse dans le programme de formation du Québec. Quant au processus d'enseignement-apprentissage qui vise à développer la pensée relationnelle des jeunes élèves, il nous semble judicieux de proposer de repenser le mode de fonctionnement désiré lors de la résolution de tâches mathématiques en classe. Il ne suffit pas de manipuler des objets et commenter cette action oralement. Il ne suffit pas non plus de présenter un schéma relationnel au tableau et en discuter oralement. Il faut solliciter l'élève à utiliser plusieurs outils sémiotiques (Duval, 2006) dans une même communication pour exprimer sa pensée. Ainsi, l'élève va profiter de la pratique de transformation de ses pensées d'un registre à un autre pour approfondir sa compréhension. L'enseignante sera en mesure de mieux interpréter la communication de l'élève pour mieux gérer le processus d'enseignement et ainsi de répondre aux besoins éducatifs des élèves.

En conclusion, nous constatons que des limitations de l'utilisation d'un modèle théorique pour interpréter le travail en classe au primaire nous ont menés à questionner le mode de fonctionnement et des interactions didactiques comme un moyen crucial du développement de la pensée mathématique.

RÉFÉRENCES

- Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. et Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. Dans C. Kieran, (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 27-49). Springer International.
- Blanton, M., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A. M., Stylianou, D. A., Knuth, E., Isler-Baykal, I. et Strachota, S. (2019). Does early algebra matter? The effectiveness of an early algebra intervention in grades 3 to 5. *American Educational Research Journal*, 56(5), 1930-1972.
<https://doi.org/10.3102/0002831219832301>
- Boily, M., Polotskaia, E., Lessard, G. et Anwandter Cuellar, N. S. (2020). Les suites non numériques et le potentiel de la pensée algébrique chez les élèves du préscolaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 11-35.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L. et Levi, L. (2003). *Thinking mathematically*. Heinemann.
- Davydov, V. V. (1982). Psychological characteristics of the formation of mathematical operations in children. Dans T. P. Carpenter, J. M. Moser et T. A. Romberg (dir.), *Addition and subtraction: Cognitive perspective* (p. 225-238). Lawrence Erlbaum Associates.
- Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction. A theoretical and experimental psychological study*. Nova Publisher.

- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Eriksson, H. et Eriksson, I. (2020). Learning actions indicating algebraic thinking in multilingual classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 106(3), 363-378.
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? Dans J. Kaput, D. W. Carraher et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 5–17). Routledge.
- Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 79-105). Springer International.
- Mellone, M., Ramploud, A., et Carotenuto, G. (2021). An experience of cultural transposition of the El'konin-Davydov curriculum. *Educational Studies in Mathematics*, 106, 379-396.
- Polotskaia, E., Anwandter-Cueuillard, N., Savard, A. et Robert, V. (2024, juillet). *Learning routes for algebraic thinking in preschool* [Rapport de recherche]. PME.
- Polotskaia, E., Savard, A., Felus, O. et Freiman, V. (2023). Equilibrated development approach to word problem solving in elementary grades: Fostering relational thinking. Dans K. M. Robinson, D. Kotsopoulos et A. K. Dubé (dir.), *Mathematical Teaching and Learning*. Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-31848-1_3
- Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. Dans *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (p. 303-322). Springer Berlin Heidelberg.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.
- Savard, A. et Polotskaia, E. (2017). Who's wrong? Tasks fostering understanding of mathematical relationships in word problems in elementary students. *ZDM*, 49(6), 823-833. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0865-5>
- Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking: A Vygotskian perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37, 16-22.
- Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF2015 « Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage », 10-14 octobre 2015, Université d'Alger, Algérie* (p. 346-356). <https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF15083.pdf>
- Venant, F. et Migneault, P. (2017). Développer la pensée algébrique précoce en jouant? Représentations et manipulations dans Dragon Box. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 33-55.

ANNEXE 1

Tableau 1 – *Cadre bidimensionnel de la pensée algébrique (Polotskaia et coll., 2024)*

Relation utilisée / Outil de communication	Relation partielle, plus que, moins que, égale (identique)	Relation de type équation (Composition ou comparaison additive)
Manipulation avec des objets/schéma (sans commentaires)	Essai-erreur organisé; Choix d'objet adéquat.	N'est pas possible de juger.
Argumentation dans le langage naturel ou par geste	Élève nomme et/ou montre par un geste la relation partielle.	Élève nomme et/ou montre par des gestes la relation complète
Argumentation en utilisant un système sémiotique culturellement partagé	Élève représente la relation partielle symboliquement ou schématiquement et l'utilise pour avancer son raisonnement	Élève représente la relation complète symboliquement ou schématiquement et l'utilise pour avancer son raisonnement

ÉGALITÉ DE QUANTITÉS ET DÉVELOPPEMENT D'UNE PENSÉE STRUCTURALE EN ARITHMÉTIQUE

| CONSTANTIN* CÉLINE, COULANGE** LALINA ET THEIS*** LAURENT

Résumé | Ce texte propose d'explorer comment des élèves de 6-7 ans peuvent mettre en œuvre une pensée structurale (Kieran, 2022) en arithmétique dans des tâches centrées sur des égalités et leurs écritures symboliques. En nous inscrivant dans une approche sémio-linguistique en didactique des mathématiques (Drouhard, 2012) nous nous intéressons à ce que recouvre la compréhension du signe « = » et la notion d'égalité du point de vue d'une théorie mathématique des quantités (Chambris et Subramaniam, 2023).

Mots-clés : pensée structurale, égalité, arithmétique, quantités

Abstract | In this paper, we explore how 6- to 7-year-olds can develop a structural thinking (Kieran, 2022) in arithmetics when facing equivalence tasks and their symbolical writing. Taking a semio-linguistic approach (Drouhard, 2012) in didactics of mathematics, we focus on pupils' understanding of the equal sign and the concept of equality from a theory of quantities perspective (Chambris et Subramaniam, 2023).

Keywords: Structural thinking, equality, arithmetic, quantities

I. PENSÉE STRUCTURALE, ÉGALITÉ ET CONNAISSANCES ARITHMÉTIQUES

1. *Pensée structurale et égalité*

Les recherches internationales s'inscrivant dans le courant de l'*early algebra* ont très tôt mis en avant l'importance d'une pensée structurale comme susceptible de favoriser l'entrée dans une pensée algébrique, la pensée structurale étant essentiellement caractérisée par la perception de relations entre des nombres correspondant à des propriétés de nombres et d'opérations (Mason et al., 2009). Dans ce même courant, de nombreuses recherches se sont intéressées à l'égalité d'expressions numériques (par exemple Pang et Kim, 2018 ; Madej, 2021)¹. Nous retenons en particulier de ces travaux que les significations d'égalités qui seraient le plus à même de contribuer au développement d'une pensée structurale, reposent sur des relations entre expressions numériques de part et d'autre du signe « = » par opposition à des calculs à réaliser et convoquent des connaissances arithmétiques liées aux propriétés des nombres et des opérations. Les recherches réunies par Kieran (2022) autour de la dimension structurale tentent notamment d'identifier la (ou les) façon(s) dont les élèves structurent ou transforment les expressions numériques associées à ces égalités. Certains travaux se sont en particulier intéressés à des stratégies relevant de la compensation que l'on pourrait traduire par des égalités comme « $3 + 5 = 4 + 4$ » par exemple. Celles-ci correspondent au fait que quand une « partie » d'un nombre est « transférée » à un autre (Carpenter et al., 2003) ou quand un nombre est retiré à un terme d'une somme et ajouté à l'autre (Schifter, 2018), comme « 1 de 5 à 3 » dans « $3 + 5$ », la somme est inchangée. D'autres recherches relèvent des stratégies orientées par la décomposition de nombres permettant de

* LIRDEF, Univ Montpellier, Univ Montpellier Paul Valéry, Montpellier – France – celine.constantin@umontpellier.fr

** LaB-E3D (EA 7441), Univ Bordeaux – France – lalina.coulange@u-bordeaux.fr

*** Université de Sherbrooke – Canada – Laurent.Theis@USherbrooke.ca

¹ Kieran (2022) signale que d'aucuns parlent plus de pensée relationnelle. Elle-même situe certaines égalités du côté de la pensée analytique en insistant sur les interactions importantes entre ces types de pensées.

substituer à un terme d'une somme, une somme de plusieurs nombres ou inversement (Kieran et Martínez-Hernández, 2022). Cette variété apparente dans les stratégies d'élèves envisagées dans les recherches pose la question des connaissances arithmétiques potentiellement convoquées dans la transformation d'expressions numériques associées à des égalités.

2. *Connaissances arithmétiques*

Une majorité de ces travaux rapproche ces connaissances de propriétés des nombres et des opérations qui seront explicitées, généralisées et formalisées plus tardivement, comme la propriété d'associativité (Carpenter et al., 2003). Toutefois, Kieran (2022) souligne les spécificités potentielles des connaissances arithmétiques qui participent du développement d'une pensée structurale. À partir des travaux de Freudenthal (1983), elle signale des structures possibles (d'ordre, d'addition, de multiplication), d'une diversité bien plus grande que celle classiquement envisagée à partir des propriétés « basiques » des nombres et des opérations. Nous rejoignons Kieran (2022) et Kieran et Martínez-Hernández (2022) sur le fait qu'identifier les propriétés arithmétiques sur lesquelles repose l'interprétation d'égalités numériques par des élèves de primaire ne va pas de soi. À l'instar de Chambris et Subramaniam (2023), nous faisons l'hypothèse de connaissances transparentes dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire qui vont de pair avec une théorie mathématisée des quantités qui pourrait se constituer comme fondement pour la construction des nombres. Si cette perspective a été explorée dans de nombreux travaux (par exemple, Smith et Thompson, 2007 ou Davydov, 1975), nous nous inscrivons dans la perspective de l'étude renouvelée d'une théorie des quantités telle qu'amorcée par Chambris et Subramaniam. Notre démarche se rapproche d'ailleurs de celle de ces auteurs qui défendent l'idée d'un nécessaire raffinement des concepts pré-numériques tels que développés dans ces travaux afin de mettre en lumière la manière dont les raisonnements sur les quantités peuvent contribuer à la construction de significations des nombres, dans un aller-retour entre études cognitives et élaboration théorique. Notre point de vue s'attache toutefois à la question du rôle des signes dans la construction de significations.

3. *Signes, représentations sémiotiques iconiques et symboliques*

Il nous paraît important de prendre en compte la diversité de « signes » potentiellement à l'œuvre dans l'activité de jeunes élèves sur les égalités car l'introduction des écritures symboliques et du signe « = » se fait souvent avec des collections de cubes, de jetons ou de doigts, représentées voire manipulées par les élèves (Constantin et Coulangue, 2022). Nous situant dans une approche sémiolinguistique en didactique des mathématiques (Drouhard, 2012), nous interrogeons le rôle des représentations sémiotiques (Duval, 2006) qui donnent à voir et contribuent à façonner l'activité des élèves sur les égalités, que ces représentations soient symboliques algébriques, matérielles ou iconiques². L'une des caractéristiques des représentations sémiotiques iconiques tient en particulier à leur ambivalence sémantique (Constantin et Coulangue, 2022), ces représentations pouvant se référer tantôt à un nombre tantôt à une collection (dont le sens est alors porté par l'organisation spatiale de ses éléments, contrairement au cas où elle se réfère directement au nombre). Nous faisons l'hypothèse que des représentations iconiques contribuent, sous certaines conditions, à la construction de significations des écritures symboliques d'égalités, adossées à des propriétés sur les quantités. Celles-ci ne sont toutefois pas toujours aisées à identifier (Constantin et Coulangue, *à paraître*).

² Dans la suite du texte, nous regrouperons sous le terme iconique des représentations constituées d'objets comme des cubes ou des doigts en présence ou imagés, manipulables effectivement ou mentalement.

II. UNE ANCIENNE EXPÉRIMENTATION AUTOUR DU SIGNE « = »

Les données analysées dans cette communication sont issues de la recherche doctorale d'un des co-auteurs (Theis, 2005) dont l'objectif était de décrire le processus de compréhension du signe « = » chez des élèves de la première année du primaire (6 à 7 ans). Pour ce faire, une expérimentation didactique a été réalisée, avec une séquence d'enseignement individualisée et adressée à trois enfants, précédée d'un prétest et suivie d'un post-test. Dans Theis (2005), les éléments suivants ont guidé l'élaboration de la séquence (de 6 à 9 séances individuelles d'une trentaine de minutes) mise en œuvre dans le dernier tiers de l'année scolaire. (1) Les tâches se sont basées sur une analyse conceptuelle de la relation d'égalité appuyée sur le modèle de compréhension de Herscovics et Bergeron (1989). (2) Les tâches étaient élaborées pour favoriser un lien entre des représentations sémiotiques matérielles (cubes ou jetons) et une écriture mathématique. Vers la fin de la séquence seulement, le travail s'est fait exclusivement sur l'écriture. (3) La signification du signe « = » a été explicitée dans la première séance, comme indiquant qu'on retrouvait la même quantité des deux côtés du signe, dans une situation qui présentait une opération à droite du signe « = ». (4) Deux types de situations ont été proposées pour l'égalité: des situations d'inclusion dans lesquelles le tout inclut les parties, et des situations de comparaison de collections. (5) Différents types d'égalités ont été travaillées $a = b + c$ ou $a + b = c$ puis $a + b = c + d$. (6) Trois types de tâches ont été proposés aux élèves: déterminer si une égalité donnée est vraie ou non ; ajuster une égalité si elle a été identifiée comme étant fausse et déterminer une inconnue dans une égalité pour que celle-ci soit vraie.

Dans cet article, nous prenons appui sur des matériaux recueillis lors de cette expérimentation auprès de deux des trois élèves concernés, nommées Mélissa et Caroline, afin de documenter leur cheminement tout au long de l'expérimentation, du point de vue du développement d'une pensée structurale. Si les variables didactiques de la séquence expérimentée n'avaient pas initialement été pensées à cet effet, certaines des caractéristiques des tâches proposées nous ont paru pouvoir être réinterrogées de ce nouveau point de vue. Nous cherchons ainsi à élucider les connaissances arithmétiques potentiellement à l'œuvre dans les stratégies de Mélissa et Caroline et les conditions de leur émergence, au regard des représentations sémiotiques en présence dans les tâches expérimentées. Précisons d'emblée que les tâches proposées à ces deux élèves ne sont pas toujours identiques, nous y reviendrons au regard de leur cheminement.

III. DEUX PARCOURS D'ÉLÈVES DANS LA SÉQUENCE : MÉLISSA ET CAROLINE

1. Une propriété arithmétique « commune »

Une première connaissance arithmétique semble émerger rapidement des tâches proposées pour les deux élèves. Nous proposons la formulation suivante de la propriété arithmétique associée.

Une quantité A composée de B et de C étant plus petite (plus grande) qu'une quantité A' de D, si on augmente (diminue) de D l'une ou l'autre des parties composant A, *i.e* si on augmente (diminue) B ou C de D, alors on augmente (diminue) A d'autant, et A et A' sont égales.

Figure 1 – Formulation de la propriété arithmétique P1³

Pour Caroline, une connaissance liée à cette propriété émerge dès la première séance (qui suit le prétest). Des cubes sont disposés devant elle sur deux feuilles distinctes, celle de gauche comporte 6

³ Notons que la première partie s'appuie sur l'une des propriétés fondamentales des quantités identifiées par Chambris (2022) reliant structure d'ordre et structure additive: « si $a < b$ alors il existe c tel que $a + c = b$ » (p. 76)

cubes non organisés spatialement et celle de droite comporte 5 cubes organisés en deux sous-ensembles de 2 et 3 cubes. Elle est invitée à dénombrer chaque collection et à placer des cartons comportant des écritures symboliques algébriques sous chacune. Caroline s'exécute et place correctement les cartons « 6 » et « $2 + 3$ », réalisant par là-même une conversion entre ces représentations sémiotiques, ce qui a déjà été travaillé dans les tâches précédentes.



Figure 2 – Première tâche⁴ associée à la propriété P1 pour Caroline (Séance 1).

Caroline doit décider si on peut ou non mettre le signe « = » entre les deux expressions. Elle s'appuie spontanément sur les représentations sémiotiques iconiques des cubes pour raisonner et ramène la tâche donnée à une comparaison de cardinaux des deux collections représentées. Une fois les quantités concernées identifiées (5 et 6), elle conclut qu'on ne peut pas mettre le signe « = ». Une nouvelle tâche lui est alors proposée : il s'agit de modifier les représentations sémiotiques, à la fois iconiques et symboliques pour pouvoir écrire le signe « = ».

Et si on voulait mettre un signe « = », qu'est-ce qu'il faudrait changer ? (*rajoute 1 cube aux 3 cubes*). Est-ce qu'on peut le mettre maintenant ? **Oui**. Est-ce que tu peux lire ce qui est écrit ? **$6 = 2 + 3$** . C'est correct maintenant ? **Oui**. Tu en as $2 + 3$ ici maintenant ? **Non**. Qu'est-ce qu'il faudrait changer encore. **Enlever ça** (« $2 + 3$ »). Qu'est-ce qu'il faut mettre ? (*écrit « $6 = 2 + 4$ » sur un carton et le met en dessous*).

Le fait que Caroline envisage rapidement l'ajout d'un cube nous amène à supposer qu'elle a identifié que la quantité associée à la collection sur la feuille de droite est plus petite de 1 que la quantité associée à la collection de cubes représentée sur la feuille de gauche. Certes l'ajout d'un cube à la sous-collection de trois cubes ne trouve pas directement son pendant dans les écritures symboliques, Caroline ne proposant pas directement de remplacer le « 3 » par un « 4 » dans « $2 + 3$ ». Il n'en demeure pas moins qu'une connaissance arithmétique associée à P1 émerge rapidement dans l'accomplissement de cette tâche, à partir de la comparaison de deux collections dont l'une est envisagée comme étant composée de deux sous-collections.

Pour Mélissa, nous avons relevé plusieurs tâches l'amenant à convoquer cette même connaissance arithmétique. Tout comme pour Caroline, la connaissance concernée fait l'objet d'une formulation dès la première séance de l'expérimentation.

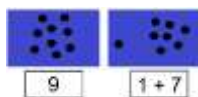


Figure 3 – Première tâche associée à la propriété P1 pour Mélissa (Séance 1).

Après avoir dénombré et mis en place les cartons, Mélissa raisonne à partir des écritures symboliques pour justifier qu'on ne peut pas mettre le signe « = » (en disant que « 9 » « ça n'est pas 8 »). Elle se réfère toutefois d'emblée aux collections de jetons en présence et répond rapidement « il faut en sortir un » pour répondre à la question suivante.

Qu'est-ce qu'il faut faire pour qu'on puisse mettre le signe « = » ? **Il faut en sortir un** (*des 9 jetons*). Qu'est-ce que tu écrirais à la place ? (*réfléchit, et écrit 7 à droite du + puis 2 à gauche pour faire $2 + 7$*)

⁴ Pour chaque tâche, nous avons choisi de représenter les cubes ou les jetons en présence de la même manière à l'aide de points pour en montrer la disposition.

Nous supposons que Mélissa a identifié le fait que les quantités totales différant de 1, elle pouvait les évaluer en diminuant de 1 la collection de 9 jetons. Lorsqu'elle est invitée à modifier l'écriture, elle ne remplace toutefois pas « 9 » par « 8 ». Elle opère sur l'autre expression numérique en remplaçant « 1 » par « 2 ». On peut penser qu'elle convoque un fait numérique connu renvoyant à une décomposition de 9 à partir de 7 ou de la recherche d'un complément à 9 de 7 par calcul. Toutefois on peut aussi faire l'hypothèse qu'elle perçoit l'ajout de 1 à l'une des deux quantités qui compose la quantité « totale ». Une tâche donnée par la suite ($8 \text{ --- } 4 + 3$) dans le seul registre des écritures symboliques renforce cette deuxième hypothèse.

Est-ce qu'on peut mettre un signe « = » ici ? **Non, parce que, ici, c'est 8, et $4 + 3$, ça donne 7. Alors, il faut mettre un 5 ici. Je mettrais $5 + 3$ ou $4 + 4$. (écrit « $8 = 4 + 4$ »)** Est-ce qu'on peut mettre un signe « = » maintenant ? **Oui, parce que, ici c'est 8, et ici, $4 + 4$, ça donne 8 aussi.**

Dans cette deuxième tâche, quand il s'agit d'évaluer 7 à 8, Mélissa mobilise plus visiblement une connaissance associée à la propriété P1, en montrant sa capacité à la réinvestir de façon flexible dans la transformation de l'écriture symbolique « $4 + 3$ » en « $5 + 3$ » ou « $4 + 4$ », ce qui renvoie bien à l'augmentation de l'une ou de l'autre quantité composant le « tout ».

Ainsi, pour ces deux élèves, la comparaison de quantités qui diffèrent de 1 provoque rapidement une augmentation ou une diminution de la quantité composée, se traduisant à son tour très vite par un ajout ou un retrait de 1 à l'une des quantités qui la composent. Ceci correspond à une connaissance relevant de la propriété arithmétique P1, dans le cas particulier d'une différence de 1. Pour Caroline cette connaissance s'exprime d'abord comme des transformations des représentations iconiques avant d'être converties (et parfois de façon laborieuse) dans le registre symbolique quand Mélissa envisage d'emblée des transformations des écritures symboliques de manière plus concomitante. Toutefois pour ces deux élèves, on peut penser que des caractéristiques intrinsèques des représentations iconiques favorisent de manière importante l'émergence d'une telle connaissance arithmétique, l'ajout ou la diminution d'1 à la quantité composée se reportant presque nécessairement à l'ajout ou à la diminution d'1 à l'une des quantités qui la composent. Pour cette raison entre autres, même si le point de départ est une comparaison de quantités (correspondant à des expressions numériques de part et d'autre du signe « = » dans le registre symbolique) qu'il s'agit d'évaluer, nous nous questionnons sur son potentiel dans le développement d'une pensée structurale. Nous y reviendrons.

2. Une propriété arithmétique inégalement convoquée

Une autre propriété arithmétique nous a semblé en arrière-plan de connaissances émergentes mais de manière plus inégale dans les cheminements de ces deux mêmes élèves. Nous en proposons la formulation suivante :

Une quantité A composée de B et de C est égale à une quantité A'. Si A' est composée d'une quantité plus grande (plus petite) que B – soit B augmentée (diminuée) de D – elle est composée d'une quantité plus petite (plus grande) C - C diminuée (augmentée) de D.

Figure 4 – Formulation de la propriété arithmétique P2

Lors du prétest et tout au long de la séquence, Mélissa convoque à plusieurs reprises des « déplacements » d'un cube d'une sous-collection à l'autre, ces deux sous-collections représentant une quantité composée. La présence concomitante de certaines écritures symboliques et des représentations iconiques semble contribuer à piloter des comparaisons des quantités correspondant aux sous-collections en jeu ou aux termes de sommes.

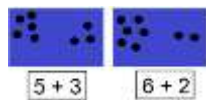


Figure 5 – Un déplacement pour comparer des quantités composées (Mélissa, Séance 5)

Est-ce qu'on peut mettre un signe « = » ici ? (*réfléchit*) **Oui**. Pourquoi penses-tu cela ? **Parce que 5 + 3, ça donne 8 et 6 + 2, ça donne 8** (*met le signe « = »*). Peux-tu me montrer aussi avec les cubes qu'il y en a la même quantité ? [...] **Il faut en mettre un de ceux-ci** (*des 6 à droite*) **ici** (*des 2 à droite*).

Si Mélissa convoque d'emblée les quantités totales, elle justifie l'égalité de « 5 + 3 » et de « 6 + 2 » de manière complémentaire en envisageant le déplacement d'un cube d'une représentation iconique à l'autre, tout en réalisant des conversions dans le registre des écritures symboliques. Toutefois plusieurs observables nous amènent à penser que la validation de l'égalité est à ce stade principalement fondée par une action de déplacement qui, de manière sensible, ne fait ni diminuer ni augmenter la quantité totale de cubes, plutôt que par une propriété des quantités composées. D'une part, lors du pré-test, Mélissa justifie à plusieurs reprises la conservation de quantités face à des déplacements de l'intervenant en disant « parce que tu n'en as pas sorti »⁵. D'autre part, on note la prégnance de verbes d'action liés au déplacement (d'un cube) qui renvoie aux propriétés intrinsèques des représentations iconiques en présence (« il faut en mettre un de ceux-ci »). Autrement-dit la conservation ne dérive pas de la modification de la structure liée aux quantités composées et d'une propriété comme P2.

Pourtant, lors de la dernière séance, pour statuer sur la validité d'une égalité à partir des seules écritures symboliques « 5 + 4 » et « 6 + 3 », le discours de Mélissa évolue :

Pourquoi penses-tu cela ? **Parce que 5 + 4, ça donne 9, et 6 + 3, ça donne 9 aussi. Mais on peut faire, et ici, avec, le 6, pour que ça donne la même chose, il faut que ce soit un peu plus petit.** Est-ce que tu peux m'expliquer un peu plus ? **Regarde, ici, c'est 5 + 4, et ici, c'est 6 + 3, alors on peut faire 5 ici (à la place du 6), mais si c'est 6, il ne faut pas mettre 4, mais quelque chose d'un peu plus petit.**

De nouveaux arguments liés à la comparaison de quantités apparaissent: « 6 » étant plus grand que « 5 » (augmenté de 1), on doit substituer à « 4 » quelque chose de plus petit (diminué de 1). Cette transformation d'écriture se joue dans le seul registre des écritures symboliques tout en restant référée à des quantités composées qu'il s'agit cette fois de comparer, en prise d'appui sur une relation d'ordre entre les parties. Ceci nous paraît constituer une avancée notable en direction de P2 avec un possible début de généralisation *via* des verbalisations dépassant le cas particulier d'une augmentation ou diminution de 1 (« un peu plus petit »). La rapidité avec laquelle Mélissa accomplit la tâche suivante, compléter « 2 + 4 = ? + 1 », en évoquant la substitution de « 1 » à « 2 » dans la deuxième sous-expression numérique pour en conclure « 5 » de manière quasi-immédiate, nous semble l'indice supplémentaire d'une nouvelle connaissance liée à cette propriété arithmétique qui devient opérationnelle pour envisager des traitements intrinsèques aux écritures symboliques.

Si un certain nombre de conditions ont semblé réunies pour que Mélissa construise des connaissances associées à P2, il n'en est pas tout à fait de même pour Caroline. On trouve un peu les mêmes prémisses de certaines de ces connaissances dans des traitements d'abord intrinsèques au registre de représentation sémiotiques iconiques, soit des actions de déplacement d'un cube d'une partie à l'autre. Ainsi lors de la troisième séance, après quelques difficultés rencontrées pour comprendre la consigne, Caroline modifie quelque peu la tâche en réorganisant une collection de 8 cubes en deux sous-collections de 4 cubes, en vue de compléter l'égalité lacunaire « 5 + ... = 8 ». Ceci lui permet d'envisager assez rapidement que la quantité « manquante » (dans le registre symbolique) ou

⁵ Ceci renvoie d'ailleurs à la définition de l'égalité comme étant « ni plus grand ni plus petit » et fondée par le principe de trichotomie dans la théorie des quantités développée par Subramaniam et Chambris (à paraître).

« cachée » dans le registre iconique correspond à « 3 », après le déplacement d'un cube d'un sous-ensemble de 4 vers l'autre, pour obtenir 5.

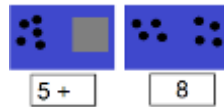


Figure 6 – Un déplacement pour compléter une égalité lacunaire (Caroline, Séance 3)

Toutefois, dans l'accomplissement de cette tâche comme pour d'autres, Caroline exprime le sentiment d'avoir « triché ». Est-ce parce qu'elle manque de moyens de contrôle sur une telle stratégie ? Par la suite, elle semble d'ailleurs peiner à réinvestir une telle stratégie, faute peut-être de connaissances relevant de la propriété P2. Ainsi lors de la sixième séance, lorsqu'il s'agit à nouveau de déterminer l'inconnue pour que l'égalité soit vraie (mais avec deux sommes de deux termes), Caroline, visiblement embêtée par la question, réfléchit et propose « 1 ».



Figure 7 – Un déplacement sans recomposition (Caroline, Séance 6)

J'ai déjà triché parce que j'ai fait comme ça. Il y avait ceux-ci (montre 6 cubes sur la feuille de droite) et après j'en ai enlevé 1 (sort 1 cube du sous-ensemble de 6 et le met à côté) et j'ai mis 1 sur le sac aussi.

Elle paraît bien diminuer une des deux quantités représentées à droite en lien avec la comparaison entre 5 et 6, mais en perdant de vue ce qui en découle pour l'autre partie et la quantité totale, la quantité 1 ôtée à 6 n'étant pas appréhendée comme « à rajouter à 2 ». Si elle parvient à le faire avec l'aide de l'intervenant, ce n'est que lors de la huitième séance qu'elle paraît prendre conscience de l'effet de la modification d'une quantité sur l'autre si l'on veut conserver la quantité composée à l'occasion de la tâche présentée à la figure 8.

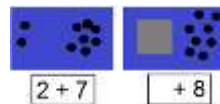


Figure 8 – Un déplacement et une recomposition (Caroline, Séance 8)

J'ai regardé 7 et ce cube (1 des 2 cubes à gauche), et j'ai pensé qu'il en resterait un dans la boîte.

Ce faisant, Caroline anticipe (en parlant au conditionnel) le résultat d'une action de déplacement, l'ajout d'un cube à une quantité conduisant nécessairement à la diminution de ce même cube de l'autre si l'on ne veut pas « modifier » le tout. Cette évolution ne semble cependant pas se stabiliser par la suite, et ne pas pouvoir prendre la forme aboutie prise dans le discours de Mélissa, et ce, sans doute pour différentes raisons. En effet, la succession de tâches présentées à Caroline ne fait pas apparaître une différence de 1 entre deux quantités au moment où ces connaissances émergent contrairement à Mélissa. Le fait que Caroline ne s'autorise pas beaucoup à déplacer les cubes (malgré les relances de l'intervenant qui l'y invite) a peut-être également joué un rôle. Ainsi pour une autre tâche dans la même séance associée à l'égalité lacunaire « $2 + 8 = ? + 1$ » proche de celles déjà rencontrées, Caroline compte les cubes de la sous-collection de 8 cubes et un cube de la sous-collection de 2 cubes, sur la feuille de gauche avant d'annoncer « neuf », sans pour autant envisager l'action de déplacement d'un cube correspondant au remplacement de « 2 » par « 1 », pourtant apparue en amont.

IV. VERS DE NOUVELLES BALISES POUR LE DÉVELOPPEMENT D'UNE PENSÉE STRUCTURALE FONDÉE PAR LES QUANTITÉS ?

Nos analyses nous ont permis d'identifier deux propriétés relevant d'une théorie mathématique des quantités (Subramaniam et Chambris, à paraître), l'une renvoyant à des connaissances qui émergent rapidement, contrairement à l'autre, les connaissances associées ne se pérénisant que pour l'une des deux élèves seulement. Sur la base des résultats de notre étude, nous affirmons que ces deux propriétés arithmétiques se différencient du point de vue du développement d'une pensée structurale fondée par une théorie mathématique des quantités. Pour étayer cette affirmation, nous reprenons la distinction faite par Vergnaud entre les trois premières relations « de base » du champ conceptuel additif : celles dites de composition, de comparaison et de transformations d'états (Vergnaud, 1990). Les caractéristiques des tâches proposées dans la séquence expérimentale renvoient à des relations de compositions (nous avons d'ailleurs parlé de « quantités composées ») d'états envisagés autour des structures additives et des expressions numériques afférentes (du type « $a + b$ » de part et d'autre du signe « = »). Toutefois certaines des stratégies investies par les élèves semblent davantage relever tantôt de relations de transformations d'états, tantôt de comparaisons (additives) d'états.

Ainsi, à partir du jeu sur les tâches proposées, si l'amorce des stratégies des deux élèves associées à la propriété P1 suggère une comparaison d'états (une quantité composée étant reconnue plus grande que l'autre), celle-ci semble très vite évoluer en une relation de transformation d'états *via* la recherche de ce qu'il faut ajouter à une quantité (composée de deux autres quantités) pour en « équilibrer » une autre. Au regard des spécificités des signes en présence (en particulier les représentations matérielles de cubes), ceci conduit assez spontanément à envisager une relation de transformation d'une des deux quantités qui composent la quantité initiale toujours en considérant « ce qu'il y a à ajouter » comme transformation positive portant sur une partie. Ainsi les raisonnements associés à P1 sont-ils essentiellement fondés par des relations additives élémentaires de transformation d'états, la comparaison des quantités totales n'étant qu'une première étape.

La propriété P2 nous semble revêtir un plus fort potentiel pour le développement d'une pensée structurale. Certes, du fait des caractéristiques des représentations sémiotiques matérielles en présence, ce sont initialement des « déplacements » d'un objet qui émergent pour les deux élèves, ces déplacements pouvant être appréhendés comme des transformations d'états concomitantes des parties (l'une entraînant l'autre si l'on ne veut pas modifier le tout que constitue la quantité composée). Toutefois pour une des deux élèves, un changement de point de vue s'opère l'amenant à « voir » de nouvelles structures. En effet, sur la fin de l'expérimentation, des évolutions de son discours laissent à penser que ce sont des relations de comparaison (additive) entre quantités, parties d'un même « tout », qui deviennent le support de sa réflexion. Ces relations additives renvoient aux termes de deux sommes (écrites de part et d'autre du signe « = »), considérés deux à deux, les manipulations d'expressions *via* des substitutions devenant des moyens pour raisonner et opérer sur les quantités. Le fait que les deux élèves convoquent régulièrement des « résultats » correspondant au « tout » a pu jouer un rôle, non seulement pour permettre les comparaisons initiales mais aussi pour garantir la conservation et permettre le cheminement vers la propriété P2.

Finalement, l'observation du parcours de ces deux élèves nous a amenés à identifier une certaine diversité de connaissances arithmétiques au cœur de stratégies parfois qualifiées de compensation dans les recherches, bien au-delà des propriétés algébriques usuelles comme l'associativité. Nous rejoignons en cela les travaux de Kieran (2022). En réinterprétant les relations additives investies par ces élèves dans la perspective des travaux de Vergnaud, la comparaison d'états nous semble bel et bien une balise dans le développement d'une pensée structurale, sous certaines conditions. Au regard de notre corpus, l'une de ces conditions relève de la mise en relation de comparaisons avec des augmentations ou

diminutions (Chambris, 2022), sans toutefois que les transformations d'états prennent le pas, ces mises en relations pouvant donner accès à des propriétés arithmétiques susceptibles d'être généralisées (via différentes valeurs de D par exemple). Des éléments facilitateurs nous paraissent émerger comme des constructions de significations d'écritures symboliques qui restent référées aux quantités (via des représentations matérielles, mais nécessairement transitoires) ou comme le cas particulier du « 1 », mais qui ne doivent pas faire verser dans un « constat systématique » (du résultat de deux transformations concomitantes) qui serait contre-productif. La question des conditions permettant un parcours comme celui de Mélissa dont nous espérons avoir montré le caractère particulièrement délicat, nous paraît rester ouverte.

RÉFÉRENCES

- Carpenter, T., Franke, M. et Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.
- Chambris, C. (2022). *Transparence des savoirs dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire, raisonnements multiplicatifs. Apports d'une perspective mathématique sur les grandeurs et les unités. Histoire et perspectives sur les mathématiques* [Habilitation à diriger des recherches, CY Cergy Paris Université]. <https://hal.science/tel-04391867>
- Chambris, C. et Subramaniam, (Ravi) K. (2023). Can school arithmetic be seen as theory building? Dans *Proceedings of ISEMT Charles University, Faculty of Education, Prague, the Czech Republic* (p. 123-133). <https://hal.science/hal-04188452>
- Constantin, C. et Coulangue, L. (2022). Sens et interprétation du signe « = » du point de vue d'élèves de 6-7 ans. *RQDM*, (Thématique 1), 5-42. <https://rqdm.recherche.usherbrooke.ca/ojs/ojs-3.1.1-4/index.php/rqdm/article/view/53>
- Constantin, C. et Coulangue, L. (2023, 24 mars). *Ambivalence et potentialités de représentations sémiotiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en première année de primaire* [Communication]. Séminaire National de Didactique des Mathématiques.
- Davydov, V. V. (1975). The psychological characteristics of the “prenumerical” period of mathematics instruction. Dans L. Steffe (dir.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics. Volume 7: Children's capacity for learning mathematics* (p. 109-206). University of Georgia.
- Drouhard, J. P. (2012). L'épistémographie, un outil au service de la didactique des mathématiques. Dans M. Abboud-Blanchard et M. Flückiger (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques – 2011* (p. 129-133). IREM de Paris VII.
- Duval, R. (2006). Transformation de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. Dans J.-C. Rauscher (dir.), *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM* (p. 67-89). IREM de Strasbourg.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.
- Herscovics, N. et Bergeron, J. (1989). Analyse épistémologique des débuts de l'addition. Dans *Actes de la 41e rencontre de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques* (p. 155-165). Bruxelles.
- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1131–1150. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6>

- Kieran, C. et Martínez-Hernández, C. (2022). Coordinating invisible and visible sameness within equivalence transformations of numerical equalities by 10- to 12-year-olds in their movement from computational to structural approaches. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1215–1227. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01355-5>
- Madej, L. (2021). Primary school students' knowledge of the equal sign – the Swedish case. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 321–343. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10144-z>
- Mason, J., Stephens, M. et Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 10-32.
- Pang, J. et Kim, J. (2018). Characteristics of Korean students' early algebraic thinking: A generalized arithmetic perspective. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 141-166). Springer.
- Schifter, D. (2018). Early algebra as analysis of structure: A focus on operations. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 309-328). Springer.
- Smith, J. P. et Thompson, P. W. (2007). quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. Dans J. J. Kaput, D.W. Carraher et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 95-132). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-5>
- Subramaniam, K. (Ravi) et Chambris, C. (2024, 7-14 juillet). *Early algebra as generalised arithmetic is reasoning about quantity* [Communication]. 15th International Congress on Mathematical Education (ICME-15), Sydney, Australie.
- Theis, L. (2005). *Les tribulations du signe = dans la moulinette de la bonne réponse*. Éditions Bande didactique.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-170.

DÉCRIRE ET COMPRENDRE LA PENSÉE RELATIONNELLE : ANALYSE DES STRATÉGIES DES ENFANTS DU PRÉSCOLAIRE DANS UN CONTEXTE NON NUMÉRIQUE DE SITUATIONS D'ÉQUIVALENCE¹

| ANWANDTER CUELLAR* NATHALIE, POLOTSKAIA** ELENA, DUFOUR*** RAPHAËLLE,
ROBERT**** VIRGINIE ET ABDALLAH***** ÉLISE

Résumé | Cette communication examine la pensée relationnelle en s'appuyant sur les notions de quantité et de grandeur comme base mathématique. À travers une recherche qualitative portant sur les gestes, discours et interactions d'enfants dans cinq classes de préscolaire, nous étudions le développement de cette pensée dans un contexte non numérique d'équivalence de poids. Les résultats mettent en lumière les différentes stratégies déployées par les enfants pour mobiliser leur pensée relationnelle et révèlent les diverses façons dont cette dernière se manifeste.

Mots-clés : pensée relationnelle, équivalence, stratégies, préscolaire

Abstract | This paper examines relational thinking by relying on the concepts of quantity and measure as a mathematical basis. Through qualitative research focusing on the gestures, speeches and interactions of children in five preschool classes, we study the development of this thinking in a non-numerical context of weight equivalence. The results highlight the different strategies deployed by children to mobilize their relational thinking and reveal the various ways in which it manifests.

Keywords: Relational thinking, equivalence, strategies, preschool

I. INTRODUCTION

Les chercheurs en éducation étudient depuis longtemps les difficultés d'enseignement et d'apprentissage de l'algèbre au secondaire, attribuées à une rupture entre l'arithmétique et l'algèbre lors de la transition du primaire au secondaire (Cai et Knuth, 2011 ; Kieran, 2004). Dans ce contexte, la pensée relationnelle est considérée comme un élément clé du développement des compétences algébriques et arithmétiques des enfants à toute âge (Britt et Irwin, 2011; Polotskaia et al., 2017) permettant une meilleure articulation entre ces deux domaines. À la différence des procédés de calcul sur les opérations, la pensée relationnelle met l'accent sur les relations, les structures et les propriétés des opérations arithmétiques (Carpenter et al., 2005). Par exemple, pour comparer $18 + 14$ et $18 + 16$, beaucoup d'élèves effectueraient les additions ($32 < 34$). Une approche basée sur les relations consiste à remarquer que 18 est identique des deux côtés et que $14 < 16$, donc $18 + 14 < 18 + 16$. La première stratégie est opérationnelle (on calcule), tandis que la seconde est relationnelle (on raisonne sur les relations).

Bien qu'un grand nombre de recherches portent sur la pensée relationnelle, il fut constaté par des auteurs du présent article (Anwandter Cuellar, 2021; Polotskaia et al., 2019) que la plupart des écrits à

¹ Cette communication est le résultat d'un programme de recherche financé par le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (CRSH).

* Université du Québec en Outaouais – Canada – nathalie.anwandter@uqo.ca

** Université du Québec en Outaouais – Canada – elena.polotskaia@uqo.ca

*** Université du Québec à Rimouski – Canada – Raphaelle.Dufour@uqar.ca

**** Université Laval – Canada – Virginie.Robert@fse.ulaval.ca

***** Université du Québec en Outaouais – Canada – elise.abdallah@uqo.ca

ce sujet ont été réalisé auprès d'enfants de 8 à 12 ans pour qui les nombres représentent la base du raisonnement. En outre, des études (Anwandter Cuellar et al., 2018; Blanton et al., 2018) rapportent qu'une arithmétique centrée uniquement sur les connaissances opérationnelles, se manifestant déjà au préscolaire et affecte la capacité des enfants à développer leur pensée relationnelle. Ces constats, nous conduisent aux questionnements suivants : *Les enfants du préscolaire sont-ils en mesure de déployer cette pensée sans que les nombres et les calculs constituent les fondements principaux de leurs connaissances ? Si oui, de quelles manières ?*

Des recherches effectuées auprès de jeunes enfants mettent en lumière les notions de quantité et de grandeur à titre de base mathématique pour le développement de la pensée relationnelle (Venenciano et al., 2021). Fondée par Davydov et ses collaborateurs (Davydov, 2008), cette école de pensée se concentre sur l'analyse des relations comparatives qui existent entre des quantités, analogiquement à l'approche de la pensée relationnelle (Kieran, 2007). Les tenants de cette perspective sont notamment d'avis que les notions de quantité et de grandeur peuvent donner accès à l'étude des premières lois générales mathématiques et au développement de la pensée théorique chez l'enfant, et cela bien avant l'introduction formelle du nombre dans l'enseignement. La pensée relationnelle de Davydov (2008) est, à notre sens, une avenue prometteuse pour assurer l'articulation entre l'algèbre et l'arithmétique puisqu'elle permet de réfléchir à la structure des relations, de dégager et de généraliser les propriétés de ces structures.

Nous menons ainsi notre recherche dans la perspective d'étudier l'émergence et les manifestations de la pensée relationnelle chez les enfants âgés de 4 à 6 ans placés dans un contexte non-numérique d'un jeu d'équivalence de poids avec des balances.

II. CADRE THÉORIQUE

1. *La pensée mathématique*

Reconnaissant que l'enfant se développe et apprend au moyen de l'interaction avec son environnement et de la culture sous-jacente, nous situons cette recherche dans un paradigme socioculturel de l'enseignement et de l'apprentissage (Vygotski, 1985; Radford, 2006). Tout comme Radford (2006, 2012) s'inspirant entre autres de Vygotski, nous considérons la pensée comme « une pratique sociale tangible matérialisée dans le corps (par des actions kinesthésiques, des gestes, de la perception, de la visualisation), dans l'utilisation de signes (symboles mathématiques, graphiques, mots écrits et parlés) et d'artéfacts de différentes sortes (règles, calculatrice, etc.) » (Radford, 2012, p.120, traduction libre). Sous une conception dialectique de la pensée et de l'activité comme un ensemble dynamique, il est permis de croire que le déploiement de la pensée et des apprentissages mathématiques s'extériorise sous forme de diverses unités sémiotiques, telles que les actions, les discours, le recours à des artéfacts, etc. (Radford, 2012).

2. *La pensée relationnelle et l'équivalence*

La pensée relationnelle est un aspect essentiel de la pensée algébrique. Des chercheurs (p.ex. Jacobs et al., 2007) soulignent qu'un débat existe pour déterminer si la pensée relationnelle constitue une manière de penser qui prépare à l'apprentissage de l'algèbre ou si elle est en elle-même une forme de pensée algébrique. Cependant, ils concluent que l'un des objectifs fondamentaux de l'intégration de la pensée relationnelle dans le programme de l'école primaire est de faciliter la transition des élèves vers l'étude formelle de l'algèbre au secondaire. La pensée relationnelle permet de voir les expressions et équations mathématiques comme un tout plutôt que comme des processus de calculs individuels. D'après Molina et al., (2008), les élèves utilisant ce type de pensée sont capables de considérer une

phrase numérique comme un tout, puis d'analyser sa structure mathématique et ses éléments importants pour élaborer des solutions.

La pensée relationnelle s'intéresse, entre autres, aux relations d'égalité et d'inégalité. D'un point de vue opérationnel, le symbole égal est considéré comme un symbole indiquant, de manière unidirectionnelle, que la réponse va suivre (Stephens, 2006). Cependant, la résolution d'une équation, par exemple, repose sur l'idée de trouver des valeurs permettant l'équivalence des expressions de part et d'autre du symbole égal (Duval et Pluvinage, 2016). Ainsi, les élèves qui auront une conception opérationnelle du symbole « = » auront des difficultés avec la résolution d'équations (Stephens et al., 2020). Les recherches de Franke et al. (2001) évoquent que, lorsque les élèves perçoivent le signe égal comme un symbole relationnel, ils se concentrent sur la structure de l'expression et appliquent des stratégies appropriées pour résoudre l'équation numérique selon les opérations en jeu.

Au niveau du préscolaire, Blanton et al., (2018) et son équipe ont observé les tentatives et réflexions des enfants pour atteindre l'égalité dans une équation mathématique où le symbole « = » est présent, ce qui les a amenés à considérer trois niveaux de pensée: opérationnelle, si les élèves comprennent le symbole « = » comme un opérateur ; relationnelle émergente, si les stratégies des élèves présentaient des caractéristiques hybrides, c'est-à-dire, opérationnelles et relationnelles ; et relationnelle, qui indique l'utilisation de « = » comme une l'équivalence entre des quantités. D'autres modèles pour l'équivalence qui s'appuient sur les relations ont été aussi proposés tels que le « construct map » de Matthews et son équipe (2012) ou celui de Stephens et Wang (2008). Cependant, ceux-ci intègrent déjà le symbolisme et les nombres et mettent l'accent sur les structures de problèmes proposés aux enfants. Dans le contexte non numérique de cette recherche, et en l'absence du symbole d'égalité au niveau préscolaire, aucune de ces propositions n'est entièrement adaptée à notre étude, bien qu'elles puissent nous inspirer.

Ainsi, dans notre projet, nous avons adopté l'approche de Davydov (2008) pour étudier le développement du concept d'équivalence chez les apprenants de 4 à 6 ans. Davydov propose d'utiliser des contextes liés aux grandeurs tels que les longueurs et les volumes d'eau. Au début de l'apprentissage des nombres et des calculs, la pensée relationnelle consiste à questionner ou reconnaître l'équivalence des grandeurs ou des quantités et ses propriétés, matérialisée par les gestes ainsi que par le discours qui l'accompagne.

III. MÉTHODOLOGIE

Nous avons développé quatre situations de jeux mathématiques que nous avons proposés à cinq classes de préscolaire de janvier à avril 2023. Les deux premiers jeux (jeux 1 et 2) visaient à établir une base de connaissances pour engager les élèves dans les activités suivantes, tandis que les deux derniers jeux (jeux 3 et 4) étaient axés sur l'étude de l'émergence de la pensée relationnelle. Les jeux 3 et 4 ont été animés par les chercheuses en ateliers de petits groupes (2 à 4 enfants) toutes les deux semaines et filmés. Nous avons laissé ces jeux dans les classes entre les visites et sommes finalement revenus pour filmer les périodes de jeux libres.

Pour cette communication, nous présentons l'analyse préliminaire du jeu 3, expérimenté par une chercheuse et trois enfants : Miriam, Nora et Mathéo. Il s'agit d'un jeu de règles composé de cartes, d'une balance à plateaux et des blocs représentant des animaux pesant 10 grs (souris en bleu), 20 grs (chat en rouge), 30 grs (chien en vert) et 40 grs (cochon en jaune). On peut donc observer plusieurs relations : $p(2\text{souris})=p(1\text{chat})^2$; $p(1\text{souris et } 1\text{chat})=p(1\text{chien})$, $p(2\text{chats})=p(1\text{cochon})$, etc.

² « p » exprime le poids.



Image 1 – Matériel du jeu 3

La règle du jeu est de placer tous les animaux représentés sur des cartes (cf. Image 1) dans les contenants de la balance pour atteindre l'équilibre (sans connaître leur poids réel). Quand l'enfant réussit, il garde la carte et peut en piger une nouvelle. L'enfant gagnant est celui qui a le plus de cartes à la fin du jeu.

Le contexte de ce jeu n'est pas numérique ; les enfants n'ont pas besoin de compter, car le maximum d'animaux semblables sur une même carte est de quatre, et le poids de chaque animal n'est pas exprimé numériquement. L'équivalence a déjà été introduite comme « balance en équilibre » ou « balance en position égale » lors de deux premiers jeux. Les enfants n'ont pas exprimé leur solution par écrit ou en dessin ; ainsi, le symbole « = » n'a pas été utilisé.

L'analyse des vidéos a été réalisée de manière semi-inductive (Blais et Martineau, 2006) en tenant compte des mots et des gestes des enfants afin de reconstruire les processus de pensée des enfants (Radford, 2012). Ainsi, nous avons procédé au codage des vidéos à l'aide du logiciel Atlas.ti. Nous avons créé des codes regroupés en cinq groupes : enfant qui joue, carte en main, stratégie mobilisée (selon les gestes et le discours de l'enfant), équilibre obtenu ou non obtenu de la balance et contenu du discours de l'enfant. Nous présentons dans la suite une description de quelques stratégies observées (Cf. Tableau 1) :

Tableau 1 – Codes utilisés pour les principales stratégies mises en place par les enfants

Stratégie	Description de la stratégie
Distribution 1 à 1	L'enfant distribue 1 à 1 chaque animal dans la balance.
Soupeser	L'enfant prend les objets avec ses mains afin de « sentir » leurs poids.
Compensation	L'enfant ajoute des blocs d'animaux sur la table (externes à la balance) à un contenant (plus haut) après avoir observé que la balance n'est pas en équilibre.
Contrebalancer	L'enfant met des blocs d'animaux sur la balance et les déplace (d'un contenant bas) à un autre (plus haut) après avoir observé que la balance n'est pas en équilibre.
Partager	L'enfant sépare les blocs d'animaux (p.ex. 4 souris) en deux groupes de même quantité (2 souris et 2 souris) et les place sur la balance.
Essai-erreur	L'enfant essaie, déplace des blocs, sans une stratégie claire.
Équivalence connue	L'enfant utilise l'équivalence de poids connues (rappel d'équivalence entre les poids des animaux) pour trouver la solution de la carte.

Nous avons créé des catégories afin de décrire le contenu du discours en lien avec les relations exprimées par les enfants et raffiner nos analyses (Cf. Tableau 2) :

Tableau 2 – Codes utilisés pour le contenu du discours exprimé par les enfants

Contenu du discours de l'enfant	Description	Exemple d'éléments observables dans de réponses des enfants à la question: comment as-tu fait?
Relations quantitatives	L'enfant discute des relations quantitatives en lien avec le nombre d'objets (quantité d'objets).	« Quatre souris, c'est pareil que deux et deux »
Relations qualitatives	L'enfant discute des relations qualitatives, approximatives des poids des objets.	« La souris est plus légère que le chien »
Relations explicites	L'enfant discute des relations d'équivalence entre les poids des animaux.	« Trois souris c'est pareil qu'un chien »

IV. RÉSULTATS

Pour présenter nos premiers résultats, nous allons illustrer quelques-unes des stratégies et des relations à l'aide de trois exemples tirés des extraits des vidéos du déroulement du jeu 3 pour trois enfants : Miriam, Nora et Mathéo.

1. Le cas de Miriam

Nous présentons, dans cette partie, Miriam qui prend la carte 1 souris, 1 chien et 1 cochon. L'équivalence à trouver est $p(1\text{souris et }1\text{chien})=p(1\text{cochon})$.

Pour commencer, l'enfant place la souris et le cochon en C1 (contenant 1 de la balance) et le chien en C2 (contenant 2 de la balance) (ainsi $p(C1)>p(C2)$). Ensuite, elle place le cochon avec le chien, et pousse le contenant 1 vers le bas (cf. image 2).



Image 2 – Geste de Miriam pour pousser le contenant 1 de la balance

- Miriam: Rrr (elle semble fâchée) ça a pas fonctionné! (Elle remet la souris et le cochon en C1 et laisse le chien en C2)
- Miriam : Non! (Elle laisse la souris en C1 et met le chien avec le cochon en C2 et pousse C1 vers le bas)
- Chercheuse : Est-ce que tu as tout ce qu'il fallait?
- Miriam : (Miriam reprend tous les animaux dans ses mains) en premier le cochon...et la souris et après un chien (Miriam remet le cochon et la souris en C1, elle observe la balance et met le chien en C2) Non!
- Miriam : (elle échange la souris avec le chien) rrr... ça a pas fonctionné encore! (Miriam reprend tous les animaux. Elle met le cochon dans C2 et met la souris en C1...elle observe la balance et ajoute le chien en C1 ($p(C1)=p(C2)$))

L'approche de Miriam est basée sur l'essai-erreur. Elle sait que pour gagner le jeu, la balance doit être en équilibre. Cependant, elle ne parvient pas à établir de relations entre les animaux représentés sur les cartes, bien qu'elle ait déjà joué plusieurs cartes et réussi quelques-unes. Elle aurait pu compenser ou contrebalancer pour équilibrer la balance, par exemple, en ajoutant des éléments au contenant plus léger, mais elle tente de forcer la balance pour l'équilibrer. Même si elle a réussi la tâche à la fin, on ne peut pas savoir s'il s'agit de l'observation d'une relation entre les poids des animaux ou du hasard. Les relations qu'elle tente de formuler sont insuffisantes pour mettre la balance en équilibre plus rapidement.

2. *Le cas de Nora*

Dans l'extrait suivant, nous discuterons de la carte 4 souris et 2 chats obtenue par un enfant que nous appellerons Nora. Pour cette carte, deux équivalences sont possibles : $p(1\text{chat}) + p(2\text{souris}) = p(1\text{chat}) + p(2\text{souris})$ ou encore $p(2\text{chats}) = p(4\text{souris})$. Nora commence à appliquer la stratégie de distribution 1 à 1, elle place d'abord un chat dans chaque contenant, puis ajoute une souris dans chacun. Alors, qu'elle n'arrive pas à finir de placer les souris restantes, son ami de jeu l'interrompt et lui suggère d'appliquer plutôt une autre stratégie. Tout ce qu'elle fait ensuite ne lui permet pas d'obtenir l'équilibre de la balance jusqu'à ce que la chercheuse intervienne et lui dise de tout recommencer et de prendre la stratégie qu'elle voulait prendre initialement :

(Nora soupèse avec ses mains, un chat et une souris. Elle place un chat en C1 et une souris en C2, elle place ensuite une souris en C1 et un chat en C2. Elle attend et observe l'équilibre de la balance, et place finalement une souris de chaque côté ($p(C1)=p(C2)$)).

- Chercheuse: Oh! Pourquoi est-ce que ça fonctionne maintenant?
- Nora: Il y a trois ici et trois ici (elle pointe respectivement les deux contenants)
- Chercheuse: Mais est-ce que c'est... Tu as mis trois quoi?
- Nora : Trois souris et trois rouges [chats], parce que les souris pèsent un petit peu, et le chat pèse beaucoup. Ça va lever un petit peu et lui aussi.

Le geste de soupeser indique que Nora tente de percevoir la différence de poids entre la souris et le chat. En plaçant une souris et un chat dans chaque contenant, elle semble utiliser une stratégie de compensation basée sur les différences de poids observées : si $p(\text{chat}) > p(\text{souris})$, alors en ajoutant une souris avec le chat et un chat avec la souris, les poids deviennent équivalents. Cependant, son discours qui suit porte davantage sur les quantités d'objets (« trois ici et trois ici ») plutôt que sur les poids. Ce n'est qu'après l'intervention de la chercheuse qu'elle évoque le poids (« pèse un petit peu, pèse beaucoup »). Son discours sur le choix de l'animal ne repose ni sur le comptage ni sur une équivalence connue ($p(1\text{chat}) = p(2\text{souris})$). Au lieu de cela, elle utilise des arguments qualitatifs approximatifs. Nous pouvons suggérer que le raisonnement de Nora est fortement guidé par la compréhension de la situation en termes d'équilibre ou d'équivalence. Le geste de soupeser les animaux a été nécessaire pour établir les relations qualitatives entre les poids des animaux et pour amorcer un passage d'un raisonnement basé sur les quantités vers un raisonnement sur les relations de poids. Ses gestes (p.ex. soupeser) et son discours (p.ex. pèse beaucoup) participent à l'établissement de la relation entre les chats et les souris ; Nora opère donc sur la relation bien que cette relation soit qualitative.

3. *Le cas de Mathéo*

Un enfant, que nous nommerons Mathéo, obtient une deuxième fois la carte 1 chat et 2 souris, il place rapidement deux souris d'un côté et un chat de l'autre côté. Comme cette carte était déjà apparue

auparavant, il semble se souvenir, car il dit à la chercheuse « c'est la même chose » et montre la carte précédente. Par la suite, la camarade de Mathéo sort la carte 4 souris et 2 chats. Mathéo conseille son amie : « mets toutes les souris là (C2) et les deux chats là (C1) ». La chercheuse demande à Mathéo comment il le sait, il répond : « je le sais ».

Plus tard dans le jeu, il prend la carte 1 chien, 1 chat et 3 souris. Mathéo équilibre la balance avec 1 chien et 1 souris dans C1, 1 chat et 2 souris dans C2, la chercheuse lui demande ce qui se passerait si elle enlevait une souris de chaque contenant, Mathéo répond que « c'est encore ça » en pointant la balance en équilibre. Sa capacité à anticiper l'équilibre en ajoutant ou en retirant des animaux semble montrer une compréhension relationnelle de l'équivalence de poids dans la balance qui n'est pas restreinte au matériel concret. Par la suite, la chercheuse propose :

- Chercheuse: Et si je rajoute un chat ici (C1) et deux souris là (C2) (elle garde les objets par-dessus les contenants pour montrer où les objets seraient déposés)
- Mathéo : (il réfléchit quelques secondes) Ça va être comme ça (il bouge ses mains, cf. Image 3)



Image 3 – Geste de Mathéo pour indiquer l'équilibre de la balance

- Chercheuse : Lequel va être plus lourd?
- Mathéo: Personne!
- Chercheuse: Comment tu le sais?
- Mathéo: Parce que...ça c'est plus lourd (il indique le chat), que les deux (il indique la souris).

Dans ce cas, Mathéo semble utiliser l'équivalence « $p(2\text{souris}) = p(1\text{chat})$ » pour anticiper que l'équilibre sera maintenu lors de cette transformation avec l'ajout des animaux dont leur poids est équivalent. Même si dans son discours, il justifie avec des arguments plutôt qualitatifs, les relations établies par Mathéo sont explicites. Il a été capable d'anticiper l'équivalence avec l'ajout ou le retrait d'animaux et avec le remplacement d'un animal par un ensemble d'animaux équivalents en poids. Le raisonnement de Mathéo s'opère sans qu'il ait besoin de manipuler le matériel ; il anticipe la solution à la tâche en se basant sur la relation $p(2\text{souris})=p(1\text{chat})$ et ensuite il est capable d'anticiper la transformation de l'équivalence : si $p(1\text{chien et } 1\text{souris})=p(1\text{chat et } 2\text{souris})$ alors $p(1\text{chien et } 3\text{souris})=p(2\text{chats et } 2\text{souris})$.

V. DISCUSSION

Les recherches précédentes se sont majoritairement focalisées sur l'exploration de la pensée relationnelle en utilisant les concepts d'égalité et d'équivalence dans des contextes où le symbolisme et les nombres étaient déjà présents (p.ex. Blanton et al., 2015; McNeil et al., 2019, Stephens et al., 2020). Cependant, notre étude s'inscrit dans une lignée de travaux suggérant qu'il est possible de développer

la pensée relationnelle chez les jeunes enfants avant l'introduction formelle des nombres et du symbolisme, en se basant sur les notions de grandeur et de quantité (Davydov, 2008).

Cette étude met en évidence diverses stratégies employées par les enfants pour résoudre une tâche liée à la notion d'équivalence dans un contexte non numérique. Comme chez nos trois enfants, nos observations indiquent qu'une majorité d'entre eux mobilisent fréquemment une combinaison de stratégies. À cet égard, nos résultats suggèrent que, dès un très jeune âge, la pensée relationnelle se manifeste sous différentes formes à travers les stratégies adoptées et les discours des enfants. Plus particulièrement, dans nos exemples, nous avons pu illustrer trois manifestations de la pensée mathématique dans les gestes, discours et interactions de nos enfants. Miriam, bien qu'elle comprenne que le jeu nécessite d'obtenir l'équilibre entre les deux côtés de la balance et qu'elle arrive à trouver la solution par essais-erreurs, elle a de la difficulté à mettre en relation les poids des animaux. De son côté, Nora commence par un discours quantitatif avant d'adopter un discours plus qualitatif, en s'appuyant sur des estimations approximatives des poids des animaux (« pèse pas beaucoup », « pèse moyen »). Bien qu'elle n'utilise pas explicitement la relation « $p(2 \text{ souris}) = p(1 \text{ chat})$ », ses gestes et son discours révèlent une compréhension intuitive et profonde de l'équivalence et des relations, lui permettant de tirer des conclusions logiques. Finalement, le contenu du discours de Mathéo est davantage centré sur des relations explicites, puisqu'il est en mesure d'expliquer (et même d'anticiper) l'effet de certaines actions sur le résultat de la balance en se basant sur des relations d'équivalence entre le poids des animaux, des substitutions et des transformations.

Ces résultats nous montrent que, bien que les chercheurs dans l'approche de l'Early Algebra utilisent de petits nombres pour discuter des concepts algébriques et relationnels avec les élèves, l'approche d'enseignement développemental (Davydov, 1982) ne nécessite pas de connaissance des nombres de la part des élèves pour introduire les relations mathématiques. Même si certains enfants peuvent déjà avoir développé certaines de ces connaissances, celles-ci ne sont pas vraiment utilisées pour établir ou utiliser des relations simples entre des quantités continues. Dans plusieurs expériences (p.ex. Mellone et al., 2018 ; Eriksson et Eriksson, 2020), il a été montré que de jeunes enfants peuvent travailler avec des quantités continues (volume, longueur, etc.) sans compter ni utiliser d'expressions numériques.

De plus, ces différentes manifestations de la pensée relationnelle dans le contenu du discours des enfants que nous pouvons interpréter comme quantitative, qualitative et explicite, nous ont permis d'observer que les enfants peuvent exprimer leur pensée en utilisant des systèmes sémiotiques (gestes et discours) de différents niveaux d'abstraction et différents outils de communication. Ainsi, si des contextes non numériques sont utilisés pour étudier les relations et les structures, il serait pertinent que les modes de communication et de représentation adoptés soient également non numériques. Nous considérons que nos observations constituent une première étape vers la construction d'un cadre d'analyse visant à décrire les différentes formes de la pensée relationnelle chez les jeunes enfants dans un contexte non numérique et non symbolique.

VI. CONCLUSION

En conclusion, notre étude renforce les résultats des travaux s'inscrivant dans la théorie de Davydov (2008) qui suggèrent que des contextes non numériques peuvent être utilisés avec des enfants de 4 à 5 ans pour initier le développement de la pensée relationnelle. Notre étude cherche ainsi à élargir la définition de la pensée relationnelle utilisée dans les approches d'Early Algebra pour inclure la compréhension de relations qualitatives, quantitatives et explicites et l'utilisation d'outils de communication accessibles aux jeunes enfants mais qui ne sont pas encore développés pour représenter un système sémiotique pleinement formé (Polotskaia et al., 2024). Cependant, ces

contextes et les systèmes sémiotiques que les jeunes enfants peuvent déployer pour exprimer leur pensée et faire progresser cette pensée restent à définir et caractériser.

RÉFÉRENCES

- Anwandter Cuellar, N. S., Polotskaia, E. et Passaro, V. (2021). La genèse de la pensée algébrique chez les enfants de trois à huit ans. Une revue de la littérature scientifique. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 21, 740–757. <https://doi.org/10.1007/s42330-021-00185-z>
- Anwandter Cuellar, N. S., Lessard, G., Boily, M. et Mailhot, D. (2018). L'émergence de la pensée algébrique au préscolaire : les stratégies des élèves concernant la notion d'équivalence mathématique. *Revue des sciences de l'éducation de McGill*, 53(1), 146-168.
- Blais, M. et Martineau, S. (2006). L'analyse inductive générale : description d'une démarche visant à donner un sens à des données brutes. *Recherches qualitatives*, 26(2), 1-18.
- Blanton, M., Otálora, Y., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. B., Gibbins, A. et Kim, Y. (2018). Exploring kindergarten students' early understandings of the equal sign. *Mathematical Thinking and Learning*, 20(3), 167-201.
- Blanton, M., Stephens, A. C., Knuth, E. et Gardiner, A. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal of Research in Mathematics Education*, 46(1), 39-87.
- Britt, M. S. et Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (p. 137-159). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_10
- Cai, J. et Knuth, E. (dir.). (2011). *Early algebraization-curricular, cognitive and instructional perspectives. Advances in mathematics education*. Springer.
- Carpenter, T. P., Madison, L. L., Franke, M. L. et Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(1), 53-59.
- Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction: A theoretical and experimental psychological study*. Nova Science Publishers.
- Davydov, V. V. (1982). Psychological characteristics of the formation of mathematical operations in children. Dans T. P. Carpenter, J. M. Moser et T. A. Romberg (dir.), *Addition and subtraction: Cognitive perspective* (p. 225–238). Lawrence Erlbaum Associates.
- Duval, R. et Pluvinage, F. (2016). Apprentissages algébriques, Première Partie: points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 21, 117-152.
- Eriksson, H. et Eriksson, I. (2020). Learning actions indicating algebraic thinking in multilingual classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 106(3), 363-378.
- Franke, M., Carpenter, T., Levi, L. et Fennema, E. (2001). Capturing teachers' generative change: A follow-up study of professional development in mathematics. *American Educational Research Journal*, 38(3), 653-689. <https://doi.org/10.3102/00028312038003653>
- Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P. et Levi, L. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 258-288.

- Kieran, C. (2007). *What do we know about the teaching and learning of algebra in the elementary grades?* [Résumé de recherche]. National Council of Teachers of Mathematics.
<http://www.nctm.org/news/content.aspx?id=12326>
- Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. Dans K. Stacey, H. Chick et M. Kendal (dir.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (p. 21-33). Kluwer.
- Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K. et Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 316-350.
<https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.43.3.0316>
- McNeil, N. M., Hornburg, C. B., Brletic-Shiple, H. et Matthews, J. M. (2019). Improving children's understanding of mathematical equivalence via an intervention that goes beyond nontraditional arithmetic practice. *Journal of Educational Psychology*, 111(6), 1023-1044.
<https://doi.org/10.1037/edu0000337>
- Mellone, M., Ramploud, A., Di Paola, B. et Martignone, F. (2018). Cultural transposition: Italian didactic experiences inspired by Chinese and Russian perspectives on whole number arithmetic. *ZDM*, 51(1), 199-212.
- Molina, M. et Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 30(1), 61-80.
- Polotskaia, E., Anwandter Cuellar, N., Savard, A. et Robert, V. (2024). Learning routes for algebraic thinking in preschool. Dans T. Evans, O. Marmur, J. Hunter, G. Leach et J. Jhagroo (dir.), *Proceedings of the 47th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Volume 4*. (p. 9-16). PME.
- Polotskaia, E., Anwandter Cuellar, N. et Savard, A. (2019). *La réussite en mathématiques au secondaire commence à la maternelle: Synthèse des connaissances sur les pratiques d'enseignement des mathématiques efficaces à la maternelle et au primaire pour réussir l'algèbre du secondaire* [Rapport de recherche]. MEES ; FRQSC.
- Polotskaia E. (2017). How the relational paradigm can transform the teaching and learning of mathematics: Experiment in Quebec. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 18(2), 161-180.
- Radford, L. (2012, 8-15 juillet). *Early algebraic thinking, epistemological, semiotic, and developmental issues* [Lecture]. 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.
http://www.icme12.org/upload/submission/1942_F.pdf
- Radford, L. (2006). Elements of a cultural theory of objectification. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9, 103-129.
- Stephens, A. (2006). Equivalence and relational thinking: preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 249-278.
<https://doi.org/10.1007/s10857-006-9000-1>
- Stephens, A., Sung, Y., Strachota, S., Torres, R. V., Morton, K., Gardiner, A. M., ... Stroud, R. (2020). The role of balance scales in supporting productive thinking about equations among diverse learners. *Mathematical Thinking and Learning*, 24(1), 1-18.
<https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1793055>

Stephens, M. et Wang, X. (2008). Investigating some junctures in relational thinking: A study of year 6 and year 7 students from Australia and China. *Journal of Mathematics Education*, 1(1), 28-39.

Venenciano, L. C., Yagi, S. L. et Zenigami, F. K. (2021). The development of relational thinking : A study of Measure Up first-grade students' thinking and their symbolic understandings. *Educational Studies in Mathematics*, 106, 413-428. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10014-z>

Vygotsky, L. (1985). *Pensée et langage*. Éditions sociales.

LE RÔLE DES PRATIQUES MATHÉMATIQUES DANS L'ÉVOLUTION DE L'ACTIVITÉ COLLECTIVE DE RÉOLUTION DE TÂCHES MATHÉMATIQUES ROUTINIÈRES

| BARABÉ* GENEVIÈVE

Résumé | Ce texte explore comment la résolution collective de tâches routinières peut déclencher le déploiement de pratiques mathématiques en classe. La mise en œuvre collective de ces pratiques mathématiques, en retour, génère de nouveaux problèmes à résoudre en classe. Ancré dans la théorie de l'enaction, ce texte empirique veut mettre en lumière l'intérêt d'étudier l'activité mathématique sur un plan collectif pour explorer les nouvelles possibilités mathématiques qui peuvent en émerger.

Mots-clés : pratiques mathématiques, résolution de problèmes, enaction, activité collective, tâches routinières

Abstract | This paper explores how the collective resolution of routine tasks can trigger the deployment of mathematical practices in the classroom. In turn, the collective implementation of these practices generates new problems to solve in class. Grounded in the cognitive theory of enaction, this empirical paper aims to highlight the value of studying mathematical activity from a collective perspective to explore the new mathematical possibilities that may emerge from it.

Keywords: Mathematical practices, problem-solving, enaction, collective activity, routine tasks

I. CONTEXTE

La résolution de problèmes occupe une place centrale dans l'activité des mathématiciens, faisant de celle-ci une avenue privilégiée pour permettre aux élèves de développer une pensée mathématique à l'image de celle des mathématiciens (Schoenfeld, 2020). Pour plusieurs chercheurs, l'intérêt de la résolution de problèmes à l'école réside dans l'engagement des élèves dans des pratiques mathématiques, c'est-à-dire des actions mathématiques telles qu'expliquer, justifier, valider, conjecturer, exemplifier, ou encore généraliser (e.g. Lampert 1990 ; Schoenfeld, 2020). Ces pratiques mathématiques constituent un élément clé de la pensée mathématique, telle que la décrit Schoenfeld (*Ibid.*). Les travaux de recherche sur la résolution de problèmes soulignent, depuis toujours, l'importance de proposer de bonnes tâches mathématiques (e.g. Liljedahl et Cai, 2021). Par leur construction, ces tâches favorisent une activité mathématique authentique chez les élèves, les incitant à mobiliser de telles pratiques mathématiques. Ce texte veut illustrer que la résolution *collective* de tâches routinières – dont la résolution repose principalement sur l'application technique de procédures connues – peut également placer les élèves dans une activité mathématique authentique dans laquelle ils déploient une diversité de pratiques mathématiques. Il se veut une invitation à s'intéresser au déploiement de la pensée mathématique à un niveau collectif et en contexte d'exploitation de tâches routinières en classe.

1. *L'enaction et l'étude d'une activité collective*

L'enaction (e.g. Maturana et Varela, 1992) met en exergue le rôle des inter-actions entre un individu et son environnement dans le déploiement des connaissances. Cette insistance sur les mots « inter » et « action » veut accentuer le fait que, du point de vue de l'enaction, la connaissance est conçue comme

* Université de Montréal – Canada – Genevieve.Barabe@umontreal.ca

une action accomplie par celui qui connaît, et pointe vers le rôle fondamental de l'environnement dans l'émergence de chaque action (Kieren, 1995). Selon l'enaction, l'environnement et l'individu sont toujours en inter-action créant une compatibilité mutuelle qui permet leur fonctionnement respectif. L'environnement agit comme un déclencheur de changements chez l'individu et, réciproquement, celui-ci agit comme un déclencheur de changements pour l'environnement. Ces inter-actions et changements se mobilisent dans une boucle d'influence mutuelle où chacun influence l'autre dans son évolution. Cette dynamique amène à s'intéresser à la classe, enseignant et élèves, non pas comme une collection d'individus qui agissent les uns à côté des autres, mais comme une collectivité qui avance en ré-actions les uns avec les autres et où les actions des uns ouvrent de nouvelles possibilités d'action pour la collectivité (*Ibid.*). Ces inter-actions, alors, ont le potentiel de faire émerger de nouveaux objets ou phénomènes qu'un individu à lui seul n'aurait pas généré. C'est dans une telle perspective collective que ce texte s'inscrit.

II. CONSIDÉRATIONS MÉTHODOLOGIQUES

Les données de cette étude proviennent d'un projet de recherche portant sur l'activité mathématique des élèves en contexte de résolution de problèmes mené dans des classes de 5^e année (10-11 ans), 6^e année (11-12 ans) et de 2^e secondaire (13-14 ans) (voir Proulx, 2018 pour plus de détails). Dans ce projet, des séances de classe, enregistrées sur vidéo, ont été réalisées en suivant une structure qui s'inspire de celle de Douady (1994): le chercheur-enseignant (CE) propose une tâche oralement ou par écrit, puis laisse aux élèves un certain temps de résolution ; ils sont ensuite invités, en plénière, à partager leurs idées et stratégies, et celles-ci sont notées au tableau ; d'autres stratégies sont ensuite sollicitées, et elles sont finalement comparées et discutées. À tout moment, le CE et les élèves peuvent enrichir la discussion par de nouvelles idées, questions ou commentaires. Les tâches utilisées dans ces séances étaient sélectionnées par les enseignants eux-mêmes, à partir de leurs manuels scolaires. Elles peuvent être qualifiées de routinières, car les notions, procédures ou stratégies mathématiques pour les résoudre avaient déjà été enseignées, et parfois même depuis plusieurs années. Quelques exemples de tâches utilisées dans ces séances sont: « Estime la somme de : $152\,496 + 608\,947$. 5^e année. », « Combien donnent $202 \div 4$? 6^e année », et « Résoudre $2x + 3 = 5$. 2^e secondaire ».

L'analyse de ces séances sous l'angle des pratiques mathématiques déployées collectivement a mis en évidence une diversité de pratiques mathématiques ayant fait évoluer les tâches routinières, comme veut l'illustrer l'exemple suivant.

III. EXEMPLE D'UNE SÉANCE

Dans la classe de 5^e année de madame Josiane, la tâche routinière suivante est proposée à résoudre :

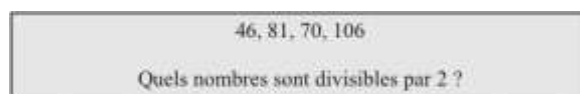


Figure 1 – Énoncé de la tâche de divisibilité par 2

La résolution collective de cette tâche routinière a duré une cinquantaine de minutes à travers lesquelles la collectivité a mis en avant différentes pratiques mathématiques. Leur déploiement a stimulé la mise en œuvre d'autres pratiques mathématiques qui, ensemble, ont contribué à faire émerger différents *problèmes mathématiques collectifs*. Un problème mathématique collectif est un problème mathématique qui émerge d'une activité collective, de manière contingente à celle-ci, et qui présente une incertitude pour la collectivité qui alors s'engage à la surmonter (Barabé, soumis). Dans cette

séance, la collectivité s'est penchée sur les problèmes mathématiques collectifs suivants, qui ont émergé à travers les inter-actions en classe :

1. Peut-on vérifier si chaque chiffre est divisible pour savoir si le nombre complet l'est ?
2. Comment peut-on y arriver avec 106 ? Comment peut-on décomposer 106 ? Qu'est-ce que le 10 dans 106 ?
3. Si les décompositions sont divisibles, est-ce que le nombre aussi l'est ?
4. Dans quels cas un nombre pair divisé par 2 donne-t-il un nombre impair ?

Le premier problème mathématique collectif est survenu alors qu'une stratégie reposant sur la divisibilité de chaque chiffre composant le nombre est *expliquée*. Cette stratégie propose que comme 4 et 6 sont chacun divisible par 2, le nombre complet l'est aussi. La *validation* de cette stratégie amène la collectivité à se pencher d'une manière générale sur la vraisemblance de la stratégie qui alors devient le premier problème mathématique collectif sur lequel elle se penche. Différentes *explications, justifications et exemples* sont donnés par la collectivité pour le résoudre ce qui l'amène à vouloir utiliser cette stratégie avec le nombre 106. Une *argumentation* mathématique prend alors place puisque la collectivité est mitigée sur la validité de la stratégie pour ce nombre précisément. La Figure 2 suivante présente ce moment de la séance, sous la forme d'une vignette, ainsi que son analyse en termes de pratiques mathématiques :

Pour débiter, Paul propose le nombre 46 comme réponse. Le CE lui demande d'expliquer sa réponse. Paul explique que comme le 4 se divise en deux et que le 6 aussi, alors 46 est divisible par 2. Le CE demande aux autres élèves ce qu'ils en pensent. Marie dit qu'elle aurait divisé par 2 pour obtenir 23. Le CE indique qu'il s'agit d'une autre façon de faire et reformule les deux stratégies proposées : CE : Dans la première stratégie, on s'intéresse au 4 et ensuite au 6, on va s'y intéresser, mais, en ce moment, ce que tu proposes c'est que 46 c'est aussi $23 + 23$, c'est ça? Marie : Bien, je diviserais. CE : Oui, $46 \div 2 = 23$. Comme ça donne un nombre complet, alors c'est divisible par 2. Le CE demande ensuite aux élèves ce qu'ils pensent de la première stratégie de regarder le 4 puis le 6. Zack se lance dans une explication en proposant que Paul s'intéresse à la parité de chaque chiffre du nombre : Zack : C'est comme s'il regarde le 4 et le 6 pour savoir si c'est un nombre pair ou impair. CE : Ok. Peux-tu nous en dire un peu plus là-dessus? Zack : Bien, les deux sont des nombres pairs parce que 0, 2, 4, 6, 8 sont des nombres pairs. CE : Ok. Zack : Les nombres pairs se divisent toujours en deux. Le CE dit que c'est un peu ce que Marie propose avec sa division. Le CE indique que le nombre 47, en contraste, ne peut pas se diviser en deux puisqu'il est impair. Le CE demande aux élèves s'ils ont autre chose à dire sur cette stratégie. Damien dit alors que les deux stratégies sont au fond les mêmes, car « 4 on peut le diviser en 2, ça donne 2. Et 6, on peut aussi le diviser en 2, ça donne 3 ». Le CE reprend l'explication donnée puis un autre élève renchérit qu'il aurait également fait $6 \div 2 = 3$, car $3 + 3 = 6$ et $4 \div 2 = 2$, car $2 + 2 = 4$. À ce moment, Julie propose que 106 fonctionne aussi, car cela donne deux fois le nombre 53 : Julie : 106 fonctionne aussi parce que ça donne 53 et 53. CE : Ok. Tu en regardes un autre et ça te donne 53 et 53. Quand on divise en deux, ça veut dire qu'ils ont deux parties. Est-ce qu'on pourrait utiliser la stratégie de Marie, mais avec le 106? Certains élèves disent que oui et d'autres disent que non.	Demande d'explication Explication Demande de validation Explication Explication Explication Explication, justification Demande validation Explication Dem. explication/justification Justification Justification Explication Exemplification Dem. explication/justification Explication, justification Explication Explication, justification Exemplification, justification Explication Formulation d'une question mathématique Argumentation

Figure 2 – Extrait de la séance de classe et analyse des pratiques mathématiques déployées

L'argumentation mathématique sur l'usage de la stratégie de divisibilité de chaque chiffre du nombre sur l'exemple de 106 fait ainsi naître le second problème mathématique collectif, plus local, car

directement lié au nombre 106. Pour le résoudre, des *explications* et *justifications* mathématiques sont données et mènent à mettre en avant différentes décompositions de 106 et à réfléchir à la valeur du « 10 » dans le nombre. Ceci entraîne la collectivité à *formuler une question mathématique* à savoir « si les décompositions sont divisibles, est-ce que le nombre complet l'est nécessairement ? ». Cette question engendre le troisième problème mathématique collectif qui génère des *justifications*, *exemples* et *validations* chez la collectivité pour le résoudre et y donner un sens. Sa résolution mène la collectivité à *formuler une conjecture*, soit qu'un nombre pair divisé par 2 donne toujours un nombre impair. Étant investiguée, celle-ci devient le quatrième problème mathématique collectif. Plusieurs *exemples*, *justifications*, *(in)validations* permettent de la réfuter et donc de résoudre ce problème. La période tirant à sa fin, un retour rapide sur la tâche initiale est fait pour conclure la séance.

IV. DISCUSSION ET MOT DE LA FIN

Cette séance met en évidence que le déploiement de pratiques mathématiques en classe a le potentiel de déclencher d'autres pratiques mathématiques qui permettent non seulement de faire avancer la résolution de la tâche initiale, mais également de stimuler l'émergence de problèmes mathématiques collectifs sur lesquels la collectivité est appelée à se pencher. Si l'un des intérêts de la résolution de problèmes à l'école est de développer la pensée mathématique des élèves à travers ces pratiques mathématiques (Schoenfeld, 2020), il semble également que leur mise en œuvre en classe peut générer de nouveaux problèmes mathématiques à explorer. En retour, ces problèmes déclenchent le déploiement d'autres pratiques mathématiques, stimulant à nouveau la pensée mathématique des élèves. Une boucle d'influence mutuelle se fait sentir : les pratiques mathématiques favorisent l'émergence de problèmes mathématiques collectifs, et les problèmes mathématiques collectifs stimulent la mise en œuvre de pratiques mathématiques. Ce phénomène souligne l'importance du contexte offert en classe qui apparaît prédominant par rapport à la tâche proposée puisqu'à travers ses inter-actions avec la collectivité, celle-ci est appelée à se transformer pour faire place à de nouveaux problèmes à résoudre. Toutefois, la question des conditions favorisant la mise en œuvre des pratiques mathématiques et l'émergence de problèmes mathématiques collectifs demeure à investiguer. Ce texte empirique invite à poursuivre les études en ce sens, et à explorer la pensée mathématique à un niveau collectif.

RÉFÉRENCES

- Barabé, G. (soumis). Vers la notion de problèmes mathématiques collectif. *For the Learning of Mathematics*.
- Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Reperes – IREM*, (15), 37-61. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/iwr94020_1702761124976-pdf
- Kieren, T. (1995). *Mathematics Teaching (In-the-middle): Enactivist view on learning and teaching mathematics* [Communication]. Canadian National Mathematics Leadership conference, Université Queens, Kingston, Ontario.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-63.
- Liljedahl, P. et Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look of the state of the art. *ZDM*, 53(3), 723-735. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Maturana, H. et Varela, F. J. (1992). *The tree of knowledge*. Shambhala.

- Proulx, J. (2018). On teaching actions in mathematical problem-solving contexts. Dans *Actes de la 40^e rencontre annuelle de North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 15-18 novembre, Greenville* (p. 1060-1067). University of South Carolina & Clemson University.
- Schoenfeld, A. H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM*, 52(4), 1163-1175.
<https://doi.org/10.1007/s11858-020-01162-w>

LES SUITES NON NUMERIQUES DANS LE PROGRAMME D'ETUDE ET LE POTENTIEL DE DEVELOPPEMENT DE LA PENSEE ALGEBRIQUE CHEZ LES ELEVES DE LA MATERNELLE A LA DEUXIEME ANNEE DU PRIMAIRE AU NOUVEAU-BRUNSWICK

| BANKOUSSOU-MABIALA* EDWARD ET FREIMAN** VIKTOR

Résumé | Cet article explore le potentiel des suites non numériques à motif répété dans le développement de la pensée algébrique chez les élèves à travers une analyse du programme d'étude de la maternelle à la deuxième année du primaire du Nouveau-Brunswick. Nous basons notre analyse sur la théorie des représentations sémiotiques proposée par Duval (1995) comme cadre de référence.

Mots-clés : Régularités, pensée algébrique, suite non numérique, programme d'étude

Abstract | This article explores the potential of non-numeric repeated pattern sequences in the development of algebraic thinking among primary school students through an analysis of the curriculum from kindergarten to second grade in New-Brunswick. We base our analysis on the theory of semiotic representations proposed by Duval (1995) as a reference framework.

Keywords: Patterns, algebraic thinking, non-numerical sequence, curriculum

I. INTRODUCTION : CONTEXTE ET PROBLÉMATIQUE

Depuis plusieurs décennies, les chercheurs et les acteurs du terrain de l'éducation font le constat que le passage de l'arithmétique à l'algèbre pose des problèmes aux élèves (Freiman et Lee, 2004 ; Marchand et Bednarz, 1999). Ces constats ont amené les chercheurs à questionner l'approche curriculaire de l'enseignement de l'algèbre après l'arithmétique (Carpenter et al., 2003 ; Kieran 2014). Aux États-Unis, un groupe de travail du National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) nommé Algebra Working Group (1995), a mis en évidence les problématiques majeures de l'introduction de l'algèbre de manière traditionnelle (après l'arithmétique) : d'isoler les concepts d'algèbre des autres branches des mathématiques, de mettre l'accent sur les habiletés techniques et de ne pas insister sur la compréhension du symbolisme algébrique. Les débats au sujet des difficultés en algèbre ont donné lieu à un grand mouvement mondial visant à renouveler l'enseignement de l'algèbre et c'est ce qui a donné naissance au courant Early Algebra ou Algèbre avant le symbolisme (lettre) (Bronner, 2015) avec l'idée d'introduire les éléments de l'algèbre tôt lors du parcours scolaire (dès le primaire).

Les travaux de Early Algebra ont d'ailleurs influencé les curriculums des mathématiques à l'école primaire aux É.-U. et d'autres pays. Cette tendance n'est pas isolée puisque l'on constate des orientations qui vont dans le même sens au Canada, notamment le programme actuel en mathématiques du Nouveau-Brunswick (N.-B), Canada, qui introduit le volet « Régularités et algèbre » dès la maternelle depuis l'an 2000 (Freiman et coll., 2012). Les recherches de Polotskaia et coll. (2023) ciblent le développement de la pensée algébrique à l'aide d'une approche équilibrée (ADÉ) qui fait l'objet d'un projet, en cours depuis 2023, qui se déroule au Québec (QC), en Ontario (ON) et N.-B.

* Université de Moncton – Canada – ceb7988@umoncton.ca

** Université de Moncton – Canada – viktor.freiman@umoncton.ca

Cette approche, employée dans une école du QC, vise à favoriser une compréhension plus profonde et holistique des structures additives et des propriétés des opérations d'addition et de soustraction, au-delà de leur simple application arithmétique. Enfin, le but de ce projet est d'étudier la possibilité d'harmoniser l'apprentissage de l'arithmétique avec le développement de la pensée algébrique chez les élèves dès le début de leur scolarité formelle, donc, d'éliminer la transition entre l'arithmétique et l'algèbre à l'école secondaire.

Faisant partie de ce projet, notre communication porte spécifiquement sur l'enseignement et l'apprentissage de régularités de la maternelle à la deuxième année du primaire (M-2) étant donné le manque de recherches avec les jeunes enfants sur ce sujet dont aucune au N.-B. (francophone). Le but de la communication est de présenter les premiers résultats d'analyse du programme d'étude dans le contexte néobrunswickois francophone (la province est bilingue avec la présence du secteur anglophone) pour ressortir les éléments qui caractérisent le développement de la pensée algébrique en M-2.

Le programme d'étude sert de guide pour les concepteurs des manuels et pour les enseignants. Ces derniers justifient leurs choix pédagogiques en grande partie par l'interprétation qu'ils se font des programmes d'études (Larguier, 2019). Pour ce qui concerne le développement de la pensée algébrique dès le primaire, une bonne compréhension des structures du programme qui visent ce développement, permet ainsi de mieux comprendre le potentiel de développement de la pensée algébrique dès le primaire (Squalli et al., 2020 ; Jeannotte et al., 2022 ; Larguier, 2019).

Pour Afonso et Mc Auliffe (2019), l'algèbre constitue une grande composante des mathématiques du lycée, leurs résultats montrent que les jeunes apprenants, lorsqu'ils ont la possibilité, ont le potentiel de penser algébriquement, ce qui suggère que la pensée algébrique doit être développée au fil du temps et commencer tôt dans le parcours scolaire. Cependant Anwandter Cuellar et al. (2018) estiment que la plupart des travaux sur la pensée algébrique ont été réalisés chez les enfants dont l'âge varie entre 7 ans et plus où dans cet intervalle d'âge, les connaissances arithmétiques sont toujours à la base d'une pensée algébrique. Il est donc important de mener des recherches qui explorent comment la pensée algébrique se développent chez les plus jeunes élèves de moins de 7 ans. Dans le contexte de l'enseignement des mathématiques au N.-B. francophone, à notre connaissance, il n'existe aucune étude à date sur le développement de la pensée algébrique en début du primaire (M-2) et, en général, on trouve peu d'études pour ces niveaux scolaires d'où notre intérêt d'examiner comment la pensée algébrique se développe pendant les premières années de scolarité (M-2) et quels types d'activités (tâches) y contribuent.

Notre analyse du programme d'étude se penchera sur le contenu de la partie pratique et théorique en lien avec le concept de suites non numériques. En ce qui a trait à la partie théorique, nous allons prêter une attention particulière aux résultats d'apprentissage spécifiques (RAS) qui apparaissent dans le programme, et ce, en nous basant sur les différents registres de représentation utilisés (Duval, 1995). Nous considérons que les RAS jouent un rôle important dans le programme. C'est la raison pour laquelle nous pensons que l'analyse de cette partie du contenu du programme pourrait apporter des éléments de réponse à notre question de recherche qui est la suivante. Comment se caractérise la pensée algébrique dans le domaine régularités et algèbre du programme d'étude ?

II. CADRE CONCEPTUEL

Dans cette section, le but est d'apporter un éclairage théorique à la problématique suivante : comment se caractérise la pensée algébrique dans des situations d'analyse de suites non numériques au primaire ? Nous allons donc identifier de situations ou types de tâches favorisant le développement de

la pensée algébrique au primaire en s'appuyant sur de nombreux travaux de recherche. Qu'entend-on par pensée algébrique ?

La structure et les relations mathématiques sont au cœur de la pratique du développement précoce de la pensée algébrique, en particulier, les pratiques de généralisation, de représentation, de justification et de raisonnement à l'aide de relations mathématiques (Blanton et al., 2011), mais on peut aussi utiliser des nombres et des mots pour exprimer des transformations arithmétiques en terme général (Britt et Irwin, 2011). Pour Kieran (2022), la multi-dimensionnalité du développement précoce de la pensée algébrique se situe sur la pensée analytique, la pensée structurale et la pensée fonctionnelles : La pensée analytique consiste à opérer sur une inconnue, de travailler avec des quantités indéterminées, elle englobe la réflexion sur le signe d'égalité et l'équivalence, résolution des équations sans utiliser le symbolisme et la résolution des équations en utilisant le symbolisme (Bednarz et Janvier, 1996 ; Radford, 2012). La pensée structurale se concentre principalement à voir les relations, les propriétés et la structure des nombres, des opérations et des expressions (Squalli 2002). La pensée fonctionnelle s'intéresse à chercher des expressions et le raisonnement à propos des relations entre des quantités qui varient et elle permet de rendre explicite de manière générale la relation sous-jacente de la fonction donnée au moyen d'un certain type de représentation conventionnelle ou non conventionnelle (Carragher and Schliemann, 2007 ; Radford, 2012). Toutefois, la pensée analytique et la pensée structurale sont deux dimensions du développement précoce de la pensée algébrique qui sont toutes enracinées dans la perspective de l'arithmétique généralisée où le nombre est l'objet mathématique de base (Kieran, 2022). Ce qui revient à dire que ces deux dimensions peuvent être regroupées dans la dimension unique et plus générale de la pensée relationnelle. Cependant, la troisième dimension de la pensée algébrique précoce est ancrée dans la perspective fonctionnelle, où la fonction est l'objet mathématique de base. La généralisation est un point de chevauchement de ces trois dimensions. Ainsi, la généralisation est un aspect de la plupart des études sur l'algèbre précoce, quelle que soit la dimension qui prédomine dans le cadre théorique du chercheur (Kieran, 2004 ; Squalli, 2002 ; Radford, 2012). D'autres recherches (Vlassis et Demonty, 2002) mettent en lumière l'intérêt de problèmes de généralisation pour développer la pensée algébrique.

Pour le cas des jeunes enfants, les auteurs concentrent leurs recherches sur l'exploration des habiletés des élèves à généraliser et à exprimer la généralité (Mulligan et Mitchelmore, 2009 ; Papic et al., 2011). Étant donné que les activités sur les suites au préscolaire n'impliquent pas toujours de nombres, les chercheurs mentionnent que les généralisations effectuées à ce niveau sont issues d'une pensée préalgébrique (Papic et al., 2011). D'où il est donc intéressant d'examiner les composantes de ces dimensions de la pensée algébrique qui ne s'appuient pas nécessairement sur un travail basé sur les nombres (Polotskaia et al., 2024).

Plusieurs chercheurs soutiennent bien de promouvoir les activités sur les suites dès le plus jeune âge, étant donné que nombre d'entre eux créent spontanément des suites au cours de leurs jeux libres, autrement dit plusieurs élèves ont ce potentiel de façon naturelle (Fox, 2005). Les jeunes enfants travaillent tous régulièrement avec des suites à motif répété (Rittle-Johnson et al., 2015). À l'âge de 3 ans, les enfants remarquent et complètent des suites à motif répété simples alternés AB (par exemple, une chemise à rayures rouges et vertes) et remarquent ces suites dans les chansons (Sarama et Clements, 2009). De 4 à 7 ans, les enfants élargissent leurs connaissances des suites à motif répété pour inclure des motifs de base de plus en plus complexes (par exemple, ABB, AABB, ABC) et des tâches de création de suites à motif répété de plus en plus exigeantes (Papic et al., 2011, Sarama et Clements, 2009). Dans le but de conceptualiser la suite, Mulligan et ses collaborateurs (2009) ont introduit le concept de Awareness of Mathematical Pattern and Structure (AMPS). Ce concept se base sur deux composantes : une cognitive (c'est-à-dire la connaissance de la structure de la suite) et une

métacognitive (c'est-à-dire la tendance à rechercher des suites et à les analyser). D'où notre intérêt au processus cognitif propre à l'activité mathématique telle que conceptualisé par Duval (1995) dont l'approche sémiotique sera notre cadre d'analyse.

Pour Duval (1995), les mathématiques sont un domaine particulièrement sensible aux questions sémiotiques : en effet les objets mathématiques sont par essence théoriques, ils sont perceptivement et instrumentalement inaccessibles, ils ne sont « visibles » que par leurs représentations sémiotiques, leurs signes. Selon Duval (2005), les représentations sémiotiques internes aux mathématiques, de nature symbolique, s'organisent en systèmes sémiotiques (ou registres sémiotiques), définis notamment par des règles organisatrices à partir d'éléments de base. Duval distingue deux types de transformation de représentations sémiotiques : l'un qui correspond à utiliser les possibilités de transformation propres à chaque registre et l'autre qui consiste à un changement de registre de représentation. C'est le second type de transformation qui se révèle être le plus difficile et le plus déroutant pour les élèves.

Le traitement est une activité qui conduit à la transformation d'une représentation en une autre sans changer de système sémiotique. On dispose des règles d'expansion (différentes des règles de conformité) dont l'application donne une représentation de même registre que la représentation de départ. Selon Duval (1995, p. 39), le traitement est une activité qui est interne au registre de représentation ou à un système de départ. La conversion est une transformation d'une représentation en une représentation d'un autre registre. Contrairement au traitement, la conversion est une activité qui est externe par rapport au registre de la représentation de départ. Duval (1995, p. 43) considère que les règles de conversion ne sont pas les mêmes selon le sens dans lequel le changement de registre est effectué.

Dans l'activité sur les suites, diverses représentations sont utilisées pour transformer des objets relevant, soit du domaine concret (petits cubes, etc.), soit des mathématiques. En ce qui concerne le concept de suite non numérique à motif répété, nous nous intéressons, dans la présente recherche, aux systèmes sémiotiques (système de signe figuratif et système de signe verbal). Nous allons donc analyser ces systèmes à travers leurs modes de représentation dans le programme d'étude du N.-B. pour montrer en quoi ils peuvent soutenir le développement de la pensée algébrique de jeunes élèves.

III. ANALYSE DU PROGRAMME D'ÉTUDE M-2

La première étape de notre analyse a porté sur le repérage des représentations présentes dans le programme d'étude dans le domaine régularités et algèbre. Au sens de Duval, nous avons alors relevé les registres : (1) langage naturelle (RL) : système de signes verbaux, langue naturelle (des mots, des phrases, etc.) ; (2) figural/ schéma (RS) : des schémas à l'échelle, des représentations spontanées figurales, des suites avec des dessins, etc.

Selon (MEDPENB, 2016), le programme d'étude en mathématiques du N.-B. (Francophone) englobe cinq domaines en lien avec le contenu de formation : nombres et opérations, régularités et algèbre, géométrie, mesure et traitement de données. Les résultats d'apprentissage spécifiques (RAS) découlant de ces domaines sont les mêmes de la maternelle à la 2^e année. Le contenu de chaque domaine, étant regroupé autour du résultat d'apprentissage général (RAG), est structuré en deux parties à savoir les résultats d'apprentissage spécifiques (RAS) et les directives pédagogiques et stratégies d'enseignement qui suggèrent les approches didactiques pour atteindre les RAS.

Ainsi, les élèves de la maternelle à la 2^e année du primaire sont amenés à travailler sur les suites non numériques comportant des figures géométriques à motif répété et celles comportant des motifs croissants (RS). Afin de répondre à notre questionnement, nous allons donc analyser les résultats d'apprentissage spécifiques (RAS) du domaine régularités et algèbre du programme d'étude de la

maternelle à la 2^e année du primaire, en nous basant sur l'approche théorique de Duval (1995). Cette approche nous semble pertinente, car elle analyse en profondeur le rôle des représentations sémiotiques dans la construction de concepts mathématiques. Pour l'économie de l'espace, nous nous limitons aux suites à motif répété, c'est ce type de suite qui est examiné tout au long de niveaux M-2. Cette analyse étant encore préliminaire, elle sera, par la suite, élargie en considérant les RAS liés aux suites à motif croissant et aux relations (équations) qui apparaissent dans le programme dès la 2^e année, ainsi qu'aux liens avec le domaine nombres et opérations. Ce dernier, bien qu'ancré dans l'arithmétique, est également reconnu par les chercheurs comme domaine pouvant promouvoir l'émergence de la pensée algébrique (Squalli et al., 2011).

Dans notre analyse du programme de la M-2, nous avons cherché à identifier les registres sémiotiques en examinant les directives pédagogiques et stratégies d'enseignement liées aux RAS sur les suites non numériques à motif répété. Le tableau ci-dessous (figure 1), nous donne les types de tâches et leurs instructions que la recherche propose et celles que l'on a identifiées dans le programme d'étude.

Les RAS du programme de la maternelle introduisent l'exploration des concepts de base associés à l'étude des régularités par le biais du triage et de la classification des objets en fonction d'attributs comme la couleur, la forme, la taille, la texture et la fonction. Ce vocabulaire de base développé lors des différentes activités de triage, de classification permettra à l'enfant de parler des différentes régularités que ce dernier peut observer dans son environnement ou dans des suites non numériques. Le programme souligne également de profiter de l'étude des suites pour introduire l'ordre des éléments (le premier, le deuxième, etc.) dans une suite en fonction de leur position. La représentation des régularités par des suites non numérique à motif répété fait partie des résultats d'apprentissage spécifiques dès la maternelle. Le programme recommande l'utilisation d'une diversité de matériels et de situations pour représenter des régularités par des suites. Le programme ajoute également que des contextes en géométrie (RS) peuvent appuyer l'exploration et la représentation des régularités. Au sens de Duval (1995), le programme utilise plusieurs représentations sémiotiques pour introduire les régularités à l'aide de suites. Pour Duval, la diversité de ces représentations sémiotiques constitue une extension de la capacité cognitive de la pensée, car les systèmes de représentations sémiotiques différents offrent des possibilités de transformations ou d'opérations qui sont totalement différentes.

Types de tâches (proposées par la recherche)	Copier et dupliquer (Clement et Sarama, 2014)	Créer (Papic et al. 2011)	Étendre (Rittle-Johnson et al. 2013)	Généraliser (Traduire) (Luken, 2016)	Identifier le motif de la suite (Rittle-Johnson et al., 2013)	Reconnaître (Sternberg et Larson, 1976)	Comprendre (Kidd et al., 2013)
Questions (instructions)	Faire la même suite	Faites une suite avec des blocs	Quel élément vient ensuite?	Faites la même suite en utilisant différents matériaux	Quelle est la plus petite partie de la suite qui se répète ?	Quelle suite est la même ?	Quel élément manque-t-il?
Première rencontre dans le programme d'étude	Maternelle	1 ^{ère} année	1 ^{ère} année	1 ^{ère} année	1 ^{ère} année	1 ^{ère} année	2 ^{ème} année

Figure 1 – Tâches proposées par la recherche et celles identifiées dans le programme d'étude

Pour montrer la diversité de situations pour représenter des régularités dans le programme d'étude, la suite non numérique de la figure 2 peut être représentée par la suite cercle triangle cercle triangle... Dans ce cas, l'élève doit cerner le transfert entre la représentation d'une suite en utilisant les couleurs et celle en utilisant les figures géométriques ou de sons de musique. Donc ici, au sens de Duval, la conversion est un phénomène de traduction ou de codage car elle permet le passage entre représentations d'un registre (figural/ schéma) dans un autre registre.

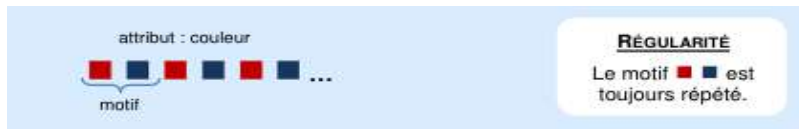


Figure 2 – Exemple d'une suite non numérique à motif répété simple (MENB, 2016, p. 40)

Les résultats d'apprentissages spécifiques du programme de la première année du primaire continuent sur l'exploration approfondie des régularités. Comme une continuité aux RAS de la maternelle, le programme introduit pour la première fois la notion de structure d'une suite et recommande de travailler sur la diversité de structures (AB, ABC, ABB, etc) (voir figure 3). Pour montrer l'intérêt de travailler sur la structure d'une suite, l'idée est de formaliser un modèle en utilisant des lettres pour unifier le traitement entre deux représentations sémiotiques d'un même objet mathématique (une suite) (voir figure 3). Il nous semble que le but de l'apparition de structure codée avec les lettres dans la figure 3 est d'amener l'élève à l'idée de la modélisation, de la construction d'une sorte de bijection (la correspondance terme à terme) entre l'ensemble de termes de la suite et celui de lettres utilisées, mais le programme d'étude ne donne aucun indice à propos. Le vocabulaire de base sur les suites s'élargit avec les mots terme et rang de la suite.



Figure 3 – Exemple d'une suite non numérique à motif répété (MENB, 2016, p. 38)

Dans l'exemple ci-dessous, la représentation est celle d'un cœur (de couleur rouge et bleu) et la procédure consiste à y ajouter d'autres cœurs de manière à obtenir chaque fois le même motif.

A travers les différentes structures de la suite, ces représentations apparaissent bien comme des registres sémiotiques puisqu'elles sont le lieu d'un *traitement* spécifique (la suite de la figure 3 et la suite $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$ ont la même structure (AAB)) et d'une *conversion* (les sons étant une situation pour représenter des régularités, la suite aigu aigu grave aigu aigu grave (RL) devrait permettre normalement de dire également qu'il s'agit de la suite de la figure 3). Comme le recommande la recherche, le RAS mentionne également que les élèves doivent développer leurs compétences sur l'analyse de la structure d'une suite en la prolongeant, en expliquant le motif répété et en créant de nouvelles suites dans le but de les expliquer (voir figure 1). Mais toute fois, ni les directives pédagogiques ni les stratégies d'enseignement du programme ne précise comment prolonger une suite à motif répété. Les RAS font également mention de la généralisation d'une suite à motif répété au sens de Luken (2016), qui est perçue comme une forme de traduction de la même suite en utilisant différents matériaux tout en gardant sa structure (voir figure 4).



Figure 4 – Exemple de généralisation d'une suite non numérique à motif répété

Les RAS du programme de la deuxième année sont une continuité des RAS du programme de la maternelle et de la première année. En 2^{ème} année, les suites non numériques à motif répété doivent se complexifier et faire appel à différentes structures (voir figure 5). En se référant à la recherche, la complexité d'une suite non numérique à motif répété dépend du nombre d'éléments qui composent

son motif. Autrement dit, la compréhension d'une suite dont la structure est AB est plus facile que celle dont la structure est AAB (Close et Glennon, 1977). Donc la structure ABBC de la suite de la figure 5 est plus complexe à analyser que la structure AAB de la suite de la figure 3. Pour ce qui concerne le niveau de difficulté entre les tâches sur les suites, il y a un consensus entre les chercheurs que la tâche la plus facile, à savoir copier la suite, qui est gérable dès l'âge de trois ou quatre ans, et la tâche la plus difficile, à savoir l'identification du motif de la suite, qui peut rester difficile même pour les enfants de neuf ans (Warren et Cooper, 2007).



Figure 5 – Exemple d'une suite non numérique à motif répété (MENB, 2016, p. 37)

Il ressort de notre analyse du domaine régularités et algèbre du programme, la présence de quelques composantes pour développer les habiletés de la pensée algébrique : Prolonger/Représenter des suites non numériques à motif répété. Le rôle du raisonnement algébrique dans l'exploration des suites est important. Pour Papic et al. (2011), une compréhension de chaque suite est un type de généralisation dans le sens qu'elle implique une relation qui est partout la même. Ainsi la généralisation la plus simplifiée aux suites à motif répété peut être considérée comme une réflexion algébrique, ce qui implique que la pensée algébrique serait accessible aux enfants dès le préscolaire. L'accent est mis sur l'exploration de régularités à partir de suites non numériques à motif répété; la progression d'un niveau à l'autre se tourne autour de la complexité qui augmente (Jeannotte et Squalli, 2022). Les mécanismes didactiques de cette progression ne sont toutefois pas clairement explicités dans le programme d'étude. La question est - comment la continuité en termes de développement de la pensée algébrique pourrait être reconstruite ? Le programme ne le précise pas.

La reconnaissance et l'analyse des suites fournissent une base pour le développement de la pensée algébrique, offrant aux enfants l'opportunité d'observer et de verbaliser des généralisations, ainsi que de les enregistrer symboliquement (Warren et Cooper, 2007).

IV. CONCLUSION

Pour ce qui est de l'étude des régularités, souvent vue comme une approche pour introduire l'algèbre, elle peut aussi être associée au domaine de l'arithmétique. En effet, il est possible d'étudier les suites sans généraliser de façon algébrique en restant dans le domaine calculatoire et en s'intéressant davantage à la recherche d'une unique réponse qu'à la structure de la relation. L'étude des suites en elle-même ne suffirait pas à initier les élèves à la pensée algébrique, c'est la façon de les traiter qui est importante. Donc, travailler la pensée algébrique au primaire ne signifie pas nécessairement introduire un symbolisme conventionnel ou ni même de nouveaux contenus, mais constitue davantage une manière différente d'approcher les mathématiques. Le contenu mathématique du programme d'étude est donc riche de notions qui favorisent le développement de la pensée algébrique. De la maternelle à la 2^e année du primaire, le contenu du programme initie les élèves à identifier les régularités dans les suites non numérique à motif répété, mais en s'appuyant plus sur les suites non numériques, ce qui révèle du programme une tendance contraire à la conception opérationnelle (arithmétique) pour développer la pensée algébrique. Cette initiation se fait de façon progressive, en partant d'une suite bien définie, l'élève doit identifier la régularité et être capable de prolonger cette suite. Après il faut également faire appel à diverses situations pour représenter des régularités et profiter de l'occasion pour éveiller les cinq sens de l'élève (les sons, les motifs que l'on observe, les mouvements que l'on fait, la texture d'objets que l'on touche, etc.).

RÉFÉRENCES

- Afonso, D. et Mc Auliffe, S. (2019). Children's capacity for algebraic thinking in the early grades. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 23(2), 219-232.
<https://doi.org/10.1080/18117295.2019.1661661>
- Anwandter Cuellar, N. S., Lessard, G., Boily, M. et Mailhot, D. (2018). L'émergence de la pensée algébrique au préscolaire : les stratégies des élèves concernant la notion d'équivalence mathématique. *Revue des sciences de l'éducation de McGill*, 53(1), 146-168.
<https://doi.org/10.7202/1056287ar>
- Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool : Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (p. 115-136). Springer.
- Blanton, M. L. et Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early algebraization* (p. 5-23). Springer.
- Boily, M., Polotskaia, E., Lessard, G. et Anwandter Cuellar, N. S. (2020). Les suites non numériques et le potentiel de la pensée algébrique chez les élèves du préscolaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 11-35. <https://doi.org/10.7202/1070023ar>
- Bower, C. A., Zimmermann, L., Verdine, B. N., Pritulsky, C., Golinkoff, R. M. et Hirsh-Pasek, K. (2021). Enhancing spatial skills of preschoolers from under-resourced backgrounds: A comparison of digital app vs. concrete materials. *Developmental Science*, 25(1), article e13148.
<https://doi.org/10.1111/desc.13148>
- Britt, M. S. et Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early algebraization* (p. 137-159). Springer.
- Bronner, A. (2015). Développement de la pensée algébrique avant la lettre. Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF 2015 « Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage », 10-14 octobre 2015, Alger, Algérie* (p. 247-264).
- Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. K. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Duval R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. Dans J.-C. Rauscher (dir.), *Actes du XXXII^e Colloque COPIRELEM, Strasbourg, IREM* (p. 67-89).
- Fox, J. (2005). Child-initiated mathematical patterning in the pre-compulsory years. Dans H. L. Chick et J. L. Vincent (dir.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Melbourne, Australie* (Vol. 2, p. 313-320). PME.
- Freiman, V. et Lee, L. (2004). *Tracking primary students' understanding of the equality sign*. International Group for the Psychology of Mathematics Education.

- Freiman, V., Richard, P. et Jarvis, D. (2012). Enseignement de mathématiques au Nouveau-Brunswick (secteur francophone). Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Actes du colloque EMF2012 « Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle », 3-7 février 2012, Université de Genève, Suisse* (SPE3, p. 1761–1780). <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>
- Jeannotte, D. et Squalli, H. (2022). Le développement de la pensée algébrique dans les programmes de l'Ontario : quel potentiel et quelle trajectoire visée? *Revue Québécoise de Didactique des Mathématiques, Thématique 2* (Tome 1), 34–58. <https://doi.org/10.71403/fp396345>
- Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. Dans National Council of Teachers of Mathematics, Mathematical Sciences Education Board, & National Research Council (dir.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a National Symposium* (p. 25–26). National Academies Press.
- Kidd, J., Carlson, A., Gadzichowski, M., Boyer, C. E., Gallington, D. et Pasnak, R. (2013). Effects of patterning instruction on the academic achievement of 1st-grade children. *Journal of Research in Childhood Education*, 27(2), 224–238. <https://doi.org/10.1080/02568543.2013.766664>
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator (Singapore)*, 8(1), 139–151.
- Kieran, C. (2014). *What does research tell us about fostering algebraic thinking in arithmetic?* National Council of Teachers Mathematics. <http://www.nctm.org/news/content.aspx?id=42315>
- Larguier, M. (2019). Le développement de la pensée algébrique dans le curriculum officiel en France et au Québec. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 21(4).
- Marchand, P. et Bednarz, R. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin de l'Association mathématique du Québec*, XXXIX(4), 30–42.
- Ministère de l'éducation du Nouveau-Brunswick. (2000). *Programme d'études, Mathématiques, 1^{re} en 4 année*. Direction des services pédagogiques.
- Mulligan, J. et Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33–49. <https://doi.org/10.1007/BF03217544>
- Papic, M. M., Mulligan, J. T. et Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237–268. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.42.3.0237>
- Polotskia, E., Anwandter-Cueuillard, N., Savard, A. et Robert, V. (2024, juillet). *Learning routes for algebraic thinking in preschool* [Rapport de recherche]. PME.
- Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6(4), 117–133.
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E., McLean, L. et McEldoon, K. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development*, 14(3), 376–396.
- Sarama, J. et Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.
- Squalli, H., Mary, C. et Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. Dans J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.), *Recherches et curriculums : le cas de l'enseignement des mathématiques, sciences et technologie* (p. 65–78). De Boeck.

- Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF2015 « Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage »* (p. 346-356).
- Squalli, H., Bronner, A., Languier, M. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 36-62.
- Squalli, H. et Jeannotte, D. (2024). Un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique élémentaire. *Revue Québécoise de Didactique des Mathématiques, Thématique 2*(Tome 2), 66-101.
<https://doi.org/10.71403/www4e62>
- Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Languier, M. (2020). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Livres en ligne du CRIRES.
<https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>
- Sternberg, L. et Larson, P. (1976). The development of pattern recognition ability in children. *Contemporary Educational Psychology*, 1(2), 146–156. [https://doi.org/10.1016/0361-476X\(76\)90019-9](https://doi.org/10.1016/0361-476X(76)90019-9)
- Warren, E. et Cooper, T. J. (2007). Repeating patterns and multiplicative thinking: Analysis of classroom interactions with 9 year old students that support the transition from known to the novel. *Journal of Classroom Instruction*, 41, 7-11.

ÉTUDE DU DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE FONCTIONNELLE AU COLLÈGE TUNISIEN

| OUESLATI* SAMIA ET KOUKI** RAHIM

Résumé | Cet article porte sur le développement de la pensée fonctionnelle avant l'introduction formelle du concept de fonction. Il s'inscrit dans le domaine de la recherche en didactique des mathématiques. En s'appuyant sur la TAD de Chevallard (1999), nous proposons un modèle épistémologique de référence de la pensée fonctionnelle. A cette fin, nous présentons une grille multidimensionnelle et l'analyse des manuels scolaires¹ du collège tunisien, dans le but d'explorer la mise en place de la pensée fonctionnelle dans une perspective interdisciplinaire.

Mots-clés : Pensée algébrique, Pensée fonctionnelle, Grille, Multidimensionnelle, Interdisciplinarité.

Abstract | This article looks at the development of functional thinking prior to the formal introduction of the concept of function. It is part of research into the didactics of mathematics. Based on Chevallard's (1999) anthropological theory of didactics, we propose an epistemological reference model of functional thinking. To this end, we present a multidimensional grid and an analysis of Tunisian middle school textbooks, with the aim of exploring the implementation of functional thinking from an interdisciplinary perspective.

Keywords: Algebraic thinking, Functional thinking, Grid, Multidimensional, Interdisciplinarity.

I. INTRODUCTION

L'enseignement de la notion de fonction occupe une place importante dans les programmes de l'enseignement des mathématiques, ainsi que dans ceux des autres disciplines, à travers les différents niveaux de cursus post primaire en Tunisie (Smida, 2003), et dans le monde. Plusieurs chercheurs se sont intéressés aux difficultés rencontrées par les apprenants dans l'enseignement et apprentissage de l'algèbre et notamment dans l'enseignement et apprentissage du concept de fonction². Les motivations de ces chercheurs se fondent sur deux considérations fondamentales :

- Des considérations épistémologiques et historiques liées aux spécificités de ce champ des mathématiques. En effet le domaine de l'algèbre a plusieurs domaines d'application dont la physique et les sciences de l'ingénieur. L'algèbre se nourrit des problèmes posés par ces disciplines et évolue grâce aux solutions qu'elle tente d'y apporter.
- Des considérations didactiques et cognitives liées aux difficultés réelles d'apprentissage de ce champ des mathématiques. Il s'agit pour les élèves de comprendre les concepts en jeu de développer des raisonnements, des méthodes de résolution de problèmes qui sollicitent divers registres de représentations (numérique, algébrique, graphique, géométrique...) et de mettre en œuvre leurs connaissances pour résoudre les problèmes en lien avec leur environnement et/ou d'autres discipline.

Dans tous les cas ces chercheurs, s'accordent à dire que la difficulté majeure pour l'enseignement de l'algèbre consiste à concevoir des stratégies efficaces assurant l'articulation de différents axes (Robert, 2018 ; Sierpiska, 1992a). Ces derniers mobilisent plusieurs paramètres tel que le statut

* Université virtuelle de Tunis – Tunisie – pr.samia@gmail.com

** Université de Tunis el Manar et Université de Carthage – Tunisie – rahim.kouki@ipeiem.utm.tn

¹ En Tunisie, il y a un seul manuel scolaire pour chaque niveau de cursus.

² Nous nous intéressons dans notre recherche au concept de fonction dans son aspect algébrique.

inconnu, le statut variable, divers registres de représentations, des relations de dépendances, des raisonnements etc. L'enseignement de l'algèbre en Tunisie n'a pas échappé, au cours de son évolution, à ces changements d'ordre didactique et cognitif (Ben Nejma, (2021) ; Ben Nejma., Abouhanifa, Oké, Najjar, Squalli et Adihou, 2022). Bien que les programmes tunisiens ne mentionnent pas d'une manière explicite «*la pensée fonctionnelle* », notre travail porte sur le développement de cette pensée au collège dans le système éducatif tunisien, avant l'institutionnalisation du concept de fonction. En Tunisie le concept de fonction est enseigné explicitement en première année de l'enseignement secondaire (élèves âgés de 14 à 15ans). Ainsi, notre étude s'intéresse au développement précoce de la pensée fonctionnelle dans son aspect algébrique avec une perspective interdisciplinaire. Pour ce faire, nous avons croisé la dimension interdisciplinaire (Lenoir et Sauvé, 1998a) avec le modèle d'analyse didactique et épistémologique introduit par Kouki (2018) ainsi que les travaux Squalli (2002) autour du processus du développement de la pensée algébrique et fonctionnelle au collège. A cet égard, nous mettons l'hypothèse que le recours à la résolution des problèmes du monde réel et/ou des problèmes faisant appel à une ou plusieurs disciplines favorise le développement de la pensée fonctionnelle. Qu'en est-il alors de l'enseignement et apprentissage de l'algèbre et du développement précoce de la pensée fonctionnelle en Tunisie ?

Dans cette recherche, nous essayerons de trouver des éléments de réponses aux questions suivantes :

- Les manuels scolaires du collège tunisien préparent-ils explicitement ou implicitement les apprenants à l'étude des fonctions au secondaire ?
- Dans quelle mesure l'institution prépare-t-elle les apprenants à maîtriser les concepts fondamentaux qui favorisent le développement de la pensée fonctionnelle avant l'enseignement explicite du concept de fonction ?
- Quelle est la place et le rôle de la dimension interdisciplinaire dans le développement de la pensée fonctionnelle au collège ?

II. LES ENJEUX HISTORIQUES ET ÉPISTÉMOLOGIQUES

L'histoire du développement du concept fonction a connu un cheminement complexe à travers plusieurs siècles (Youschkevitch, 1981 ; Squalli, 2000). En effet plusieurs facteurs ont participé à l'évolution de la mise au point de la définition qu'on connaît de nos jours. Le passage des dépendances tabulaires chez les Grecs aux dépendances fonctionnelles entre quantités variables au XIV^{ème} siècle sans oublier l'impact de la science du mouvement sur la notion de fonction et son détachement de sa représentation graphique, ainsi que le passage de la notion de fonction au XVII^{ème} siècle au concept de fonction du XX^{ème} siècle (Charbonneau, 1987a ; Ben Nejma, 2020). En remontant à 2000 ans avant notre ère, les chercheurs et les historiens s'accordent sur le fait que la notion de fonction n'existait pas d'une manière implicite ni explicite (Charbonneau, 1987a). Les mathématiciens de l'antiquité ont beaucoup produit des tablettes pour faciliter les calculs de la vie pratique (*E.T.Bell, 1945*). En effet les Égyptiens et les Babyloniens ont représenté sur des tablettes d'argile des tables, des cribles de correspondance telle que ceux de carrés, de la racine carrée, des triplets pythagoriciens etc (Boyer, 1983). Dans le monde grec, les mathématiciens présentent des relations fonctionnelles de dépendance entre quantités variables. En effet, la loi de l'acoustique présente une dépendance fonctionnelle entre les deux quantités variables (Pierce, 1989); la longueur d'une corde vibrante et la hauteur du son qu'elle produit. Entre le VII^{ème} siècle et le XII^{ème} siècle après J.-C, les savants maîtrisent les sciences grecques de l'empire byzantin, des techniques millénaires des Mésopotamiens de l'empire sassanide en Perse et des découvertes scientifiques de l'Inde (Charbonneau, 1987a). Ces scientifiques ont aussi contribué au développement des mathématiques par la production d'une nouvelle science (Moyon, 2010 ;

Charbonneau, 1987a). Les travaux de ces derniers ont permis un passage d'une vision statique chez les Grecs à une vision dynamique par l'étude du mouvement qui met en jeu une relation entre la position du mobile et le temps. En effet durant cette période, les chercheurs ont adopté une vision dynamique, par l'étude du mouvement sans avoir un langage précis ou plus exactement un symbolisme algébrique (Charbonneau, 1987a). L'un des plus importants apports des travaux de recherche pendant cette période, est l'émergence de l'algèbre. L'ouvrage du savant Al-Khwarizmi (vers 820-830) *Kitab al-mubtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala* (Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison) marque la naissance de l'algèbre comme discipline mathématique. La préface indique que le livre a un but pédagogique et expose des méthodes servant à résoudre des problèmes concrets (Djabar, 2001). Partant du fait que la philosophie d'Aristote porte sur l'explication des phénomènes par les causes et non par leurs effets, les chercheurs du XVII^{ème} siècle ont adopté une nouvelle manière de voir, un changement de questionnement (koyré, 1957). De ce fait ils ont eu d'autres orientations scientifiques ce qui a généré la naissance d'une nouvelle science physique (Charbonneau, 1987a). Il ne s'agit plus de chercher les causes d'un phénomène mais plutôt de mieux comprendre les phénomènes par leurs effets quantifiés et mesurés (Kuhn, 1962). Il ne s'agit plus d'observer mais d'analyser, de résoudre des problèmes, de mathématiser la nature et enfin la maîtriser (Bacon, 1620).

III. PROBLÉMATIQUE

Nous nous intéressons dans notre travail à l'enseignement et à l'apprentissage de l'algèbre élémentaire au collège tunisien. Nous adoptons le fait que l'algèbre élémentaire se décline à travers un processus d'algébrisation de praxéologies mathématiques ou de praxéologies non mathématiques qu'on peut rendre mathématisables en termes d'opérations sur des grandeurs numériques ou géométriques (Bolea, Bosch et Gascón, 2001). Les chercheurs s'accordent sur l'importance du développement de la pensée fonctionnelle dans l'enseignement et la formation de la pensée mathématique. Du fait que le concept même de fonction met en jeu plusieurs domaines mathématiques (Denbel, 2015), aussi la modélisation de situations par des fonctions nous permet de mieux comprendre le monde qui est en perpétuel changement (Freudenthal ; 2002, Stölting ; 2008 ; Ben Nejma, 2021). Notre recherche s'inscrit dans le cadre du mouvement international *Early Algebra* et des travaux de l'Observatoire International de la Pensée Algébrique, auquel nous³ appartenons. Elle s'appuie sur les recherches dans le domaine de la pensée algébrique et du développement de la pensée fonctionnelle (Bednarz et al., 1996 ; Squalli, 2000 ; Radford, 2014 ; Sierpinska, 1992a ; Najar et al., 2021 ; Oueslati et Najar, 2022 ; Oueslati et Kouki, 2023 ; Squalli et Jeannotte, 2024). Dans le cadre du mouvement *Early Algebra*, certains chercheurs (Robert et al., 2018) estiment que la mise en place et le développement des compétences algébriques sont essentiels pour favoriser la pensée fonctionnelle. Ils considèrent qu'on peut développer la pensée fonctionnelle en elle-même. Nous présentons dans cet article une étude du processus de développement de la pensée fonctionnelle, dans les trois niveaux du cursus du collège tunisien avec une perspective interdisciplinaire qui s'entreprind par l'étude de la résolution de problème de modélisation conçue dans les manuels scolaires. Nous avons adopté la perspective interdisciplinaire dans notre étude, du fait que l'une des caractéristiques fondamentales du concept de fonction est sa dualité. En effet ce concept interroge d'une part des propriétés de calcul, des axiomes du domaine de l'algèbre, des variables dépendantes et indépendantes, des relations fonctionnelles de dépendance et des raisonnements de covariances, de correspondance et sollicite d'autre part les propriétés du monde réel et/ou des connaissances d'autres disciplines. L'interdisciplinarité permet aux disciplines de communiquer et de dialoguer, tout en créant des ponts

³ Le premier auteur, Samia Oueslati.

d'échange entre elles (OCDE, 1972). Les disciplines sont alors interrogées dans une recherche, un travail ou une activité interdisciplinaire pour s'enrichir l'une l'autre.

La méthodologie adoptée s'est appuyée sur une étude historique et épistémologique du concept de fonction dans son aspect algébrique afin de repérer des obstacles liés aux problèmes intra et extra-mathématiques d'une part, et sur une étude des travaux antérieurs de didactiques dans le domaine de l'algèbre présentant des modèles d'analyse didactique. Nous proposons une catégorisation des types de tâches sur la base

- du modèle épistémologique MER que nous avons mis au point,
- des contenus et compétences relatifs à l'enseignement et à l'apprentissage du domaine de l'algèbre au collège tunisien avant l'institutionnalisation de la notion de fonction. Et ce, dans la mesure où les attentes et les exigences des institutions en termes de contenus et de compétences à développer chez les apprenants sont définies dans les curricula, qui, de leur côté, représentent l'un des cadres de référence institutionnels pour les enseignants et les enseignés. « Les programmes définis nationalement après de larges concertations s'imposent à tous comme le cadre de référence nécessaire à l'action de chaque enseignant. » (Bouvier, 1996).

Nous analyserons selon une grille multidimensionnelle les praxéologies proposées dans les parties cours et exercices des manuels scolaires officiels des niveaux de cursus 7^e, 8^e et 9^e année de base⁴, suivant la catégorisation conçue.

IV. CADRE THÉORIQUE

1. *La théorie anthropologique de Chevallard*

La Théorie Anthropologique de Didactique (TAD) de Chevallard s'inscrit dans une théorie de la didactique des mathématiques comme « science de l'étude et de l'aide à l'étude des questions de mathématiques » (Chevallard, Bosch et Gascon, 1997). La TAD prolonge la théorie de transposition didactique qui modélise le savoir mathématique en termes d'objets dans le but de l'analyse de son régime didactique. C'est à travers l'étude des pratiques institutionnelles dans leurs relations au rapport institutionnel que la théorie anthropologique se développe au sein de l'institution. « Toute pratique institutionnelle se laisse analyser, de différents points de vue, et de différentes façons, en un système de tâches relativement bien circonscrites, qui se découpe dans le flux de la pratique » (Chevallard, 1999).

2. *Le modèle épistémologique de référence MER de la pensée fonctionnelle*

La théorie anthropologique du didactique sollicite comme outil d'analyse l'élaboration de modèles épistémologiques de référence (MER) de la pensée fonctionnelle. Nous avons élaboré un modèle épistémologique de référence (MER) rendant compte des organisations régionales et locales liées à l'enseignement de l'Algèbre au collège en relation avec la notion d'interdisciplinarité.

Ainsi l'analyse du savoir à enseigner relative à certains objets d'enseignement, ne peut avoir d'intérêt pour la recherche que si elle peut être mise en parallèle avec un MER qui donne à voir les éléments essentiels de l'enseignement d'un domaine donné au regard des résultats des recherches. (Larquier et Bronner, 2015)

À partir de là, on peut définir des organisations mathématiques qui peuvent se situer à différents niveaux: ponctuelle (autour d'un unique type de tâche) OMP, locale OML, régionale OMR et globale OMG. (Chevallard, 1998, p. 5). Notre modèle épistémologique de référence (MER) de la pensée

⁴ Les trois premières années après le primaire (11-14 ans).

fonctionnelle est à la fois progressif et dynamique, car il permet de progresser à travers les différentes praxéologies régionales, tout en favorisant les interactions entre elles dans un contexte bien défini.

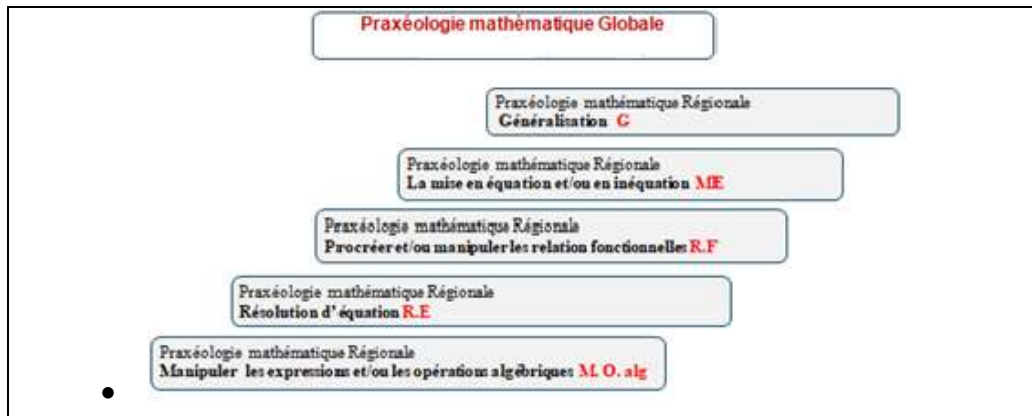


Figure 1 – Modèle épistémologiques de référence (MER) du développement de la pensée fonctionnelle

Il s'articule autour de cinq praxéologies régionales : 1) Manipulation les expressions et/ou les opérations algébriques (M.O.alg) situé au niveau de base du modèle. 2) Résolution des équations (R.E) ; correspondant au deuxième niveau de la progression. 3) Procréer et/ou manipuler les relations fonctionnelles (R.F) ; constituant une praxéologie régionale centrée sur la pensée fonctionnelle. 4) Mise en équation et/ou en inéquation ; cela renvoie directement à un processus de modélisation mathématique ; cette praxéologie régionale représente une étape avancée dans le processus de modélisation⁵ (M.E). 5) Généralisation algébrique, cette praxéologie régionale représente le niveau le plus avancé de la pensée fonctionnelle (G).

Le tableau ci-dessous présente les praxéologies locales issues des praxéologie régionales du modèle épistémologique de référence de la pensée fonctionnelle, lesquelles se traduisent en différents genre et types de tâches.

Praxéologie Régionale	Praxéologie Locale
M.O. alg	Calculer Simplifier des opérations algébriques Factoriser/développer Manipuler les expressions littérales avec/ou sans contexte
R.E.	Déterminer l'inconnu Maîtriser les outils algébriques pour résoudre une équation (les étapes de résolution)
R.F.	Manipuler la variable (calculer, compléter un tableau, représenter graphiquement etc.) Établir des relations fonctionnelles implicites et/ou explicites dans un contexte intra ou extra mathématique (interdisciplinaire)
M.E.	Le choix de l'inconnu ou la variable dans un contexte intra ou extra mathématique ou interdisciplinaire La mise en équation ou en inéquation La résolution La validation de la solution

⁵ Notre modèle épistémologique de référence ne comporte pas explicitement une praxéologie régionale de la modélisation, mais la praxéologie de la mise en équation et/ou en inéquation peut être interprétée comme une forme implicite de modélisation mathématique.

G	Détecter des régularités Exprimer ces régularités avec un langage algébrique (des symboles, alphanumérique, dessins etc.)

V. GRILLE D'ANALYSE MULTIDIMENSIONNELLE.

L'étude historique et épistémologique de l'enseignement et apprentissage de l'algèbre élémentaire, ainsi que l'examen de la littérature en didactiques portant sur le développement de la pensée algébrique et de la pensée fonctionnelle (Bednarz et al., 1996; Squalli, 2000; Radford, 2014 ; Sierpinska, 1992a ; Najar et al., 2021 ; Oueslati et Najar, 2022 ; Oueslati et Kouki, 2023), ont permis de concevoir un modèle épistémologique de référence de la pensée fonctionnelle, accompagné d'une grille d'analyse multidimensionnelle dédiée à son développement. L'élaboration de la grille nécessite l'intégration des dimensions praxéologique et sémiotique avec les dimensions sémantique et syntaxique. Pour ce faire nous avons établi une catégorisation préalable basée sur les contenus et les compétences définis par les programmes scolaires du collège (élèves âgés de 11 à 14 ans), tout en tenant compte des aspects épistémologiques, didactiques et cognitifs liés au développement de la pensée fonctionnelle. Cette grille multidimensionnelle a été exploitée pour analyser les leçons proposées dans le domaine de l'algèbre⁶ dans chaque manuel scolaire du collège tunisien. L'analyse vise en effet à expliciter le rapport institutionnel au développement de la pensée fonctionnelle au collège. Pour ce faire, nous avons croisé les trois axes suivants :

1. La dimension interdisciplinaire (Lenoir et Sauvé, 1998)

La perspective interdisciplinaire que nous avons adoptée est basée sur le fait que les curricula interdisciplinaires facilitent la création de liens et le transfert de compétences entre différentes disciplines, tout en favorisant leur connexion avec le monde réel (Marrin (1995) ; Jacobs (1995)). Cela implique d'établir des passerelles entre les disciplines en s'appuyant sur les similarités dans les contenus d'apprentissage, les concepts et les compétences cognitives et techniques. D'après Erickson (1996), Klein (1998) et Spady (1994), l'interdisciplinarité stimule le développement de compétences cognitives supérieures telles que la pensée critique, l'esprit de synthèse et d'intégration, les compétences réflexives, la compréhension des concepts (Lowe, 2002). L'attention est ainsi portée aussi bien sur le « processus d'apprentissage » que sur « le contenu de la discipline » (Pidgdon et woolly, 1993). Dans le souci de s'adapter aux nouvelles exigences du 21^{ème} siècle, la Tunisie a réformé, en 2002, son système éducatif sous couvert de l'approche par compétences. La réforme vise à favoriser l'acquisition par les apprenants des compétences leur permettant de faire face dans leur vie de citoyens de demain à des situations complexes en rapport avec leur environnement et de résoudre les problèmes auxquels ils seront confrontés⁷. Dans la réforme 2002, le choix a été fait de regrouper les disciplines en champs, et ce dans un souci d'établir des liens entre des disciplines d'un même champ de référence. C'est ainsi que la réforme 2002 retient cinq champs d'apprentissage : les langues, les sciences, la technologie, les humanités et les arts. De plus, le curriculum définit un certain nombre de compétences transversales (Oueslati et Najar, 2022).

⁶ Le curriculum tunisien comprend cinq domaines : le domaine arithmétique, le domaine statistique, le domaine de la géométrie, le domaine des mesures de grandeurs et le domaine de l'algèbre. Ces domaines seront développés tout le long des niveaux de cursus de l'enseignement de base du collège et dans les quatre niveaux de cursus de l'enseignement secondaire. C'est en première année du collège de l'enseignement de base que l'apprenant commence à s'engager à résoudre des exercices dans le domaine de l'algèbre

⁷ Nous entendons par problèmes ceux qu'on rencontre dans le quotidien dans le vécu ou/et dans le présent ou/et dans le futur de l'élève (le citoyen).

- **la dimension sémantique, syntaxique et mixte** introduite par Kouki (2018) et ainsi que les changements de registre. La mobilisation des techniques de dimension syntaxique est recommandée au niveau de ce type de tâches pour le traitement des activités du registre numérique et algébrique. Elles sollicitent les règles de calcul algébrique telles que la simplification des expressions algébriques, le développement, la factorisation, etc., afin de se ramener à des formes bien déterminées d'équation, d'inéquation, etc. Pour les techniques de dimension sémantique, elles sont plutôt recommandées au niveau des types de tâches pour le traitement des activités graphiques et autres. Pour les techniques de dimension mixte, elles sont plutôt recommandées dans la résolution des problèmes. L'apprenant est amené à mobiliser des techniques de transformations à dimension syntaxique, des techniques à dimension sémantique comme l'interprétation, la vérification dans les registres numériques, graphiques et algébriques.
- **les concepts fondamentaux et les raisonnements** en jeu dans le processus du développement de la pensée algébrique et fonctionnelle avant l'institutionnalisation du concept de fonction.

Ainsi l'articulation de ces axes, nous a amené à catégoriser les types de tâches de notre grille multidimensionnelle. À cet égard l'architecture des types de tâches porte sur les trois points de vue ;

- **le caractère ou l'ambiance du type de tâche** : Selon la dimension interdisciplinaire, on définit le caractère ou ce que nous appelons l'ambiance du type de tâche, quand cette dernière se place dans un contexte intra- mathématique ou extra-mathématique, on est alors dans une résolution d'un problème intra-mathématique⁸, ou un problème extra-mathématique⁹ ;
- **la technique et le registre** : Ce point de vue se présente par le croisement des praxéologiques mathématiques et registres de représentations sémiotiques en mobilisant les techniques sémantiques, syntaxique et mixte (Kouki, 2018) ;
- **l'approche adoptée** : Dans cette optique, nous serons en mesure de situer le type de tâche en fonction de l'approche choisie, en tenant compte les relations fonctionnelles, notamment les relations de dépendance. les types de raisonnements sollicités comprennent le raisonnement par correspondance et le raisonnement par covariance, qui interviennent dans le processus de développement de la pensée fonctionnelle sous son aspect algébrique, avant même son institutionnalisation au collège (élèves âgés de 11 à 14 ans). Dans le tableau suivant nous présentons notre grille multidimensionnelle¹⁰.

VI. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

Dans le paragraphe suivant, nous présenterons une série de résultats issus de l'analyse des manuels du collège tunisien, illustrés par des tableaux¹¹ croisés et accompagnés de remarques explicatives. Dans les trois niveaux de cursus 7^e, 8^e et 9^e année de base du collège tunisien, la praxéologie régionale de la

⁸ Nous entendons par problème intra-mathématique toute activité mathématique qui ne fait pas appel dans son contexte et dans sa résolution à une autre discipline et/ou au monde réel.

⁹ Nous entendons par problème extra-mathématique toute activité mathématique qui fait appel dans son contexte et/ou dans sa résolution à une autre discipline ou au monde réel.

¹⁰ Nous entendons par emplacement dans la leçon de la tâche du fait que dans chaque leçon , on distingue trois parties ; reprendre, découvrir ,appliquer et la partie exercices.

¹¹ avec un $p < 0.005$ pour chaque tableau croisé.

généralisation est presque absente dans le domaine de l'algèbre. Nous allons présenter la répartition des praxéologie mathématiques régionale comme suit :

Tableau 1 – La répartition des praxéologie mathématiques régionale

			7 ^e Année	8 ^e Année	9 ^e Année	
Praxi – Regionale	M.O	Effectif	28	25	254	307
		% du total	4,4%	3,9%	40,1%	48,5%
	M.E	Effectif	0	29	27	56
		% du total	0,0%	4,6%	4,3%	8,8%
	R.E	Effectif	3	25	69	97
		% du total	0,5%	3,9%	10,9%	15,3%
	R.F	Effectif	44	98	31	173
		% du total	7,0%	15,5%	4,9%	27,3%
Total	Effectif	75	177	381	633	
	% du total	11,8%	28,0%	60,2%	100,0%	

Nous constatons qu'en 9^e année de base la praxéologie régionale la plus sollicitée est la manipulation des expressions et/ou des opérations algébriques MO. Le pourcentage 40% est important relativement à la répartition des autres praxéologie régionales. Il est à noter que la répartition de la praxéologie régionale procréer et/ou manipuler les relations fonctionnelles RF est faible dans les trois niveaux de cursus du collège. Pour la répartition de la praxéologie régionale de la mise en équation et/ou en inéquation ME est nulle 7^e année de base, et ne dépasse pas les 5% en 8^e et en 9^e année de base.

Tableau 2 – La répartition des tâches sollicitant les R.F.de dépendance

			7 ^e Année	8 ^e Année	9 ^e Année	
R.F. de dépendance	Non	% du total	5,7%	10,9%	53,7%	70,3%
	Oui	% du total	6,2%	17,1%	6,5%	29,7%
Total		% du total	11,8%	28,0%	60,2%	100,0%

Les tâches qui mobilisent les relations fonctionnelles de dépendance sont relativement sollicitées au collège, en particulier en 8^e année de base, où elles représentent environ 17% des tâches proposées. En revanche, en 7^e et 9^e année de base, la proportion de ce type de tâche reste très faible, ne dépassant pas 7 %.

Tableau 3 – La répartition des tâches sollicitant le raisonnement de covariance

			7 ^e Année	8 ^e Année	9 ^e Année	
Rais-de covariance	Non	% du total	11,5%	27,0%	60,2%	98,7%
	Oui	% du total	0,3%	0,9%	0,0%	1,3%
Total		% du total	11,8%	28,0%	60,2%	100,0%

Nous constatons que les tâches mobilisant le raisonnement de correspondance dans les trois niveaux de cursus du collège ne dépassent pas les 2 %, tout comme le raisonnement de covariance,

ce qui reste négligeable. Cela nous amène à déduire que les concepts fondamentaux du développement de la pensée fonctionnelle au collège ne sont pas pris en charge par l'institution.

Tableau 4 – La répartition des tâches sollicitant le contexte interdisciplinaire

			7 ^e Année	8 ^e Année	9 ^e Année	
Contexte interdisciplinaire	Non	% du total	9,8%	24,0%	58,1%	91,9%
	Oui	% du total	2,1%	3,9%	2,1%	8,1%
Total		% du total	11,8%	28,0%	60,2%	100,0%

À la lumière des résultats présentés dans le tableau ci-dessus, nous sommes forcés de constater que la dimension interdisciplinaire sollicitée dans les trois niveaux du cursus au collège est très faible. Cela nous amène à prendre conscience que cette dimension, qui fait appel à d'autres disciplines (et qui est distincte de l'extra-mathématique), ne figure pas parmi les objectifs des concepteurs des manuels.

VII. CONCLUSION

L'analyse des manuels scolaires des trois niveaux de cursus - 7^e, 8^e et 9^e année de base- à travers la grille multidimensionnelle, a révélé que la répartition des tâches met en lumière une volonté institutionnelle de développer la pensée fonctionnelle dans le domaine de l'algèbre, en amont de l'institutionnalisation du concept de fonction. Toutefois cette approche présente certaines défaillances selon différentes dimensions. La praxéologie régionale de généralisation est presque absente dans les trois niveaux de cursus de l'enseignement de base au collège. Les tâches proposées dans les trois manuels scolaires sont ancrées essentiellement dans la praxéologie régionale MO et la praxéologie régionale RF. Nous notons que la 9^e année de base représente le maillon faible pour la préparation des apprenants du collège à l'enseignement et apprentissage du concept de fonction en 1^{re} année secondaire¹². En effet, les choix institutionnels de la dernière année du collège risquent de freiner cette volonté timide de l'institution de la mise place du processus de développement de la pensée fonctionnelle. Nous pouvons en déduire que les manuels scolaires du collège tunisien ne préparent pas suffisamment les élèves à l'étude des fonctions au secondaire. En effet, les tâches proposées ne stimulent pas le développement des raisonnements et des concepts fondamentaux indispensables à l'émergence d'une pensée fonctionnelle, préalable à l'institutionnalisation du concept de fonction au lycée. Par ailleurs, la dimension interdisciplinaire ; qui permettrait d'exploiter la dualité du concept de fonction en l'appliquant à divers domaine et dans divers disciplines ; n'est ni suffisamment valorisée ni intégrée, limitant ainsi son rôle dans le développement de cette pensée.

¹² L'année qui vient juste après la 9^e année de l'enseignement de base.

RÉFÉRENCES

- Beane J. A. (1995). Curriculum integration and the disciplines of knowledge. *Phi Delta Kappan*, 76, 616-621.
- Bednarz, N. et Dufour-janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (dir.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (p. 115-136). Kluwer Academic Publishers.
- Boyer J.-Y. (1983). Pour une approche fonctionnelle de l'intégration des matières au primaire. *Revue des sciences de l'éducation*, IX(3), 433-452.
- Ben Nejma, S. (2020). Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement secondaire tunisien. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 1, 38-69.
- Ben Nejma, S. (2021). La place de la modélisation dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire : pratiques institutionnelles et pratiques enseignantes dans le système éducatif tunisien. *ITM Web of Conferences*, 39, article 01009.
- Charbonneau, L. (1987a), Chronique : l'histoire des mathématiques. Première partie : fonction : du statisme grec au dynamisme du début du XVIIIème siècle. *Bulletin de l'AMQ*, 5(1).
- Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (dir.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques. Actes de l'Université d'été de didactique de La Rochelle* (p. 119-140). IREM de Clermont Ferrand.
- Djebbar, A. (2001). *Une histoire de la science arabe. Entretiens avec J. Rocmorduc*. Seuil.
- Kouki, R. (2018). L'articulation des dimensions syntaxique et sémantique en algèbre du secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 38(1), 43–78. <https://revue-rdm.com/2018/1-articulation-des-dimensions/>
- Legrand, L. (1986). *La différenciation pédagogique*. Scarabée.
- Lenoir, Y. et Sauvé. L. (1998a). L'interdisciplinarité et la formation à l'enseignement primaire et secondaire. Quelle interdisciplinarité pour quelle formation? Introduction du numéro thématique : Interdisciplinarité et formation à l'enseignement primaire et secondaire. *Revue des sciences de l'éducation*, XXIV(1), 3-29.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra : Perspectives for research and teaching* (p. 65–86). Kluwer.
- Meirieu, P. (1986). Éditorial. *Cahiers pédagogiques [numéro spécial]*, (2), 244-245.
- Najar, R., Squalli, H., Adihou, A. et Abouhanifa, S. (2021). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : Pour un état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. *ITM Web of Conferences*, 39, article 01004. <http://dx.doi.org/10.1051/itmconf/20213901004>
- Oueslati, S. et Kouki, R. (2023). Un modèle de grille d'analyse multidimensionnelle pour l'étude du processus de transposition didactique de l'algèbre au collège. Dans A. Naceur et R. Kouki (dir.), *Méthodologie de la recherche doctorale*. Hammamet

- Oueslati, S. et Najar, R. (2022). *L'approche interdisciplinaire dans l'enseignement : cas du système d'enseignement tunisien*. ADiMA 3.
- Passaro, V. (2007). *Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélées par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire* [Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal].
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.
- Smida, H. (2003). *L'enseignement des mathématiques en Tunisie : Genèse et Destinée*. EMF 2003.
- Sierpinska, A. (1992a). On understanding the notion of function. Dans G. Harel et E. Dubinsky (dir.), *The concept of function : Aspects of epistemology and pedagogy* (p. 25-58). MAA Notes.
- Squalli, H. (2002) Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire: un exemple de raisonnement à l'aide de concepts mathématiques. *Instantanés mathématiques*, 39, 4-13.
- Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base* [Thèse de doctorat en éducation, Université Laval].
- Squalli, H. et Jeannotte, D. (2024). Un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique élémentaire. *Revue québécoise de didactique des mathématiques, Thématique 2*(Tome 2), 66-101.
<https://doi.org/10.71403/www4c62>

ANNEXES

Code		Q-Ouverte	
Emplacement dans la leçon		Q-Fermée	
Praxies-Régionale		Statut inconnue	
Genre de tâche		Statut variable	
Type de tâche		R-F- de dépendance	
Cadre		Raisonnement de correspondance	
Registre		Raisonnement de covariance	
Technique sémantique		Contexte interdisciplinaire	
Technique syntaxique		Contexte de la vie réelle	
Technique mixte		Contexte intra-mathématique	

Figure 2 – Grille multidimensionnelle d'analyse

**GT4 | DIMENSIONS
HISTORIQUE,
CULTURELLE ET
LANGAGIÈRE DANS
L'ENSEIGNEMENT DES
MATHÉMATIQUES**

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL 4

DIMENSIONS HISTORIQUE, CULTURELLE ET LANGAGIÈRE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

| BATTIE* VÉRONIQUE, BOUZARI** ABDELMALEK, GUILLEMETTE*** DAVID ET
KILANI**** IMED

I. INTRODUCTION

Le Groupe de travail 4 (GT4) s'inscrit dans la thématique générale du colloque *L'éducation mathématique face à un monde en accélération : enjeux, défis et opportunités*, en interrogeant plus spécifiquement les dimensions historique, culturelle et langagière dans l'enseignement des mathématiques. Ces dimensions constituent des portes d'entrée fécondes pour repenser les finalités et les pratiques de l'éducation mathématique contemporaine, dans une perspective plus globale, contextualisée et sensible à la diversité des cadres éducatifs (Chevallard, 1999 ; Radford, 2006 ; Barwell, 2012). Ces approches permettent en effet de mieux comprendre comment les savoirs mathématiques circulent, se transforment et s'enseignent dans des contextes socioculturels variés, et comment les langues et les pratiques discursives façonnent les manières de faire et de penser les mathématiques (Pimm, 1987 ; Sfard, 2008 ; Moschkovich, 2010).

Ce groupe de travail s'inscrit dans la continuité des réflexions amorcées lors de l'édition précédente d'EMF (2022), où la dimension langagière avait suscité un vif intérêt. Lors du colloque EMF 2025, cette dimension a continué de retenir fortement l'attention, confirmant sa pertinence et son actualité dans les questionnements liés à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Le groupe a réuni une vingtaine de participants, issus de divers horizons géographiques : Algérie, Canada, France (y compris les territoires d'outre-mer tels que la Guadeloupe, La Réunion, Mayotte), Sénégal et Tunisie. Cette diversité a enrichi les échanges en offrant des points de vue contrastés sur les réalités éducatives locales et les enjeux globaux. La pluralité des profils professionnels des participants (chercheurs, doctorants, enseignants du primaire, du secondaire et du supérieur, formateurs) a également permis d'aborder les thématiques du GT4 à partir d'expériences et de préoccupations variées, renforçant ainsi le dialogue entre recherche, formation et pratique de terrain.

Le groupe de travail a adopté une organisation propice aux échanges et à la construction collective de savoirs. Les modalités ont alterné entre des présentations orales de travaux de recherche suivies de discussions en plénière, et des séances de travail en sous-groupes. Ces dernières avaient pour objectif d'approfondir certaines thématiques, avant un retour en grand groupe permettant de mutualiser les

* Co-responsable du groupe de travail 4 – Université de Lyon, Université Lyon 1 – France – veronique.battie@univ-lyon1.fr

** Co-responsable du groupe de travail 4 – École Normale Supérieure de Kouba – Alger, Algérie – abdelmalek.bouzari@g.ens-kouba.dz

*** Co-responsable du groupe de travail 4 – Université du Québec à Montréal – Québec, Canada – guillemette.david@uqam.ca

**** Correspondant scientifique – Institut Supérieur de l'Éducation et de la Formation Continue – Tunisie – kilanis2006@yahoo.fr

analyses, de formuler des synthèses partagées, et parfois d'élargir la réflexion au-delà des travaux présentés.

II. TRAVAUX PRÉSENTÉS DANS LE GROUPE

Sept communications ont nourri les présentations et les discussions au sein du groupe.

Les deux premières séances ont été consacrées à cinq présentations centrées principalement sur les dimensions linguistiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les cinq communications présentées mettent en évidence l'influence déterminante des dimensions linguistiques, qu'il s'agisse du langage, du plurilinguisme ou du multilinguisme, sur l'apprentissage des mathématiques. Elles montrent que la compréhension, l'interprétation et l'expression des savoirs mathématiques sont étroitement liées aux langues mobilisées par les élèves et les enseignants, en particulier dans des contextes bilingues ou plurilingues. Ces travaux soulignent ainsi que le langage n'est pas un simple vecteur neutre, mais un élément central dans l'appropriation des connaissances mathématiques.

Dans sa communication, **Hajby** a présenté une étude menée au Québec qui met en évidence l'intérêt d'intégrer le plurilinguisme dans l'enseignement des mathématiques auprès d'élèves allophones en classe d'accueil. En mobilisant une approche translingue et collaborative, elle montre comment les langues des élèves peuvent devenir de véritables ressources pour renforcer leur engagement, soutenir leur compréhension et favoriser la construction de savoirs. Toutefois, ces pratiques se heurtent aux normes institutionnelles centrées sur l'usage exclusif du français. L'auteur plaide ainsi pour une reconnaissance du plurilinguisme comme levier didactique et pour un accompagnement structuré des enseignants dans cette évolution vers des pratiques didactiques plus inclusives.

Dans leur communication, **Robo et al.** explorent l'impact des variations grammaticales dans la formulation d'énoncés issus du PISA sur la compréhension et l'interprétation des élèves, particulièrement en contexte plurilingue. En s'appuyant sur l'analyse d'un item du PISA 2022 et des expérimentations menées en France hexagonale et en outre-mer, ils démontrent que de légères modifications syntaxiques peuvent considérablement modifier la façon dont les élèves appréhendent ces énoncés. Cette étude met en évidence la vulnérabilité des performances aux nuances linguistiques et souligne l'importance de poursuivre des recherches approfondies à l'échelle internationale afin d'éclairer les enjeux liés à la dimension langagière des évaluations mathématiques.

La recherche menée par **Kilani et Chellougui** s'intéresse à la capacité d'élèves tunisiens arabophones âgés de 17 à 18 ans à traduire en français des expressions symboliques mathématiques portant sur la notion de partition d'un ensemble. Si certaines expressions simples telles que « $V \neq \emptyset$ » sont généralement bien comprises, les élèves rencontrent des difficultés marquées pour expliciter la quantification universelle implicite dans ces expressions. Cette problématique se confirme et s'aggrave dans le cas d'expressions plus complexes comme « $V \cap F = \emptyset$ », où s'ajoutent des confusions fréquentes entre les concepts d'intersection et d'inclusion. Ces obstacles sont en partie liés à une maîtrise limitée du français, langue d'enseignement des mathématiques au lycée, ce qui complique davantage la compréhension et la traduction correcte des symboles mathématiques en langage naturel.

L'étude d'**Andrianarivony et al.**, réalisée auprès de 323 élèves et étudiants malgaches en transition lycée–université, examine l'impact du bilinguisme sur le raisonnement mathématique, en particulier sur la négation d'énoncés quantifiés. Confrontés à des énoncés à nier, rédigés soit en français soit en malagasy, les participants ont obtenu de meilleurs résultats en malagasy, mobilisant plus fréquemment un raisonnement par contre-exemple. Ces résultats suggèrent que l'usage de la langue maternelle peut

faciliter la compréhension des raisonnements, à condition que les dimensions logiques des énoncés soient explicitement enseignées.

Dans sa recherche, **Barthes-Garnier** analyse le rôle du langage dans l'apprentissage du calcul algébrique au collège, notamment autour de la distributivité. L'étude montre que les enseignants privilégient souvent les verbalisations liées aux manipulations symboliques, au détriment d'un travail sur la structure algébrique des expressions. Du côté des élèves, l'attention se concentre surtout sur les signes (comme les parenthèses), sans prise réelle en compte de la structure sous-jacente. Ces observations suggèrent que certaines difficultés en algèbre reviennent à un usage limité du langage pour exprimer, comprendre et manipuler les objets mathématiques.

Lors de la quatrième séance, deux communications ont été présentées : l'une axée sur les dimensions culturelles de l'enseignement des mathématiques, l'autre portant sur l'apport de l'histoire des mathématiques, soulignant comment la perspective historique peut contribuer à donner du sens aux notions enseignées en classe.

Dans leur communication, **Nguala et al.** explore la formation des enseignants à Mayotte autour de l'enseignement des fractions, en prenant en compte les spécificités culturelles locales. L'étude met en lumière les difficultés rencontrées par les enseignants à concevoir des situations didactiques contextualisées en lien avec les pratiques sociales des élèves. Elle souligne l'intérêt d'un recours à l'ethnomathématique pour enrichir la formation, favoriser une meilleure appropriation des savoirs mathématiques et développer des ressources pédagogiques adaptées au contexte local.

Enfin, **Glière** explore dans sa communication l'histoire des nombres relatifs, depuis leur statut longtemps incertain jusqu'à leur reconnaissance comme objets mathématiques à part entière. Il met en évidence les ruptures didactiques introduites par la réforme des mathématiques modernes, qui a souvent déconnecté l'enseignement du contexte historique et épistémologique des concepts. Il plaide pour une réintégration de cette dimension historique dans la classe, afin de donner du sens aux apprentissages, susciter la motivation des élèves et faciliter le passage du concret à l'abstrait. L'histoire de la mesure algébrique, comme celle proposée par Bourlet, offre à ce titre un éclairage utile pour repenser l'introduction des nombres relatifs à partir de problématiques fondatrices.

III. CONCLUSION : VERS UNE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES PLUS INCLUSIVE ET CONTEXTUALISÉE

Les travaux menés au sein du groupe de travail ont permis de mettre en lumière l'importance cruciale des dimensions historique, culturelle et langagière dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les échanges entre chercheurs ont révélé combien la pluralité des manières d'enseigner, de faire et de penser les mathématiques à travers les époques et les contextes géographiques constitue une richesse à valoriser (D'Ambrosio, 2002). Une contribution majeure du groupe réside dans la créativité avec laquelle plusieurs cadres théoriques ont été mobilisés et articulés, non seulement au sein de la didactique des mathématiques, mais également en provenance d'autres disciplines telles que la didactique des langues, l'ethnomathématique ou encore la sociolinguistique. Cette approche pluridisciplinaire a permis de mieux cerner la complexité des situations éducatives, en particulier en milieu plurilingue et multiculturel (Setati, 2005 ; Moschkovich, 2010). Elle a aussi favorisé l'émergence de démarches méthodologiques innovantes, fondées sur l'observation fine des pratiques, la co-construction de savoirs et une posture réflexive sur les normes et les attentes institutionnelles. Ce croisement fécond des cadres théoriques et des approches constitue un levier puissant pour penser une éducation mathématique plus inclusive, ancrée dans les réalités vécues par les élèves et les enseignants (Adler, 2001 ; Civil, 2007). Enfin, les discussions ont mis en évidence les dimensions politiques sous-

jaçantes aux choix didactiques dans des contextes pluriels, en insistant sur le fait que le plurilinguisme et la diversité culturelle, loin d'être des freins, doivent être reconnus comme des ressources pédagogiques majeures (Radford et Barwell, 2016 ; Gorgorio et Planas, 2001). Cette dynamique ouvre des perspectives prometteuses, notamment pour le développement de recherches collaboratives à grande échelle. Les prochains colloques EMF pourront constituer des espaces privilégiés pour poursuivre ces réflexions et nourrir des projets ancrés dans les enjeux contemporains de l'éducation mathématique.

RÉFÉRENCES

- Adler, J. (2001). *Enseigner les mathématiques dans les classes multilingues*. Kluwer Academic Publishers.
- Barwell, R. (2012). Hétéroglossie dans les classes de mathématiques multilingues. Dans H. Forgasz et F. Rivera (dir.), *Vers l'équité dans l'enseignement des mathématiques : genre, culture et diversité* (p. 315-332). Springer.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Civil, M. (2007). S'appuyer sur les connaissances communautaires : une voie vers l'équité dans l'enseignement des mathématiques. Dans N. Nasir et P. Cobb (dir.), *Améliorer l'accès aux mathématiques : diversité et équité en classe* (p. 105-117). Teachers College Press.
- D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatemática : Elo entre as tradições ea modernidade* (2^e éd.). Autêntica.
- Gorgorio, N. et Planas, N. (2001). Enseigner les mathématiques dans les classes multilingues. *Études pédagogiques en mathématiques*, 47(1), 7-33.
- Moschkovich, J. (2010). Langue(s) et apprentissage des mathématiques : Ressources, défis et enjeux pour la recherche. Dans J. Moschkovich (dir.), *Enseignement des langues et des mathématiques : perspectives et orientations multiples pour la recherche* (p. 1-28). L'ère de l'information.
- Pimm, D. (1987). *Parler mathématiquement : la communication en classe de mathématiques*. Routledge ; Kegan Paul.
- Radford, L. (2006). Éléments d'une théorie culturelle de l'objectivation. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (Numéro spécial), 103-129.
https://www.luisradford.ca/pub/57_Objectification3Eng.pdf
- Radford, L. et Barwell, R. (2016). Le langage dans la recherche en didactique des mathématiques. Dans A. Gutiérrez, G. Leder et P. Boero (dir.), *Deuxième manuel de recherche sur la psychologie de l'enseignement des mathématiques* (p. 275-313). Sense.
- Setati, M. (2005). Enseigner les mathématiques dans une classe primaire multilingue. *Revue de recherche en didactique des mathématiques*, 36(5), 447-466.
- Sfard, A. (2008). *Penser comme communication : développement humain, développement des discours et mathématisation*. Cambridge University Press.

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU GT1 PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE DU PREMIER AUTEUR

- ANDRIANARIVONY, F., CORTELLA, A., SALONE, J.-J., DURAND-GUERRIER, V. *Étude exploratoire des raisonnements d'élèves et étudiants autour de la négation dans un contexte bilingue français-malagasy à Madagascar.*
- BARTHES-GARNIER, C. *Discours enseignants et discours élèves sur des tâches de développement d'expressions algébriques.*
- GLIERE, A.-J. *L'enseignement des nombres relatifs au gré de leur histoire.*
- HAJBY, A. *Conceptualisation des mathématiques chez les élèves dans un contexte multilinguistique.*
- KILANI, I. et CHELLOUGUI, F. *Difficultés des élèves tunisiens à convertir les expressions symboliques en langage naturel : Égalité, Inégalité et intersection entre ensembles.*
- NGUALA, J.-B., TCHONANG YOUKAP, P. et GUILLON, C. *Analyse didactique de l'intégration de la culture locale dans l'enseignement de l'arithmétique à Mayotte : Le cas des fractions au cycle 3.*
- ROBO, E., DURAND-GUERRIER, V., NGUALA J.-B., AUGER, N., CHALIER, M., CHESNAIS, A., FARGE, S., MERON-MINUTH, S., SALONE, J.-J. et SAUVAGE, J. *Impact des variations grammaticales des énoncés mathématiques sur les réponses des élèves. Étude exploratoire.*

CONCEPTUALISATION DES MATHÉMATIQUES CHEZ LES ÉLÈVES DANS UN CONTEXTE MULTILINGUISTIQUE

| HAJBY* ACHRAF

Résumé | Cette recherche analyse comment les élèves allophones en classe d'accueil mobilisent leurs ressources linguistiques et culturelles pour apprendre les mathématiques au Québec. Elle adopte une approche intégrant le translinguisme et la résolution de problèmes collaboratifs, tout en examinant les dynamiques de pouvoir à travers la perspective foucauldienne. L'étude repose sur une méthodologie qualitative combinant observations en classe, résolutions de problèmes et entretiens. Les résultats montrent que le translinguisme favorise la compréhension et l'engagement des élèves, mais se heurte aux normes institutionnelles valorisant une maîtrise exclusive du français. L'étude plaide pour des pratiques pédagogiques inclusives valorisant la diversité linguistique en mathématiques.

Mots-clés : Résolution de problèmes, Multilinguisme, Translinguisme, Didactique des mathématiques, Justice sociale

Abstract | This study examines how allophone students in Quebec reception classes use their linguistic and cultural resources to learn mathematics. It integrates translanguaging and collaborative problem-solving while analyzing power dynamics through Foucault's framework. Using a qualitative approach with classroom observations, problem-solving sessions, and interviews, findings highlight that translanguaging enhances comprehension and engagement but clashes with institutional norms favoring exclusive French mastery. The study advocates for inclusive pedagogical practices that leverage linguistic diversity in mathematics education.

Keywords: Problem Solving, Multilingualism, Translanguaging, Mathematics Education, Social Justice

I. CONTEXTE ET ASSISES THÉORIQUES

Cette recherche explore les enjeux éducatifs liés à l'apprentissage des mathématiques par des élèves allophones en classe d'accueil au Québec. Ces élèves, récemment arrivés et dont le français n'est pas la langue maternelle, représentent une part croissante de la population scolaire québécoise, en particulier dans les écoles de Montréal, où les défis d'intégration linguistique et culturelle sont particulièrement marqués. En adoptant une perspective de justice sociale, cette étude cherche à comprendre comment ces élèves mobilisent leurs ressources linguistiques et culturelles pour surmonter les obstacles à l'apprentissage des mathématiques, tout en analysant les pratiques didactiques qui peuvent influencer leur réussite.

1. *La résolution de problèmes*

Le concept de problème se décline en deux acceptions majeures. D'une part, il peut s'agir d'un énoncé contextualisé, ancré dans un cadre professionnel, culturel ou quotidien, qui vise à donner du sens à la tâche mathématique et à renforcer l'engagement des élèves (Brousseau, 1986). Ce type de problème permet de mobiliser des références concrètes pour faciliter l'apprentissage et la compréhension des concepts. D'autre part, un problème peut également désigner une tâche mathématique qui constitue un obstacle cognitif nécessitant un raisonnement complexe pour être surmonté (Schoenfeld, 1985). Il s'agit alors d'un défi intellectuel impliquant la modélisation, la mise en relation de concepts mathématiques ou la résolution d'équations inédites. Bien que distinctes, ces deux dimensions sont souvent imbriquées en classe : la contextualisation enrichit la résolution et permet une

* UQÀM – Canada – achraf.hajby@gmail.com

meilleure appropriation des concepts mathématiques (Duval, 1995). Ainsi, la prise en compte de ces deux facettes du problème en mathématiques favorise une approche didactique plus complète et adaptée aux besoins des élèves.

La résolution de problèmes occupe désormais une place centrale dans le curriculum de mathématiques au Québec (Lajoie et Bednarz, 2014). Autrefois perçue comme un simple outil d'application des connaissances, elle est aujourd'hui reconnue comme un levier pour développer les compétences de raisonnement critique et une compréhension approfondie des concepts mathématiques. Toutefois, pour les élèves allophones, cette approche présente des défis supplémentaires, car elle repose souvent sur une bonne maîtrise de la langue d'enseignement, essentielle pour comprendre les énoncés et formuler des solutions (Moschkovich, 2010).

L'étude révèle que la résolution de problèmes dans un contexte multilingue requiert des adaptations spécifiques. En plus de mobiliser leurs compétences mathématiques, les élèves allophones doivent surmonter la difficulté de comprendre des énoncés complexes en français, lesquels peuvent inclure des références culturelles ou des expressions idiomatiques spécifiques (Droop et Verhoeven, 1998). Par exemple, un problème faisant référence à des éléments culturels propres au Québec, comme la cabane à sucre, peut constituer un obstacle pour un élève nouvellement arrivé, peu familier avec ce type de références. Sur le plan linguistique, un élève allophone pourrait rencontrer des difficultés à interpréter une consigne impliquant des termes polysémiques, tels que le mot 'table' qui peut désigner un objet du quotidien ou un tableau de données en mathématiques. Une clarification lexicale préalable ou une reformulation en langue maternelle pourrait alors faciliter la compréhension du problème. Il est donc primordial que les enseignants de mathématiques prennent en compte ces particularités linguistiques et culturelles et ajustent leurs approches pédagogiques, afin que la résolution de problèmes devienne un outil d'inclusion, plutôt qu'un facteur d'exclusion (Barwell, 2018 ; Moschkovich, 2019 ; Planas, 2018 ; Turner et al., 2013).

2. *Le multilinguisme et le translinguisme*

Les concepts de multilinguisme et de translinguisme occupent une place centrale dans cette recherche, car ils offrent une clé de lecture précieuse pour comprendre comment les élèves allophones mobilisent leurs diverses compétences linguistiques dans l'apprentissage des mathématiques (Barwell, 2009). Le multilinguisme, qui désigne l'utilisation de plusieurs langues par un individu, et le translinguisme, qui va plus loin en décrivant comment les apprenants naviguent fluidement entre leurs langues pour mieux comprendre et s'exprimer, apportent une perspective novatrice à l'enseignement des mathématiques en contexte multilingue (García et Wei, 2014).

Les élèves allophones peuvent en effet s'appuyer sur leurs connaissances dans leur langue maternelle pour résoudre des problèmes mathématiques. Cependant, cela nécessite souvent des ajustements cognitifs et linguistiques complexes (Setati et Adler, 2001). En adoptant une approche translinguistique, les enseignants peuvent encourager ces élèves à mobiliser l'ensemble de leurs ressources linguistiques pour appréhender les concepts mathématiques, plutôt que de les restreindre à une seule langue, souvent imparfaitement maîtrisée (García et Wei, 2014 ; Moschkovich, 2019 ; Planas et Setati Phakeng, 2020). Cette approche permettrait non seulement de maximiser le potentiel cognitif et linguistique des élèves, mais aussi de soutenir leur apprentissage du français de manière plus fluide et intégrée (Gutiérrez et Jurow, 2018).

3. *Une perspective foucauldienne*

L'utilisation de la boîte à outils conceptuelle de Michel Foucault confère une dimension critique à l'analyse des pratiques pédagogiques en mathématiques (Foucault, 1969). L'analyse du discours révèle les dynamiques de pouvoir et d'exclusion à l'œuvre dans les interactions en classe, notamment dans les classes d'accueil où la langue et la culture accentuent les facteurs de différenciation. Le discours dominant sur l'apprentissage des mathématiques, façonné par des normes institutionnelles et sociales, tend à marginaliser les élèves allophones en valorisant des pratiques et des savoirs qui ne tiennent pas suffisamment compte de leur diversité linguistique et culturelle (Foucault, 1973).

En déconstruisant ces discours, cette étude propose de repenser les pratiques pédagogiques pour les rendre véritablement inclusives, en intégrant des perspectives linguistiques et culturelles variées. L'objectif est de dépasser les solutions superficielles d'adaptation linguistique pour instaurer un environnement éducatif où les compétences des élèves allophones sont réellement valorisées et où leur réussite en mathématiques est perçue comme un objectif accessible à tous.

4. *Question de recherche*

Fort de notre expérience personnelle du multilinguisme au Maroc, où coexistent l'arabe, l'amazigh, le français et l'espagnol, nous avons développé un intérêt marqué pour l'interaction entre langue et apprentissage des mathématiques. Nous considérons ces dernières comme un langage à part entière, exigeant des processus de traduction similaires à ceux impliqués dans l'acquisition d'une nouvelle langue. Cette perspective singulière nous a conduits à nous interroger sur la manière dont les élèves allophones, confrontés à l'apprentissage simultané du français et des mathématiques, parviennent à surmonter ces défis complexes dans le contexte éducatif québécois. En effet, la diversité linguistique des élèves immigrants au Québec, et particulièrement à Montréal, ne cesse de croître : en 2019, 43,1 % des élèves avaient pour langue maternelle une autre que le français ou l'anglais (CGTSIM, 2019).

L'objectif principal de cette recherche est d'examiner comment les élèves allophones mobilisent leurs compétences linguistiques dans l'apprentissage des mathématiques, en mettant l'accent sur le translinguisme comme ressource cognitive et didactique. Plus précisément, l'étude cherche à comprendre comment les élèves naviguent entre leurs langues maternelles et la langue d'enseignement pour conceptualiser et résoudre des problèmes mathématiques. En s'appuyant sur l'analyse du discours et les dynamiques de pouvoir en classe, cette recherche vise à identifier les facilitateurs et les obstacles à l'intégration de pratiques translinguistiques en contexte scolaire. Elle contribue ainsi à une réflexion sur les pratiques didactiques inclusives et sur le rôle du langage dans la construction des savoirs mathématiques.

II. MÉTHODOLOGIE

La méthodologie adoptée repose sur une approche qualitative, visant à explorer les dynamiques sociales et linguistiques qui influencent l'apprentissage des mathématiques chez les élèves allophones au Québec. L'étude de cas a été choisie pour analyser les interactions entre ces élèves, leurs enseignants, et le curriculum, ainsi que les dynamiques de pouvoir en jeu.

La population cible comprend des élèves allophones de classe d'accueil, récemment arrivés au Québec et dont le français n'est pas la langue maternelle. Le recrutement a été effectué en collaboration avec des enseignants, afin de refléter la diversité linguistique (arabe, espagnol, mandarin, etc.) des élèves immigrants. Trois outils de collecte de données ont été utilisés : l'observation en classe, des résolutions de problèmes mathématiques et des entretiens semi-dirigés.

Les observations, réalisées pendant une séance de mathématiques, visaient à analyser les stratégies linguistiques et cognitives des élèves. Des grilles d'observation ont permis de documenter les interactions verbales et non verbales, ainsi que les types de raisonnement employés par les élèves. Les résolutions de problèmes, conçues pour refléter des situations mathématiques variées (proportions, géométrie, calculs), ont permis d'évaluer comment les élèves mobilisaient leurs compétences linguistiques et culturelles. Enfin, des entretiens semi-dirigés ont été menés après ces séances pour explorer la perception des élèves sur leurs apprentissages, les défis linguistiques rencontrés, et leurs stratégies pour surmonter ces obstacles. Ces entretiens ont été enregistrés, puis transcrits pour une analyse qualitative. Afin de respecter les contraintes de concision, seule l'analyse de la réponse d'un élève à un problème, accompagnée d'un extrait de son entrevue semi-dirigée, sera présentée.



Quelle sera la trace laissée par le cycliste après être passé dans la flaque de peinture?

Figure 1 – Le problème du cycliste (Mason et al., 1994)

Le problème en question, issu de *L'esprit mathématique* (Mason et al., 1994) est un problème non familier qui s'apparente à des situations mathématiques qui ne se prêtent pas à l'application directe de procédures ou de stratégies déjà maîtrisées par les élèves. Ils nécessitent une approche exploratoire, dans laquelle les élèves doivent analyser la situation, formuler des hypothèses et ajuster leur raisonnement en fonction des résultats obtenus (Pólya, 1945). Ces problèmes se distinguent par leur caractère inédit : les élèves n'ont pas été exposés à des situations similaires auparavant, ce qui les pousse à mobiliser leurs connaissances de manière innovante et à développer une compréhension plus profonde des concepts sous-jacents (Artigue, 2009). En plus des compétences purement mathématiques, ce type de problèmes sollicitent des habiletés transversales telles que la pensée critique, la compréhension fine des énoncés et, dans certains cas, la collaboration entre pairs (Zawojewski, 2013). Le défi principal réside dans l'absence d'une démarche évidente de résolution, ce qui oblige les élèves à tester différentes pistes, parfois en commettant des erreurs, pour finalement aboutir à une solution (Balacheff et Gaudin, 2010). Ce type de problème joue un rôle clé dans l'apprentissage des mathématiques en développant la capacité des élèves à raisonner de manière autonome et à s'adapter à des situations inédites (Schoenfeld, 1985).

Le traitement des données s'est appuyé sur une analyse thématique inductive (Braun et Clarke, 2006). Elle suit un processus en plusieurs étapes : familiarisation avec les données, codage initial, identification des thèmes, révision et définition des thèmes, puis rédaction de l'analyse (Nowell et al., 2017). Cette approche permet d'explorer un phénomène de manière ouverte et d'en extraire des motifs

récurrents significatifs (Braun et Clarke, 2006). Elle est particulièrement utile pour comprendre des expériences vécues et des dynamiques complexes (Maguire et Delahunt, 2017). Son objectif est d'offrir une interprétation nuancée et ancrée dans les données. La rigueur méthodologique a été assurée par la triangulation des données et la vérification des interprétations auprès des participants. De plus, les considérations éthiques ont été strictement respectées : consentement éclairé des élèves et de leurs parents, confidentialité des données et protection de l'anonymat.

En somme, cette méthodologie qualitative, intégrant observation, résolution de problèmes et entretiens, a permis de recueillir des données riches sur les défis spécifiques rencontrés par les élèves allophones en mathématiques, tout en offrant des pistes pour comprendre comment adapter les pratiques pédagogiques à leurs réalités multilingues.

III. RÉSULTATS

Assis avec son équipe, il parcourt le problème en français, mais certains mots lui sont inconnus. Il ouvre son dictionnaire bilingue pour les traduire, cherchant à mieux comprendre l'énoncé. Au départ, le groupe est perplexe : il n'y a ni calcul à faire ni nombre à manipuler comme d'habitude. Peu à peu, ils réalisent que la tâche consiste non pas à effectuer des opérations, mais à décrire la trace laissée par les roues du vélo. Il analyse l'image du problème, puis saisit un rouleau de ruban adhésif pour représenter une roue et mieux visualiser la situation. Une fois leur raisonnement clarifié, il écrit leur réponse finale.

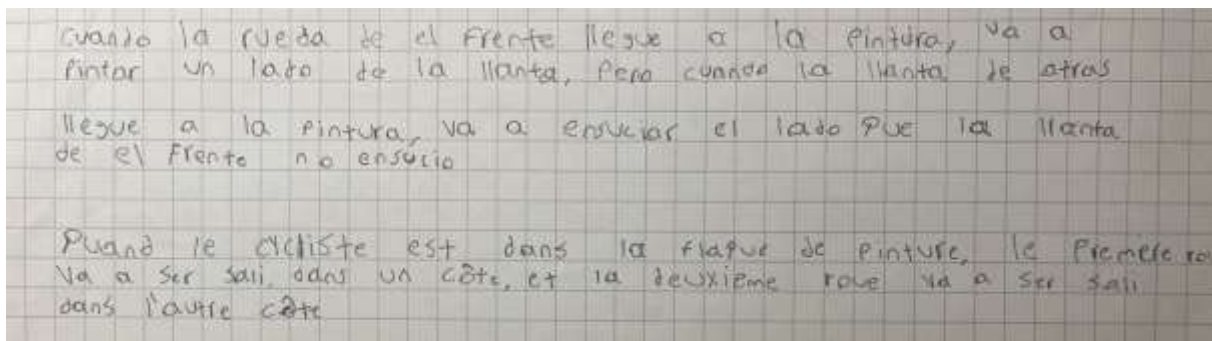


Figure 2 – La formulation d'une réponse d'un élève au problème 3

L'élève a choisi de formuler sa réponse en deux langues, d'abord en espagnol, puis en français. Pour certains observateurs, cette pratique pourrait sembler ajouter une charge cognitive excessive ou constituer un obstacle à la compréhension, notamment dans le cadre de l'évaluation scolaire. En effet, passer d'une langue à l'autre pourrait initialement paraître comme une complication inutile lors de l'analyse et la résolution d'un problème. Toutefois, au lieu de percevoir l'utilisation de l'espagnol comme un frein, il convient de la considérer comme un atout. Comme l'ont démontré Cummins (2000) et García et Wei (2014), en autorisant l'élève à recourir à sa langue maternelle, on l'incite à mobiliser l'ensemble de ses ressources linguistiques et cognitives, facilitant ainsi une meilleure compréhension du problème et une résolution plus approfondie. Cette approche plurilingue de l'apprentissage valorise les compétences et expériences uniques de chaque élève, tout en rendant la transition vers la langue d'enseignement plus fluide. De plus, Moschkovich (2007) et Planas et Civil (2013) ont montré que l'intégration des compétences linguistiques des élèves dans l'enseignement des mathématiques non seulement améliore la compréhension conceptuelle, mais permet également une participation plus active et nuancée dans les discussions complexes. Ainsi, l'utilisation du répertoire plurilingue de l'élève devient un levier pédagogique puissant pour favoriser un apprentissage significatif.

Par la suite, l'élève est conduit individuellement dans une autre salle, où il retrouve la personne responsable du soutien linguistique. C'est dans cet espace plus calme que le chercheur engage une discussion avec lui, lui posant quelques questions sur son expérience en classe d'accueil et lors de la séance de résolution de problèmes. L'échange, mené dans un mélange de français et d'espagnol, permet à l'élève de s'exprimer plus aisément et de clarifier certaines idées. Au fil de la conversation, l'élève partage ses impressions, ses défis et les stratégies qu'il a mobilisées pour surmonter les obstacles linguistiques et mathématiques, permettant ainsi de mieux saisir son vécu en classe d'accueil.

- (Élève) Está largo el proceso, pero más o menos bien. Se hace poco a poco en las clases regular, como en historia y tipo de cosas pero no se cuando me voy a llegar. *Le processus est long, mais ça va plus ou moins bien. Cela se fait petit à petit dans les cours réguliers, comme en histoire et ce genre de choses, mais je ne sais pas quand je vais y arriver.*
- (Chercheur) Est-ce que tu sais quand tu commences ton intégration ? Qui décide ?
- (Élève) Je sais pas. Je veux en anglais.
- (Chercheur) Est-ce que tu parles en anglais ?
- (Élève) No, pero me gustaría. *Non, mais j'aimerais.*

Cet échange révèle la complexité du processus d'intégration des élèves dans les classes d'accueil, en particulier en ce qui concerne les choix de matières auxquelles ils sont exposés. L'élève exprime un sentiment de lenteur dans ce processus « Está largo el proceso » et mentionne que l'apprentissage se fait progressivement à travers des matières régulières comme l'histoire. Cela soulève des questions sur le choix pédagogique d'intégrer les élèves principalement en histoire, plutôt qu'en mathématiques ou dans d'autres matières. Cela pourrait montrer que l'intégration linguistique pourrait être liée à des choix politiques. Ceci peut poser des défis pour les élèves qui, comme dans ce cas, semblent avoir des préférences pour d'autres langues ou matières, comme l'anglais. Le fait que l'élève exprime le désir d'apprendre l'anglais « Je veux en anglais », « pero me gustaría » met en lumière un besoin non satisfait dans son parcours éducatif. Cet exemple illustre l'importance de proposer un éventail de matières diversifiées dans les classes d'accueil, en tenant compte des aspirations et des besoins linguistiques des élèves. Par ailleurs, la réponse incertaine de l'élève sur qui prend les décisions concernant son parcours « Je sais pas », « Qui décide ? » souligne une certaine passivité dans ce processus, suggérant que les élèves peuvent manquer de participation active dans les décisions qui concernent leur propre apprentissage. Cette situation questionne les pratiques pédagogiques dans les classes d'accueil et met en avant la nécessité d'impliquer davantage les élèves dans la construction de leur parcours scolaire, tout en adaptant l'enseignement aux besoins linguistiques diversifiés.

IV. DISCUSSION ET CONCLUSION

Les résultats de cette recherche mettent en évidence que le translinguisme constitue une stratégie pédagogique pertinente pour faciliter la compréhension des concepts mathématiques chez les élèves allophones. En leur permettant d'exprimer leurs raisonnements en mobilisant plusieurs langues, cette approche favorise la construction de passerelles entre leurs connaissances antérieures et les nouveaux concepts abordés (García et Wei, 2014). L'observation des interactions en classe révèle que les élèves qui adoptent une démarche translinguistique participent de manière plus active aux discussions, affichant une plus grande aisance dans leur expression mathématique (Barwell, 2009). Cette dynamique suggère que ces élèves se sentent davantage en confiance pour verbaliser leurs idées et s'engager dans des processus de raisonnement plus approfondis.

Cette implication accrue peut être interprétée à la lumière des recherches en didactique des mathématiques, qui soulignent que l'engagement des élèves dans les discussions mathématiques est un levier essentiel de leur apprentissage conceptuel (Moschkovich, 2010). En intégrant des ressources translinguistiques, la classe de mathématiques ne se contente pas d'accueillir les élèves allophones, mais elle les place au cœur de l'activité mathématique en valorisant leurs compétences langagières. Ainsi, le translinguisme ne représente pas seulement un outil d'intégration, mais un véritable enrichissement du discours mathématique collectif, ouvrant la voie à une diversité de perspectives et de modes d'explication (Gutiérrez, 2013). Ces échanges plurilingues offrent aux élèves l'opportunité de co-construire du sens, d'aiguiser leur réflexion critique et de renforcer leurs capacités de métacognition.

Cependant, l'analyse des données met également en lumière des obstacles à l'intégration du translinguisme en milieu scolaire québécois. D'une part, les normes institutionnelles et les attentes pédagogiques privilégient une maîtrise exclusive du français puisque l'élève ne sera pas intégré en classe régulière tant qu'il ne sera pas à l'aise dans cette langue, ce qui limite la reconnaissance des compétences plurilingues des élèves (Heller, 2007). Cette approche monolingue, profondément ancrée dans les cadres d'évaluation et les attentes curriculaires, tend à marginaliser les pratiques translinguistiques. D'autre part, de nombreux enseignants soulignent la nécessité d'un accompagnement adapté pour intégrer des pratiques translinguistiques en classe de mathématiques (García et Flores, 2020). Ils expriment le besoin de formations spécifiques sur la gestion du multilinguisme, ainsi que d'outils concrets leur permettant d'exploiter efficacement le translinguisme tout en respectant les exigences du curriculum (Valero et Zevenbergen, 2004). La mise en place de lignes directrices claires et d'un soutien institutionnel accru serait ainsi essentielle pour favoriser une transition vers des pratiques pédagogiques plus inclusives et adaptées à la diversité linguistique des élèves.

De plus, les pratiques translinguistiques mises en œuvre dans cette recherche ne se sont pas limitées à la séance d'observation, mais ont été intégrées tout au long du processus de recherche. À chaque étape, les participants ont eu la possibilité de mobiliser leur bagage linguistique selon leurs préférences, qu'il s'agisse de la lecture du document de consentement éthique ou des entrevues individuelles semi-dirigées. Cette approche, en réduisant les obstacles linguistiques, a offert un cadre de recherche plus respectueux des réalités linguistiques des élèves allophones, tout en garantissant leur pleine participation.

L'intégration des dimensions sociales et culturelles dans la didactique des mathématiques est un enjeu crucial qui mérite une attention accrue. Longtemps centrée sur les concepts et les méthodes d'enseignement (Brousseau, 1986), cette discipline semble avoir parfois négligé l'impact des facteurs sociaux, culturels et linguistiques sur l'apprentissage. Pourtant, les recherches montrent que ces dimensions influencent profondément la manière dont les élèves interagissent avec les mathématiques, notamment ceux issus de milieux multilingues ou minoritaires (Gutiérrez, 2013). Ces élèves, tout en reconnaissant l'importance des mathématiques pour leur formation, remettent en question l'accent disproportionné mis sur cette discipline et sur le français, au détriment d'autres formes de savoirs et de langages.

Cette focalisation excessive sur certaines disciplines dans le système éducatif québécois peut limiter les élèves dans le développement de compétences plus transversales et pourtant cruciales pour leur avenir personnel et professionnel (Apple, 2004). Face à ces constats, il serait pertinent d'envisager une reconfiguration des pratiques en didactique des mathématiques afin de mieux intégrer les caractéristiques sociales et culturelles des élèves. Une approche translinguistique, qui encourage les élèves à mobiliser leurs compétences linguistiques dans l'apprentissage des mathématiques, constituerait une avancée significative vers une école plus inclusive (Barwell, 2009).

Les implications de cette recherche pour la didactique des mathématiques sont multiples. Elle met d'abord en évidence la nécessité de concevoir des dispositifs d'apprentissage qui valorisent la diversité linguistique des élèves plutôt que de la restreindre. Il est primordial de former les enseignants aux stratégies translinguistiques afin qu'ils puissent intégrer ces pratiques de manière fluide dans leur pédagogie. Ensuite, une refonte des modalités d'évaluation est essentielle pour éviter de pénaliser les élèves allophones en raison de leur maîtrise inégale du français. Il s'agirait de mettre en place des outils d'évaluation prenant en compte leur capacité à raisonner et à mobiliser des ressources linguistiques variées dans la résolution de problèmes mathématiques. Enfin, cette recherche ouvre une réflexion plus large sur les politiques éducatives, appelant à un changement de paradigme où la diversité linguistique et culturelle des élèves est perçue non comme un défi, mais comme une richesse à valoriser.

Une ouverture de la didactique des mathématiques aux dimensions sociales et translinguistiques permettrait aux élèves allophones nouvellement immigrés de s'épanouir dans le système éducatif québécois plutôt que de le subir. En intégrant pleinement leur diversité linguistique, l'école leur offrirait un cadre où ils se sentent reconnus et pleinement engagés dans leur apprentissage. Plutôt que d'être perçue comme un frein, la pluralité linguistique pourrait devenir une ressource essentielle pour favoriser une compréhension plus profonde des mathématiques et une meilleure réussite scolaire.

En conclusion, cette recherche met en lumière la nécessité d'une reconnaissance institutionnelle des pratiques translinguistiques et l'importance d'un accompagnement des enseignants dans la mise en place de dispositifs favorisant l'engagement et la réussite des élèves allophones en mathématiques. Les résultats suggèrent que le translinguisme, loin d'être un obstacle, constitue un levier didactique puissant pour l'apprentissage des mathématiques, à condition que les enseignants disposent des outils et du soutien nécessaires pour en exploiter tout le potentiel. Enfin, cette étude ouvre la voie à des recherches futures sur les dynamiques de pouvoir qui influencent l'accès au savoir en contexte multilingue. Une approche plus nuancée du rôle du langage dans l'apprentissage disciplinaire permettrait ainsi d'envisager des pratiques pédagogiques plus inclusives, adaptées à la réalité linguistique et culturelle des élèves allophones.

RÉFÉRENCES

- Apple, M. W. (2004). *Ideology and curriculum* (3^e éd.). Routledge.
- Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 14(1), 7–16. https://doi.org/10.1163/9789087907839_003
- Balacheff, N. et Gaudin, N. (2010). *Conceptual framework for analysing the epistemological nature of mathematical modelling in physics education*. Springer.
- Barwell, R. (dir.). (2009). *Multilingualism in mathematics classrooms: Global perspectives*. Multilingual Matters.
- Barwell, R. (2018). From language as a resource to sources of meaning in multilingual mathematics classrooms. *Journal of Mathematical Behavior*, 50, 155–168. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.02.007>
- Braun, V. et Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77–101. <https://doi.org/10.1191/1478088706qp0630a>
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33–115.
- CGTSIM. (2019). *Les élèves allophones et les défis de l'intégration linguistique dans les écoles montréalaises*. CGTSIM.

- Cummins, J. (2000). *Language, power, and pedagogy: Bilingual children in the crossfire*. Multilingual Matters.
<https://doi.org/10.21832/9781853596773>
- Droop, M. et Verhoeven, L. (1998). Background knowledge, linguistic complexity, and second-language reading comprehension. *Journal of Literacy Research*, 30(2), 253–271.
<https://doi.org/10.1080/10862969809547999>
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Foucault, M. (1969). *L'archéologie du savoir*. Gallimard.
- Foucault, M. (1973). *Naissance de la clinique*. Gallimard.
- García, O. et Flores, N. (2020). Translanguaging pedagogy in practice. Dans O. García et N. Flores (dir.), *The Oxford handbook of language and society* (p. 204–228). Oxford University Press.
<https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780190212896.001.0001>
- García, O. et Li Wei. (2014). *Translanguaging: Language, bilingualism, and education*. Palgrave Macmillan.
<https://doi.org/10.46538/hlj.11.3.4>
- Gutiérrez, K. et Jurow, A. S. (2018). Social design experiments: Toward equity by design. Dans A. S. Jurow, A. Bell et J. E. Jacobs (dir.), *Learning sciences: Toward a transformative agenda* (p. 115–128). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203703106-5>
- Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(1), 37–68. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.44.1.0037>
- Heller, M. (2007). Bilingualism as ideology and practice. Dans M. Heller (dir.), *Bilingualism: A social approach* (p. 1–22). Palgrave Macmillan. https://doi.org/10.1057/9780230596047_1
- Lajoie, C. et Bednarz, N. (2014). *La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : perspectives historiques et pédagogiques*. Presses de l'Université du Québec. <https://doi.org/10.7202/1027903ar>
- Maguire, M. et Delahunt, B. (2017). Doing a thematic analysis: A practical, step-by-step guide for learning and teaching scholars. *All Ireland Journal of Teaching and Learning in Higher Education*, 9(3), 3351–33514.
- Mason, J., Burton, L. et Stacey, K. (1994). *L'esprit mathématique*. Modulo.
- Moschkovich, J. (2007). Using two languages when learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 64(2), 121–144. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-9005-1>
- Moschkovich, J. (2010). *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research*. Information Age Publishing.
- Moschkovich, J. (2019). Bilingual mathematics learners: How views of language, bilingual learners, and mathematical communication shape instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 100(3), 189–206.
- Nowell, L. S., Norris, J. M., White, D. E. et Moules, N. J. (2017). Thematic analysis: Striving to meet the trustworthiness criteria. *International Journal of Qualitative Methods*, 16(1), 1–13.
<https://doi.org/10.1177/1609406917733847>
- Planas, N. (2018). Language as resource: A key notion for understanding the learning of mathematics in multilingual classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 97(2), 141–148.
<https://doi.org/10.1007/s10649-018-9810-y>

- Planas, N. et Civil, M. (2013). Language-as-resource and language-as-political: Tensions in the bilingual mathematics classroom. *Mathematics Education Research Journal*, 25(3), 361–378. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0075-6>
- Planas, N. et Setati Phakeng, M. (2020). The position(ing) of multilingual learners in mathematics education research: A review of publications in JRME and ESM (2006–2017). *Educational Studies in Mathematics*, 103(1), 7–25.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Setati, M. et Adler, J. (2001). Between languages and discourses: Language practices in primary multilingual mathematics classrooms in South Africa. *Educational Studies in Mathematics*, 43(3), 243–269.
- Turner, E. E., Dominguez, H., Empson, S. B. et Brenner, M. E. (2013). Latino/a bilinguals and their teachers developing a shared communicative space. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 349–370. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9486-2>
- Valero, P. et Zevenbergen, R. (2004). Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology. Dans P. Valero et R. Zevenbergen (dir.), *Researching the socio-political dimensions of mathematics education* (p. 5–24). Springer. <https://doi.org/10.1007/b120597>
- Zawojewski, J. (2013). Problem solving versus modeling. Dans R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines et A. Hurford (dir.), *Modeling students' mathematical modeling competencies. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (p. 237–243). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8_20

IMPACT DES VARIATIONS GRAMMATICALES DES ÉNONCÉS MATHÉMATIQUES SUR LES RÉPONSES DES ÉLÈVES. ÉTUDE EXPLORATOIRE

| ROBO* ELÉDA, DURAND-GUERRIER* VIVIANE, NGUALA** JEAN-BERKY, AUGER***
NATHALIE, CHALIER**** MARC, CHESNAIS***** AURÉLIE, FARGE***** SYLVAIN,
MERON-MINUTH***** SYLVIE, SALONE***** JEAN-JACQUES, SAUVAGE*****
JÉRÉMI

Résumé | Ce texte rend compte d'une étude exploratoire en cours, sur le possible impact de la structure grammaticale d'énoncés de problèmes mathématiques du PISA sur les réponses des élèves. Nous présentons l'analyse *a priori* d'un des ITEMS du PISA 2022, notre protocole d'expérimentation et nous décrivons les contextes bi-plurilingues de France hexagonale et d'Outre-mer dans lesquels ont été menées les premières expérimentations et nous présentons nos premiers résultats.

Mots-clés : didactique des mathématiques, didactique des langues, variations grammaticales, traduction, bi-plurilinguisme

Abstract | This paper reports on an ongoing exploratory study into the possible impact of the grammatical structure of the PISA ITEM statements on student answers. We present the *a priori* analysis of one of the PISA 2022 ITEMS, our experimental protocol and we describe the bi-plurilingual experimental contexts in hexagonal France and Overseas, and we present our first results

Keywords: Didactics of mathematics, didactics of languages, grammatical variations, translation, bi-plurilingualism

I. CONTEXTE

1. Les résultats de PISA en France

L'évaluation internationale PISA (Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves) sous l'égide de l'OCDE évalue tous les trois ans les compétences des élèves de 15 ans révolus en culture mathématique, compréhension de l'écrit et culture scientifique. Les dernières évaluations de 2022 se sont focalisées sur la culture mathématique comme celles de 2003 et 2012. Par « culture mathématique », on entend que « les élèves ne sont pas seulement évalués sur des connaissances au sens strict mais sur leurs capacités à les mobiliser et à les appliquer dans des situations variées, parfois éloignées de celles rencontrées dans le cadre scolaire » (Bernigole et al., 2023, p. 1).

Les items du PISA sont proposés dans l'une des deux langues, anglais ou français, et sont ensuite traduits dans les différentes langues des pays participant au programme. En raison de sa visée de

* Université de Montpellier – France – eleda.robo@umontpellier.fr; viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

** Université de Mayotte – France – jean-berky.nguala@univ-mayotte.fr

*** Université Montpellier Paul Valéry – France – nathalie.auger@univ-montp3.fr

**** Sorbonne Université – France – marc.chalier@sorbonne-universite.fr

***** Université de Montpellier – France – aurelie.chesnais@umontpellier.fr

***** Université Montpellier Paul Valéry – France – sylvain.farge@univ-montp3.fr

***** Université d'éducation Heidelberg – Allemagne – sylvie.meron-minuth@ph-heidelberg.de

***** Université des Antilles – France – jean-jacques.salone@univ-antilles.fr

***** Université Montpellier Paul Valéry – France – jeremi.sauvage@univ-montp3.fr

comparaison internationale, il est recommandé aux traducteurs de s'éloigner le moins possible du sens des items originaux. Cependant, comme le pointent Bart et al (2018), la standardisation des textes de compréhension dans les items du PISA dans le processus de traduction a ses limites.

S'agissant des mathématiques, le guide de traduction mentionne des recommandations concernant le lexique et le contexte culturel ; les recommandations concernant les questions de grammaire sont en revanche très rarement abordées (Durand-Guerrier, à paraître). Cependant, un certain nombre de recherches mettent en évidence l'importance de prendre en compte les questions de grammaire dans les contextes plurilingues en mathématiques, notamment dans les traductions (Edmonds-Wathen et al., 2016, Auger et Chesnaïs, 2022, Nguala, 2005, 2023).

Dans cette communication, proposée par une équipe pluridisciplinaire associant des chercheurs et des chercheuses en didactique des mathématiques et en didactique des langues, nous rendons compte d'un travail en cours visant à explorer le possible impact des variations grammaticales d'un énoncé mathématique sur les réponses des élèves. Nous considérons des variations grammaticales de deux types :

1. variations entre les langues à l'œuvre dans la classe de mathématiques, dans le cas de classes où existe un bi-plurilinguisme de fait, dû, par exemple, à la différence entre la langue vernaculaire et la langue d'instruction ;
2. variation de la forme grammaticale à l'intérieur d'une même langue. Cette communication s'inscrit dans un projet plus large visant à explorer les biais éventuels des réponses aux items du PISA qui pourraient être induits par l'insuffisante prise en compte des questions grammaticales dans le guide d'adaptation et de traduction de l'OCDE à destination des pays participant à l'étude.

Dans une première partie, nous présentons les motivations pour le choix et l'analyse *a priori* d'un des items du PISA 2022 que nous avons retenu pour cette étude exploratoire, ainsi que les protocoles expérimentaux retenus pour la mise en place d'expérimentations locales à petite échelle qui ont été conduites autour de cet item dans différents territoires français en contexte-bi-plurilingue (Guyane française, Mayotte, Occitanie), et/ou en zone d'éducation prioritaire à l'automne et l'hiver 2024-2025. Ce choix pour les premières expérimentations s'appuie sur le constat que la question du plurilinguisme se pose de manière cruciale y compris dans le contexte éducatif français (Hache et Mendonça Dias, 2022). Dans une deuxième partie, nous décrivons les contextes expérimentaux et les protocoles associés, ainsi que la méthodologie d'analyse des données. Les premiers résultats des expérimentations conduites en Occitanie, en Guyane et à Mayotte ont été présentés pendant la conférence et font l'objet d'une synthèse dans une troisième partie.

II. MÉTHODOLOGIE

Dans cette section nous présentons les énoncés des items du PISA choisis pour la recherche et une analyse *a priori* de ces derniers avec des propositions de reformulation. Nous nous appuyons pour cela sur les articulations entre la sémantique (le signe est conçu dans la relation à ce qu'il signifie), la syntaxe (le signe est abordé comme inséré dans des séquences d'autres signes selon certaines règles de combinaison) et la pragmatique (le signe est perçu en fonction de ses origines, des effets qu'il a sur ses destinataires, les usages qui en sont faits), en référence à Eco (1980). Enfin, nous décrivons le protocole expérimental, le rôle des différents acteurs, enseignantes et enseignants, chercheurs et chercheuses, lors des expérimentations, et nos hypothèses sur l'impact des variations proposées dans les contextes bi-plurilingues considérés.

1. Choix des énoncés de l’item « toujours parfois jamais »

Nous avons choisi de mener notre recherche avec l’item « *toujours parfois jamais* » qui figure parmi les sept exemples donnés dans le « cadre pour les mathématiques du PISA 2022 »¹ Cet item se compose de quatre pages. La première, intitulée « introduction », donne, sur une partie gauche, des instructions d’ordre pratique pour répondre : « lisez l’introduction, puis cliquez sur la flèche « *suivant* » » ; la seconde partie, à droite, intitulée « *toujours parfois jamais* », illustre à travers trois énoncés ce qui est à comprendre lorsque l’on dit d’un énoncé qu’il est « *toujours vrai* », « *parfois vrai* » ou encore « *jamais vrai* ». La deuxième page, question 1/3, est aussi organisée en deux parties. Sur la gauche, deux énoncés sont donnés sous forme de tableau avec des réponses à cocher « toujours vrai », « parfois vrai » et « jamais vrai ». La partie droite de la page reprend la partie intitulée « *toujours parfois jamais* » de l’introduction. La consigne de cette page comme celle de la suivante (question 2/3) est : « pour chaque énoncé, indiquez si c’est *toujours vrai*, *parfois vrai*, ou bien si ce n’est *jamais vrai* ». Pour la question 3/3, la consigne est différente : il est précisé en préambule que chacun des énoncés est parfois vrai. Il s’agit alors de compléter un tableau en donnant pour chaque énoncé, un exemple pour lequel l’énoncé est vrai, et un exemple pour lequel l’énoncé n’est pas vrai.

Nous nous intéressons à la forme grammaticale des phrases dans les quatre énoncés suivants :

- Énoncé 1 : une fille de 14 ans mesurait au moins une fois dans sa vie la moitié de sa taille actuelle.
- Énoncé 2 : lorsqu'un nombre entier est multiplié par lui-même, le nombre qui en résulte est pair.
- Énoncé 3 : doubler un nombre entier donne un nombre pair.
- Énoncé 4 : diviser en deux un nombre entier impair produit un nombre entier.

Nous désignerons par « PISA source » ces énoncés.

2. Analyse a priori et reformulation

Nous discutons des formes grammaticales des quatre énoncés choisis par le collectif de recherche et proposons des reformulations.

Concernant l’énoncé 1, la première question qui a été soulevée au sein du groupe de recherche est celle de savoir si la taille d’un individu en fonction de son âge était une fonction continue ou une fonction discrète. En effet, si on considère qu’il s’agit d’une fonction continue, alors, on peut estimer qu’un individu de 14 ans a ‘au moins une fois fait la moitié de sa taille actuelle’. En revanche, si on considère qu’il s’agit d’une fonction discrète dont les valeurs sont obtenues à chaque fois que l’on fait l’action de mesurer alors on n’est pas certain d’avoir mesuré sa taille au moment particulier où celle-ci était la moitié de sa taille actuelle. Nous avons donc choisi de supprimer le verbe « mesurer ». La question de remplacer « une fille » par « toute fille » ou par un prénom particulier s’est également posée mais nous avons choisi de rester au plus près d’une formulation du langage ordinaire tout en conservant la dimension générique de l’énoncé initial. Nous avons finalement proposé la reformulation suivante : « Une fille de 14 ans a fait à un moment de sa vie la moitié de sa taille actuelle. »

Pour les autres énoncés, nous avons retenu deux formes : une reformulation utilisant la forme « si...alors » qui est très utilisée en mathématiques ; et une autre utilisant la forme « quand on + verbe » qui est une forme alternative présente dans le langage courant. La première formulation est la formulation standard en mathématique ; elle est d’une certaine manière « intemporelle » ; la seconde

¹ <https://pisa2022-maths.oecd.org/fr/index.html>

introduite par la conjonction « quand », plus proche d'une forme quotidienne, introduit implicitement une dimension temporelle reliée à une action effective.

Concernant les sujets et les verbes, leurs choix et leurs positions dans la phrase nous ont semblé pouvoir être source de mauvaise compréhension. Dans l'énoncé 2, nous avons en outre modifié le sujet de la phrase : le substantif « un nombre », a été remplacé par le pronom indéfini « on ». Ceci conduit à une forme grammaticale moins complexe, notamment pour la seconde partie de la phrase ; en cohérence avec cette modification du sujet, nous avons remplacé « le nombre qui en résulte » par « on obtient ». Dans les énoncés 3 et 4, les verbes à l'infinitif en début de phrase ont été remplacés par « Si on multiplie...alors... » ou « Quand on multiplie... » et « Si on calcule...alors... » ou « Quand on calcule... ». Par ailleurs, dans ces énoncés, il nous a semblé plus pertinent de parler du « résultat » plutôt que d'utiliser « donne » ou « produit », compte tenu notamment du sens que revêt ce dernier mot en mathématiques.

Dans le tableau 1 ci-dessous, nous récapitulons les énoncés originaux et les reformulations retenues pour ces quatre énoncés, la seconde reformulation pouvant être utilisée si nécessaire *in situ* en situation expérimentale. Les reformulations proposées par le collectif de recherche (CR) sont désignées par « PISA CR », les énoncés originaux par « PISA source ».

Tableau 1 – Énoncés de PISA choisis par le collectif de recherche : versions originales et reformulées

	Énoncés originaux – PISA source	Énoncés reformulés – PISA CR
E1	Une fille de 14 ans mesurait au moins une fois dans sa vie la moitié de sa taille actuelle.	Une fille de 14 ans a fait à un moment de sa vie la moitié de sa taille actuelle.
E2	Lorsqu'un nombre entier est multiplié par lui-même, le nombre qui en résulte est pair.	Si on multiplie un nombre entier par lui-même alors on obtient un nombre pair.
		Quand on multiplie un nombre entier par lui-même, on obtient un nombre pair.
E3	Doubler un nombre entier donne un nombre pair	Si on calcule le double d'un nombre entier alors le résultat est un nombre pair.
		Quand on calcule le double d'un nombre entier, le résultat est un nombre pair.
E4	Diviser en deux un nombre entier impair produit un nombre entier.	Si on divise par deux un nombre entier impair alors le résultat est un nombre entier.
		Quand on divise par deux un nombre entier impair, le résultat est un nombre entier.

3. Protocole expérimental

Deux types de classes sont concernés pour les expérimentations, les classes dites ordinaires et les classes situées dans les Réseaux d'Éducation Prioritaire (REP) en classe de 3^e ou de seconde, les élèves devant avoir 15 ans révolus.

Dans un premier temps, la page « introduction » de l'item « *toujours parfois jamais* » est remise aux élèves pour lecture (5 minutes). La classe est ensuite partagée en deux groupes de niveaux hétérogènes et d'effectifs similaires. Pendant une dizaine de minutes, les élèves travailleront individuellement soit sur les versions « PISA source », soit sur les versions « PISA CR » selon leur groupe. Ils peuvent, par écrit, justifier leur choix de réponse.

Dans un deuxième temps, nous constituons des binômes avec un élève de chacun des deux groupes. Les élèves sont alors invités à discuter de leurs réponses aux énoncés et éventuellement à les modifier. Nous faisons l'hypothèse que pour chacun des membres d'un groupe donné du binôme, la

considération de la formulation soumise à l'autre groupe et de la réponse donnée par l'autre membre du binôme est de nature à favoriser la dévolution de la discussion. Les questions qui peuvent permettre d'engager les discussions dans les binômes sont à la charge des chercheurs ; ce sont par exemple : « Que pensez-vous de ce qui vous a été proposé ? Qu'est-ce que cela a changé pour vous ? Est-ce plus facile ? Plus compliqué ? Quels sont les avantages/les inconvénients d'une version par rapport à l'autre ? ». Les chercheurs invitent les élèves à laisser une trace écrite aux réponses apportées à ces questionnements. Le troisième temps, orchestré par les chercheurs, est un moment de discussion collective au cours duquel on reviendra sur les questions précédentes.

4. *Nos hypothèses*

Dans nos expérimentations, les énoncés sont donnés en langue française, qui est la langue d'instruction dans chacun des contextes considérés. Nous faisons l'hypothèse que les variations grammaticales que nous avons retenues, quoique relativement minimales, pourraient avoir un impact sur l'interprétation et la compréhension des énoncés par les élèves. Nous considérons cependant que les contextes linguistiques et culturels auront des effets variables sur les élèves, notamment en fonction de leur niveau en mathématiques. Les élèves les plus fragiles pourraient avoir du mal à comprendre les enjeux mathématiques sous-jacents, tandis que les élèves plus à l'aise pourraient réussir à résoudre les problèmes proposés quelle que soit la version, *PISA source* ou *PISA CR*. On s'attend donc à trouver un impact plus marqué de ces variations grammaticales chez les élèves se situant entre ces deux catégories. Pendant l'activité, les enseignants et les chercheurs seront amenés à intervenir auprès des élèves lors des travaux en binômes selon les besoins identifiés mettant l'accent sur les questions de grammaire en jeu.

Compte tenu de ce que, pour de très nombreux élèves, le français n'est pas la langue de première socialisation, nous faisons la seconde hypothèse que certains élèves, dans les phases d'échanges, utiliseront d'autres langues. Cette hypothèse s'appuie sur des résultats de travaux antérieurs (Voir par exemple Ben Kilani, 2005).

III. CONTEXTE DES EXPÉRIMENTATIONS ET MODALITÉS D'ANALYSE DES DONNÉES

Nous présentons dans cette partie les contextes démographiques et linguistiques de trois territoires dans lesquels les premières expérimentations ont été conduites : Mayotte, la Guyane française et l'Occitanie ainsi que les modalités d'analyse des données envisagées. Les premiers résultats ont été présentés pendant la conférence et font l'objet d'une synthèse dans la troisième partie de ce texte.

1. *Différents contextes de l'Outre-mer français et de France hexagonale*

Département français de l'archipel des Comores dans l'Océan Indien, Mayotte (d'après INSEE 2024, 321 000 habitants, 374 km², 34 % de la population active au chômage) est en marge en raison de nombreuses inégalités scolaires. Par exemple, il y a un retard considérable dans les constructions d'établissements publics, qui occasionne un manque d'infrastructures entraînant la mise en place d'un système de rotation dans le rythme scolaire². C'est le département d'Outremer le plus touché par le chômage. De plus, des déficits en langue d'enseignement (le français est parlé par moins de 3 % de la population) sont pointés depuis le début de la scolarité notamment aux résultats des différentes évaluations nationales. C'est également un espace présentant une diversité linguistique et culturelle très riche (Dureysseix et Salone, 2022) avec notamment deux langues de première socialisation majoritaires,

² Dans une même journée, deux groupes d'élèves se succèdent dans la même salle.

le shimaoré (une langue locale d'origine bantoue pratiquée par 71,3 % de la population) et le kibushi (une langue de la famille austronésienne parlée à 22,5%). D'autres langues apparentées issues des Comores, de Madagascar ou d'Afrique continentales sont aussi présentes.

La Guyane française est un département continental de l'Outre-Mer français, situé en Amérique du Sud, entre le Brésil et le Surinam. Selon les données de l'INSEE (2024), au 1er janvier 2021, la Guyane comptait 286 600 habitants répartis à 80% sur environ 10% du territoire. C'est une population jeune, puisque la moitié de la population a moins de 25 ans. C'est le département français ayant la plus forte croissance démographique après Mayotte. Il s'agit d'un territoire multilingue et plurilingue où plus de 40 langues cohabitent. En particulier, 40% des enfants d'une dizaine d'années parlent au moins trois langues (Léglise, 2020). Du fait de ces caractéristiques démographiques, la population scolarisée représente 40% de celle du territoire ; cependant, avant d'être scolarisés, trois quarts des enfants ne parlent pas le français (Léglise, 2017). Dans l'outre-mer français, les problématiques liées à l'étendue des territoires, au plurilinguisme et à la diversité culturelle amènent les autorités à définir des priorités en matière d'éducation (Robo, 2021).

L'Occitanie avec 72 724 km², est la troisième plus grande région de France. Elle comporte environ 10 millions d'habitants inégalement répartis sur le territoire. Comme dans de nombreuses régions de la France hexagonale, on y trouve un nombre significatif d'élèves pour lesquels la première langue de socialisation n'est pas le français, ces premières langues de socialisation pouvant être très variées dans une même classe. Elle est par ailleurs une des régions qui reçoit le plus d'élèves allophones nouvellement arrivés en France. Ceci conduit dans certaines classes à une très grande hétérogénéité linguistique des élèves, qui « se manifeste non seulement par la diversité des langues-cultures en présence, mais aussi parfois par des différences en termes de niveau de maîtrise du français, langue de scolarisation » (David et Zakhartchouk, 2024, p. 69).

2. *Modalités d'analyse des données*

Un objectif des analyses que nous conduirons est de tester les deux hypothèses formulées précédemment en confrontant nos analyses a priori avec les analyses des productions des élèves. Dans les deux cas, nous utiliserons d'une part l'analyse didactique contextuelle (Delcroix et al., 2013) et d'autre part des outils d'analyse logique du langage (Barrier et al. 2019).

L'analyse didactique contextuelle va nous permettre de nous focaliser sur les interactions entre la situation vécue par les élèves, la résolution des exercices et le contexte de déroulement de ces situations. La description et l'étude des échanges entre les élèves lors de la phase d'argumentation, pourraient nous conduire à repérer dans quel mesure les contextes (Robo et al., 2022) viennent interférer dans la résolution des exercices suivant les différentes versions des énoncés, notamment par l'émergence éventuelle d'effets de contexte (Forissier, 2019) ou d'alternance codique (Anciaux et Jeannot-Fourcaud, 2012).

Les outils d'analyse logique du langage permettent d'analyser les relations entre syntaxe, sémantique et pragmatique, cruciales en contexte éducatif, notamment dans les contextes de diversité culturelle et linguistique. (Edmonds-Wathen et al., 2016, Auger et Chesnais, 2022, Nguala, 2005, 2023).

Notamment, la formalisation logique dans le calcul des prédicats permet de clarifier la portée respective des connecteurs et des quantificateurs, de mettre en évidence les propriétés, les relations, ainsi que les fonctions éventuelles, et de rendre visible les choix possibles en cas de polysémie d'un terme ou d'une préposition. Nous donnons un exemple de telles formalisations dans le cas l'énoncé 1, « une fille de 14 ans mesurait au moins une fois dans sa vie la moitié de sa taille actuelle » :

Pour tout x , [$\forall F(x)$ et $A(x, 14)$, alors il existe t ($0 \leq t \leq 14$ et $T(x, t) = \frac{1}{2} T(x, 14)$)]

où F est la propriété « ... est une fille » ; A est la relation binaire « ... est âgé de... » ; T est la fonction à deux variables « taille de ... à... », et le domaine implicite du quantificateur universel est l'ensemble des êtres humains (ou un sous-ensemble de cet ensemble). On pourrait aussi le formaliser de manière plus simple en considérant que « une fille » désigne une fille singulière que nous appellerions e

Si $A(e, 14)$, alors il existe t ($0 \leq t \leq 14$ et $T(e, t) = \frac{1}{2} T(e, 14)$).

Ces deux formalisations logiques rendent également visible la question du choix entre discret et continu : 14 est une valeur entière ; on pourrait s'attendre à ce qu'il en soit de même pour le moment dont on affirme l'existence. Ceci pose de manière plus générale la question de la formalisation logique des énoncés impliquant le temps.

Cette formalisation logique des énoncés est un des outils méthodologiques permettant de travailler sur les articulations entre syntaxe, sémantique et pragmatique (Barrier et al., 2019). Elle permet notamment de savoir si deux énoncés différents en langue naturelle, dans une même langue ou dans deux langues différentes, ont, ou non, la même interprétation dans un domaine mathématique donné (Durand-Guerrier et al., 2006).

IV. PREMIERS RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Les premières expérimentations ont été menées dans quatre classes, deux en Occitanie, une en Guyane et une à Mayotte. Dans le cadre de cette communication, nous nous focalisons sur les résultats obtenus sur l'énoncé 1 et dégageons quatre points de vigilance mis en évidence au cours des expérimentations.

En premier lieu, la perception du caractère « continue » de la fonction « taille en fonction de l'âge » a été perçue par plusieurs élèves et justifiée par l'usage d'expressions comme « forcément » ou « c'est obligé » avec une idée d'augmentation progressive de la taille que nous pouvons illustrer par ces deux traces écrites d'élèves :

« Cela est toujours vrai car on a forcément mesuré au moins une fois dans sa vie la moitié de sa taille à 14 ans. Même si l'âge n'est pas forcément proportionnel à la taille, étant bébé nous étions très petits donc nous sommes forcément passés par là. ».

« Je pense que c'est toujours vrai car tout le monde est né petit et personne n'est né déjà grand du coup il y aura toujours un moment dans ta vie où tu as été plus petit que ta taille actuelle. ».

A contrario, lors d'un échange en Occitanie, une élève soutient que c'est « parfois vrai » car on n'est « pas obligé de monter de 1 cm en 1 cm, parfois tu peux monter par 2 cm d'un coup ». Nous formulons l'hypothèse que cela est à rapprocher du vécu des élèves : nous pensons notamment à la référence à la toise, au carnet de santé où on inscrit ponctuellement la taille ou simplement à l'habitude culturelle de marquer périodiquement d'un trait la taille des enfants, sur un mur de l'habitation familiale. Il s'agit ici du deuxième point à souligner.

L'usage du verbe « mesurer » peut renvoyer à l'acte de mesurer au moment précis ou pas qui correspondrait à « la moitié de sa taille actuelle ». Ces considérations ont pu aboutir à la réponse « parfois vrai » ou « toujours vrai ».

En troisième lieu, la comparaison des différentes formulations du point de vue des élèves a révélé une complexité que nous avons en partie sous-estimée. Les traces écrites des élèves montrent que certaines expressions comme « au moins une fois » (PISA *Source*) ou « à un moment » (PISA CR) ont été tantôt considérées comme des éléments facilitateurs et tantôt comme des facteurs de complexité :

- Préférence pour la version PISA Source : « Nous trouvons que celle de Katerina est la plus complexe car dans l'énoncé il est mentionné que c'est dans un moment de sa vie alors que dans celle de Elliott il est mentionné qu'elle mesurait au moins une fois dans sa vie donc la deuxième a plus de possibilités. ».
- Préférence pour la version PISA CR : « L'énoncé de Mathis est plus dur que le mien car mon énoncé est à n'importe quel moment alors que, l'énoncé de Mathis est à un moment précis. ».

Pour finir, plusieurs autres points ont été relevés, en particulier : la question du temps employé : le présent (dans la version PISA CR) est perçu comme opérationnel et facilitant la compréhension ; la référence à la proportionnalité ; l'utilisation de critères non mathématiques comme justification...

Ces premiers résultats mettent en lumière toute la complexité des énoncés et posent la question de la réponse attendue par les concepteurs des énoncés. En l'occurrence, dans le cas de ces premières expérimentations, il y a à peu près le même nombre de réponses « *toujours vrai* » et « *parfois vrai* », la réponse « *jamais vrai* » étant, elle, marginale. Par ailleurs, le préambule de la partie « Contextes » du Cadre pour les mathématiques du PISA 2022, dont est extrait l'énoncé 1, spécifie que « Le choix de représentations et de stratégies mathématiques appropriées dépend souvent du contexte dans lequel un problème se pose. »³. Or, il nous semble qu'au-delà du contexte du problème, le contexte culturel des élèves peut influencer sur les représentations et les stratégies mobilisées impactent, de ce fait, l'interprétation des énoncés et par voie de conséquence les réponses des élèves.

En outre, lors de ces premières expérimentations, nous n'avons pas identifié d'impact significatif des reformulations proposées sur les réponses données. L'étude exploratoire se poursuit avec de nouvelles expérimentations en cours, au cours desquelles nous envisageons des entretiens avec les élèves.

V. CONCLUSION

Dans ce texte, nous présentons les principaux éléments d'une recherche en cours sur l'impact des variations grammaticales sur l'interprétation des énoncés mathématiques, notamment dans le cadre des évaluations internationales, ici dans le cas d'un item du PISA. Nous avons présenté pendant la conférence les premiers résultats des expérimentations locales menées durant l'automne et l'hiver 2024-2025 dans deux contextes plurilingues de l'Outre-mer français et un contexte de la France hexagonale. Nous avons pu partager avec les participants au groupe de travail nos questionnements, nos hypothèses et nos premiers résultats. Les travaux présentés à cette occasion ont une portée beaucoup plus large que le contexte français, et nous espérons que de nouvelles collaborations pourront émerger autour de ces questions.

RÉFÉRENCES

- Anciaux, F. et Jeannot-Fourcaud, B. (2012). L'informel dans l'éducation de l'enfant : le cas de l'alternance codique en Guadeloupe. *Revue française d'éducation comparée*, 8, 145-164.
- Auger, N. et Chesnais, A. (2022). Des enjeux syntaxiques dans les apprentissages mathématiques. Dans C. Hache et C. Mendonça Dias (dir.), *Plurilinguisme et enseignement des mathématiques* (p. 93-114). Lambert-Lucas.

³ <https://pisa2022-maths.oecd.org/fr/index.html#Contexts>

- Barrier, T., Durand-Guerrier, V. et Mesnil, Z. (2019). L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématiques. *Éducation & Didactique*, 13(1), 61-81.
<https://doi.org/10.4000/educationdidactique.3793>
- Bart, D., Daunay, B. et Belaid Mhersi, C. (2018). Les problèmes de traduction dans le PISA : les limites de la standardisation des tests de compréhension. *Revue de Linguistique et de Didactique des Langues*, (57). <https://doi.org/10.4000/lidil.4936>
- Ben Kilani, I. (2005). *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique*. [Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1 ; Université de Tunis].
- Bernigole, V., Fernandez, A., Loi, M. et Salles, F. (2023, décembre). *PISA 2022 : la France ne fait pas exception à la baisse généralisée des performances en culture mathématique dans l'OCDE* [Note d'information] (n° 23.48). DEPP. <https://www.education.gouv.fr/pisa-2022-la-france-ne-fait-pas-exception-la-baisse-generalisee-des-performances-en-culture-380205>
- David, C. et Zakhartchouk, J.M. (2024). Faire avec une classe multilingue et multiniveaux en cours de mathématiques. Dans C. Hache et C. Mendonça Dias (dir.), *Mathématiques et langues, propositions pédagogiques* (p. 64-74). IREMS de Paris. <https://hal.science/hal-04521050v1/>
- Delcroix, A., Forissier, T. et Anciaux, F. (2013). Vers un cadre d'analyse opérationnel des phénomènes de contextualisation didactique. Dans F. Anciaux, T. Forissier et L.-F. Prudent (dir.), *Contextualisations didactiques : approches théoriques* (p. 141-185). L'Harmattan.
- Dureysseix, F. et Salone, J.-J. (2022). Aspects linguistiques et mathématiques du patrimoine de Mayotte. Dans C. Hache et C. Mendonça Dias (dir.), *Plurilinguisme et enseignement des mathématiques* (p. 167-184). Lambert-Lucas.
- Durand-Guerrier, V. (à paraître). Question de grammaire et de traduction dans les évaluations mathématiques en contexte bi-plurilingue. Dans N. Auger (dir.), *Méthodologies et pratiques des classes multilingues*. Lambert-Lucas.
- Durand-Guerrier, V., Dias, T. et Ben Kilani, I. (2006). Plurilinguisme et apprentissage des mathématiques : ambiguïtés référentielles, négation et quantification. *Les langues modernes*, 3, 75-83.
- Eco, U. (1988). *Le signe* (A. Mandatori, trad.). Éditions Labor. (Ouvrage original publié en 1980)
- Edmonds-Wathen, C., Trinick, T. et Durand-Guerrier, V. (2016). Impact of differing grammatical structures in mathematics teaching and learning. Dans R. Barwell, P. Clarkson, A. Halai, J. Moschkovick, N. Planas, M. S. Phakeng, P. Valero et M. V. Ubillús (dir.), *Mathematics education and language diversity* (p. 23-46). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-14511-2_2
- Forissier, T. (2019). *Contextualisation et effets de contextes dans l'apprentissage des Sciences* [Habilitation à diriger les recherches, université des Antilles et de la Guyane]. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02277162/document>
- Hache, C. et Mendonça Dias, C. (2022). *Plurilinguisme et enseignement des mathématiques*. Lambert-Lucas.
- INSEE. (2024). *Dossier complet – Département de la Guyane (973)* [Données statistiques]. Insee. <https://www.insee.fr/fr/statistiques/2011101?geo=DEP-973>
- Léglise, I. (2017). Les langues parlées en Guyane : une extraordinaire diversité, un casse-tête pour les institutions. *Langues et cité*, (29), 2-5. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01674470>
- Léglise, I. (2020). Dans une Guyane multilingue, des enfants plurilingues. *Boukan – le courrier ultramarin*, (3). <https://hal.science/hal-02943132>

- Nguala, J.-B. (2005). La multiprésentation, un dispositif d'aide à la résolution de problème. *Grand N*, (76), 45-63. <https://hal.science/hal-03462724v1>
- Nguala, J.-B. (2023). Contextes sémantiques et dispositifs de multi-représentation de problèmes : enjeux, structuration du milieu didactique, portée et limites. Dans P. Bourdier et S. Pesce (dir.), *Les pratiques d'enseignement et de formation à l'épreuve des contextes : questions épistémologiques et méthodologiques* (p. 179–199). Téraêdre.
- PISA (2018, novembre). *PISA 2022 Mathematical Framework (Draft)*. <https://pisa2022-maths.oecd.org/files/PISA%202022%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf>
- Robo, E. (2021, septembre). *Le contexte dans la pratique déclarée des professeurs des écoles de Polynésie française et de Guyane française : le cas des mathématiques* [Communication]. Biennale Internationale de l'Éducation, de la Formation et des Pratiques professionnelles. <https://hal.science/hal-03483947>
- Robo, E., Ailincal, R. et Delcroix, A. (2022, novembre). *Étude de la structure des interactions en classe de géométrie avec des élèves de 10-11 ans : le cas de la Polynésie française et la Guyane française* [Communication]. Les Journées de la Recherche en Éducation-Recherches Interdisciplinaires sur les Interactions entre Cultures, Langues et Apprentissages Scolaires. Papeete. <https://hal.science/hal-04069335>

DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES TUNISIENS À CONVERTIR LES EXPRESSIONS SYMBOLIQUES EN LANGAGE NATUREL : ÉGALITÉ, INÉGALITÉ ET INTERSECTION ENTRE ENSEMBLES

| KILANI* IMED ET CHELLOUGUI** FAÏZA

Résumé | Dans l'enseignement des mathématiques, il est important de développer la capacité des élèves à convertir les expressions symboliques en langage naturel et vice versa (Pólya, 1989 ; Delavault, 1977 ; Duval, 1993, 1995 ; Bronckart, 2007 ; Hache, 2013). Cet article présente une partie d'une étude réalisée avec des élèves tunisiens de 17 à 18 ans ayant une formation scientifique, visant à évaluer leur aptitude à convertir en français des expressions symboliques basiques impliquant des relations d'égalité, d'inégalité et d'intersection entre ensembles. Les résultats révèlent que de nombreux élèves éprouvent des difficultés dans cette conversion, en particulier pour expliciter la quantification implicite.

Mots-clés : expression symbolique, langage naturel, conversion, quantification, symboles mathématiques

Abstract | In mathematics education, it is important to develop students' ability to convert symbolic expressions into natural language and vice versa (Pólya, 1989; Delavault, 1977; Duval, 1993, 1995; Bronckart, 2007; Hache, 2013). This article presents a part of a study conducted with Tunisian students aged 17 to 18 with a scientific background, aimed at assessing their ability to convert basic symbolic expressions involving equality, inequality, and intersection relations between sets into French. The results reveal that many students struggle with this conversion, especially in clarifying implicit quantification.

Keywords : Symbolic expression, natural language, conversion, quantification, mathematical symbols

I. INTRODUCTION

En mathématiques, les symboles sont essentiels pour représenter des concepts et des relations souvent abstraits, pouvant exprimer des significations complexes et multiples (Kline, 1980 ; Bloch, 2008 ; Leng, 2010). Contrairement au langage naturel, intuitif par nature, le langage symbolique nécessite une compréhension approfondie. Les élèves, encore non experts, peuvent éprouver des difficultés à interpréter les symboles et expressions mathématiques en raison de leur manque d'expérience, de leur niveau de compétence mathématique actuel, et de la complexité syntaxique et sémantique des symboles. Ils doivent comprendre non seulement chaque symbole individuellement, mais aussi l'ensemble de l'expression symbolique, en tenant compte des interactions entre les différents symboles. L'accompagnement du langage symbolique par des explications verbales constitue une stratégie efficace pour soutenir les élèves, notamment ceux qui éprouvent des difficultés avec les symboles mathématiques (Delavault, 1977 ; Duval, 1993 ; Duval et Pluvinaud, 2016 ; Chesnais et Coulange, 2022). Ces explications verbales apportent un éclairage complémentaire, aidant à dissiper les ambiguïtés liées aux symboles et à faciliter une meilleure compréhension des concepts mathématiques.

Dans ce texte, nous présentons les résultats d'une partie d'une recherche menée avec des élèves tunisiens de formation scientifique, âgés de 17 à 18 ans, dans laquelle nous avons étudié leur capacité à convertir en langage naturel français¹ des expressions mathématiques symboliques simples, mettant

* Université virtuelle de Tunis – Tunisie – kilanis2006@yahoo.fr

** Université de Carthage – Tunisie – chellouguifaiza@yahoo.fr

¹ En Tunisie, le français est une langue seconde privilégiée enseignée dans les écoles publiques à partir de la troisième année de l'école primaire.

en jeu des relations basiques d'égalité, d'inégalité et d'intersection entre des ensembles et incluant l'ensemble vide. L'expérimentation porte sur un cas concret d'application directe de la notion de « partition »² d'un ensemble en trois sous-ensembles.

Cet article est structuré en deux sections principales. La première explore la complexité du passage du langage symbolique au langage naturel et introduit une classification des différents types de conversion des expressions symboliques impliquant des relations simples entre ensembles finis. La seconde présente une partie d'une expérimentation menée auprès de soixante-dix-huit élèves tunisiens, suivi d'une analyse détaillée de leurs réponses et des résultats obtenus. L'article se termine par une discussion générale sur les conclusions de l'étude.

II. DU LANGAGE SYMBOLIQUE AU LANGAGE NATUREL

La conversion du langage symbolique au langage naturel est un aspect fondamental de l'enseignement des mathématiques (Duval, 1993, 1995, 2006). Ce processus est essentiel pour rendre les concepts abstraits plus accessibles et compréhensibles. En effet, bien que le langage symbolique permette d'exprimer des relations mathématiques complexes de manière concise et précise, il peut être difficile à interpréter, notamment pour les élèves qui ne maîtrisent pas pleinement ce registre. À l'inverse, le langage naturel, en raison de sa familiarité et de son accessibilité, offre une opportunité de relier les idées mathématiques formelles à des contextes plus concrets et intuitifs. La conversion entre ces deux registres exige des élèves qu'ils convertissent des symboles mathématiques en descriptions verbales tout en préservant la signification des relations exprimées. Cependant, cette opération ne peut se limiter à une simple traduction mécanique : elle nécessite une compréhension profonde des concepts mathématiques sous-jacents (Duval, 1995). Cela est d'autant plus vrai que les symboles concentrent souvent une grande quantité d'informations implicites. Par exemple, comprendre les implications logiques d'une écriture symbolique peut être difficile, surtout lorsque celles-ci ne sont pas explicitées ou clairement mises en évidence.

Le langage naturel, qui désigne les langues humaines utilisées dans la communication quotidienne (anglais, français, arabe, etc.), se distingue par sa richesse, sa polyvalence et son ambiguïté, résultant d'une évolution historique et sociale (Chomsky, 1965 ; Wittgenstein, 2004). Sa nature parfois imprécise peut engendrer des confusions, notamment lorsque certains termes du langage courant, comme *ou* ou *implique*, diffèrent de leur interprétation en logique formelle. Malgré ces défis, le langage naturel reste un outil crucial pour plusieurs raisons. D'abord, il est accessible et familier, ce qui en fait un point de départ privilégié pour introduire de nouveaux concepts. Ensuite, il soutient la métacognition en aidant les élèves à réfléchir sur leurs processus de pensée et de résolution de problèmes (Sfard, 2008 ; Duval, 1995). Il facilite également la communication, la réflexion et la conceptualisation des idées mathématiques, et relie verbalement les différentes représentations (Sfard, 2008 ; Duval, 1995).

Cependant, la conversion entre langage symbolique et langage naturel peut s'avérer complexe (Duval et Pluvineau, 2016), en particulier lorsque l'expression symbolique implique des informations implicites. Par exemple, une expression comme $A \cup B = C$ met en jeu des connaissances mathématiques qui peuvent passer inaperçues si l'on se contente d'une simple description verbale de l'ensemble C. Cette expression symbolique implique que « l'ensemble C contient tous les éléments de A ou de B », et cela se traduit par une quantification explicite qui est cachée dans l'expression symbolique. Ainsi, les élèves peuvent interpréter $A \cup B = C$ comme une simple égalité entre deux ensembles, sans saisir la relation dynamique entre les éléments de ces ensembles. Une conversion interprétative correcte de cette

² Une partition d'un ensemble E en trois sous-ensembles est une décomposition de cet ensemble en trois parties distinctes U_1 , U_2 et U_3 telles que $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$ et $U_3 \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \emptyset$, et $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = E$.

expression en langage naturel nécessite de préciser que chaque élément de C doit appartenir à A ou à B , et réciproquement. Cette explicitation de la quantification est cruciale pour une compréhension mathématique correcte de la signification de l'expression symbolique. Des difficultés similaires sont parfois observées même chez des étudiants scientifiques (Durand-guerrier, 1996 ; Chellougui, 2009). Certaines études en didactique (Najar, 2010 ; Mesnil, 2014) montrent également que les étudiants, à leur entrée à l'université, peinent souvent à démontrer l'égalité entre ensembles. Par exemple, Najar (2010) souligne que les notions ensemblistes et logiques sont fréquemment introduites de manière ad hoc, sans qu'une réflexion approfondie sur leur sens ne soit menée. De même, Mesnil (2014) observe que la relation d'intersection est souvent mal comprise, notamment en raison de sa relation avec la conjonction logique *et*, ce qui peut induire des confusions. Ces difficultés mettent en évidence l'importance d'une compréhension préalable du langage symbolique pour aborder efficacement les raisonnements mathématiques formels. Pólya (1989) insiste sur la nécessité de comprendre en profondeur un problème, son contexte, les relations entre ses éléments et l'objectif à atteindre avant de se lancer dans des démarches formelles. Une fois cette compréhension bien établie, les raisonnements mathématiques peuvent être appliqués avec davantage de clarté et de réussite. La conversion du langage symbolique en langage naturel joue un rôle clé dans ce processus, en enrichissant la compréhension et en facilitant la transition de l'intuition vers un raisonnement rigoureux.

Pour une expression impliquant des ensembles et des symboles mathématiques tels que $\cup$ (union), $\cap$ (intersection), $-$ (différence), $=$ (égalité), $\neq$ (inégalité), et $\emptyset$ (ensemble vide), on peut distinguer deux niveaux de conversion en langage naturel :

- **Niveau littéral.** L'expression est convertie directement en langage naturel en utilisant les termes des symboles présents. Par exemple, l'expression $V \cap F = \emptyset$ se converti littéralement par « L'intersection de l'ensemble V et de l'ensemble F est égale à l'ensemble vide ». Cette conversion reste centrée sur la syntaxe mathématique sans approfondir le sens contextuel ou implicite.
- **Niveau interprétatif.** L'expression est convertie en termes concrets pour révéler la signification sous-jacente des symboles. Par exemple, « Il n'y a pas d'élèves qui pratiquent à la fois le volley et le foot » est une conversion interprétative contextualisée de $V \cap F = \emptyset$ qui clarifie que les ensembles V et F n'ont aucun élément en commun, en intégrant la quantification implicite et les relations entre les ensembles. Cette conversion montre une compréhension plus profonde, ce qui est crucial pour guider le raisonnement mathématique (Schoenfeld, 1994).

Les conversions en langage naturel peuvent être correctes ou incorrectes, ce qui permet de distinguer quatre types de conversion, chacun représentant un niveau de compréhension :

- **Conversion Littérale Correcte (CLC) :** Utilise une terminologie mathématique appropriée mais ne révèle pas la signification implicite de l'expression, notamment la quantification implicite. Par exemple, « L'intersection des ensembles V et F est égale à l'ensemble vide » est une conversion littérale correcte de $V \cap F = \emptyset$, mais elle reste superficielle.
- **Conversion Littérale Incorrecte (CLI) :** Utilise une terminologie incorrecte, reflétant une confusion des symboles mathématiques. Dans cette conversion rien ne montre qu'il y a une tentation de dévoiler la signification profonde ou les concepts sous-jacents de l'expression.
- **Conversion Interprétative Correcte (CIC) :** Va au-delà de la reformulation littérale en clarifiant la signification globale de l'expression et en explicitant correctement les concepts

sous-jacents, notamment la quantification implicite. Elle montre une compréhension approfondie des concepts et des relations entre les symboles mathématiques. Par exemple, « Il n'y a pas d'élèves qui pratiquent à la fois le volley et le foot » ou « Tous les élèves pratiquent soit le volley, soit le foot, mais aucun ne pratique les deux sports simultanément. » sont des conversions interprétatives correctes de $V \cap F = \emptyset$.

- **Conversion Interprétative Incorrecte (CII)** : Fournit une interprétation erronée de l'expression symbolique, révélant des lacunes dans la compréhension des concepts mathématiques sous-jacents et des difficultés d'interprétation des symboles. Par exemple, elle pourrait mal quantifier les éléments implicites dans l'expression.

Ces distinctions entre les niveaux de compréhension des expressions symboliques, notamment celles impliquant les concepts d'égalité, d'inégalité et d'intersection d'ensembles, serviront à évaluer la capacité des élèves à convertir ces expressions en langage naturel, de manière littérale et interprétative. Un questionnaire a été élaboré pour explorer comment les élèves effectuent cette conversion. Les expressions en jeu dans ce questionnaire sont intégrées dans une situation courante décrivant une enquête portant sur les habitudes sportives des élèves.

Ce texte présente une partie des résultats de l'expérimentation. La méthodologie et l'analyse complète des réponses seront détaillées dans le paragraphe suivant.

III. Présentation de l'expérimentation et analyses des résultats

À l'aide d'un questionnaire individuel soumis à 78 élèves tunisiens de 17 à 18 ans poursuivant un parcours scientifique, cette étude vise à évaluer leur capacité à convertir en langage naturel des expressions symboliques impliquant les opérations et relations fondamentales d'égalité, d'inégalité et d'intersection entre ensembles finis, y compris l'ensemble vide. Duval et Pluvineau (2016) soulignent que les programmes scolaires ne mettent souvent pas en avant l'importance de telles activités. Selon eux, cette omission révèle un manque de reconnaissance des difficultés que certains élèves peuvent rencontrer pour comprendre le langage symbolique, difficultés qui se manifestent lorsqu'ils doivent convertir ces expressions en langage naturel. Les expressions symboliques utilisées dans le questionnaire dissimulent une quantification implicite. Une Conversion Interprétative Correcte (CIC) de ces expressions dans le langage naturel exige l'explicitation de cette quantification. Une telle conversion montre que les élèves ont saisi le contenu conceptuel et logique des expressions, notamment les relations universelles ou existentielles entre les éléments.

Le questionnaire est rédigé en français, langue d'enseignement des mathématiques en Tunisie, tandis que la langue maternelle des élèves est l'arabe. Des études, telles que celles de Touati (2011) et Souilah (2018), montrent que les élèves tunisiens ont des difficultés à s'exprimer en français. En plus des défis liés à la conversion des expressions symboliques en verbales, la barrière linguistique due à l'utilisation du français pourrait compliquer leur compréhension et leurs réponses. Ben Nejma (2020) et Ben Kilani (2005) indiquent que les tâches mathématiques sont plus complexes pour les élèves tunisiens lorsque l'énoncé n'est pas en arabe.

Le questionnaire présente une situation basée sur une enquête réalisée dans une classe (C) sur les sports pratiqués par les élèves, désignés par les lettres suivantes : V pour volley, F pour football, et B pour basket. Il comprend deux questions, mais nous nous concentrons dans cet article sur la première. Cette question demande aux élèves de convertir en français les significations des expressions mathématiques suivantes : $V \neq \emptyset$, $F \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $V \cap F = \emptyset$, $V \cap B = \emptyset$, et $B \cap F = \emptyset$. Les trois premières expressions indiquent que les sous-ensembles V, F, et B ne sont pas vides, ce qui est une condition nécessaire pour qu'ils puissent former une partition de l'ensemble C. Les trois dernières

expressions montrent que ces sous-ensembles sont disjoints deux à deux, ce qui est également nécessaire pour une partition. Plus précisément, $V \neq \emptyset$, $F \neq \emptyset$, et $B \neq \emptyset$ signifient que chaque ensemble (V , F , et B) contient au moins un élément. En revanche, $V \cap F = \emptyset$, $V \cap B = \emptyset$, et $B \cap F = \emptyset$ indiquent que ces ensembles sont mutuellement exclusifs, c'est-à-dire qu'aucun élément n'est partagé entre eux. Par exemple, $V \cap F = \emptyset$ signifie que les ensembles V et F sont disjoints, ce qui implique qu'aucun élève ne pratique à la fois le volley (V) et le football (F). Ainsi, cette expression symbolique représente une négation universelle.

Nous analyserons les réponses des élèves en nous basant sur les quatre types de conversion expliqués ci-dessus : Conversion Littérale Correcte (CLC), Conversion Littérale Incorrecte (CLI), Conversion Interprétative Correcte (CIC), et Conversion Interprétative Incorrecte (CII). En raison de la grande diversité des réponses des élèves et pour simplifier l'analyse, nous nous concentrerons uniquement sur les réponses les plus fréquentes.

Les expressions $V \neq \emptyset$, $F \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ ayant une syntaxe identique ont été converties de manière similaire par tous les élèves. Ainsi, nous examinerons principalement la conversion de « $V \neq \emptyset$ ». De même, pour les expressions $V \cap F = \emptyset$, $V \cap B = \emptyset$ et $B \cap F = \emptyset$, nous nous concentrerons sur « $V \cap F = \emptyset$ ». Il convient de préciser que les réponses sont présentées telles qu'elles figurent dans les copies des élèves, y compris avec d'éventuelles erreurs linguistiques.

1. *Analyse des réponses relatives à l'expression symboliques $V \neq \emptyset$*

Ci-dessous, nous présentons un aperçu détaillé des principaux résultats en analysant les différents types de conversions relatives à l'expression symbolique $V \neq \emptyset$ fournies par les élèves.

a-Conversion Littérale Correcte (CLC)

Environ 36% des élèves (28 sur 78) ont donné une Conversion Littérale Correcte pour l'expression « $V \neq \emptyset$ », indiquant une bonne utilisation de la terminologie mathématique pour exprimer que l'ensemble V n'est pas vide. Les deux types de réponses observées étaient : « L'ensemble des élèves qui pratiquent le volley est différent de l'ensemble vide » (16) et « V est différent du vide » (12). La première réponse démontre une contextualisation appropriée, intégrant le contexte de la situation, tandis que la deuxième réponse se contente d'une conversion littérale, sans prise en compte du contexte. Cependant, ces conversions ne garantissent pas une compréhension complète de l'implication plus profonde de l'expression, en particulier la quantification implicite qui signifie qu'il y a au moins un élément dans V .

b-Conversion Littérale Incorrecte (CLI)

Environ 12 % des élèves (9 sur 78) ont fourni une Conversion Littérale Incorrecte pour « $V \neq \emptyset$ », révélant des malentendus significatifs sur cette expression. Par exemple, des réponses comme « V n'appartient pas à l'ensemble vide » (2) ou « V est l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley » (2) illustrent une confusion entre les notions d'appartenance et de non-vacuité des ensembles. La première réponse montre une incompréhension fondamentale, car l'expression « $V \neq \emptyset$ » ne concerne pas l'appartenance à l'ensemble vide, mais plutôt la non-vacuité de V . La seconde réponse, en définissant V comme un ensemble spécifique sans indiquer qu'il n'est pas vide, se limite à une description partielle et erronée. Ces erreurs mettent en lumière des difficultés chez les élèves à utiliser correctement la terminologie des ensembles, suggérant un manque de compréhension des concepts de base tels que la notion d'ensemble vide et la signification de la non-vacuité.

c-Conversion Interprétative Correcte (CIC)

Environ 38 % des élèves (30 sur 78) ont fourni une Conversion Interprétative Correcte pour l'expression « $V \neq \emptyset$ ». Ils ont converti cette expression par des phrases telles que « Il y a des élèves qui pratiquent le volley » (21) ou « V contient des élèves qui jouent au volley » (4). Ces réponses révèlent une compréhension de la quantification implicite sous-jacente à l'expression symbolique, montrant que l'ensemble V contient au moins un élément. En formulant leurs réponses ainsi, ces élèves montrent leur capacité à exprimer précisément et de manière appropriée que V n'est pas vide. Cette conversion interprétative indique une maîtrise avancée des concepts de quantification et de non-vacuité dans le contexte des ensembles.

d- Conversion Interprétative Incorrecte (CII)

Environ 14 % des élèves (11 sur 78) ont fourni une Conversion Interprétative Incorrecte pour l'expression « $V \neq \emptyset$ ». Par exemple, des réponses telles que « Il n'y a pas d'élèves qui pratiquent le volley dans cette classe » (5) ou « Les élèves qui pratiquent le volley n'appartiennent pas à les élèves de cette classe » (2), ainsi que « Tous les élèves pratiquent le volley » (1), montrent des malentendus significatifs. Ces réponses vont à l'encontre de l'idée que V n'est pas vide ou introduisent des généralisations incorrectes. Ces erreurs révèlent des difficultés majeures dans la compréhension de la quantification implicite que l'expression « $V \neq \emptyset$ » implique. Plutôt que de reconnaître que V contient au moins un élément, certaines réponses incorrectes suggèrent des situations opposées ou des généralisations qui ne sont pas représentatives de l'expression symbolique donnée. Par exemple, affirmer qu'il n'y a pas d'élèves qui pratiquent le volley contredit directement la signification de non-vacuité, tandis que les généralisations comme « Tous les élèves pratiquent le volley » vont au-delà de ce que l'expression implique. Ces erreurs soulignent des problèmes dans l'interprétation correcte de la quantification et des relations entre les ensembles, mettant en lumière des lacunes importantes dans la compréhension des concepts fondamentaux de la théorie des ensembles.

En résumé, bien que la majorité des élèves (74%) aient fourni des réponses correctes à l'expression « $V \neq \emptyset$ », qu'elles soient littérales ou interprétatives, un peu plus d'un quart a rencontré des difficultés. Les réponses correctes ont majoritairement montré une maîtrise appropriée de la terminologie mathématique et, pour celles interprétatives, une compréhension approfondie de la présence d'au moins un élément dans V. Cependant, parmi les élèves en difficulté, certains ont donné des conversions littérales incorrectes en confondant appartenance et non-vacuité, tandis que d'autres ont proposé des conversions interprétatives incorrectes, avec des généralisations ou des erreurs de compréhension de « $V \neq \emptyset$ ».

2. Analyse des réponses relatives à l'expression symboliques $V \cap F = \emptyset$

Concernant l'expression $V \cap F = \emptyset$, nous avons également observé une diversité dans les réponses des élèves. Voici une synthèse des résultats obtenus, mettant en lumière les réussites et les difficultés rencontrées. Cette expression indique que les ensembles V (les élèves pratiquant le volley) et F (ceux pratiquant le foot) n'ont aucun élément en commun. En d'autres termes, aucun élève ne pratique à la fois le volley et le foot, ce qui correspond à une phrase universelle négative.

a-Conversion Littérale Correcte (CLC)

Environ 14 % des élèves (11 sur 78) ont fourni une Conversion Littérale Correcte pour « $V \cap F = \emptyset$ », convertissant l'expression par « L'intersection de l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley et de ceux qui pratiquent le foot est vide ». Bien que cette conversion soit correcte sur le plan littéral, elle ne garantit pas une compréhension approfondie de la quantification implicite, notamment l'absence de

chevauchement entre les deux ensembles. Certains élèves peuvent avoir compris la signification immédiate sans saisir pleinement l'absence totale d'élèves dans l'intersection ou sans exprimer cette absence en termes mathématiques appropriés. Ainsi, une conversion littérale correcte ne reflète pas toujours une maîtrise complète des concepts sous-jacents.

b-Conversion Littérale Incorrecte (CLI)

Environ 42 % (33 sur 78) des élèves ont donné une Conversion Littérale Incorrecte pour « $V \cap F = \emptyset$ », montrant des confusions notables tant dans l'usage de la terminologie mathématique conventionnelle que dans la compréhension des concepts fondamentaux de la théorie des ensembles. Certaines réponses, comme « l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley est inclus dans l'ensemble des élèves qui pratiquent le foot et est égal à l'ensemble vide » (5), confondent inclusion et intersection. D'autres réponses, telles que « l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley = l'ensemble des élèves qui pratiquent le foot » (4), ignorent la notion d'intersection vide et convertissent l'absence de chevauchement par une égalité entre ensembles. De plus, des erreurs comme « V inter F appartient à l'ensemble vide » (4) et « L'ensemble des élèves qui pratiquent le volley inter l'ensemble des élèves qui pratiquent le foot est égal à 0 » (3) montrent une confusion entre appartenance et égalité, ou utilisent incorrectement le nombre "0" pour désigner l'ensemble vide. La réponse « V inter F est égal au milieu vide » (3) utilise une terminologie non standard « milieu vide », tandis que « L'ensemble des élèves qui pratiquent le volley inclus dans l'ensemble des élèves qui pratiquent le foot et différent de l'ensemble vide » (3) illustre une confusion entre inclusion et intersection et une mauvaise utilisation du terme « différent » pour une situation qui devrait être décrite par une égalité. Toutes ces erreurs soulignent des difficultés importantes chez beaucoup d'élèves dans la compréhension des concepts de base en théorie des ensembles.

c-Conversion Interprétative Correcte (CIC)

Environ 26 % (20 sur 78) des élèves ont fourni une Conversion Interprétative Correcte pour « $V \cap F = \emptyset$ », montrant une bonne compréhension que les ensembles V et F n'ont aucun élément en commun. Les réponses telles que « Il n'y a pas d'élèves qui pratiquent à la fois le volley et le foot » (12) et « Aucun élève ne pratique à la fois les deux sports » (6) indiquent que ces ensembles sont totalement disjoints. Ces conversions vont au-delà de la simple signification littérale en reflétant une compréhension de la nécessité d'explicitier la quantification implicite. Cette capacité à saisir les implications plus subtiles de l'expression montre une bonne maîtrise des concepts d'intersection et de disjonction en théorie des ensembles.

d-Conversion Interprétative Incorrecte (CII)

Environ 18 % des élèves (14 sur 78) ont fourni des Conversions Interprétatives Incorrectes pour « $V \cap F = \emptyset$ », révélant des difficultés notables avec la quantification implicite. Par exemple, des réponses telles que « Il y a des élèves qui pratiquent foot et volley dans cette classe » (8) et « Au moins un élève qui pratique le volley et le foot » (1) supposent à tort une intersection non vide entre les ensembles V et F, contredisant directement l'énoncé. D'autres réponses, comme « Il y a un élève ou plus d'un élève qui pratique le volley » (2) illustre des difficultés d'interprétation de l'expression $V \cap F = \emptyset$. D'une part, cette formulation est inappropriée, car pour indiquer qu'un ensemble n'est pas vide, on utilise des expressions comme « il y a au moins un élève », qui expriment une quantification existentielle. D'autre part, elle omet l'ensemble F, représentant les élèves pratiquant le football, ce qui entraîne une interprétation erronée de $V \cap F = \emptyset$. En négligeant de considérer ces deux ensembles conjointement, les élèves ne peuvent saisir le sens d'une intersection vide. Ces erreurs témoignent ainsi d'une incompréhension fondamentale de cette expression mathématique.

D'autres réponses, comme « Il y a un ou plus d'un élève qui pratiquent le volley » (2), confondent la quantification sur les éléments de chaque ensemble avec la notion d'intersection vide. En effet, l'énoncé $V \cap F = \emptyset$ indique seulement qu'il n'existe aucun élève commun aux deux ensembles, sans fournir d'informations sur les éléments qui composent chacun des ensembles individuellement. La réponse « L'ensemble V existe dans l'ensemble F et les deux égale à l'ensemble vide, donc il n'y a pas des élèves qui pratiquent ni le basket ni le foot » (1) contient des maladresses et des imprécisions dans l'utilisation du langage naturel, nuisant à la clarté et à la justesse de l'interprétation mathématique. Par exemple, l'expression « exister dans » est incorrecte, car elle ne décrit pas adéquatement une relation entre ensembles et ne respecte pas le vocabulaire mathématique approprié. Ces maladresses révèlent une inadéquation entre le langage employé et les concepts qu'il tente de décrire. Par ailleurs, cette réponse confond l'absence d'intersection entre deux ensembles avec l'absence totale d'éléments dans les ensembles eux-mêmes, ce qui amène l'élève à conclure à tort que les ensembles sont vides, au lieu de reconnaître simplement qu'ils n'ont aucun élément commun.

En résumé, bien que certains élèves aient correctement interprété l'expression « $V \cap F = \emptyset$ », près de 60 % des réponses étaient incorrectes, qu'elles soient littérales ou interprétatives. Environ 56 % des élèves ont opté pour des conversions littérales, dont la majorité étaient erronées. Cette tendance indique une difficulté à dépasser une simple conversion littérale pour saisir les nuances plus profondes de l'expression. Les erreurs fréquentes révèlent une confusion sur la quantification implicite et les relations entre ensembles, incluant une mauvaise interprétation de l'intersection, de l'inclusion, et de l'absence d'éléments communs. Ces difficultés montrent un manque de compréhension des concepts fondamentaux des ensembles.

IV. CONCLUSION

Les expressions symboliques mathématiques véhiculent des concepts abstraits qui nécessitent une compréhension approfondie. Certains élèves peuvent rencontrer des difficultés à les interpréter, en raison de la densité d'informations qu'elles renferment et de la complexité des relations qu'elles impliquent. Cette recherche a exploré la capacité des élèves tunisiens à convertir des expressions mathématiques symboliques simples en langage naturel, en se concentrant sur les notions d'égalité, d'inégalité et d'intersection entre ensembles. Les résultats mettent en lumière des variations significatives dans leur aptitude à réaliser ces conversions. La majorité des élèves démontrent une certaine compétence dans la compréhension des expressions liées à la non-vacuité des ensembles, telles que « $V \neq \emptyset$ », où ils parviennent généralement à fournir des conversions correctes. Cependant, une part notable de ces réponses correctes est de nature littérale, sans explorer la quantification implicite que requiert une conversion interprétative. En revanche, les expressions plus complexes, telles que « $V \cap F = \emptyset$ », posent des difficultés considérables. Ces difficultés révèlent des lacunes dans la compréhension de l'absence d'intersection entre ensembles et une confusion entre les notions d'inclusion et d'intersection. Les erreurs fréquemment observées indiquent une insuffisance dans la maîtrise des concepts fondamentaux de la théorie des ensembles, en particulier en ce qui concerne la quantification implicite et les relations entre ensembles.

Pour approfondir la compréhension des causes de ces difficultés et améliorer l'enseignement des concepts mathématiques, il serait pertinent d'enrichir cette recherche par des entretiens détaillés avec les élèves. De plus, réaliser cette expérimentation en arabe, langue maternelle des élèves, pourrait fournir des perspectives supplémentaires sur l'impact de la langue sur la compréhension des expressions symboliques. Une telle démarche permettrait de déterminer si les difficultés observées sont liées à la langue d'enseignement ou reflètent des défis plus profonds dans la compréhension des

concepts mathématiques, en particulier ceux concernant la quantification et les relations complexes entre ensembles.

RÉFÉRENCES

- Ben Kilani, I. (2005). *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique* [Thèse de doctorat, Universités Lyon 1 et Tunis].
- Ben Nejma, S. (2020). L'impact de la langue de formulation d'un énoncé sur les démarches mises en œuvre par des élèves dans une activité de modélisation algébrique. *Petit x*, (112), 54-76. <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/IPX/IGR20007/IGR20007.pdf>
- Bloch, I. (2008). Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétatif. *Les sciences de l'Education, Pour l'ère nouvelle* [Numéro spécial], 41(1), 91-114.
- Bronckart, J.-P. (2007). L'activité langagière, la pensée et le signe, comme organisateurs du développement humain. *Langage et société*, (121-122), 57-68.
- Chellougui, F. (2009). L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29(1), 123-154.
- Chesnais, A. et Coulange, L. (2022). Rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Synthèse et perspectives en didactique des mathématiques. *Revue Française de Pédagogie*, (214), 85-121. <https://doi.org/10.4000/rfp.11357>
- Chomsky, N. (1965). *Aspects of the theory of syntax*. MIT Press.
- Delavault, H. (1977). De l'importance du langage dans l'enseignement des mathématiques. *Cahiers de Fontenay*, (6), 89-107. <https://doi.org/10.3406/cafon.1977.1114>
- Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication* [Thèse de doctorat, Université Lyon 1].
- Duval, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, (5), 37-65. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Duval, R. et Pluvineau, F. (2016). Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (21), 117-152. <https://doi.org/10.4000/adsc.789>
- Duval, R. (2006). Une analyse cognitive des problèmes de compréhension dans un apprentissage des mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Hache, C. (2013). *Langage mathématique à la transition primaire/ collège* [Communication]. XXXIX^e colloque COPIRELEM, Quimper 2012 « Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève ». ARPEME. <https://hal.science/hal-00870111v1>
- Kline, M. (1980). *The loss of certainty*. Oxford University Press.
- Leng, M. (2010). *Mathematics and reality*. Oxford University Press.

- Mesnil, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'enseignement* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot].
- Najar, R. (2010). *Effets des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants. Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire-Supérieur* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot-Paris 7].
- Pólya, G. (1989). *Comment poser et résoudre un problème* (C. Mesnage, trad.). Éditions Jacques Gabay. (Ouvrage original publié en 1945)
- Schönefeld, A-H. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Souilah, E. (2018). L'enseignement du français en Tunisie est-il en décalage avec la demande sociale ? *Synergies Europe*, (13), 27-37. <https://gerflint.fr/Base/Europe13/souilah.pdf>
- Touati, Z. (2011). Le statut et la place du français dans l'enseignement et la société en Tunisie. PURH Dans F. Laroussi et F. Liénard (dir.), *Plurilinguisme, politique linguistique et éducation : quels éclairages pour Mayotte* (p. 465-473). Presses universitaires de Rouen et du Havre. <https://doi.org/10.4000/books.purh.5261>
- Wittgenstein, L. (2004). *Recherches philosophiques* (F. Dastur, M. Élie, J.-L. Gautero, D. Janicaud et É. Rigal, trad.). Gallimard. (Ouvrage original publié en 1953)

ÉTUDE EXPLORATOIRE DES RAISONNEMENTS D'ÉLÈVES ET ÉTUDIANTS AUTOUR DE LA NÉGATION DANS UN CONTEXTE BILINGUE FRANÇAIS-MALAGASY À MADAGASCAR

| ANDRIANARIVONY* FIDY, CORTELLA** ANNE, SALONE*** JEAN-JACQUES, DURAND-GUERRIER**** VIVIANE

Résumé | Cet article rend compte d'une étude sur les raisonnements d'élèves et d'étudiants à la transition Lycée-Université, autour de la négation en contexte bilingue français-malagasy. Nous avons demandé à 323 élèves et étudiants de prouver la fausseté d'un énoncé mathématique formulé en langue naturelle, soit en malagasy soit en français. Nous présentons les résultats de nos analyses conduites en termes de praxéologie.

Mots-clés : bilinguisme, logique, négation, praxéologie, raisonnement

Abstract | This article reports on a study of students' reasoning about negation in a bilingual French-Malagasy context at the secondary-tertiary transition. We asked 323 pupils and students to prove the falsity of a mathematical statement formulated in natural language, either in Malagasy or in French. We present the results of our analyses in terms of praxeology.

Keywords: bilingualism, logic, negation, praxeology, reasoning

I. INTRODUCTION

Le contexte linguistique de l'éducation mathématique à Madagascar est sous-tendu par le phénomène bilingue français-malagasy (Ranaivoson, 2007). Officiellement, le français est la langue de scolarisation dans laquelle les concepts mathématiques sont dits et écrits d'une manière formelle, tandis que le malagasy sert à l'enseignant pour clarifier et expliquer les mathématiques enseignées (Andrianarivony et Salone, 2021). Ainsi, la langue malagasy est généralement utilisée à l'oral, tandis que la langue française est réservée aux traces écrites au tableau et aux prises de notes dans les cahiers des élèves. De ce fait, l'enseignant fait un aller-retour entre les deux langues durant les séances de cours.

Cependant, il n'existe pas toujours de traduction officielle des termes et formulations mathématiques en malagasy (Rajaspera, 1996). Ainsi, on constate qu'une explication en malagasy emprunte très souvent du vocabulaire à la langue française pour désigner les objets mathématiques (Andrianarivony et Salone, 2021). Par exemple, l'expression « le carré d'un nombre pair est pair », peut être énoncé en malagasy comme suit : « *Ny carré-n'ny nombre pair dia pair* ». Autrement dit, la phrase est exprimée avec la formule malagasy « *ny ... dia* », une tournure de la langue courante qui s'utilise tous les jours et qui peut être interprétée dans le cadre logique comme exprimant un énoncé général, avec une quantification universelle implicite (Barrier et al., 2009). Se pose par conséquent les questions de l'ancrage culturel des termes logiques utilisés dans les formulations et des ambiguïtés sémantiques

* Institut Montpellierain Alexander Grothendieck, UMR 5149 CNRS, Université de Montpellier – France – fidy-heritiana.andrianarivony@etu-umontpellier.fr

** Institut Montpellierain Alexander Grothendieck, UMR 5149 CNRS, Université de Montpellier – France – anne.cortella@umontpellier.fr

*** Recherches et Ressources en Education et Formation – ISPE Guadeloupe, Université des Antilles – France – jean-jacques.salone@univ-antilles.fr

**** Institut Montpellierain Alexander Grothendieck, UMR 5149 CNRS, Université de Montpellier – France – viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

induites par cette interdépendance entre les concepts logiques et la langue d'énonciation (Ben Kilani, 2005 ; Chellougui et Kouki, 2012).

Cependant, le bilinguisme de fait dans la classe de mathématiques peut aussi avoir des effets bénéfiques sur les apprentissages (Barwell et al., 2016). Dans la lignée des travaux de Ben Kilani (2005) dans le cas de l'arabe et du français, nous nous proposons d'étudier les avantages et les inconvénients de la coexistence de deux langues, le français et le malagasy, dans le raisonnement des élèves et des étudiants dans des tâches mettant en jeu la négation à Madagascar. Notre question de recherche est la suivante : *Dans laquelle ou lesquelles des deux langues, le français et/ou le Malagasy, la formulation d'un énoncé mathématique permet-elle aux élèves et aux étudiants d'avoir un raisonnement autour de la négation plus proche de celui des mathématiciens ?*

Le cadre théorique d'étude retenu est la théorie anthropologique du didactique d'Yves Chevallard (Chevallard, 1999). Une praxéologie est une modélisation d'une activité humaine, utilisée en particulier pour une activité mathématique. Une organisation praxéologique est résumée par une *tâche* qui peut être découpée en plusieurs *sous-tâches*, par une *technique* mise en œuvre pour accomplir la tâche, par une *technologie* qui explicite et permet la mise en œuvre de cette technique, et enfin par une *théorie* qui justifie la technologie. Un ensemble de tâches et de techniques constitue ce que l'on appelle un bloc pratico-technique (ou praxis). Il s'agit du savoir-faire permettant d'accomplir la tâche. La technologie et la théorie constituent quant à elles le bloc technologico-théorique (ou logos), c'est-à-dire le savoir rationnel qui justifie le savoir-faire. Notre choix méthodologique consiste en particulier à appréhender les praxéologies des élèves en les comparant à un modèle praxéologique mathématique savant de référence.

Dans cette communication, nous analysons suivant cette approche praxéologique un exercice de raisonnement autour de la négation. Nous présentons tout d'abord notre méthodologie de recherche, puis nos résultats et enfin nos conclusions et perspectives.

II. MÉTHODOLOGIE

Pour répondre à notre question de recherche, nous avons mené une expérimentation auprès de 190 élèves de terminale scientifique et de 133 étudiants, en première année de licence de mathématiques à Madagascar. Nous leur avons ainsi demandé de réaliser des tâches de formulation et de démonstration d'énoncés mathématiques faisant intervenir des concepts logiques. Ces tâches leur ont été proposées via deux questionnaires, l'un rédigé en français, dénommé ci-après Q1, et l'autre, Q2, d'une manière mixte, c'est-à-dire comme cela se fait généralement dans les classes avec une formulation de la phrase en malagasy et une désignation des objets mathématiques en français. Les deux questionnaires comportent les mêmes items et sont proposés à l'écrit avec des explications complémentaires données à l'oral dans les deux langues. Pendant les séquences d'expérimentation, une première séance a été consacrée à l'explication de l'objectif des questionnaires et à la façon de répondre aux items. Une deuxième séance, subdivisée en cinq phases, a ensuite permis aux élèves de répondre individuellement aux cinq items proposés. En outre les 325 élèves ou étudiants ont été répartis en deux groupes. Le groupe 1 était composé de 95 élèves et 68 étudiants, tandis que le groupe 2 regroupait 95 élèves et 67 étudiants. Les élèves du groupe 1 ont répondu au questionnaire 1 en français, tandis que ceux du groupe 2 ont répondu au questionnaire 2, de nature mixte. Pour des raisons de concision, nous n'avons pas distingué, dans cette étude, les copies des élèves de celles des étudiants. Cette distinction fera toutefois l'objet d'une analyse approfondie dans un travail en cours. Les participants du groupe 1 sont identifiés par les numéros E1 à E163, et ceux du groupe 2, par les numéros E164 à E325. De plus, dans cet article, nous nous concentrons sur le cinquième et dernier item de notre questionnaire, qui porte sur la négation logique :

Questionnaire 1 :

On donne la phrase suivante : « *Si un nombre entier est divisible par 4 alors il se termine par 4* »

- La phrase est-elle vraie ou fausse ?
- Si faux donne ici la phrase correcte :
- Expliquer votre raisonnement :

Questionnaire 2 :

On donne la phrase suivante : « *Raha ny nombre entier azo zaraina 4 dia miafara amin'ny 4* »

- La phrase est-elle vraie ou fausse ?
- Si faux donne ici la phrase correcte :
- Expliquer votre raisonnement :

Cet item 5 est issu d'un questionnaire de la Commission Inter-IREM Université destiné à des étudiants nouvellement arrivés en première année d'université afin de tester leurs compétences en logique (Njomgang-Ngansop, 2013)¹. Une phrase mathématique est énoncée et trois tâches sont proposées : se prononcer sur la valeur de vérité de la phrase mathématique, corriger la phrase afin d'obtenir une phrase vraie dans le cas où la réponse à la première question est « la phrase est fausse », et expliquer le raisonnement ayant conduit à la réponse initiale et/ou à la correction proposée.

Pour la phrase de l'item 5 et la première tâche proposée, le modèle praxéologique de référence que nous avons défini est le suivant :

Dans tout ce qui suit, le domaine de quantification est l'ensemble des entiers naturels

Tâche 1 : se prononcer sur la valeur de vérité de la phrase de l'item 5

Technique : explorer la valeur de vérité des propositions obtenues en considérant quelques valeurs entières.

Technologie : Un énoncé universel admettant un contre-exemple est faux ; autrement dit un énoncé de la forme « Pour tout x , $p(x)$ » est faux dès qu'on peut trouver une valeur x_0 qui ne vérifie pas la propriété $p(x)$.

Théorie : cette technologie trouve sa justification dans le calcul des prédicats du premier ordre.

Pour la deuxième tâche, plusieurs techniques peuvent être employées pour corriger la phrase, d'autant plus que nous n'avons pas explicitement demandé la négation. Les praxéologies savantes des mathématiciens s'appuient sur le critère sémantique d'échange des valeurs de vérité entre un énoncé et sa négation, ainsi que sur les règles syntaxiques du calcul des prédicats : la négation transforme un énoncé universel en énoncé existentiel et vice versa ; la négation d'une implication est une conjonction. La formulation en langue naturelle nécessite en outre de prendre en compte les critères syntaxiques (grammaticaux) de la langue d'énonciation. Cette tâche peut être découpée en deux sous-tâches : l'identification de la quantification et l'identification du connecteur dans la phrase. Ci-dessous le modèle praxéologique de référence retenu :

¹ La question posée était alors : « donner la négation de la phrase : si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4 »

Tâche 2 : corriger la phrase de l'item 5

Technique : donner la négation de la phrase

Sous-tâche 1 : identifier la quantification et en déduire une formulation de la négation

Technique 1 : concevoir l'article français « un » comme une quantification universelle. De même pour le déterminant malagasy « *ny* » qui est vu comme sa traduction malagasy ; en déduire que la négation est un énoncé commençant dans Q1 par : « il existe un nombre entier ... », et dans Q2 : « *misy nombre entier ...* ».

Technologie 1 : la technique ci-dessus s'appuie sur le théorème de logique : la négation d'un énoncé universel de la forme $\forall xP(x)$ est l'énoncé $\exists x\neg P(x)$.

Théorie 1 : calcul des prédicats du premier ordre.

Sous-tâche 2 : identifier le connecteur logique utilisé et en déduire celui de la négation

Technique 2 : concevoir le « si ... alors » comme une implication. De même pour « *raha ... dia* » qui est vu comme sa traduction en malagasy ; en déduire que la négation est la conjonction de l'antécédent et de la négation du conséquent.

Technologie 2 : ceci s'appuie sur le théorème de logique : la négation d'un énoncé de la forme « si P alors Q » est l'énoncé « P et non Q »

Théorie 2 : calcul des prédicats du premier ordre

En se référant aux travaux de Durand-Guerrier (2016) et Ben Kilani (2005), on peut trouver d'autres types de techniques correspondant à la manière de nier dans la langue courante. Une de ces techniques consiste à nier un énoncé de la forme « Tout A est B » en « Tous les A ne sont pas B ». Mais, comme souligné par ces auteurs, cette technique peut produire une formulation ambiguë, car la phrase obtenue peut être interprétée soit comme « pour tout A, A est non-B », soit comme « il existe A qui n'est pas B » ; cette dernière interprétation est conforme à la norme linguistique française. Ainsi, dans le cas de l'énoncé de Q1, la négation donnée sous la forme « tous les nombres entiers divisibles par 4 ne se terminent pas par 4 » peut être interprétée soit par « pour tout nombre entier, s'il est divisible par 4 alors il ne se termine pas par 4 », soit « il existe un nombre entier qui est divisible par 4 et qui ne se termine pas par 4 ». Seule la deuxième interprétation correspond à la négation logique. Pour l'énoncé de Q2, on retrouve les mêmes interprétations avec la négation « *ny nombre entier rehetra azo zaraina 4 dia tsy mifara amin'ny 4* ». Dans les deux cas, les formulations sont justifiées par la grammaire de la langue naturelle concernée.

Remarquons encore qu'une technologie erronée consistant à considérer que la négation d'une implication est une implication est fréquemment mobilisée par les élèves et étudiants (Rogalski et Rogalski, 2004 ; Durand-Guerrier, 2016). Dans ce sens, on peut trouver une technique de négation de la forme « si P alors nonQ » ou « si nonP alors nonQ ». Pour les énoncés de Q1 et Q2, on obtient ainsi les négations « si un nombre entier est divisible par 4 alors il ne se termine pas par 4 (*raha ny nombre entier azo zaraina 4 dia tsy mifara amin'ny 4*) » ou « si un nombre n'est pas divisible par 4 alors il ne se termine pas par 4 (*raha ny nombre entier tsy azo zaraina 4 dia tsy mifara amin'ny 4*) ». Cette technique consiste donc à appliquer un critère syntaxique (grammatical) : la négation en français se fait en appliquant « ne...pas » sur le verbe sans considération de la condition sémantique d'échange des valeurs de vérité et dans la langue malagasy on ajoute « *tsy* » avant la propriété à nier. Ces deux règles syntaxiques ne respectent pas la condition sémantique d'échange des valeurs de vérité.

Il est possible que certains élèves proposent des formulations ne correspondant pas à une négation de la proposition initiale puisque nous avons seulement demandé de transformer la phrase en une

phrase vraie, sans demander explicitement une négation. Les élèves et les étudiants peuvent par exemple identifier la quantification universelle implicite dans les énoncés Q1 et Q2 et proposer ainsi une technique qui consiste à corriger la quantification universelle en une quantification existentielle, sans introduire de négation. Ils peuvent ainsi proposer un énoncé de la forme « il existe x tel que si $p(x)$ alors $q(x)$ » ou « il existe x tel que $p(x)$ et $q(x)$ ». Le premier énoncé est un énoncé vrai dès qu'il existe un élément ne satisfaisant pas l'antécédent. Ils peuvent aussi modifier une des propriétés pour obtenir un énoncé vrai. L'énoncé mathématique « Si un nombre est divisible par 4, alors il est divisible par 2 » pourrait figurer parmi les réponses. Les explications que proposeront ces élèves à la troisième tâche pourront alors potentiellement concerner la véracité de la phrase proposée.

La structure conditionnelle « si P alors Q » peut également être interprétée par certains élèves et étudiants de manière erronée comme équivalente à « si Q alors P », c'est-à-dire à sa réciproque. Dans ce cas, ils peuvent répondre par une technique qui consiste à accomplir la tâche en niant la réciproque. Par exemple, « il existe un nombre qui se termine par 4 et qui n'est pas divisible par 4 » est une négation logique de la réciproque.

Dans le tableau 1 en annexe nous présentons les différentes techniques employées par les élèves et les étudiants pour accomplir la tâche de correction et les codifications que nous leur avons attribuées.

Examinons maintenant plus spécifiquement la troisième tâche proposée « expliquer votre raisonnement » (sous-entendu celui *ayant conduit aux réponses 1 et 2*). Les techniques pour accomplir cette dernière tâche étant nombreuses, nous focalisons nos analyses sur l'emploi d'exemples, de contre-exemples ou des deux à la fois. Nous examinons également si la technique fournie permet d'établir la fausseté de l'énoncé initial ou de sa réciproque et (s'il n'y a pas de réponse, nous codons cette absence par « Non-Rep »). Le tableau 2 en annexe synthétise les différentes praxéologies envisagées a priori avec leurs codifications. Dans ce tableau, chaque technique est illustrée par une expression qu'un élève ou qu'un étudiant pourrait considérer comme correcte. Par exemple si seulement la quantification est modifiée, on peut faire une *démonstration par l'exemple* qui assure que « dans certains cas, un nombre divisible par 4 se termine par 4 ».

III. RÉSULTATS

Lorsque nous avons dépouillé les copies des participants, nous avons immédiatement constaté que la plupart d'entre eux étaient capables de répondre à la première tâche, c'est-à-dire de reconnaître que l'énoncé donné était faux. Parmi les 323 copies que nous avons examinées, l'énoncé a été marqué comme vrai dans seulement 3 copies, et 2 copies ne contiennent aucune réponse à la question. Pour la suite de nos analyses nous présenterons d'abord les résultats relatifs au groupe 1 puis ceux relatifs au groupe 2 et en fin nous proposerons une synthèse à visée comparative.

Pour la deuxième tâche seulement 7 participants sur les 163 du groupe 1 (soit environ 4%) et 10 participants sur les 162 du groupe 2 (soit environ 6%) ont utilisé une technique de négation logique (voir figure 1 en annexe). Au vu de ce résultat, nous faisons l'hypothèse que les participants disposent bien de blocs pratico-techniques leur permettant d'accomplir l'opération logico-mathématique en jeu, mais que les bloc technologico-théoriques qui formalisent leurs raisonnements ne sont pas encore complètement construits. Nous rappelons cependant que nous n'avons pas demandé explicitement la négation de l'énoncé, ce qui conduit à relativiser cette conclusion.

Plus précisément, on observe trois techniques principales dans le groupe 1 : la technique qui consiste à fournir une autre proposition mathématique pour environ 40%, suivie par la technique de correction de la quantification pour environ 31%, puis par la technique de négation comme implication

pour environ 17%. Notons que ces variations techniques ne sont pas catégorielles, c'est-à-dire qu'une copie peut contenir simultanément deux ou plusieurs techniques différentes.

Pour la première technique relevée, nous faisons l'hypothèse que le fait de fournir une autre proposition mathématique pourrait être lié au contrat didactique entre l'enseignant et l'élève. La quasi-totalité (96%) des répondants ayant fait ce choix n'ayant pas proposé d'explication à leur raisonnement pour cette deuxième tâche, nous n'avons pas pu identifier les praxéologies sous-jacentes. Nous allons donc recentrer nos analyses sur les deux autres techniques.

Pour les participants qui ont mis en œuvre une correction de la quantification, nous avons constaté qu'ils ont majoritairement recours à une preuve par l'exemple. Le bloc technologico-théorique qui permet de justifier cette technique consiste à vérifier que l'énoncé est vrai pour certaines valeurs et qu'il n'est pas vrai pour d'autres valeurs. Même si cette justification est correcte, elle diffère du bloc technologico-théorique de référence qui prévoit qu'un contre-exemple seulement suffit. Il faut cependant noter que si l'énoncé initial n'avait qu'un seul contre-exemple, il aurait suffi de retirer cet élément du domaine de quantification pour avoir un énoncé vrai. Mais dans le cas de l'énoncé de l'item 5, il y a une infinité d'exemples et une infinité de contre-exemples. En conséquence, comme la quantification n'est pas explicite, cet énoncé pourrait être interprété par certains élèves ou étudiants comme un énoncé « parfois vrai, parfois faux ». In fine, nous avons constaté que 38% des répondants concernés ont utilisé la preuve par un exemple, 12% la preuve s'appuyant sur deux aspects, 25% entrent dans la catégorie non-réponse, 12% utilisent la preuve par contre-exemple(s) et 6% la preuve qui met en œuvre la réciproque de l'énoncé.

En ce qui concerne la troisième technique de la négation comme implication, la production du participant E102 l'illustre bien (voir figure 2 en annexe). Dans la preuve, il établit directement que l'énoncé initial est faux en utilisant un contre-exemple. Cette technique de négation, bien que ne correspondant pas explicitement à la négation logique, ni à la démonstration de sa correction, est extrêmement proche de celle des mathématiciens. En effet, l'explicitation de la démarche à adopter montre la nécessité de fournir des contre-exemples. Notons également que la signification pour l'élève de ce genre de correction ne semble pas être « pour tout entier x , x divisible par 4 implique x ne se termine pas par 4 », mais plutôt proche de la négation logique et pourrait s'énoncer : « si x est divisible par 4 alors x ne se termine pas toujours par 4 ». L'expression « n'est pas forcément se termine par 4 » dans la preuve en atteste. On a ici un bloc pratico-technique qui permet à l'élève ou à l'étudiant d'accomplir une tâche à l'aide d'une technique proche de celle d'un mathématicien mais le bloc technologico-théorique permettant de justifier cette technique n'est pas mobilisé. Ce résultat est conforme aux résultats de Rogalski et Rogalski (2004) et de Durand-Guerrier (2016) déjà mentionnés. La classification des participants qui ont adopté cette dernière technique pour la deuxième tâche semble cependant indiquer que celle-ci est articulée avec un raisonnement logique adéquat ; en effet 78 % d'entre eux ont utilisé une preuve par contre-exemple, 11% une preuve par exemple(s) et contre-exemple(s) et 11% n'ont pas fourni de preuve.

La figure 1 (voir annexe) nous révèle également que les participants du groupe 1 n'ont pas tendance à nier une proposition « si P alors Q » par « tout P n'est pas Q » (qui en concerne seulement 3 %). Ceci n'est pas surprenant a priori ; en effet, une phrase de la forme « Tout P n'est pas Q » apparaît plutôt comme la négation d'une phrase de la forme « Tout P est Q », dans laquelle l'implication n'est pas présente, la quantification portant sur les éléments vérifiant la propriété P (on parle de quantification bornée). En d'autres termes, un enseignant de mathématiques à Madagascar n'a pas l'habitude de nier une proposition du type « si P alors Q » en « tout P n'est pas Q ». Il en va de même pour le choix de la technique de nier à partir de la réciproque de « si p alors q ». En effet, seulement 1% des participants ont utilisé cette technique. Ceci est en accord avec les résultats de Durand-Guerrier (1996) : dans son

corpus, moins de 2% étudiants répondaient comme s'ils considéraient qu'un énoncé conditionnel et sa réciproque avaient toujours la même valeur de vérité.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'analyse des résultats des participants du groupe 2. Le choix de la correction de la phrase se porte sur la technique de la langue courante malagasy (34%), la négation comme implication (34%) et la négation à partir de la réciproque (16%). Les copies des participants montrent qu'il existe un lien entre ces types de négation.

Dans la réponse de E314 (voir figure 3 en annexe), la négation se reformule « *Raha ny nombre no azo zaraina 4 dia tsy voatery mifara amin'ny 4* » (Si un nombre est divisible par 4 alors ce n'est pas toujours le cas qu'il se termine par 4). Nous remarquons ici l'utilisation de l'expression « *raha ... dia* » (si ... alors) qui indique une implication. La négation apparaît ainsi comme une implication. En effet, lorsqu'on enlève l'expression malagasy « *tsy voatery* » qui signifie « ce n'est pas forcément, ce n'est pas toujours le cas », on obtient une structure de la forme « si p alors non-q ». De plus, l'expression « *tsy voatery* » est beaucoup utilisée pour nier une phrase qui n'est pas toujours vraie et qui n'est pas toujours fausse (autrement dit un énoncé contingent) en langue courante malagasy. La quantification existentielle est cachée dans cette expression. Parmi les élèves et étudiants du groupe 2, 48% de ceux qui ont donné la phrase corrigée sous la forme d'une implication ont utilisé l'expression « *tsy voatery* ».

Dans certaines copies, l'expression « *tsy voatery* » se place devant toute la phrase à nier. Nous obtenons ainsi une correction de la forme « *tsy voatery ny nombre azo zaraina 4 dia mifara amin'ny 4* » (ce n'est pas toujours le cas qu'un nombre divisible par 4 se termine par 4). Cette forme de correction peut s'interpréter comme une manière d'exprimer le critère sémantique correspondant à la négation, sans se préoccuper de la forme grammaticale spécifique de la langue malagasy. L'analyse montre que la technique de négation de la langue courante malagasy et la négation comme implication mettent en jeu à peu près les mêmes blocs pratico-techniques pour accomplir la tâche d'explication du raisonnement. En effet, parmi ceux qui ont utilisé la technique de négation de la langue courante malagasy, 61% ont fait une preuve par contre-exemple(s), 13% une preuve par exemples et contre-exemples, 4% une preuve par un ou des exemples et 22% rentrent dans la catégorie *non-réponse*. Parmi ceux qui ont utilisé la technique de négation comme une implication, 58% ont produit une preuve par contre-exemples, 21% une preuve par exemples et contre-exemples, 4% une preuve par l'exemple et 17% rentrent dans la catégorie *non-réponse*. Ces deux techniques conduisent un nombre significatif de participants à produire une preuve par contre-exemples, ce qui correspond bien au modèle praxéologique de référence. Cependant, comme pour les élèves et étudiants ayant travaillé sur le questionnaire en français, la forme explicite de la négation respectant les règles syntaxiques de la langue naturelle n'est pas présente dans les réponses. Notons que plusieurs participants ayant mis en œuvre la technique de la langue malagasy courante ont confondu l'énoncé direct avec sa réciproque. Nous constatons cela dans l'explication du raisonnement fournie ou dans la correction de la phrase. Par exemple, certains participants explicitent le fait que « 14 et 34 se terminent par 4, mais ne sont pas divisibles par 4 » et d'autres donnent une correction de la négation de la réciproque, par exemple « *tsy voatery ny nombre mifara amin'ny 4 dia divisible par 4* » (ce n'est pas toujours le cas qu'un nombre qui se termine par 4 est divisible par 4). Cette identification de la forme « *raha P dia Q* » et de sa réciproque pourrait être due au fait qu'en malagasy courant on ne fait pas cette différence et qu'on a parfois tendance à penser que les deux expressions sont équivalentes. En outre cette tendance peut être renforcé par des contextes où les deux énoncés ont la même valeur de vérité, ceci tant dans la vie courante qu'en mathématiques.

Nous résumons ci-dessous les principaux éléments que nous retenons de ces analyses.

Dans le groupe ayant traité Q1 :

- Un nombre significatif de participants a corrigé l'énoncé en proposant une autre propriété mathématique. Dans la plupart des cas, ce choix les conduit à ne pas fournir d'explications à leurs raisonnements ;
- L'expression « si... alors » n'entraîne que très rarement la confusion d'un énoncé avec sa réciproque ;
- Très peu de participants ont mis en œuvre un raisonnement comparable à celui des mathématiciens.

Dans le groupe ayant traité Q2 :

- La négation de la langue malagasy courante avec l'utilisation de l'expression « tsy voatery », dont l'interprétation peut être conforme à la négation logique est la plus représentée. Cette technique est liée à la négation implication dans 48% des cas ;
- Le sens d'une implication exprimée par l'expression « raha ... dia » est confondu avec celui de sa réciproque dans 30% des cas ;
- La formulation malagasy de la proposition par « raha ... dia » pousse les participants à un raisonnement plus proche de celui des mathématiciens. En effet, 61% des participants qui ont mis en œuvre la technique de négation de la langue malagasy courante et 58% des participants qui ont mis en œuvre la technique de négation comme une implication ont produit une preuve par contre-exemple.

IV. CONCLUSION

Dans cette communication, nous nous sommes intéressés aux effets des formulations en malagasy et en français d'un énoncé mathématique sur les raisonnements des élèves et étudiants dans une tâche mettant en jeu la négation dans un contexte bilingue Français-Malagasy. Nos analyses montrent que les élèves du groupe ayant travaillé sur les énoncés en malagasy ont mieux réussi à mettre en place un raisonnement mobilisant des contre-exemples que les élèves du groupe ayant travaillé avec les énoncés en français. Ceci soutient notre hypothèse conclusive : dans le contexte d'un enseignement de mathématiques en français, la formulation d'un énoncé en malagasy pourrait dans certains cas (mais pas dans tous) aider les élèves à conduire des raisonnements conformes aux raisonnements attendus en mathématiques. Une restriction de cette hypothèse est que cependant les élèves et les étudiants ne formulent généralement que le bloc pratico-techniques, rendant ainsi nécessaire l'explicitation du bloc technologico-théorique par leurs enseignants. L'analyse en cours des autres items du questionnaire nous permettra d'affiner et de préciser ces résultats autour d'autres concepts logiques et autour d'autres formulations langagières, et en particulier de différencier entre élèves et étudiants.

RÉFÉRENCES

- Andrianarivony, F. et Salone, J.-J. (2021). Approche bilingue dans l'enseignement des mathématiques à Madagascar. *Petit x*, (115), 93-114.
- Barrier, T., Durand-Guerrier, V. et Mesnil, Z. (2019). L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématiques. *Éducation et didactique*, 13(1), 61-81.
- Barwell, R., Clarkson, P., Halai, A., Kazima, M., Moschkovich, J., Planas, N., Phakeng, M. S., Valero, P. et Ubillús, M. V. (dir.). (2016). *Mathematics education and language diversity. New ICMI study series*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-14511-2>

- Ben Kilani, I. (2005). *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique* [Thèse de doctorat, Universités de Lyon et Tunis].
- Chellougui, F. et Kouki, R. (2012). Enquêtes épistémologiques et didactiques du concept de la quantification. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Actes du colloque EMF2012 « Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle », 3-7 février 2012, Université de Genève, Suisse* (p. 593-602).
- Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (dir.), *Actes de l'Université d'été de la Rochelle* (p. 91-118). Université Blaise Pascal – IREM de Clermont-Ferrand.
- Durand-Guerrier (1996). *Logique et raisonnement mathématique : défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication* [Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1].
- Durand-Guerrier, V. (2016). Négation et quantification dans la classe de mathématiques. Dans R. Daval, P. Frath, E. Hilgert et S. Palma (dir.), *Négation et référence* (p. 269-288). Presses universitaires de Reims. <https://hal.univ-reims.fr/hal-02539714v1/document>
- Njomgang Ngansop, J. (2013). *Enseigner les concepts de logique dans l'espace mathématique francophone : aspect épistémologique, didactique et langagier. Une étude de cas au Cameroun* [Thèse de doctorat, Université de Yaoundé et Université Lyon 1 Claude Bernard].
- Rajarspera, R. (1996). Pour la création d'une terminologie scientifique et technique en malgache. *Meta*, 41(3), 435-458. <https://doi.org/10.7202/003908ar>
- Ranaivoson, D. (2007). La langue malagasy et les politiques linguistiques. *Études littéraires africaines*, (23), 6-12. <https://doi.org/10.7202/1035446ar>
- Rogalski, J. et Rogalski, M. (2004). Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par des futurs enseignants de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 9, 175-203.

ANNEXES

Tableau 1 – Techniques mobilisables pour accomplir la tâche 2

Codifications	Techniques
Cor_Log	Une technique qui utilise la négation logique
Cor_Lang	Une technique qui utilise la manière de nier de la langue courante
Cor_Imp	Une technique qui conçoit que la négation d'une implication est une implication
Cor_Quant	Une technique qui consiste à corriger la quantification universelle en existentielle
Cor_Recip	Une technique se focalisant sur la négation de la réciproque
Cor_Prop	Une technique donnant une autre propriété mathématique
Cor Vide	L'élève n'a pas donné de correction

Tableau 2 – Techniques relatives à la tâche 3 d'explication du raisonnement

Techniques	Illustrations	Codification
Donner un ou plusieurs exemples	<i>24 est un entier divisible par 4 et 24 se termine par 4</i>	PrExempl
Donner un ou plusieurs contre-exemples	<i>16 est un entier divisible par 4 mais il ne se termine pas par 4</i>	PrContExempl
Donner à la fois un ou plusieurs exemples et contre-exemples	<i>4, 24, 44 sont des entiers divisibles par 4 et se terminent par 4 mais 8, 12, 16, 28 sont des entiers divisibles par 4 mais qui ne se terminent pas par 4</i>	PrDeuxAsp
Donner un ou plusieurs contre-exemples de la réciproque	<i>14, 34 sont des entiers qui se terminent par 4 et ils ne sont pas divisibles par 4</i>	PrRecip

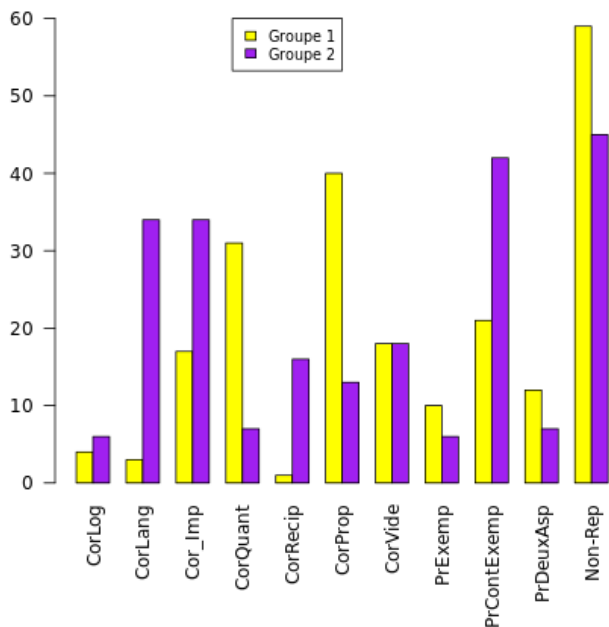


Figure 1 – Techniques effectivement utilisées pour accomplir les tâches 2 et 3

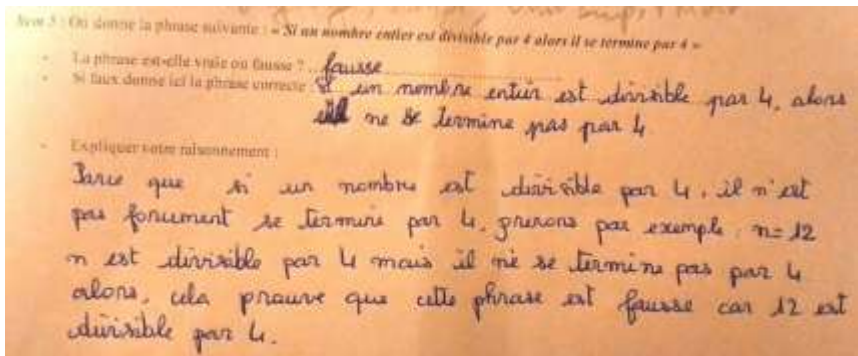


Figure 2 – Copie de E102

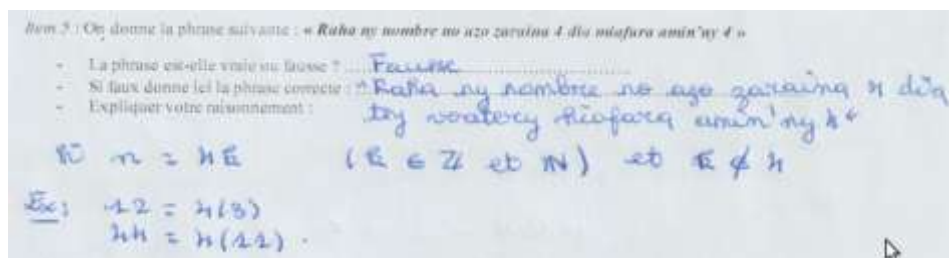


Figure 3 – Copie de E314

DISCOURS ENSEIGNANTS ET DISCOURS ÉLÈVES SUR DES TÂCHES DE DÉVELOPPEMENT D'EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES

| BARTHES-GARNIER* CÉCILE

Résumé | L'objectif de nos travaux est de questionner les discours (verbaux) d'enseignants et d'élèves dans le domaine du calcul algébrique, plus particulièrement autour et sur la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition au niveau du collège en France (élèves de 13 et 14 ans) et de considérer les liens entre langage et apprentissage. Pour cela, nous croisons une approche épistémographique (Drouhard et Panizza, 2012) en didactique des mathématiques et une approche visant à appréhender le rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des disciplines scolaires (Jaubert et Rebière, 2012).

Mots-clés : expressions algébriques, distributivité, objets de discours, enseignants, élèves

Abstract | The aim of our work is to question the (verbal) discourse of teachers and pupils in the field of algebraic arithmetic, more particularly around and on the distributivity property of multiplication over addition at college level in France (13 and 14 year old pupils) and to consider the links between language and learning. To this end, we are combining an epistemographic approach (Drouhard and Panizza, 2012) in the didactics of mathematics with an approach aimed at understanding the role of language in the teaching and learning of school subjects (Jaubert and Rebière, 2012).

Keywords : algebraic expressions, distributivity, objects of discourse, teachers, pupils

I. UNE PROBLÉMATIQUE DE RECHERCHE SUR LES VERBALISATIONS (D'ENSEIGNANTS ET D'ÉLÈVES) ASSOCIÉES AU CALCUL ALGÈBRIQUE

La propriété de distributivité de la multiplication apparaît très tôt dans l'institution scolaire française. En effet, elle est présente dès l'école élémentaire¹ dans le domaine du calcul numérique, à la fois en lien avec le calcul posé, le calcul mental et le calcul en ligne (Barthes-Garnier, 2020 ; Constantin, 2017). Elle est ensuite formalisée au collège, pour être utilisée comme outil au lycée et dans l'enseignement supérieur. En 2021, la direction de l'évaluation de la prospective et de la performance (DEPP) a publié une enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, PRAESCO, en classe de troisième² dans les collèges français. Cette enquête amène à conclure que les exercices de type « développer, réduire ou factoriser » sont très présents dans les classes et représentent un temps important dans une séquence d'enseignement de l'algèbre. Il nous paraît donc légitime de nous interroger sur ce que recouvre cet enseignement-apprentissage du calcul algébrique au collège.

L'algèbre recouvrant une dimension écrite propre à son avènement historique (Chevallard, 2020), nous nous intéressons aux aspects sémio-linguistiques des écritures algébriques en prenant appui sur une approche qualifiée d'épistémographique en didactique des mathématiques par Drouhard (2012), celle-ci nous permettant de mobiliser un ensemble d'outils que nous présenterons ci-après.

Toutefois, nous postulons que la pratique du calcul algébrique mobilise d'autres modes d'expression langagiers, y compris à l'oral (Chevallard, 2020) et à plus forte raison dans la classe de mathématiques.

* LDAR (EA 4434) Université Paris Cité – France – cecilebarthesgarnier@gmail.com. Doctorante encadrée par Christophe Hache LDAR (EA 4434), Université Paris Cité, et Lalina Coulangue LaB-E3D (EA 7441), Université Bordeaux.

¹ École élémentaire : élèves de 6 à 10 ans.

² Classe de 3^e : élèves de 14 ans.

Cette dimension langagière étant à prendre en compte dans les activités d'enseignement et d'apprentissage, notamment en mathématiques, nous nous intéresserons donc ici aux discours des enseignants associés au développement d'expressions algébriques au collège³ en France (Barthès-Garnier *et al.*, 2022), puis à ceux des élèves.

Par discours, précisons que nous entendons toutes les formes d'usages du langage verbal à même d'accompagner le calcul algébrique qui met en fonctionnement la propriété de distributivité.

Ainsi, les expressions algébriques, tout comme leurs transformations ou réécritures convoquées dans et par le calcul algébrique, deviennent potentiellement des objets de discours à la fois pour les élèves et pour les enseignants (Jaubert et Rebière, 2012). Nous nous intéresserons ici plus particulièrement aux verbalisations associées au développement d'expressions algébriques : c'est-à-dire à tout ce qui peut être dit sur ou autour d'un « faire » en vue de développer une expression littérale donnée.

Dans notre travail de thèse, la méthodologie générale présente des proximités fortes avec la démarche méthodologique de Planas (2021) visant à développer des ressources langagières pour les enseignants, en s'articulant en deux temps. Tout d'abord, nous réalisons des entretiens d'enseignants, en prise d'appui sur des tâches de calcul algébrique données, en vue d'étudier des pratiques langagières enseignantes lors de telles tâches de développement et de factorisation dans le cadre d'un enseignement ordinaire. Nous analysons ces entretiens selon divers critères. Conjointement, nous réalisons un autre test pour chercher à savoir ce qui pilote les transformations que les élèves opèrent à travers leurs discours. Nous analyserons ces deux corpus de données : l'un recueilli du côté des enseignants, l'autre du côté des élèves. Dans un second temps, à partir des résultats de ces analyses, nous avons mis en place une expérimentation collaborative visant à enrichir les pratiques langagières des enseignants dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul algébrique. Notre présente contribution n'aborde que le premier temps de notre recherche : Quels discours les enseignants tiennent-ils d'ordinaire sur des tâches de développement dans leurs classes ? Qu'est-ce qui du point de vue de ces discours enseignants, semble piloter les transformations que les élèves opèrent quand ils développent des expressions algébriques ? Quels discours les élèves eux-mêmes tiennent-ils sur leurs pratiques de développement en algèbre ?

II. QUELS DISCOURS LES ENSEIGNANTS TIENNENT-ILS SUR DES TÂCHES DE DÉVELOPPEMENT ?

1. *Les outils théoriques utilisés au croisement de deux approches : langagière et épistémographique*

Tout d'abord, nous nous plaçons dans la continuité des travaux de Rebière (2013) qui considère le langage comme « action et donc nécessairement ancré en contexte ». « Il [le langage] est outils de construction, de négociation et de transformation des significations. » (Rebière, 2013)

Nous nous sommes intéressés aux mots ou aux expressions que les enseignants seraient à même de convoquer dans leurs discours sur des tâches de développement, en vue d'appréhender ce que Jaubert et Rebière (2012) appellent des objets de discours possibles :

Les objets de discours sont construits dans et par le langage : l'énonciateur sélectionne certains éléments pour en parler, choisit de rendre certains aspects plus ou moins saillants à son destinataire en fonction de l'analyse qu'il fait de la situation de communication [...]. (Jaubert et Rebière, 2012)

³ Élèves de 13 et 14 ans

Nous avons identifié deux premiers objets de discours d'après l'étude langagière de discours verbaux possibles au regard de spécificités des notions mathématiques en jeu : la verbalisation du produit, et la verbalisation de l'aspect structural et de l'aspect procédural d'une expression algébrique (Sfard, 1991). Par exemple, l'usage des mots « fois » ou « multiplié par » mettrait préférentiellement en avant une verbalisation du caractère procédural de l'expression algébrique alors que l'usage de « le produit de » indiquerait plutôt une verbalisation ancrée sur le caractère structural.

D'autre part, nous avons pris en compte les travaux de Drouhard (2012) ce qui nous a permis d'identifier un troisième objet de discours. En effet, nous avons considéré les aspects sémio-linguistiques des écritures algébriques avec, notamment, la verbalisation des « transformations de mouvements » convoquées lors des réécritures des expressions algébriques (Drouhard et Panizza, 2012). Nous nous sommes alors intéressés aux signes qui constituent ces réécritures car le registre linguistique de l'algèbre implique des omissions (Drouhard et Panizza, 2012). Par exemple, l'omission du signe $\times$ peut amener à voir ou à ne pas voir l'expression algébrique $2n(n+1)$ comme un produit de 3 facteurs (dont l'un est une somme) mais aussi comme un produit de 2 facteurs (dont l'un est un produit et l'autre est une somme). De même, les parenthèses définies comme des délimitants par Serfati (Serfati, 1998) peuvent également influencer le regard porté sur l'écriture des expressions algébriques.

2. *Méthodologie*

Au préalable, nous nous sommes intéressés aux manuels qui sont les premiers observables d'une part de discours possibles d'enseignants et d'autre part de ce qui pourrait contribuer à les orienter. Les verbalisations visant à accompagner le travail de calcul algébrique semblent absentes, partielles ou peu contextualisées. Ces premiers constats laissent à penser que la question des discours enseignants tenus à l'oral qui viseraient à étayer les usages de la propriété de distributivité dans le développement d'expressions littérales, reste relativement ouverte. Ensuite, en lien direct avec les trois objets de discours identifiés (verbalisation du produit, verbalisation de l'aspect structural ou procédural de l'expression, verbalisation des transformations de mouvement), nous avons retenu des variables didactiques qui pourraient avoir une influence sur les discours des enseignants :

- la présence du signe $\times$ dans l'expression manipulée : formulation sous la forme $k \times (...)$ ou $k (...)$;
- la place « du facteur k » : développement d'une expression du type $k \times (...)$ ou du type $(...) \times k$ (avec ou sans la présence du signe $\times$) ;
- la nature « du facteur k ». Nous avons retenu trois situations : k peut être un nombre entier, un monôme de degré 1 avec signe $\times$ apparent, un monôme de degré 1 sans signe apparent.

Nous avons donc créé six tâches d'expressions algébriques à développer que nous avons testé sur cinq enseignants d'horizons variés exerçant au collège. Nous leur avons demandés de tenir un discours sur le développement de ces expressions « comme devant élèves ou dans la classe ».

3. *Ensemble de tâches de développement d'expressions algébriques*

Nous donnons ci-dessous (tableau 1) la liste des six expressions présentées aux enseignants, et leurs caractéristiques liées aux paramètres énoncés ci-dessus.

Tableau 1 – Les expressions algébriques en fonction des variables didactiques

Les expressions à développer	La présence du signe $\times$		La place du facteur k		La nature du facteur k		
	Le signe $\times$ est présent	Absence du signe $\times$	k est « derrière »	k est « devant »	Nombre entier	Monôme de degré 1 avec signe apparent	Monôme de degré 1
$7 \times (n+1)$	v			v	v		
$(8n-4) \times 2n$	v		v				v
$5(n+3)$		v		v	v		
$(5+2n) \times 8$	v		v		v		
$3 \times n \times (2-4n)$	v			v		v	
$5n(3+2n)$		v		v			v

4. Analyse des discours des enseignants

Nous avons analysé nos résultats en fonction de plusieurs entrées : les premières verbalisations de ces expressions algébriques, ce que chaque enseignant dit pour amorcer la technique qui permet de développer une expression, en quels termes ils font référence ou non à la propriété de distributivité, les phénomènes liés à la recherche de congruence sémantique entre écritures symboliques données et verbalisation... Pour cette contribution, nous avons choisi d'explorer les deux premières entrées.

Les premières verbalisations des expressions (tableau 2) sont différentes pour chaque enseignant (nous avons écouté ici la façon dont chaque enseignant prononce les expressions proposées lors de la première verbalisation au début du traitement).

Tableau 2 – Premières verbalisations des expressions algébriques

Enseignant 1	« fois » quand il y a le signe $\times$ « facteur de » quand il n'y a pas de signe $\times$
Enseignant 2	« fois » quand k est « derrière » « facteur de » quand k est « devant »
Enseignant 3	« multiplié par » quand k est « derrière » « facteur de » quand k est « devant » (puis utilise « multiplié par ») « fois » dans tous les cas (k devant ou derrière, avec ou sans signe)
Enseignant 4	« fois » uniquement et de manière très systématique
Enseignant 5	Utilise plusieurs niveaux de verbalisation. - 1re lecture descriptive : « 5 parenthèse n plus 3 fermer la parenthèse », « parenthèse 5 plus $2n$ parenthèse fois 8 »

	- 2e lecture faisant apparaître la structure : « le produit de 5 et de la somme de n et de 3 » - Autre lecture possible : « Multiplié par » que k soit devant ou derrière

Nous remarquons que les enseignants utilisent trois expressions pour oraliser les écritures symboliques multiplicatives : « fois » « multiplié par » et « facteur de ». Un seul enseignant utilise le vocabulaire mettant plutôt en avant le caractère structural de l'expression : « produit » « somme ». Les cinq enseignants verbalisent donc les expressions algébriques de façons différentes. Les variations ont des causes mêlant congruence sémantique, place du facteur k , présence ou non du signe croix $\times$, et attachement au caractère structural de l'expression. Le mot « parenthèse » apparaît aussi régulièrement mais sans que nous puissions le lier à une caractéristique de l'expression algébrique.

D'autre part, nous avons observé comment chaque enseignant amorce la technique de développement (tableau 3) qui pourrait déterminer si l'enseignant met en avant le caractère structural ou procédural de l'expression.

Tableau 3 – Discours pour amorcer une technique de développement

Enseignant 1	« Cherchez le nombre par lequel on multiplie la somme entre parenthèses » Il demande aux élèves de se questionner sur le multiplicateur.
Enseignant 2	« On utilise la formule de distributivité » Il propose aux élèves d'appliquer la formule sans l'écrire (ce qui pourrait faciliter le rapprochement entre cette dernière et l'expression).
Enseignant 3	« On a une expression entre parenthèses multipliée par un nombre » La parenthèse a le rôle de multiplicande. Il utilise de nombreux termes pour parler de la somme : - l'addition entre parenthèses - la totalité du nombre entre parenthèses - une expression entre parenthèses - l'addition qui est entre parenthèses - l'expression - la parenthèse
Enseignant 4	« Ça veut dire que c'est un nombre de fois qu'on prend des choses » Il utilise exclusivement l'addition itérée, et il décrit le fait que l'on écrit plusieurs fois la même chose. Il dit parfois « on prend plusieurs fois ce qu'il y a dans la parenthèse. » Il écrit « fois » en toutes lettres.
Enseignant 5	« Est-ce un produit ou une somme ? » Il veut que ses élèves se questionnent sur la structure de l'expression.

L'amorce proposée par les enseignants pour initier un développement propose une verbalisation qui tend à mettre en avant le caractère structural ou procédural de l'expression. Mis à part l'enseignant 5 qui propose une lecture fortement structurale de l'expression, les autres enseignants donnent à voir

un mélange de technique et de questionnement davantage tourné vers l'aspect procédural. L'enseignant 2 ne propose pas de réelle procédure : la substitution de la formule à l'expression est laissée à la charge de l'élève. Pour l'enseignant 4, le repérage de la parenthèse semble primordial. De nombreuses expressions avec le mot « parenthèse » sont utilisées.

5. *Conclusions sur des discours enseignants*

Ce premier résultat met en lumière la variété des discours des enseignants. Cela concerne autant la verbalisation du produit ou d'expressions symboliques plus complexes, que la verbalisation des opérations de réécritures d'expressions prenant appui sur la distributivité. L'analyse du corpus révèle des verbalisations souvent descriptives de manipulation de signes (comme les parenthèses) contre de rares verbalisations qui visent à exposer la logique des actions, voire à les justifier... Des verbalisations prennent parfois appui sur des aspects procéduraux des expressions liées aux produits initiaux parfois qualifiés de manière variée (suivant les choix de variables didactiques) ce qui peut poser la question de la cohérence des discours tenus d'une expression à l'autre, par un même enseignant et entre plusieurs enseignants.

Il nous a paru pertinent de nous pencher, à présent, sur les verbalisations des élèves pour questionner ce qui pilote les transformations que les élèves opèrent.

III. QU'EST-CE QUI PILOTE LES TRANSFORMATIONS QUE LES ÉLÈVES OPÈRENT ? QUELS DISCOURS TIENNENT-ILS ?

Ce qui nous intéresse ici, au-delà de la réussite ou de l'échec des élèves face aux tâches proposées, est de savoir ce que les élèves identifient quand ils sont confrontés à la réécriture d'une expression algébrique, ce qu'ils en comprennent et comment ils choisissent les transformations opérées. Les élèves s'appuient-ils sur la structure pour savoir s'ils peuvent développer ou non ? Quels sont les indices qui pilotent leurs écritures ? Quels discours tiennent-ils ?

1. *Méthodologie*

Pour cette deuxième expérimentation, nous testons des élèves de troisième⁴ : ils travaillent depuis 2 ans sur le calcul littéral et plus particulièrement sur le développement d'expressions algébriques et la propriété de distributivité. Ce niveau d'étude nous semble opportun : les connaissances visées sont fréquentées et étudiées depuis plusieurs années, mais ne sont sans doute pas stabilisées. On peut donc penser que les élèves peuvent avoir un discours à leur propos, et qu'une certaine réflexivité peut être plus facilement explicitée (par opposition aux élèves pour lesquels les procédures sont automatisées).

L'exercice est donné en binômes. Les élèves doivent se mettre d'accord pour faire la tâche demandée et apporter une réponse unique. Les échanges sont enregistrés. Dans les retranscriptions nous cherchons notamment à caractériser la place que prennent, dans les échanges entre les élèves, les objets de discours identifiés et utilisés pour analyser le discours enseignant : la verbalisation du produit, la verbalisation de l'aspect structural et de l'aspect procédural d'une expression algébrique, la verbalisation des transformations de mouvements convoquées lors des réécritures des expressions algébriques.

⁴ Dernière année du collège (13 et 14 ans).

2. Les tâches de réduction données aux élèves

La consigne est « Réduis les expressions algébriques suivantes. » Le verbe « réduire » est choisi en accord avec les enseignants, car c'est celui qui est utilisé en classe. C'est donc une consigne que les élèves ont l'habitude de croiser dans ce contexte. Cependant, nous avons conscience que la réduction est difficile à définir sur le plan « notionnel » par les enseignants. En l'absence de définition, cela peut aussi encourager certaines erreurs comme la concaténation. Notre projet étant aussi de nous rapprocher de l'ordinaire de la classe de mathématiques, nous avons néanmoins retenu cette consigne. Elle présente, par ailleurs, l'avantage d'ouvrir à des expressions qui convoquent d'autres transformations que des développements, comme les expressions $7+(2+n)$ et $2n(5 \times 2n)$, et qui visent à interroger des aspects liés à l'interprétation des parenthèses pour les élèves (identifiée en amont comme un potentiel point de difficulté pour eux). Le choix des expressions est donc fait pour permettre des réductions par développements ou par gestion des priorités et des parenthèses en fonction des signes qui sont en jeu. Pour cela, nous utilisons des expressions proches au niveau des nombres utilisés mais différentes par leur structure : d'un côté, l'expression algébrique est soit une somme soit un produit, et d'un autre côté, à l'intérieur des parenthèses, nous faisons varier aussi la structure somme ou produit.

Tableau 4 – Les tâches de réduction données aux élèves

$7 \times (2 + n) =$	$2n(5 \times 2n) =$	$(8n \times 5) + 2n =$
$7 + (2 + n) =$	$5n(3 + 2n) =$	$(8n - 5) \times 2n =$

3. Analyse des premiers échanges verbaux

Nous présentons, à présent, quatre extraits d'échanges de quatre binômes d'élèves de troisième. Le choix de ces quatre binômes est représentatif des données récoltées dans les différentes classes.

Tableau 5 – Quatre extraits des échanges de différents binômes d'élèves de troisième

Extrait 1 : $7 \times (2 + n)$ Leur réponse écrite : $7(2 + n)$	E₁ : Pour sept fois entre parenthèses deux plus N, en gros j'ai mis que le fois on pouvait l'enlever parce qu'il est devant une parenthèse et que ça ne sert à rien. E₂ : Moi je me suis trompé, je croyais que c'était les plus qu'on pouvait enlever. E₁ : Ah non. E₂ : Du coup, j'ai mis sept fois deux N. E₁ : OK. Ouais, ben non. C'est le fois. En gros, c'est le fois, tu peux l'enlever devant les parenthèses parce que ça ne sert à rien. Ça fait déjà fois. E₂ : C'est le fois qu'on enlève ? Pas le plus ? E₁ : Ouais ! Quand il y a un fois devant une parenthèse on peut l'enlever. E₂ : OK
Extrait 2 : $7 + (2 + n) =$ Leur réponse écrite : $7 + 2n$	E₃ : Pour celui-là, du coup on calcule ce qu'il y a dans la parenthèse ce qui donne deux N et euh on ne peut pas mélanger le sept avec le N donc j'ai laissé ce résultat-là : sept plus deux N E₄ : Je suis d'accord. Pareil.
Extrait 3 : $(8n \times 5) + 2n$ Leur réponse écrite : $42n^2$	E₅ : J'ai encore commencé par les parenthèses. E₆ : Oui E₅ : Ça m'a donné quarante N. Après je fais plus deux N. Et ça donne quarante-deux N carré. E₆ : Ok pour moi.

Extrait 4 : $(8n - 5) \times 2n$ <i>Leur réponse écrite et barrée :</i> $3n \times 2n = 6n^2$	E7 : J'ai commencé par les parenthèses cette fois ci. Et après j'ai multiplié le résultat fois deux n et du coup ben vu qu'il y avait deux N, ça a donné six N au carré E8 : Moi je n'ai pas réussi parce que, avec les parenthèses , je ne me rappelais plus ce qu'on faisait avec le moins. E7 : Oui c'est vrai c'est un petit peu dur.

Dans l'extrait 1, l'échange s'oriente sur les signes $\times$ et $+$. Les élèves savent qu'il existe des règles de réécriture, mais ils ne sont pas d'accord. Ils n'y apportent aucune justification. La discussion tourne autour de ce qu'« on peut enlever ».

Dans l'extrait 2, l'échange questionne le rôle des parenthèses. En effet, la somme dans la parenthèse est réduite en un produit $2n$, mais par contre ils ne veulent pas faire la même transformation avec 7. Pour reprendre leurs mots 7 ne peut pas se « mélanger » avec le n alors qu'ils viennent de le « mélanger » avec 2. Comme s'ils se sentaient obligés de faire un calcul dans la parenthèse.

Dans l'extrait 3, les élèves calculent l'intérieur des parenthèses qu'ils ciblent en premier. Mais c'est la gestion de la somme qui pose problème ($40n + 2n = 42n^2$). Ils ajoutent les nombres ($40 + 2 = 42$) mais ils font le produit de « $n \times n$ ».

Dans l'extrait 4, nous remarquons la même chose : le calcul dans la parenthèse semble être une obligation à effectuer.

Ces quatre extraits font souvent référence aux signes et plus particulièrement aux parenthèses. Leur vision de l'expression algébrique semble identifier prioritairement les parenthèses. Le reste des actions tournent autour de ces symboles. Les élèves organisent leur procédure de réécriture à partir de ces signes. Notons que la structure de l'expression algébrique n'est pas évoquée, la justification se fait par la propriété des parenthèses et la notion de transformation est absente des extraits.

4. Conclusions sur des discours d'élèves

L'exercice en binôme apparaît inhabituel pour les élèves. Ils ont du mal à expliquer leur procédure : ils décrivent ce qu'ils font et ils ne justifient pas vraiment. La propriété de distributivité n'est jamais nommée. Ils utilisent la priorité des parenthèses de manière erronée. Si on met cela en perspective avec les discours enseignants, nous pouvons constater là une forme d'écho sur les absences des objets de discours « aspect structural » et « transformation de mouvement ».

Les élèves ne repèrent pas la structure des expressions algébriques proposées : ils se focalisent sur les parenthèses en priorité. Un deuxième signe non numérique apparaît important, c'est le signe $\times$ devant une parenthèse. Son absence ou sa présence lors d'un produit influence la réussite des élèves. La présence du signe $+$ devant la parenthèse perturbe encore plus : les élèves n'ont pas su réduire $7 + (2 + n)$. Dans cette expression algébrique, nous pouvons constater que le rôle des parenthèses dans l'identification de la structure n'est pas pris en compte : c'est un délimitant qui devrait permettre de voir « une somme de deux termes dont un est une somme » qui peut être réinterprété comme une somme de trois termes via l'associativité. Mais les élèves n'arrivent pas à gérer la réduction à cause d'une mauvaise prise d'indices sur la structure de l'expression, ce dont leur discours rend compte en accompagnant leur absence de réponse écrite.

Au vu de cette étude, nous pouvons conclure qu'un des éléments qui pilote les transformations que les élèves opèrent est la présence et le positionnement des parenthèses. Les élèves voient le signe des parenthèses mais n'en recherchent pas une vision plus globale dans une structure. La notion de

structure est absente du discours élève et cela peut être mis en perspective avec les difficultés à parler sur la structure identifiée dans le discours enseignant.

IV. CONCLUSION

Un premier état des lieux sur les verbalisations des enseignants sur des tâches de développement, nous a conduit à constater une grande diversité de verbalisations enseignantes en lien avec des objets de discours possibles identifiés a priori (verbaliser un produit, aspect structural ou procédural, transformations de mouvement) et des difficultés à parler sur l'aspect structural d'une expression et sur les transformations de mouvement, pourtant considérés comme des incontournables dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre. Les verbalisations sont souvent descriptives en lien avec des manipulations de signes dont les parenthèses.

Un deuxième état des lieux sur la verbalisation des élèves en classe de troisième en cours d'apprentissage est mené pour questionner ce qui pilote les transformations que les élèves opèrent. Il semblerait que les parenthèses jouent un rôle prépondérant sans que les élèves cherchent à les replacer dans une structure plus générale de l'expression algébrique. En effet, ils semblent repérer la présence ou l'absence de signes, comme les parenthèses, sans que ce repérage ne participe réellement de l'identification d'une structure de l'expression algébrique qui permette de piloter les calculs. Ils interprètent de façon erronée la présence des parenthèses. Pour eux, elles indiquent des calculs à faire en priorité et cela conduit souvent à des erreurs de concaténation. La place du facteur à droite ou à gauche peut aussi prendre le pas sur la reconnaissance des structures. Certaines des erreurs commises et des discours tenus par les élèves résonnent fortement avec certains des résultats obtenus sur les discours enseignants.

À partir de ces résultats, dans le cadre de notre thèse, nous avons élaboré un temps de travail collaboratif avec les enseignants portant sur des apports en didactique des mathématiques (pour aborder l'aspect structural et l'aspect procédural d'une expression algébrique, la notion de transformation de mouvement), en didactique du langage (pour les notions d'objet de discours et de secondarisation des discours) et en argumentation. Nous avons élaboré un ensemble de tâches originales permettant à l'élève s'exprimer son choix et de justifier sa démarche dans une séance menée par un enseignant impliqué dans ce temps collaboratif. Cela permet de mettre en perspective le rôle du discours enseignant et le rôle du discours élève dans l'apprentissage du calcul algébrique.

RÉFÉRENCES

- Barthès Garnier, C. (2020). *Calcul multiplicatif et propriété de distributivité au cycle 3 : où en sont les élèves avant leur entrée dans le formalisme de l'algèbre ?* [Mémoire de recherche en didactique des Mathématiques, Université de Paris et LDAR]. <http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/Memoire-M2RDDM-Barthes-Garnier-2020.pdf>
- Barthès-Garnier, C., Coulange, L. et Hache, C (2022). Développer une expression numérique ou algébrique : quel(s) discours enseignant(s) ?, *Repères IREM*, (128), 71-90. <https://hal.science/hal-04116383/document>
- Chevallard, Y. (2020, 19 mai). *L'humble séminaire 2019-2020* (séance 6). http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/HS_2019-2020_-_6.pdf
- Constantin, C. (2017). La distributivité : quelles connaissances pour enseigner la multiplication à l'école primaire ? *Grand N*, (100), 105-130. <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/GN/IGR17019/IGR17019.pdf>

- Coppé, S., Grugeon-Allys, B., Horoks, J., Pilet, J., Solnon, A., Raffaëlli, C. et Charpentier, A. (2021) *Premiers résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques. Praesco en classe de troisième en 2019* [note d'information]. DEPP ; Ministère de l'Éducation nationale. <https://archives-statistiques-depp.education.gouv.fr/Default/doc/SYRACUSE/48439/premiers-resultats-de-l-enquete-sur-les-pratiques-d-enseignement-des-mathematiques-praesco-en-classe>
- Drouhard, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot - Paris 7]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00925358/>
- Drouhard, J.-P. et Panizza, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. Dans L. Coulange et J.-P. Drouhard (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Revue Recherches en Didactique des mathématiques*, (Numéro spécial hors-série), 209-235.
- Rebière, M. (2013). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? Dans A. Bronner (coord.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (p. 119-232). La Pensée Sauvage.
- Jaubert, M. et Rebière, M., (2012). *Communautés discursives disciplinaires scolaires et construction de savoirs : l'hypothèse énonciative*. https://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf
- Planas, N. (2021). How specific can language as resource become for the teaching of algebraic concepts? *ZDM– Mathematics Education*, 53(2), 277–288. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01190-6>
- Serfati, M. (1998a). « Pour Descartes » : mathématiques et physique cartésiennes. *Revue d'histoire des sciences*, 51(2-3), 171-182. <https://doi.org/10.3406/rhs.1998.1321>
- Serfati, M. (1998b). Descartes et la constitution de l'écriture symbolique mathématique. *Revue d'histoire des sciences*, 51(2-3), 237-290. https://www.persee.fr/doc/rhs_0151-4105_1998_num_51_2_1323
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>

ANALYSE DIDACTIQUE DE L'INTÉGRATION DE LA CULTURE LOCALE DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ARITHMÉTIQUE À MAYOTTE : LE CAS DES FRACTIONS AU CYCLE 3

| NGUALA* JEAN-BERKY, TCHONANG YOUKAP** PATRICK ET GUILLON*** COLETTE

Résumé | Cet article est un élément d'une recherche plus vaste des conditions de transfert et des effets d'un dispositif de formation d'enseignants à Mayotte visant à faire évoluer leur représentation de la fraction-partage à la fraction-nombre. Il propose une analyse didactique de l'intégration de la culture locale dans l'enseignement des fractions en cycle 3 (élèves de 10-12 ans), en s'appuyant sur la théorie de l'objectification. L'étude révèle que les enseignants stagiaires rencontrent des difficultés à contextualiser les concepts mathématiques, utilisant principalement des objets culturels métropolitains, tels que la pizza, peut-être inadaptés au contexte socio-culturel mahorais. L'analyse montre également que les enseignants peinent à concevoir des situations didactiques pertinentes pour les opérations sur les fractions, risquant de mener à des conceptions erronées chez les élèves.

Mots clés : Fraction, culture locale, enseignant stagiaire, cycle 3, objectification

Abstract | This article is part of a broader research project on the conditions for transferring and the effects of a teacher training program in Mayotte aimed at shifting from "fraction-as-sharing" to "fraction-as-number." It offers a didactic analysis of the integration of local culture into the teaching of fractions in upper elementary school (Cycle 3, 10-12 years old) in Mayotte, drawing on the theory of objectification. The study reveals that trainee teachers struggle to contextualize mathematical concepts, frequently relying on cultural references such as pizza, which are poorly suited to Mayotte's socio-cultural context. The analysis also highlights the difficulties teachers face in designing effective teaching scenarios for operations on fractions, which may contribute to misconceptions among students.

Keywords : Fraction, local culture, preservice teacher, cycle 3, objectification

I. INTRODUCTION

Les pratiques pédagogiques en mathématiques varient beaucoup selon les pays et les régions, influencées notamment par les choix institutionnels, les contextes locaux et les élèves. Ces derniers, souvent issus de milieux sociaux divers, comme à Mayotte, peuvent rencontrer des difficultés lorsque la langue d'enseignement n'est pas leur langue maternelle (Bishop, 1996). De plus, les différences culturelles et les pratiques sociales locales impactent les stratégies didactiques des enseignants qui peuvent influencer aussi l'efficacité de l'enseignement des mathématiques. En France, la dualité entre la métropole et les territoires d'outre-mer, avec leurs spécificités culturelles, est reconnue dans les programmes scolaires qui y encouragent la contextualisation des enseignements (Cal et Polyn, 2017), a fortiori à Mayotte où les résultats en mathématiques au primaire sont les plus faibles du pays (MEN, 2021). Pour illustrer ces échecs, il y a eu 11 % de réussite sur l'interprétation de la fraction simple $\frac{1}{2}$ dans un problème à résoudre à la fin du cycle 3 : c'est ce qui y renforce encore cette idée d'adaptation des enseignements. Dans cette optique, Favilli et al. (2003), Njomgang et al. (2015) et Nguala et Manu-Abi (2023) proposent des pratiques d'enseignement adaptées aux spécificités locales pour améliorer

* LIM - Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques/ Université de Mayotte - 2, rue Joseph Wetzell 97490 Sainte-Clotilde – France – jean-berky.nguala@univ-mayotte.fr

** LIM - Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques/Université de Mayotte - 2, rue Joseph Wetzell 97490 Sainte-Clotilde – France – ptchonangyoukap@univ-mayotte.fr

*** Université de Mayotte-France – colette.guillon@univ-mayotte.fr

leur qualité. Exploitant le patrimoine en formation d'enseignants, Salone (2022) et Nguala et Tournès (2025) observent un bon enrôlement des apprenants notamment dans leur engagement pour réaliser la tâche, une influence positive dans le développement professionnel des enseignants, un meilleur résultat des élèves dans les apprentissages, etc.

Notre étude vise à analyser comment les enseignants stagiaires en responsabilité de cycle 3 à Mayotte intègrent-ils les objets culturels locaux pour enseigner les fractions ? C'est notre hypothèse de recherche ici tirée des conditions de transfert et des effets à partir d'un dispositif de formation des enseignants mis en place visant à faire évoluer leur représentation de la fraction-partage à la fraction-nombre. Pour la suite, nous commencerons par définir le cadre conceptuel, présenterons la théorie de l'objectification TO (Radford, 2006), puis détaillerons la méthodologie, analyserons les résultats et discuterons les principales conclusions.

II. CULTURE LOCALE ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Les questions culturelles en mathématiques, qui s'est développée au sein des sociétés spécifiques pour répondre à leurs problèmes, sont anciennes. Delcroix et al. (2013), Leung (2021) et Sumiati et al. (2022) exploitent aussi ces dimensions culturelles pour l'enseignement. Parallèlement, les besoins culturels ont conduit au développement d'outils mathématiques adaptés aux problèmes quotidiens. Par exemple, les Kamites¹ ont élaboré la numération en base 10, les fractions et l'arithmétique pratique pour l'agriculture, la construction et le commerce. Concernant les Babyloniens, ils ont créé la numération en base 60 et perfectionné le calcul des fractions pour des usages similaires en agriculture, commerce et astronomie. Quant aux Grecs et Romains, pour divers problèmes sociaux, notamment en ingénierie et dans l'armée, ils y ont appliqué l'arithmétique (Hoefler, 1874).

L'interaction entre culture et mathématiques se manifeste par leur influence mutuelle. Les activités culturelles peuvent intégrer des mathématiques culturellement pertinentes, exploitables dans les programmes éducatifs. Par ailleurs, l'histoire montre aussi que l'arithmétique est essentielle pour diverses activités civilisationnelles, comme l'agriculture, la construction et le commerce, et cette réalité persiste dans les sociétés actuelles (Chasles, 1843). À Mayotte, où l'agriculture, le commerce et le partage d'héritage sont pratiqués, il est probable que des outils arithmétiques traditionnels soient utilisés. De plus, dans cette approche intégrant la culture locale des apprenants, comme déjà évoqué, les enseignants doivent bien connaître leur contexte et être capables de concevoir des situations didactiques adaptées. De ce fait, sont observées, l'efficacité de la contextualisation des enseignements en mathématiques et la pertinence de reconstruire les connaissances en jeu placées dans leur contexte d'émergence (Radford, 2006, 2013) : c'est l'objet du point suivant.

III. CADRE THÉORIQUE : LA THÉORIE DE L'OBJECTIFICATION

La théorie de l'objectification, développée par Luis Radford et inspirée par Vygotski et la théorie des situations didactiques, envisage l'apprentissage des mathématiques comme un processus social et culturel. Selon Radford (2006), le savoir apparaît comme une capacité générative culturelle et historique d'actions. L'objectivation désigne l'interaction avec des systèmes culturellement et historiquement constitués, tels que l'arithmétique ou la géométrie. Cette théorie souligne l'importance des artefacts culturels, des pratiques sociales et des discours dans la formation des concepts mathématiques, en se concentrant sur comment les objets mathématiques, comme les fractions, prennent sens pour les élèves. À Mayotte, le partage des aliments lors de repas collectifs ou le partage rituel illustrent concrètement les notions de fraction. Les pratiques culturelles locales, les objets du quotidien, les récits

¹ Appellations des anciens habitants de Kemeth dont l'Égypte actuel est une composante.

et traditions peuvent servir de médiateurs pour comprendre les fractions. Ces artefacts ne sont pas seulement pédagogiques mais aussi source pour enrichir la compréhension des élèves (processus d'apprentissage) en lien avec leur culture (Radford, 2006, 2013) : utiliser ces pratiques sociales crée des contextes familiers et facilite l'acquisition des concepts mathématiques.

IV. MÉTHODOLOGIE

La méthodologie de cet article suit une approche qualitative, il s'agit d'une étude exploratoire qui consiste en un questionnaire administré aux enseignants stagiaires du premier degré : 12 participants tous issus de l'académie de Mayotte. Ils présentent des profils variés, bien qu'aucun d'entre eux ne soit titulaire d'une licence en mathématiques, ni d'un bac scientifique. Certains participants sont d'anciens enseignants contractuels, ayant exercé pendant plus de quatre ans. Actuellement, ils sont en stage en responsabilité en alternance avec des cours universitaires. Tous les participants ont déjà eu l'occasion d'enseigner des notions d'arithmétique au cycle 3 (élèves de 10-12 ans). Pour collecter les données, nous avons utilisé un questionnaire structuré autour de cinq questions. Ce questionnaire visait à explorer comment les enseignants introduisent des éléments culturels locaux pour faire découvrir et enseigner le concept de fraction aux élèves de cycle 3. De plus, il s'intéresse à la manière dont les participants peuvent utiliser ces éléments culturels pour enseigner les techniques opératoires de l'addition et de la multiplication de fractions, ainsi que la comparaison de deux fractions. Les enseignants ont été organisés en binômes et invités à interagir pour proposer des réponses aux différentes questions. Les données de cette étude proviennent des réponses de ces binômes aux trois premières questions du questionnaire. Chaque réponse a été examinée individuellement afin d'analyser comment les enseignants facilitent l'objectification du concept de fraction (en termes de signes, gestes et discours), ainsi que les médiateurs symboliques utilisés.

V. RÉSULTATS

1. *Question 1 : Pouvez-vous décrire comment vous introduisez les fractions à vos élèves en intégrant la culture mahoraise ? Pouvez-vous donner un exemple concret ?*

Cinq des six paires d'enseignants ont choisi d'introduire les fractions via une pratique culturelle de partage en utilisant la pizza comme objet. Comme on le voit sur la figure 1, ils ont modélisé les fractions en hachurant des parts de pizza, reliant ainsi la représentation concrète à la notation symbolique des fractions, où la partie hachurée représente une portion du tout.

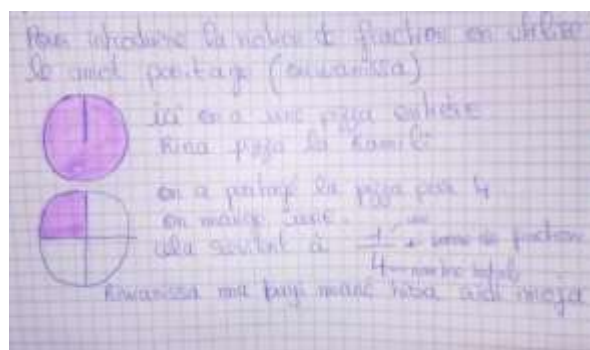


Figure 1 – Production du binôme B3 et B4 à la question 1

Bien que les enseignants stagiaires aient choisi un aliment universel (pizza) pour expliquer la notion de fraction, la situation de partage s'inscrit dans une pratique culturelle plus large qui peut être familière

à leurs élèves dans un contexte mahorais. Les signes et symboles utilisés (partage, modélisation de parts égales, hachures) sont plutôt des outils pédagogiques génériques, mais ils se greffent sur une compréhension culturelle du partage et de la division d'un bien commun, qui peut être associée aux pratiques sociales locales. Cependant, aucun symbole ou objet spécifiquement mahorais (comme des aliments locaux ou des objets culturels) n'a été mentionné dans les données analysées pour introduire la fraction.

La figure 2 illustre la réponse du binôme B2, qui se distingue par l'utilisation d'un bambou, objet culturel familier à Mayotte, pour expliquer la fraction. Le bambou, élément courant dans la vie quotidienne des élèves, sert ici de support concret pour représenter une fraction. Ces participants considèrent une partie de bambou composé de quatre segment semblables (chaumes). En coloriant l'une de chaumes, les enseignants rendent la notion de fraction visuellement accessible et concrète, permettant aux élèves de relier l'abstraction mathématique à un objet familier, facilitant ainsi la compréhension de la fraction $1/4$.

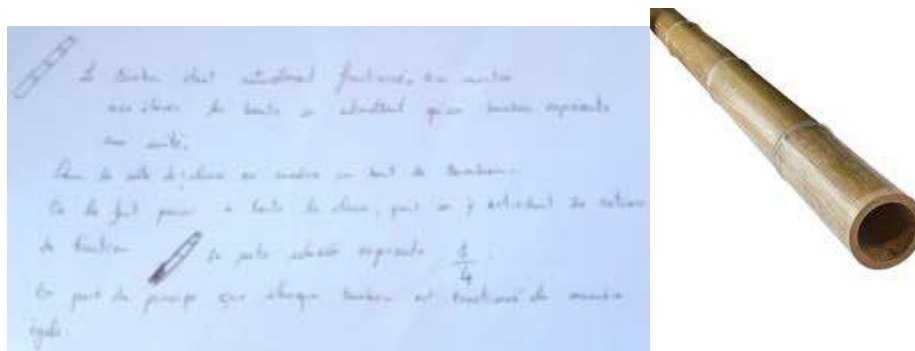


Figure 2 – production du binôme B2 à la question 1

En coloriant un des quatre segments du bambou, ils aident les élèves à objectiver l'idée de fraction, ici le quart. Toutefois, le manque de clarification explicite sur la définition de l'unité (le bambou étant l'unité entière et ses segments représentant les parties de cette unité) pourrait restreindre une compréhension approfondie du concept de fraction. Ce cadre culturel favorise une approche concrète et intuitive pour appréhender l'abstraction mathématique.

2. *Question2 :Comment enseignez-vous l'addition des fractions en intégrant les objets culturels mahoraise? Pouvez-vous proposer un exemple concret pour l'addition ?*

Dans cette situation, les binômes B2, B3, B4 ont choisi d'introduire l'addition de fractions en utilisant le partage de pizza comme symbole culturel. Comme l'illustre la figure 3 Ils ont dessiné deux pizzas, colorié des parties, puis associé chaque partie coloriée à une fraction correspondante et ont directement expliqué la règle opératoire de l'addition.

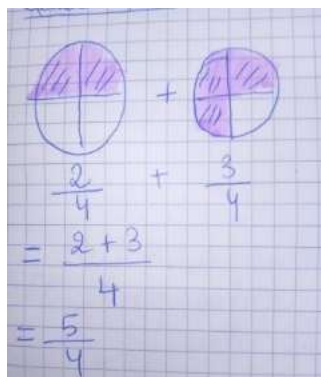


Figure 1 – Illustration de la réponse de B5

Cette approche reste centrée sur la technique opératoire, négligeant le sens concret de l'addition des parts, ce qui limite la compréhension des élèves sur la signification réelle des fractions et de leur addition dans un contexte tangible. On se serait attendu à ce que la situation culturelle s'articule autour de la recherche d'un total de part.

Les binômes B1 et B6 ont utilisé des métaphores liées à la culture mahoraise pour expliquer les fractions comme l'illustre les figures 3 et 4 ci-dessous. B1 compare le numérateur aux enfants et le dénominateur au père, soulignant que l'addition ne se fait qu'entre éléments partageant un même dénominateur, ce qui rend l'apprentissage culturellement pertinent. B6, quant à lui, utilise les mains pour modéliser l'addition des fractions, en soulignant que les doigts de la main peuvent être additionnés car une main a toujours cinq doigts.

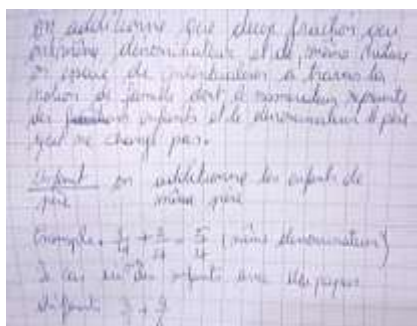


Figure 3 – Production de B1 à la question 2

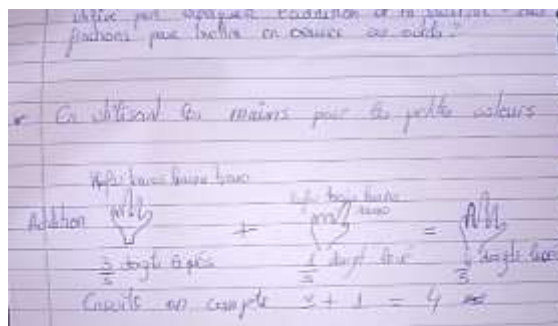


Figure 4 – Production de B6 à la question 2

La pertinence ces métaphores doit être évaluée à la lumière des limites qu'elle peut poser. Bien que le symbole du « père » fixe (dénominateur commun) puisse clarifier le fait qu'on ne peut additionner que des fractions avec le même dénominateur, il risque de complexifier l'apprentissage lorsqu'on introduit des fractions avec des dénominateurs différents. Le cas des enfants ayant « des pères différents » peut ne pas suffire à représenter adéquatement la nécessité de trouver un dénominateur commun, risquant ainsi de créer de la confusion. Ainsi, l'objectification est partiellement accomplie.

3. Question 3 : Comment expliquez-vous la multiplication des fractions en utilisant la contextualisation locale à Mayotte ? Pouvez-vous donner un exemple de situation ?

Seuls 2 sur 6 ont intégré des éléments culturels dans leurs explications de la multiplication de fractions. Les 4 autres ont principalement abordé la technique opératoire, en expliquant simplement la règle de multiplication des numérateurs et des dénominateurs $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, suivie d'un exemple abstrait.

Cette méthode, bien que correcte techniquement, néglige la contextualisation culturelle et la co-construction de sens.

Les binômes B2 et B3 ont utilisé comme objet culturel « la pizza », pour expliquer la multiplication de fractions. En utilisant la pizza comme modèle concret comme on le voit dans figure 5, ils ont combiné représentation symbolique et situation pratique, permettant ainsi aux élèves de visualiser la multiplication de fractions dans un contexte familier. Ils ont présenté la multiplication comme une addition répétée, illustrée par l'exemple de multiplier un entier par une fraction (par exemple, 3 multiplié par $\frac{3}{4}$), en ajoutant répétitivement cette fraction (c'est-à-dire $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$).

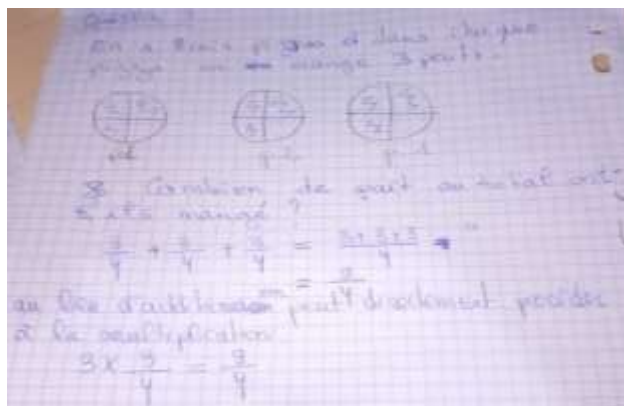


Figure 5 – Production de B3 à la question 3

La présentation de la multiplication d'un entier par une fraction comme une addition répétitive est correcte. Cependant, il s'agit ici d'un cas particulier de multiplication de fractions. On se serait plutôt attendu à l'intégration d'une pratique culturelle en lien avec la fraction d'une fraction de l'unité, c'est-à-dire une partie d'une partie d'un tout, afin d'introduire la technique opératoire générale utilisée pour la multiplication de fraction.

VI. DISCUSSION ET CONCLUSION

L'objectif de cette étude était d'explorer à travers un questionnaire, la manière dont les enseignants stagiaires à Mayotte intègrent des éléments de la culture locale dans l'enseignement des fractions en cycle 3, en s'appuyant sur le cadre théorique de l'objectification. Les objets culturels utilisés pour faciliter la médiation des fractions dans les classes observées se sont révélés peu variés. La majorité des enseignants ont mobilisé des situations de partage de pizza, un aliment souvent associé à la culture culinaire métropolitaine ou aux familles de classe moyenne. Or, dans le contexte mahorais, une grande partie des élèves proviennent de milieux sociaux défavorisés, pour qui la pizza n'est ni familière ni représentative de leur quotidien. Cette inadéquation peut être attribuée à une dépendance excessive aux manuels scolaires élaborés pour le contexte métropolitain, limitant ainsi la créativité et l'adaptation des enseignants aux réalités locales (voir annexe 2 et annexe 3, outils revisités après). L'analyse a également révélé que les enseignants éprouvent des difficultés à concevoir des situations didactiques pertinentes intégrant des objets culturels, particulièrement pour la suite de la scolarité dans ce domaine (l'enseignement des opérations d'addition et de multiplication des fractions). Les techniques opératoires présentées dans les situations proposées apparaissent limitées et ne s'adaptent pas toujours à tous les types d'additions ou de multiplications de fractions, risquant ainsi de provoquer une dés-objectification du concept. Cela pourrait mener à l'émergence de conceptions erronées chez les élèves.

Un autre point saillant est la difficulté rencontrée par les enseignants à identifier des objets culturels pour médiatiser les techniques opératoires relatives à la multiplication de deux fractions. Pourtant, le

contexte mahorais regorge de ressources locales et d'artéfacts qui pourraient jouer un rôle clé dans la médiation culturelle et l'enseignement des mathématiques, en particulier en arithmétique au cycle 3. Ce constat souligne la nécessité de renforcer la formation des enseignants en matière de contextualisation des savoirs. Nous recommandons donc que l'ethnomathématique devienne un élément essentiel de la formation des enseignants, avec un équilibre entre théorie et pratique. Le modèle que nous proposons inclut une exploration sur le terrain à la recherche de ressources locales susceptibles de soutenir la médiation culturelle des concepts mathématiques. L'articulation entre ethnomathématique, histoire et didactique des mathématiques doit être au cœur de cette formation, afin de garantir une objectification efficace des savoirs. De plus, il est crucial de promouvoir la production de manuels scolaires adaptés au contexte local, intégrant des artéfacts et des objets culturels propres à Mayotte.

Enfin, les résultats de cette étude suggèrent de poursuivre cette recherche en l'étendant à un échantillon plus large et en élaborant des ingénieries didactiques innovantes qui intègrent à la fois les perspectives ethnomathématiques et les pratiques pédagogiques. L'évaluation de ces ingénieries pourrait fournir des informations précieuses pour améliorer la formation des enseignants à Mayotte et dans d'autres contextes similaires. C'est dans cet esprit que nous nous engageons dans le projet lié aux contextualisations dans le temps et dans l'espace (Nguala, Tournès, 2025) et dans le projet interreg du laboratoire LIM de l'Université de la Réunion.

RÉFÉRENCES

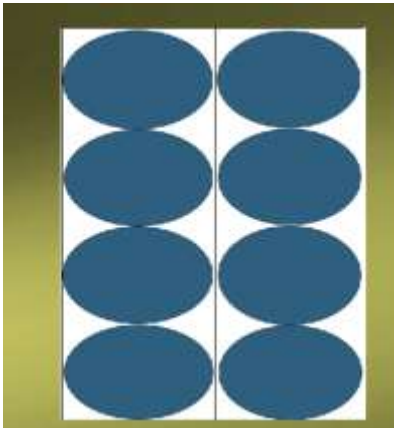
- Delcroix, A., Forissier, T. et Anciaux, F. (2013). Vers un cadre d'analyse opérationnel des phénomènes de contextualisation didactique. Dans F. Anciaux, T. Forissier et L.-F. Prudent (dir.), *Contextualisations didactiques : approches théoriques* (p. 141-185). L'Harmattan.
- Bishop, A. J. (1996). *International handbook of mathematics education* (Vol. 4). Springer Science; Business Media.
- Cal, N. et Polyn, F. (2017, juin). *Maîtrise de la langue française en contexte plurilingue de l'école maternelle au lycée dans les territoires d'Outre-mer*. Inspection générale de l'éducation, du sport et de la recherche de République française. <https://eduscol.education.fr/document/20986/download>
- Charles, M. (1843). *Histoire de l'arithmétique: développements et détails historiques sur divers points du système de l'Albacus* (Vol. 3). Bachelier.
- Favilli, F., Oliveras, M. L. et César, M. (2003). Maths teachers in multicultural classes: Findings from a Southern European project. Dans *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 1-10). http://www.erme-tu-dortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG10/TG10_Favilli_cerme3.pdf
- Hoefer, F. (1874). *Histoire des mathématiques depuis leur origine jusqu'au commencement du XIXe siècle...* Hachette.
- Leung, F. K. S. (2021). Jewish culture, Chinese culture, and mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 107(2), 405–423. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10034-3>
- Ministère de l'Éducation nationale et de la jeunesse. (2021). *Évaluations 2021. Point d'étape CP : premiers résultats*. DEPP.

- Njomgang, J., Patrick, N. et Youkap, T. (2015). Le changement de langage dans l'activité mathématique. Dans e. M. Francophone (dir.), *Actes du colloque EMF2015 "Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage"*, 10-14 octobre 2025, Alger, Algérie (p. 752–764). <https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF15083.pdf>
- Nguala, J.-B. et Manou-Abi, S. (2023, octobre). *Contextualisation des situations d'apprentissage en mathématiques par des heuristiques des élèves s'appuyant sur la langue locale à Mayotte : portée et limites* [Communication]. CORFEM 2023, Nantes. <https://hal.science/hal-04224291/document>
- Nguala, J.-B., Guillon, C., Di Beta, M. (2025). De la fraction-partage à la fraction-nombre : étude des conditions de transfert et des effets d'un dispositif de formation à Mayotte. Dans *Actes du 50^e colloque international de la COPIRELEM* (p. 274-296). ARPEME.
- Nguala, J.-B. et Tournès, D. (2025, 26-30 mai). *Contextualisation forte et développement professionnel : une expérience de formation des enseignants à Mayotte* [Discussion]. Colloque EMF2025 "L'éducation mathématique face à un monde en accélération : enjeux, défis et opportunités", Université de Québec à Montréal, Canada.
- Radford, L. (2006). Elements of a cultural theory of objectification. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 9, 103–129.
- Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7–44. <https://doi.org/10.4471/redimat.2013.19>
- Salone, J. J. (2022). Contexte et contextualisation à Mayotte, une approche systémique. *Contextes et didactiques*, (20). <https://doi.org/10.4000/ced.3848>
- Sumiati, Asfar, A. M. I. T. et Asfar, A. M. I. A. (2022). Integration of local culture of Bugis-Makassar tribe A'bulo Sibatang, Assamaturu, Mappesabbi, Sipakatau based on Android to improve mathematical connection ability. *AIP Conference Proceedings*, 2577(1), article 020065. <https://doi.org/10.1063/5.0096042>

ANNEXE 1

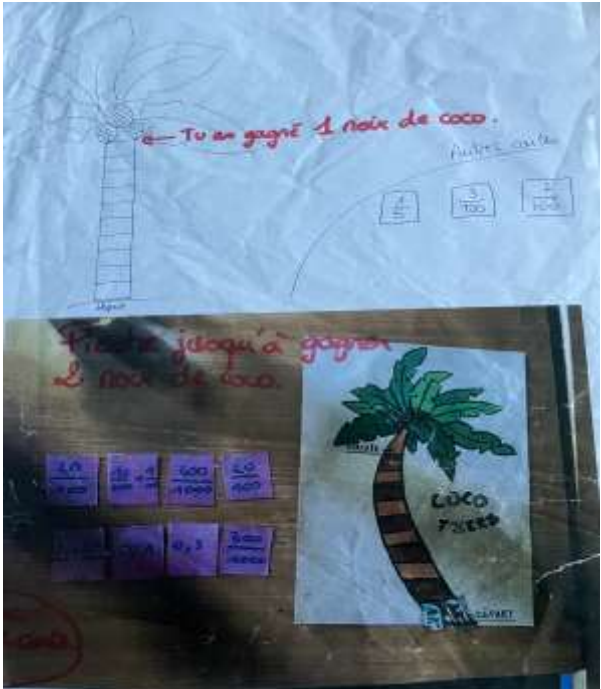
EXEMPLE DE SUPPORT DE JEU CONTEXTUALISÉ
DE LA FAMILLE DES SEMAILLES : M’RAHA WA TSO

Objectif défini du jeu : Adopter des stratégies pour récolter les tso (les graines) de son adversaire. Plusieurs variantes du jeu sont proposées, d’un jeu des équivalences aux fractions représentées par les tso à semer à chaque fois.



ANNEXE 2

EXEMPLE DE SUPPORT DE JEU CONTEXTUALISÉ
SUR LE COCOTIER)



L'ENSEIGNEMENT DES NOMBRES RELATIFS AU GRÉ DE LEUR HISTOIRE

| GLIERE* ANDRÉ-JEAN

Résumé | Dans son *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain*, Condorcet fait un parallèle entre les progrès des sciences et les progrès de l'art d'instruire, les premiers assurant les seconds et les seconds accélérant les premiers. Et il rajoute que cette influence réciproque continue doit être considérée comme une des principales causes du perfectionnement de l'espèce humaine. (Condorcet, p. 290). On ne pourrait mieux résumer l'histoire des quantités négatives et de leur mutation en nombres négatifs. Elle a laissé dans l'enseignement des mathématiques des marques indélébiles qui sont souvent ignorées des maîtres et à fortiori des apprenants.

Mots-clés : quantité, nombre, négatif, mesure, algébrique.

Abstract | In his work entitled *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain* (Sketch for a Historical Picture of the Progress of the Human Mind), Condorcet draws a parallel between progress in science and progress in the art of educating. Indeed, scientific progress leads to advances in education, which in their turn accelerate scientific progress. In his eyes, such reciprocal and continuous influence must be considered as one of the main causes of the progress of the human species. (Condorcet, p.290). The history of negative quantities and of their mutation into negative numbers couldn't be summarised in more appropriate terms.

Keywords : Quantity, number, negative, measure, algebraic.

I. INTRODUCTION

Trois textes, très différents quant à leur style, mais très similaires quant à leur contenu, nous permettent d'emblée de mesurer à quel point l'histoire des nombres négatifs et leur enseignement sont intriqués. À notre avis, une bonne connaissance de ces liens facilite leur exposition par les maîtres et la compréhension de leurs règles opératoires par les élèves.

L'histoire nous apprend qu'il a fallu du temps pour que les nombres négatifs s'imposent véritablement en tant que nombres [...]. La transposition didactique de cette notion est délicate et explique les difficultés à appréhender en tant que nombres des objets définis « en dessous de 0 », alors même qu'ils sont utilisés dans la vie courante où l'on parle aussi bien d'une température de -7°C ou d'une profondeur de -35 m que d'un bilan financier de -400 euros [...]. S'ils constituent une aide indéniable pour la compréhension de l'addition, le modèle gain-perte ou le modèle montée-descente peuvent constituer un réel obstacle à la compréhension de la multiplication de deux nombres, notamment s'ils sont tous les deux négatifs [...]. Il n'est pas possible de trouver un modèle concret permettant d'illustrer la multiplication [...]. Seule une pratique routinière de calculs additifs et soustractifs permet aux élèves de s'émanciper progressivement des contextes familiers, ce qui est un bon préalable à une bonne compréhension de la multiplication et de la division, dont les définitions ne peuvent être justifiées qu'à l'intérieur d'un cadre interne aux mathématiques. (Eduscol, p. 5-6).

Ces lignes proviennent des ressources 2016 du site d'eduscol, portail français d'information et d'accompagnement des professionnels de l'éducation, partie *Mathématiques* du cycle 4, chapitre *Nombres et calculs*, rubrique *Stratégies d'enseignement des nombres relatifs*.

L'introduction conceptuelle des nombres relatifs a été un processus d'une lenteur surprenante. Elle a duré plus de mille cinq cents ans, depuis l'époque de Diophante jusqu'à nos jours ! Pendant tout cet intervalle, les mathématiciens maniaient les nombres relatifs ; mais ils n'en n'avaient qu'une compréhension partielle, avec d'étonnantes lacunes

* Professeur de classes préparatoires (ESEO, Angers) à la retraite, chercheur associé en histoire des mathématiques au laboratoire Jean Leray (Université de Nantes) – France – gaj.math@outlook.fr

[...]. Nombreux sont les enseignants qui ne soupçonnent pas que l'apprentissage de la règle des signes puisse comporter des difficultés. (Glaeser, p. 304-305).

Georges Glaeser commence ainsi son article *Épistémologie des nombres relatifs* en 1981.

Suivant moi l'hypocrisie était impossible en mathématiques et, dans ma simplicité juvénile, je pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que : moins par moins donne plus [...]. M. Chabert pressé par moi s'embarassait, répétait sa leçon, celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire : « Mais c'est l'usage, tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange, qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admises ». [...]. J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui : il faut bien que – par – donne + soit vrai, puisqu'évidemment, en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats vrais et indubitables. (Stendhal, p. 256).

C'est le constat amer que fait en 1835 Henri Beyle, alias Stendhal, dans *La vie d'Henri Brulard*.

Il ressort de ces trois textes que l'histoire des nombres négatifs n'a pas été un long fleuve tranquille et que leur enseignement n'est pas chose facile, même encore aujourd'hui. Entre approche concrète et définition formelle, l'enseignant doit naviguer à vue afin de faire franchir aux élèves les obstacles à leur compréhension. Dans sa démarche pédagogique, la connaissance de l'histoire de ces nombres nous paraît fondamentale. En témoin privilégié, il observera les difficultés qu'un certain nombre de géomètres des siècles passés a eues à les concevoir et à les intégrer au sein d'ensembles de nombres généralisant ceux de l'arithmétique. Il pourra alors se servir de ses observations pour éviter que les commençants du XXI^e siècle ne tombent dans les mêmes errements que leurs aînés des siècles passés.

Dans cet article, notre but est de proposer quelques pistes pour faciliter le passage du modèle concret au calcul formel dans l'enseignement. Ce passage a été historiquement long et douloureux. Il est celui des baguettes noires utilisées en Chine pour les nombres négatifs au 2^e siècle avant JC (Chemla, §. VIII) aux fausses solutions des équations algébriques de René Descartes. Il est celui des débits et des dettes du mathématicien indien Brahmagusta dans ses exercices comptables aux ordonnées négatives de Colin Maclaurin. Jusqu'au XVIII^e siècle, l'algèbre n'a toléré les quantités négatives que parce qu'elles étaient utiles au calcul. Leur interprétation géométrique ne palliait pas leur manque de statut. Il a fallu attendre 1867 pour que Hermann Hankel définisse formellement les nombres négatifs. (Glière, p. 562-710).

Dans un premier paragraphe, nous ferons un rapide état des lieux des difficultés rencontrées par les géomètres du XVIII^e siècle. Puis, à partir d'exemples choisis dans des traités du XIX^e siècle, nous montrerons comment le pouvoir généralisateur des nombres négatifs en algèbre pourrait être une porte d'entrée à leur introduction dans l'enseignement. Nous décrirons enfin deux modèles multiplicatifs originaux utilisés par les enseignants des siècles derniers. Ceux-ci pourraient être une alternative à l'exposé formel de la multiplication et de la règle des signes en vogue dans les ouvrages actuels, ou, à défaut, une source d'intérêt et d'inspiration.

II. QU'EST-CE DONC QUE LES QUANTITÉS NÉGATIVES ?

Un des plus illustres géomètres à s'être interrogé sur leur définition est le célèbre mathématicien, physicien et philosophe Jean Le Rond d'Alembert. Dans l'article *Négatif* qu'il écrit pour l'*Encyclopédie* dans les années 1750, il critique les définitions des quantités négatives en vogue à l'époque. La première qu'il réfute est : « Elles sont regardées comme plus petites que zéro, moindres que rien » (Alembert, p. 72).

Puisque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, la proportion $1 : -1 :: -1 : 1$ est exacte. Mais, conformément à la proposition 14 du livre V des *Éléments* d'Euclide (Euclide, p. 96) qui

affirme entre autres que : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors ($a > c \Rightarrow b > d$), l'égalité des deux rapports précédents $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$ entraîne l'absurdité : $1 > -1$ implique $-1 > 1$. La relation d'ordre appliquée aux quantités négatives semble fautive. Lazare Carnot dans la *Dissertation préliminaire* de sa *Géométrie de position* de 1803 s'insurge lui-aussi contre cette définition : « -3 serait moindre que 2 , cependant $(-3)^2$ serait plus grand que 2^2 [...], le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la quantité. » (Carnot, p. IX).

En 1828, C.-V. Mourey dans son petit ouvrage intitulé *La vraie théorie des quantités négatives*, poussant jusqu'au bout la relativité des signes $+$ et $-$, n'hésite pas à écrire : « Je suis convaincu qu'il est beaucoup plus avantageux, dans la pratique, de laisser à ce signe $<$, ainsi qu'à son inverse $>$, leurs significations plus petit que, plus grand que et de faire : $-1 > 0$, $-2 > -1$, $-3 > -2$, etc. » (Mourey, p. 15).

Ainsi qu'on le constate, les inégalités sur les nombres négatifs ont posé de gros problèmes à certains savants, il n'est donc pas surprenant qu'elles en posent à nos élèves.

La seconde définition des quantités négatives, à savoir qu'elles sont le contraire des positives, doit être amendée car, selon d'Alembert, cette notion est sujette à de fréquentes exceptions. Il prévient que les quantités négatives ne sont pas toujours d'un côté opposé aux positives. (Alembert, p. 72). Il prend l'exemple d'une courbe donnée par l'équation :

$$y = \frac{aa}{a + b \cos.z}.$$

Dans le cas où $a > b$, le rayon y , correspondant à un angle z tel que $\cos z = -1$, est attendu *logiquement* dans une position directement contraire (en ligne droite) à celle d'un rayon correspondant à un angle z vérifiant $\cos z = 1$. C'est ce qui se passe réellement, donc *géométriquement*. Cependant, cette position paraît être en désaccord avec l'algèbre, puisque le rayon y a une valeur algébrique positive. Le désaccord n'est qu'apparent, explique d'Alembert, car la positivité de la valeur algébrique du rayon y confirme notre supposition logique, à savoir être en sens contraire. Dans le cas où $a < b$, en accord avec la géométrie et en désaccord apparent avec la logique, le rayon y , correspondant à un angle z vérifiant $\cos z = -1$, ne doit pas être pris du côté contraire à celui d'un rayon correspondant à un angle z vérifiant $\cos z = 1$, mais du même côté. Cette position est conforme à ce que dit l'algèbre. En effet la négativité de la valeur algébrique du rayon y indique une fausse position et une fausse supposition malgré le sens contraire indiqué par $\cos z = -1$. Sans les coordonnées polaires, et pour permettre à la géométrie et à l'algèbre de s'accorder, d'Alembert a recours à des arguments qui ne semblent pas le convaincre. (Glière, p. 31-35).

Enfin, la troisième définition qu'il évoque à peine : « comme exprimant des dettes », il la rejette d'un revers de la main parce qu'elle lui apparaît « trop bornée et, par cela seul, peu exacte ». D'Alembert lance alors un vibrant appel aux géomètres pour qu'ils éclaircissent la théorie des quantités négatives. L'algèbre avait en effet admis en son sein de dangereuses expressions, comme par exemple $a = -b$ qui posait à certains géomètres du XVIII^e siècle autant de problèmes que l'expression $\sqrt{x^2} = -x$ en pose à de nombreux élèves débutants du XXI^e.

III. LES NOMBRES NÉGATIFS AU SERVICE DE LA GÉNÉRALITÉ DE L'ALGÈBRE

L'histoire nous apprend que les mathématiciens ont mis des siècles à construire ce que nous demandons à nos élèves de comprendre en quelques années. Pour les aider dans leur apprentissage, il serait bon de justifier l'introduction des nombres négatifs en ne se limitant pas aux seules exemples de

grandeurs concrètes douées de deux sens opposés. Leur exposé ne peut se réduire à un panachage de concret et d'abstrait, car on sait qu'il n'y a pas de modèle unifiant à la fois additif et multiplicatif. On trouve dans l'histoire des pistes intéressantes pour les introduire. Le pouvoir généralisateur de l'algèbre en est une, c'est-à-dire la capacité des quantités négatives à généraliser les formules. L'archétype des problèmes, dans lesquels les valeurs négatives permettent d'étendre la validité d'une formule, est sans doute le *Problème des deux courriers* exposé dès 1746 par Alexis Clairaut dans ses *Éléments d'Algèbre*. (Clairaut, p. 73-74). Elles généralisent la formule algébrique qui donne la distance nécessaire à un courrier pour en rattraper un autre, marchant dans le même sens que lui, au cas où les deux courriers vont à la rencontre l'un de l'autre. (Glière, p. 340-348). Les calculs dépassent les capacités moyennes d'élèves de collège. Nous nous limiterons donc à des exemples plus à leur portée.

1. Une figure élémentaire

Le premier exemple que nous considérons est donné par Carnot dans les premières pages de la *Géométrie de position*, lorsque celui-ci propose aux lecteurs le triangle élémentaire de la figure 1, censé illustrer parfaitement sa théorie de corrélation. Il s'agit d'un triangle ABC sur la base $[BC]$ duquel est abaissée la perpendiculaire $[AD]$. Il met en mouvement le point C . Le système primitif est celui où le point C est resté à droite du point D . Dans ce système, $CD = BC - BD$. L'égalité persiste tant que le point C ne franchit pas D . Le système est dit en corrélation directe. Si C se trouve à gauche de D , le nouveau système est dit en corrélation inverse et $CD = BD - BC$. La relation générale $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$, obtenue en appliquant le théorème de Pythagore aux triangles rectangles ABD et ACD , devient en factorisant le second membre : $AB^2 - AC^2 = BC^2 - 2 BC.CD$ dans le système primitif et $AB^2 - AC^2 = BC^2 + 2 BC.CD$ dans le système en corrélation inverse. Le dédoublement de la formule d'Al-Kashi résulte, selon Carnot, de l'impossibilité des quantités négatives et, en particulier, des soustractions $a - b$ lorsque $a < b$. Sans mesure algébrique, il est inévitable. Il est à rapprocher de celui de la définition donnée au lycée du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $AB \times AC$ s'ils sont de même sens et $-AB \times AC$ s'ils sont de sens contraire. (Glière, p. 258).

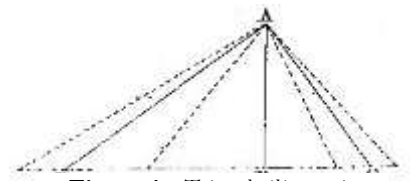


Figure 1 – Triangle élémentaire

À l'inverse, en 1853, dans son *Cours complet d'algèbre*, Adrien Guilmin écrit : « L'emploi des nombres négatifs permet donc de donner dans la même formule la solution d'un plus grand nombre de formules, c'est-à-dire, d'augmenter la généralité de cette formule, ce qui est éminemment conforme à l'esprit et au but de l'algèbre. » (Guilmin, p. 13).

Guilmin tire cette conclusion de l'exemple suivant très semblable au précédent et encore plus élémentaire : soit un mobile parcourant une distance a sur une ligne droite à partir d'un point A jusqu'à un point B , puis rebroussant chemin d'une distance b jusqu'à un point C . Il explique alors que la même formule $x = a - b$ donne à la fois la grandeur et le sens de la distance séparant les deux points A et C ou A et C' . (Glière, p. 531). Plus question de soustractions inexécutables comme chez Carnot. Vue la simplicité du propos, nos jeunes élèves n'auraient sans doute aucun mal à apprécier la pertinence de ces conclusions.

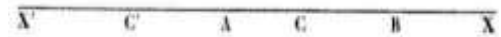


Figure 2 – Un mobile sur une ligne droite

2. L'axe des temps

Un second exemple est celui donné par Antoine-Augustin Cournot dans son ouvrage *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie* paru en 1847. (Cournot, p. 45-50). Il part du constat que, pour calculer le temps écoulé entre deux événements, lorsqu'on raisonne sur des dates

arithmétiques comme c'est le cas dans l'échelle de temps avant JC et après JC ci-dessous, trois cas différents sont *a priori* à envisager.

Événements	D'	C'	B'	A'	O	A	B	C	D
Dates t	100	75	50	25	0	25	50	75	100

S'il s'agit de deux événements postérieurs à l'origine, de la date t' de l'événement le plus nouveau on retranche la date t de l'événement le plus ancien. Ainsi pour les événements A et C : $t' - t = 75 - 25 = 50$. S'il s'agit de deux événements antérieurs à l'origine, de la date t de l'événement le plus ancien on retranche la date t' de l'événement le plus nouveau. Ainsi pour les événements C' et A' : $t - t' = 75 - 25 = 50$. Enfin, s'il s'agit d'un événement postérieur et d'un autre antérieur à l'origine comme les événements A et C' , on ajoute les deux dates : $t + t' = 25 + 75 = 100$. Trois formules sont donc nécessaires !

Par contre, lorsque l'on raisonne sur des dates positives et négatives suivant qu'elles se rapportent respectivement à des événements postérieurs ou à des événements antérieurs à l'origine, les calculs à effectuer obéissent à une seule règle : retrancher de la plus grande date la plus petite : $t' - t = 75 - 25 = 50$, $t' - t = -25 - (-75) = 50$, $t' - t = 25 - (-75) = 100$.

Événements	D'	C'	B'	A'	O	A	B	C	D
Dates t	-100	-75	-50	-25	0	25	50	75	100

Une seule formule est cette fois nécessaire. Voilà une économie de moyens remarquable !

3. La relation de Chasles entre des mesures algébriques.

En 1844, Hermann Grassmann déclare dans la préface de son ouvrage *Die Ausdehnungslehre* qu'il s'habitue à voir dans les segments AB et BA des grandeurs opposées. Et de là résultait que, si A , B et C étaient trois points d'une droite, la relation $AB + BC = AC$ était toujours vraie, même lorsque C était placé entre les deux autres points. Il ne dit pas s'il habitue ses élèves à voir de même. (Grassmann, p. 1). (Glière, p. 846).

En 1892, dans ses *Premières leçons d'algèbre élémentaire*, Henri-Eugène Padé propose de démontrer que la relation $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$ est indépendante de la disposition des trois points alignés A , B , C . Il désigne par $\overline{AB}$ le nombre, positif ou négatif suivant l'orientation de la droite, correspondant au segment orienté de A vers B et de longueur AB . Ainsi $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$. Il envisage les six dispositions possibles des trois points dans le sens positif à savoir : ABC , ACB , BCA , BAC , CAB , CBA et les six formules correspondantes sur les longueurs : $AC = AB + BC$, $AB = AC + CB$, $BA = BC + CA$, $BC = BA + AC$, $CB = CA + AB$, $CA = CB + BA$. Il traite les six cas. Par exemple dans le cas BCA , les segments BA , BC et CA étant tous de sens positif, $BA = BC + CA$ implique $\overline{BA} = \overline{BC} + \overline{CA}$. En ajoutant $\overline{AB}$ à chaque membre, il obtient la relation recherchée : $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$, autrement dit : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (Padé, p. 45-48). (Glière, p. 894-896).

Les trois exemples précédents, empruntés aussi bien à la géométrie qu'à l'algèbre ou qu'à la cinématique, sont à la fois élémentaires et instructifs. Ils montrent l'utilité des nombres négatifs au sein même de la mathématique. Leur introduction s'avère nécessaire pour généraliser les formules, étendre le champ de validité de celles-ci. N'est-ce pas cette propriété qui est en jeu dans la définition, si problématique pour nos jeunes élèves, de la valeur absolue $|x| = x$ si x est positif et $|x| = -x$ si x est négatif ?

IV. DEUX MODÈLES POUR LA MULTIPLICATION DES NOMBRES RELATIFS

En lisant les instructions officielles et en parcourant les livres de mathématiques des collégiens, nous constatons que la multiplication des nombres relatifs et, par suite, la règle des signes, sont introduites exclusivement de manière formelle. La permanence des règles opératoires, en particulier l'associativité, la commutativité et la distributivité, aurait sans doute réconcilié le jeune Henri Beyle avec les mathématiques. L'histoire ne peut le dire. Celle-ci enseigne cependant qu'avant la théorie pure des formes d'Hankel de 1867, et aussi après, d'autres voies ont été explorées par les auteurs d'ouvrages élémentaires pour introduire le produit de nombres relatifs. Nous voudrions exposer le modèle cinématique et le modèle vectoriel. À défaut d'un modèle concret unifiant, ils peuvent être en effet inspirants pour les enseignants.

1. Le modèle cinématique

En 1853, Guilmin est un des premiers auteurs à justifier la règle des signes au moyen de la loi du mouvement uniforme. Parallèlement à l'apparition de celui-ci dans les textes officiels, le *Problème des deux courriers* disparaît des ouvrages élémentaires. Un mobile parcourt la

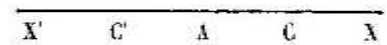


Figure 3 – Mouvement uniforme

droite $X'X$, à partir du point A à l'origine des temps. Guilmin pose quatre questions : Où sera-t-il dans t heures si le mobile se meut dans le sens $X'X$ ou s'il se meut dans le sens XX' ? Où était-il, il y a t heures, s'il se meut dans le sens $X'X$ ou s'il se meut dans le sens XX' ? Les réponses aux quatre questions sont contenues dans la seule formule $x = vt$, à condition que la vitesse soit exprimée par un nombre positif si le mouvement a lieu dans le sens $X'X$ et par un nombre négatif sinon, et qu'un temps futur soit exprimé par un nombre positif et un temps passé par un nombre négatif. Puisque les changements de sens des grandeurs sont synonymes de changements de signes des nombres qui les « mesurent », autrement dit puisqu'on assiste au transfert du sens des grandeurs au signe des nombres, les résultats obtenus précédemment sur les sens des trois grandeurs v , t , et x au cours de l'étude de la loi du mouvement uniforme se traduisent par des résultats sur les signes, résultats qui ne sont autres que les règles des signes. (Glière, p. 536-540).

En 1867, Jules Houël, dans sa *Théorie élémentaire des quantités complexes*, a également recours au mouvement uniforme pour étendre la multiplication des quantités arithmétiques aux quantités algébriques. Il propose une méthode pédagogique originale en quatre dessins :

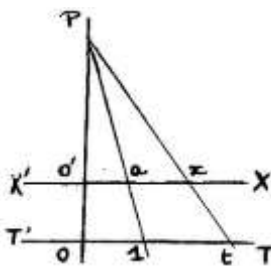


Figure 4 – Dessin 1

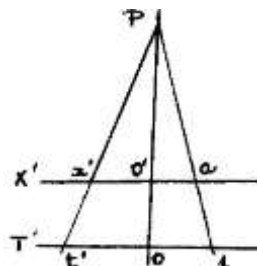


Figure 5 – Dessin 2

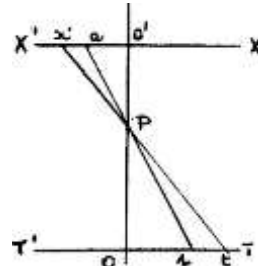


Figure 6 – Dessin 3

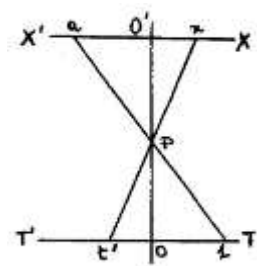


Figure 7 – Dessin 4

Le premier dessin correspond à la situation classique de proportionnalité entre l'espace absolu et le temps absolu $1 : t = a : x$ (l'élève reconnaîtra le théorème de Thalès), traduite en algèbre par l'équation du mouvement uniforme $x = at$, où a est la distance parcourue par le mobile en une unité de temps. Celle-ci est conforme à la règle des signes : « $+ \times + = +$ ». Dans le deuxième dessin, Houël considère

les positions du mobile avant l'origine des temps. Le mobile est alors à une abscisse négative x' située à gauche de l'origine des espaces O' . Le segment représentant le temps t' se trouve nécessairement à gauche de l'origine des temps O , et le temps t' est aussi négatif. Le nombre a restant positif, l'équation du mouvement $x' = at'$ est conforme à la règle des signes : « $+ \times - = -$ ». Dans le troisième dessin, le mouvement est dirigé en sens contraire de l'axe des distances et aussi de l'axe des temps. Puisque le temps t est resté positif et que a est négatif, la quatrième proportionnelle x' doit être négative. Ceci est confirmé à la fois par la construction et par la formule $x' = at$, qui respecte à nouveau la règle des signes : « $- \times + = -$ ». Enfin, le quatrième dessin montre que, si a et t' sont tous les deux négatifs, l'espace parcouru x avant l'origine des temps doit être porté à la droite de O' , et donc est positif. La règle des signes : « $- \times - = +$ » est vérifiée. Houël conclut que la construction de la multiplication des « grandeurs pourvues de signes de direction » conduit à la règle des signes de leur multiplication. (Houël, p. 22).

Dans la préface du livre de Padé de 1892 déjà cité, Jules Tannery fait un état des lieux particulièrement instructif de l'enseignement de la théorie des quantités positives et négatives. Il explique que les segments de droite portés par un axe orienté sont bien adaptés pour établir les propriétés des sommes algébriques et que, si l'on veut justifier les définitions adoptées pour la multiplication, les formules du mouvement uniforme sont toutes indiquées. Il montre sa volonté de trouver un compromis pédagogique entre la voie abstraite guidée par le principe de permanence des lois formelles et la voie concrète magnifiée par la loi du mouvement uniforme. (Glière, p. 866-871). Le modèle cinématique conseillé par Tannery sera utilisé jusqu'à la veille de la réforme des mathématiques modernes. En 1959, Maurice Monge y a recours dans son livre *Classe de quatrième classique et moderne*. Nous donnons à titre d'exemple le dernier des quatre cas considérés. (Monge, § 55).

Pourtant, de nombreux auteurs choisissent une multiplication abstraite et réduisent la loi du mouvement uniforme à une

simple application des nombres négatifs. Leur choix est compréhensible. Les segments orientés d'une droite sont légitimes pour introduire l'addition des nombres relatifs, puisque la mesure algébrique est un homomorphisme additif, ainsi que le sous-entend déjà en 1896 Carlo Bourlet dans ses *Leçons d'algèbre élémentaire* en affirmant que la mesure algébrique de la résultante de plusieurs segments est égale à la somme des mesures algébriques de ces segments. (Bourlet, p. 14). Cependant, ils le sont beaucoup moins pour introduire la multiplication puisque la mesure algébrique n'est pas un homomorphisme multiplicatif. Le mouvement uniforme, certes séduisant pour justifier la règle des signes, peut apparaître comme un pis-aller pédagogique.

2. Le modèle vectoriel

Toutefois, ce pis-aller a le mérite d'avoir probablement conduit beaucoup d'auteurs français de la première moitié du XX^e siècle à une autre méthode, celle de la multiplication d'un vecteur par un réel. Ceux-ci choisissent un modèle vectoriel pour représenter à la fois l'addition et la multiplication des nombres relatifs. De la multiplication externe des vecteurs par ces nombres, ils déduisent la multiplication interne des nombres algébriques.

Le mobile se déplace dans le sens négatif ; sa vitesse est négative : $v = -3$ cm/s. Il est passé en M 4 secondes avant de passer en O, c'est-à-dire à la date -4 secondes ; d'où $t = -4$.

$$\overline{OM} = (-3)(-4) = +12,$$

ce qui vérifie sur la figure 9.



Figure 8 – Le modèle cinématique en classe de quatrième

Dans son *Algèbre à l'usage des élèves des classes de quatrième B à la première C* publié en 1903, Auguste-Clément Grévy adopte cette présentation. Il donne tout d'abord une définition naïve d'un vecteur comme une portion de droite parcourue dans un sens déterminé, puis celle de la somme de deux vecteurs obtenue en les plaçant bout à bout. Après cela, il prépare avec soin l'exposé de la multiplication. Tout d'abord, un vecteur unité étant choisi, il détermine la « mesure a d'un vecteur » comme le nombre (positif ou négatif) par lequel est multiplié le vecteur unité pour l'obtenir. Ensuite, il définit le produit d'un vecteur par un nombre, à savoir un vecteur de même sens si le nombre est positif, de sens contraire si le nombre est négatif, sa longueur étant le produit de la longueur du premier vecteur par la valeur absolue du nombre. Enfin, il procède à la transposition de la multiplication externe des vecteurs à celle interne des nombres algébriques en remplaçant les vecteurs par les nombres qui les mesurent, c'est-à-dire le mot sens par le mot signe et le mot longueur par les mots valeur absolue. (Grévy, p. 31-32). La transposition précédente est contenue dans la « pseudo-associativité » de la multiplication externe d'un espace vectoriel : $a \cdot (b \cdot \vec{t}) = (a \times b) \cdot \vec{t}$. Le produit des nombres a et b est alors le nombre qui « opère » sur le vecteur $\vec{t}$ de la même manière que b « opère » sur $\vec{t}$ et a sur $b \cdot \vec{t}$. Les longueurs des vecteurs sont multipliées par les valeurs absolues des nombres et les sens des vecteurs sont ou non inversés suivant leurs signes. Le produit $a \times b$ est « l'opérateur composé b suivi de a ». (Glière, p. 971-983).

Jusqu'à la veille de la réforme des mathématiques modernes, la « théorie vectorielle » des nombres algébriques est utilisée. En 1959, dans son manuel *Mathématiques, classe de 4^e*, Roland Maillard en propose un exposé exemplaire : vecteur, nombre relatif comme mesure algébrique de vecteur, succession des vecteurs et addition de nombres relatifs, relation de Chasles sur les vecteurs et sur les mesures algébriques, multiplication d'un vecteur par un nombre relatif et multiplication de deux nombres relatifs. (Glière, p. 951-954 et 984-986).

V. CONCLUSION

La réforme des mathématiques modernes a agi comme une rupture plus didactique qu'épistémologique. Le débat ne porte plus aujourd'hui sur l'existence ou non des quantités positives et négatives. Ces dernières, au même titre que les quantités complexes et les quantités infinitésimales, ont longtemps été considérées par les géomètres comme des objets indispensables au calcul mais d'essence mystérieuse. Ni la définition euclidienne du nombre comme multitude composée d'unités, ni celle utilisée par Newton comme rapport abstrait d'une grandeur à une autre de même espèce prise pour unité, ne convenaient. Elles ont cédé finalement la place aux nombres positifs et négatifs lorsque la théorie formelle de Hankel a admis ceux-ci dans un système de nombres et lorsque l'algèbre les a intronisés comme mesures algébriques de certaines grandeurs géométriques. La question aujourd'hui est de savoir à quel moment on doit passer du concret à l'abstrait. Danièle Coquin-Viennot se demande en 1985 dans un article publié dans *Recherches en Didactique des Mathématiques* si les programmes donnent assez de moyens abstraits pour enseigner la notion de nombre relatif et comment l'élève accroché à un modèle concret peut-il faire en douceur le passage du concret au formel. L'histoire spécifique de la mesure algébrique pourrait à ce propos être inspirante. (Glière, p. 898-964). La mesure algébrique d'un segment porté par un axe a été pour la première fois définie en 1896 par Carlo Bourlet comme le nombre algébrique qui a pour valeur absolue la longueur du segment et le signe + si le sens du segment est celui de l'axe et le signe – sinon. (Bourlet, p. 14).

Certes, l'enseignant a comme objectif que ses élèves acquièrent une pratique routinière des calculs additifs, soustractifs et multiplicatifs sur les nombres relatifs. Mais s'il veut donner du sens à son enseignement afin de susciter intérêt et motivation des apprenants, il peut l'enraciner dans l'histoire en le sortant d'une abstraction atemporelle, et, plus généralement, le raccrocher à des problématiques

originelles et oubliées. Il importe alors pour l'enseignant de renouer les fils conducteurs rompus et de ré-amarrer ainsi ses propres apprentissages à la chaîne logique des interrogations et des problèmes ancestraux oubliés. L'enjeu sera alors de forger, à partir des pratiques anciennes, des outils pédagogiques pertinents.

RÉFÉRENCES

- Alembert, J. (1765). Article Négatif. Dans *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers par une société de gens de Lettres. Tome onzième*. (p. 72-74). Samuel Faulche.
- Bourlet, C. (1896). *Leçons d'algèbre élémentaire*. Colin.
- Carnot, L. (1803). *Géométrie de position*. Duprat.
- Chemla, K. et Guo, S. (2005). *Les neuf chapitres : le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Dunod.
- Clairaut, A.-C. (1746). *Éléments d'Algèbre*. Guérin.
- Condorcet, J.-A.-N. (III). *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain*. Agasse.
- Coquin-Viennot, D. (1985). Complexité mathématique et ordre d'acquisition : une hiérarchie de conceptions à propos des relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6, 133-192. <https://revue-rdm.com/1985/complexite-mathematique-et-ordre-d/>
- Cournot, A. (1847). *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie*. Hachette.
- Euclide d'Alexandrie. (1994). *Éléments* (volume II, livres V à IX, Heiberg, trad. ; B. Vitrac, intro. et comm.). PUF.
- Glaeser, G. (1981). Épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-345.
- Glière, A.-J. (2007). *Histoire et épistémologie des nombres négatifs de d'Alembert à nos jours, le passage des quantités aux nombres* [Thèse de doctorat inédite]. École doctorale de l'École des hautes études en sciences sociales.
- Grassmann, H. (1994) *La science de la grandeur extensive ou l'Ausdehnungslehre* (D. Flament et B. Bekemeier, trad.). Blanchard.
- Grévy, A. (1905). *Algèbre à l'usage des élèves des classes de 4^e B à 1^{re} C et D (Programmes des 31 mai 1902 et 27 juillet 1905)*. Vuibert et Nony.
- Guilmin, A. (1853). *Cours complet d'algèbre élémentaire, à l'usage des lycées et collèges et de tous les établissements d'instruction publique*. Durand.
- Hankel, H. (1867). *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen in zwei Theilen. 1. Theil. Theorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen*. Leopold Voss.
- Hoüel, G.-J. (1867). *Théorie élémentaire des quantités complexes. Algèbre des quantités complexes*. Gauthier-Villars.
- Maillard, R. (1959). *Mathématiques, classe de 4e*. Hachette.
- Mourey, C.-V. (1861). *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, dédiée aux amis de l'évidence*. Mallet-Bachelier.

Padé, H.-E. (1892). *Premières leçons d'algèbre élémentaire, nombres positifs et négatifs, opérations sur les polynômes*. Gauthier-Villars.

Stendhal. (1955). *Œuvres intimes. Vie de Henry Brulard*. La Pléiade, Gallimard.

Tannery, J. (1892) Préface. Dans H.-E. Padé, *Premières leçons d'algèbre élémentaire, nombres positifs et négatifs, opérations sur les polynômes d'Henri-Eugène Padé* (p. V-XVIII). Gauthier-Villars.

SITOGRAFIE

Eduscol. <https://eduscol.education.fr/document/17245/download>

GT5 | MODÉLISATION ET INTERDISCIPLINARITÉ

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL 5

MODÉLISATION ET INTERDISCIPLINARITÉ

| ALPHA* OUSMANE, YVAIN-PRÉBISKI** SONIA, WEISS*** LAURA ET BENRHERBAL****

ABDERRAHMANE

Ce texte rend compte du travail effectué dans le Groupe 5 d'EMF 2025. Il décrit les enjeux de ce travail, les thématiques abordées, les questions restant en suspens et ouvre ainsi des perspectives pour la suite de la recherche quant à la modélisation mathématique et l'interdisciplinarité. L'intégralité des textes relatifs aux communications présentées dans ce groupe figure dans les actes.

I. PRÉSENTATION DU GROUPE DE TRAVAIL

Dans notre monde en constante évolution, l'enseignement des mathématiques et des sciences est un pilier fondamental de l'éducation, contribuant à former des individus capables de comprendre et de répondre aux défis de notre société. En particulier, pour préparer efficacement les jeunes à faire face aux enjeux complexes de la modernité, il est important d'intégrer la modélisation et l'interdisciplinarité dans l'enseignement et la formation des élèves. Ces champs d'étude sont cruciaux car ils permettent d'articuler différents domaines de savoir et d'en favoriser les liens.

Le thème du Groupe de Travail 5 (GT5) était « Modélisation et interdisciplinarité », s'inscrivant dans le thème du colloque EMF 2025 sous la forme de « L'importance de la modélisation et de l'interdisciplinarité dans l'éducation mathématique face à un monde en accélération : enjeux, défis et opportunités ». Les responsables du GT5 étaient Ousmane Alpha (Mali), Sonia Yvain-Prébiski (France) et Laura Weiss (Suisse) et le correspondant du Comité Scientifique Abderrahmane Benrherbal (Maroc).

Les questions auxquelles le groupe GT5 ambitionnait d'apporter des éléments de réponse à travers les contributions des participants au groupe étaient les suivantes :

- Peut-on faire de la modélisation un objet d'enseignement ? Comment peut-on former les élèves et les futurs enseignants à appréhender la modélisation en tant que processus, qui ne se réduit pas à l'application d'un modèle ?
- Comment la nécessité de mathématiser une situation extra-mathématique, pour la rendre accessible par un traitement mathématique, est-elle prise en compte et traitée en classe ?
- Comment la modélisation mathématique peut-elle améliorer la compréhension des concepts mathématiques chez les élèves en leur donnant du sens et en favoriser leur application dans des contextes réels en lien avec les autres disciplines scolaires/scientifiques ?
- Comment l'interdisciplinarité peut-elle enrichir les mathématiques et les sciences dans un mouvement de validation réciproque à l'aide de la modélisation de situations ancrées dans le quotidien de l'élève ?

* Coresponsable du groupe de travail 5 – Mali – oalphaoumar@yahoo.fr

** Coresponsable du groupe de travail 5 – France – sonia.yvain@univ-lyon1.fr

*** Coresponsable du groupe de travail 5 – Suisse – laura.weiss@unige.ch

**** Correspondant du comité scientifique – Maroc – abderrahmane.benrherbal@um6p.ma

- Comment développer la culture de collaboration entre enseignants dans une approche interdisciplinaire ? Quelles seraient alors les ressources et les formations nécessaires pour aider les enseignants à mettre en œuvre l'approche de l'interdisciplinarité dans leurs milieux de travail ?

II. ORGANISATION ET THÉMATIQUES ABORDÉES

1. Organisation des séances

Initialement, le GT5 comptait 10 contributrices et contributeurs pour des présentations orales, malheureusement 5 d'entre elles et eux n'ont pas pu venir à Montréal pour des questions de visa, ce que nous déplorons. Toutefois, le GT5 a pu s'enrichir des présentations de deux jeunes enseignants du Spécial 1 Projet Jeunes enseignants (SP1) qui, ayant travaillé l'un sur la modélisation et l'autre sur l'interdisciplinarité nous ont rejoint et ont présenté leurs travaux.

Finalement ont été présentées

- 3 communications concernant l'interdisciplinarité :
 - **Amélie ALLARD** : « *Les unités de mesure comme moyen de contrôle lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique* ».
 - **Valerie HENRY, Abir BOU ABDO, Christophe DUBUSSY, Jérémy DEHON** : « *L'équation à la croisée des mathématiques et de la chimie* »
 - **Asmaa RAIHANE, Mustapha EL HAROUSSI et Saida ABOUHANIFA** (voir Projet Spécial 1) : « *Évaluations de l'impact d'intégration de la robotique sur le développement des compétences des élèves dans l'enseignement interdisciplinaire des mathématiques en projet lié aux STEM* »
- 4 communications concernant la modélisation :
 - **Gabriel LECOMPTE** : « *Évaluer la modélisation informatique avec une approche interdisciplinaire* ».
 - **Sonia YVAIN-PRÉBISKI** : « *Le processus de mathématisation dans l'élaboration d'un problème extra-mathématique pour l'école primaire* ».
 - **Marina DE SIMONE, Yana LACEK, Laura WEISS** : « *Le processus de dévolution d'un problème extra-mathématique et ses influences sur l'entrée dans la situation par les élèves : deux études de cas* ».
 - **Pierre CHANET** (voir Projet Spécial 1) : « *Comment dévoluer aux élèves le travail de mathématisation horizontale ?* ».

Les présentations ont été organisées sur les 5 séances prévues pour le travail du groupe GT5, laissant la dernière pour une synthèse du travail. Compte tenu du temps alloué au groupe de travail et du nombre de contributions, les participants ont apprécié de pouvoir échanger sur les différentes communications.

Dans les actes figurent aussi les communications non présentées suivantes :

- **Nicole Aimée AMBOMO, Patrick TCHONANG YOUKAP, Jean-Berky NGUALA** : « *Étude du rapport personnel à l'interdisciplinarité entre les mathématiques et la chimie : le cas des enseignants de lycée au Cameroun* ».
- **Mouna HIDOSSI et Inen AKROUTI** : « *Les défis de l'enseignement-apprentissage de la physique face à l'interdépendance entre les concepts physiques et mathématiques* ».

- **Désirée Bethel MESSOU** : « *Interdisciplinarité dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques : analyse des difficultés* ».

2. *Participants et thématiques abordées*

Lors de première séance, une introduction a été faite sur les concepts d'interdisciplinarité et de modélisation, lors de laquelle les participants ont pu s'exprimer sur le sens de ces termes. Ainsi, sous le fil rouge de la question : « la modélisation peut-elle être un levier pour l'interdisciplinarité et à quelles conditions ? », il a été rappelé la terminologie dense (pluri-, multi-, trans-, inter-) et pas toujours univoque de l'interdisciplinarité, ainsi que le questionnement lié à la modélisation qui peut être vue aussi bien comme outil des mathématiques que comme objet d'enseignement.

Le travail de notre groupe a débuté par la contribution de G. Lecompte qui a présenté des définitions du modèle et de la modélisation de manière interdisciplinaire. Avec l'apport des définitions proposées par le domaine de l'enseignement de l'informatique, celui du domaine des mathématiques et de l'enseignement des sciences et technologies, le groupe a discuté du rapport au référent (Roy, 2018) et son équivalence avec les fragments de réalité proposés par la théorie de la mathématisation avec ses deux aspects (Yvain-Prébiski, 2023). Le groupe s'est aussi interrogé sur la portée de la typologie des modèles d'Harrison et Treagust (2000) en le comparant avec les registres sémiotiques d'un même modèle au sens de Duval (1993) afin de s'interroger sur l'équivalence de modèles.

Les deux communications suivantes ont porté davantage le regard sur la question des liens entre disciplines avec les contributions de Valérie Henry et al. et Amélie Allard.

V. Henry, A. Bou Abdo, C. Dubussy et J. Dehon s'intéressent aux liens entre l'équation en mathématiques et l'équation chimique. Un bref résumé historique de l'apparition des équations chimiques dans la communauté scientifique a permis de mettre en lumière l'utilisation croissante du symbolisme mathématique dans ce contexte, suivi d'une distanciation progressive. Il est ainsi apparu que le processus de modélisation horizontale (Yvain-Prébiski, 2023) de la réaction chimique a été stabilisé dans la sphère savante (chimie) pour mener à l'écriture actuelle de l'équation chimique. Henry et al. ont ensuite proposé une formalisation mathématique de la démarche de pondération d'une équation chimique, décrivant ainsi un processus de modélisation verticale (ibidem). Cette formalisation constitue également une technologie au sens de Chevallard (1999), justifiant les techniques de pondération par tâtonnement en vigueur actuellement dans l'enseignement belge. Elle ouvre aussi la porte à une technique de résolution par système d'équations, actuellement explorée par les auteurs pour son potentiel didactique interdisciplinaire.

La présentation d'Amélie Allard, quant à elle, a exploré la perspective que des habiletés issues de la physique peuvent servir comme soutien et enrichissement à l'activité mathématique lors de la résolution de problèmes de calcul différentiel à contexte physique. La présence d'un contexte physique entraîne une modification sémantique des symboles algébriques et nombres en jeu, puisqu'ils représentent des grandeurs physiques – qui possèdent des unités de mesure – plutôt que des quantités abstraites. L'exercice d'un contrôle sémantique ancré à la présence d'unités de mesure sur divers éléments du problème de l'avion (utilisé comme exemple pendant la présentation), tels que l'équation et le schéma présents dans l'énoncé, permet de voir au-delà des mathématiques et d'accéder au phénomène physique exploité par celles-ci. Cet accès au contexte physique lui donne sa valeur, sa pertinence, puisqu'il cesse d'être considéré comme un simple habillage, ignoré pendant la résolution (purement) mathématique.

La présentation d'Asmaa Raihane visait à explorer l'apport d'un projet interdisciplinaire en STEM basé sur la robotique pour évaluer et développer les compétences en mathématiques chez des élèves du secondaire qualifiant.

Les trois présentations sur la modélisation étaient particulièrement proches et pourront probablement aboutir à des travaux ultérieurs en synergie. En effet aussi bien Chanet, De Simone et al et Yvain-Prébiski se sont intéressés à la modélisation mathématique d'une situation extra-mathématique, le premier à propos d'une chronologie dans un parc d'attraction, la deuxième à propos de la fidélité d'un modèle réduit de la tour Eiffel et la dernière sur le temps de préparation de pizzas pour honorer une commande. À partir d'observations de classes et d'une volonté que les élèves mettent du sens en situation de résolution de problème, P. Chanet a présenté un dispositif de situation extra-mathématique ouverte (en vidéo) dans le but de questionner les processus d'enseignement-apprentissage de la modélisation. Il a exploré spécifiquement l'étape de mathématisation horizontale (Yvain-Prébiski, 2023), un des enjeux majeurs, souvent invisibilisé, du processus de modélisation. Dans leur présentation, De Simone et al. analysent le processus de dévolution (Brousseau, 1990) d'un problème extra-mathématique dont la résolution requiert la mise en œuvre d'un ou plusieurs processus de modélisation au sens de Blum et Leiss (2007). L'expérimentation du problème de la « tour Eiffel » (la fidélité d'un modèle réduit de la tour Eiffel) dans deux classes d'élèves de 14 ans de niveau différent a montré la nécessité d'une dévolution aux élèves les aidant à se construire des représentations mentales (composante cognitive au sens de Borromeo Ferri, 2006) pour le choix des fragments de réalité pertinents pour arriver à un problème susceptible de traitement mathématique (Yvain-Prébiski, 2021). La présentation d'Yvain-Prébiski a montré comment la création d'une situation extra-mathématique amène, dès son élaboration, à considérer les rapports dialectiques entre la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale, et analyse l'impact des choix des concepteurs sur l'activité des élèves.

Dans les trois cas, des réflexions ont été menées sur comment faire travailler des classes d'élèves sur de telles situations et les faire aboutir à un problème mathématique ou du moins susceptible d'une résolution mathématique sans que les enseignants ne se substituent au travail des élèves en réduisant la richesse de la situation à un problème évidemment mathématique portant sur une unique question dont la réponse est à calculer.

III. CONCLUSIONS DES DISCUSSIONS ET PERSPECTIVES

Le groupe de travail a permis de nombreuses interactions qui ne peuvent être toutes relatées dans ce bilan.

Si les séances du GT5 se sont révélées très riches, force est de constater que les questions initialement posées pour lancer les travaux (voir ci-dessus) n'ont pas reçu de réponses formalisées, même si de nombreux éléments de réponse se sont trouvés dans les discussions du groupe. Ainsi les deux premières sur la modélisation ont reçu de facto des pistes de réponses, par exhibition pourrait-on dire, puisque les trois contributions montraient des cas d'école où une modélisation-processus a été un objet d'enseignement, avec des réussites mais aussi des difficultés. Il est plus difficile de répondre à la troisième à partir des contributions présentées et le groupe ne l'a pas discutée alors qu'elle avait été proposée comme fil rouge. L'ensemble des participants ont partagé l'importance de faire prendre conscience aux élèves de la démarche de modélisation qui est présente à chaque fois que l'on applique les mathématiques à des problèmes tirés de la « vie réelle » (c'est-à-dire des situations non mathématiques), et de leur fournir un cadre pour réfléchir à la mise en place de cette démarche.

En ce qui concerne les deux questions ayant trait à l'interdisciplinarité, les présentations ne les ont pas abordées directement, même si Allard et Raihane ont effleuré la quatrième en exemplifiant des

validations réciproques entre physique et mathématique et entre informatique et mathématiques. L'absence des participants potentiels qui s'intéressaient aux difficultés des enseignants pour prendre en compte l'interdisciplinarité dans leur enseignement n'a pas permis d'aborder la dernière question, alors qu'elle pose malheureusement d'énormes difficultés dans les classes.

Des discussions entre les participants se sont essentiellement appuyées sur les expériences de chacun transmises à travers les différentes contributions, les cadres théoriques sur lesquels elles s'appuient ayant été moins abordés. Le prochain EMF pourrait s'attacher à renforcer cette direction dans le but de donner une plus forte cohésion dans les études et de mieux comprendre les complémentarités et spécificités des travaux de chaque pays.

Le fil rouge proposé « la modélisation peut-elle être un levier pour l'interdisciplinarité et à quelles conditions ? », bien que non abordé frontalement, a permis des échanges riches croisant à la fois les enjeux de la modélisation mathématique et ceux de l'interdisciplinarité. Il serait intéressant de poursuivre de telles réflexions lors du prochain colloque EMF.

RÉFÉRENCES

- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95. <https://doi.org/10.1007/BF02655883>
- Blum, W. et Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? Dans C. Haines, P. Galbraith, W. Blum et S. Khan (dir.), *Mathematical modelling* (p. 222-231). Elsevier. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.
- Harrison, A. G. et Treagust, D. F. (2000). A typology of school science models. *International Journal of Science Education*, 22(9), 1011-1026.
- Roy, P. (2018). *Modèles et modélisation en physique dans les pratiques d'enseignement d'enseignants québécois du secondaire : le cas de la cinématique* [Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke].
- Yvain-Prébiski, S. (2023). La mathématisation horizontale : quels apports pour une recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation mathématique. Dans F. Vandebrouck et M.-L. Gardes (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Preuve, modélisation et technologies numériques. XXI^e école d'été de didactique des mathématiques, 18-24 octobre 2021, Ste-Marie de Ré* [Volume des séminaires et des posters] (p. 209-218). IREM de Paris. <http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/ACTESEE21.pdf>
- Yvain-Prébiski, S. (2021). Didactical adaptation of professional practice of modelling: A case study. Dans F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, K. L. Wong (dir.), *Mathematical modelling education in East and West. International Perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (p. 305-319). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_26

LES UNITÉS DE MESURE COMME MOYEN DE CONTRÔLE LORS DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES À CONTEXTE PHYSIQUE

| ALLARD* AMÉLIE

Résumé | L'interdisciplinarité entre les mathématiques et la physique est généralement étudiée avec la perspective des mathématiques servant la physique. Cet article se penche, au contraire, sur la possibilité d'utiliser des habiletés issues de la physique comme soutien à l'activité mathématique. Notamment, il porte sur le potentiel des unités de mesure comme moyen d'améliorer le contrôle des étudiants sur leur activité mathématique lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique de niveau collégial.

Mots-clés : contrôle, unités de mesure, résolution de problèmes, contexte physique, postsecondaire

Abstract | The notion of interdisciplinarity between mathematics and physics is usually regarded in terms of how mathematics can serve physics. In contrast, this article tackles the possibility of using skills stemming from physics to support mathematical activities. Specifically, it examines the potential of units of measurement as means of improving students' control over their mathematical activity when solving mathematical problems set within a physical context at the post-secondary level.

Keywords: control, units of measurement, problem solving, physical context, post-secondary

I. CONTEXTE DE L'ÉTUDE

Au Québec, les programmes d'études collégiales¹ (étudiants de 17 à 19 ans) sont établis par le ministère de l'Enseignement supérieur (MES) et communiqués aux établissements collégiaux par le biais de devis ministériels. Cependant, chaque établissement est responsable de la mise en œuvre des activités d'apprentissage (les cours) des différents programmes qu'il offre. Le programme pré-universitaire *Sciences de la nature* a été récemment révisé ; le nouveau devis a été ratifié par le MES en décembre 2021, avec une implémentation obligatoire dès l'automne 2024. À travers ce remaniement, l'approche programme est restée une perspective théorique importante qui consiste en une « approche axée sur [...] le décroisement des disciplines, en vue de l'intégration des apprentissages. » (Office québécois de la langue française, 2012, s. d.) L'interdisciplinarité semble ainsi être un tenant de l'approche programme, ce qui est soutenu par le deuxième but de la formation spécifique du programme *Sciences de la nature* qui est de « traiter de situations complexes dans une perspective d'interdisciplinarité. » (MES, 2022, p. 5) Dans le devis ministériel, le plus grand nombre de liens interdisciplinaires se trouvent entre les mathématiques et la physique. De la physique, les mathématiques puisent des contextes offrant l'opportunité aux étudiants d'utiliser les outils mathématiques en apprentissage, notamment par la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique. Quant à la physique, elle s'appuie grandement sur le formalisme mathématique, notamment dans la résolution de problèmes physiques, puisque les lois de la physique sont fréquemment exprimées en utilisant des symboles algébriques et les règles des mathématiques (Sokolowski, 2021). Cependant, des différences existent bel et bien entre les formalismes mathématique et physique, notamment au niveau sémantique, puisque les « physicists "load" physical meaning onto both symbols and numbers in a way that mathematicians usually do not. » (Redish et Kuo, 2015, p. 565) Ce sens physique supplémentaire se manifeste explicitement par la présence d'unités de mesure, puisque les grandeurs

* Université du Québec à Montréal (UQÀM) – Canada – allard.amelie.3@courrier.uqam.ca

¹ Les études collégiales se situent entre les études secondaires et les études universitaires.

physiques « *are transformed into numbers by measurement [and] as a result quantities in science tend to have units.* » (Redish, 2021, p. 314)

Cependant, en mathématiques, au contraire de la physique, un travail approfondi sur les unités de mesure n'est généralement pas nécessaire, puisque « *math in math class tends to be about numbers* » (Redish, 2021, p. 314) La présence, chez les étudiants de mathématiques, de difficultés entourant les unités n'est donc pas surprenante. À titre d'exemple, l'étude de Dorko et Speer (2015) a montré que certains étudiants (d'un niveau scolaire équivalent au collégial québécois) s'approprient inadéquatement les unités de longueur en exprimant la mesure d'une surface ou d'un volume avec une unité de longueur (e.g. l'aire du rectangle est de 20 **cm**). Dans leur discussion, les chercheuses avancent que considérer les unités de chaque nombre – ici, les mesures des côtés – lors du calcul numérique pourrait améliorer l'emprise, le *contrôle*, des étudiants sur leur activité mathématique (e.g. $4 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}^2$) ; c'est-à-dire renforcer la signification contextuelle des nombres (l'aspect sémantique) en mettant de l'avant les liens entre la dimensionalité, les règles des exposants et les unités. Dans l'étude de Rowland (2006), une autre possible utilité des unités de mesure est avancée. Le chercheur propose que les unités de mesure pourraient permettre aux étudiants de mieux contrôler leur résolution en les utilisant comme moyen de vérification : « *while an equation can be wrong if the units are right, an equation can't be right if the units are wrong.* » (Rowland, 2006, p. 553) D'une part, la présence d'unités de mesure en mathématiques peut entraîner des difficultés chez les étudiants, mais, d'autre part, elle semble avoir le potentiel de leur permettre d'acquérir un meilleur contrôle sur leur résolution. Ainsi, l'objectif de cette recherche est d'explorer le potentiel des unités de mesure comme outils de contrôle lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique de niveau collégial ; c'est-à-dire que nous tentons de répondre à la question *La présence d'unités de mesure offre-t-elle des opportunités de contrôle sur l'activité mathématique lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique ?*

II. REPÈRES THÉORIQUES

Afin de mener à bien l'objectif de recherche énoncé précédemment, la notion de contrôle au sens de Rhéaume (2020) – qui est basée la conceptualisation du contrôle élaborée par Saboya (2010) – a été utilisée. Selon Rhéaume, il existe différents types de contrôle dans la résolution de problèmes, dont le contrôle structural et le contrôle opérationnel. Le contrôle structural imbrique « à la fois le processus de représentation du problème et le contrôle exercé sur cette représentation grâce à un engagement réfléchi. » (p. 42) L'engagement réfléchi fait référence à un positionnement particulier de l'étudiant face à un problème mathématique, qui est « central et inhérent à la mobilisation de l'ensemble des composantes que propose la notion de contrôle. » (p. 43) Ces deux contrôles se déclinent en diverses composantes dont le contrôle sémantique qui est d'intérêt dans ce texte. Ainsi, à la suite de la lecture de l'énoncé du problème, l'étudiant doit se représenter ce dernier, c'est-à-dire qu'il doit d'abord en interpréter le contexte et sélectionner les informations pertinentes selon celui-ci. Cela requiert un contrôle sémantique, c'est-à-dire « la capacité à ne pas se détacher de la signification des grandeurs qu'on manipule. » (Saboya, 2010, p. 411) Par exemple, dans la résolution de problèmes algébriques, le contrôle sémantique s'appuie « sur une compréhension des relations entre les données et des notations symboliques associées lors de la phase de mathématisation et d'écriture de l'équation. » (Saboya et al., 2015, p. 63) Ce contrôle continue à s'exercer lorsque l'étudiant organise logiquement (selon lui, du moins) les informations sélectionnées afin de construire sa représentation du problème. Le contrôle structural est dynamique, puisqu'il peut se manifester au début de la résolution du problème, ou tout au long de celle-ci, si l'étudiant fait des allers-retours entre ses calculs et (sa représentation de) l'énoncé du problème.

Le contrôle opérationnel, quant à lui, « implique à la base un engagement réfléchi, orienté cette fois vers le savoir quand et comment utiliser les mathématiques lors de l'opérationnalisation » (Rhéaume, 2020, p. 54) et peut faire intervenir plusieurs autres composantes que le contrôle sémantique, dont le discernement et le contrôle sur les nombres et opérations². Le discernement, en tant que composante du contrôle opérationnel, se traduit « par une capacité à choisir parmi différentes écritures et/ou différentes stratégies celle qui est la plus appropriée, la plus efficace et la moins coûteuse en temps en ayant préalablement écarté celles qui sont inappropriées. » (Saboya, 2010, p. 408) Le contrôle sur les nombres et opérations se traduit par « un engagement axé exclusivement sur le traitement des nombres et des écritures (opérations et manipulations des nombres) lors des calculs. » (Rhéaume, 2020, p. 71-72).

Les recherches faisant usage de la notion de contrôle comme assise théorique (e.g. Saboya, 2010 ; Dufour et Jeannotte, 2013 ; Saboya et Rhéaume, 2015 ; Saboya et al., 2015 ; Morand, 2020 ; Rhéaume, 2020) concernent spécifiquement la résolution de problèmes en mathématiques. En didactique de la physique, Van Heuvelen et Maloney (1999) abordent l'information contenue dans les équations physiques sans parler explicitement de contrôle. Ils proposent de présenter aux étudiants une équation afin que ces derniers construisent un schéma, un graphique ou une description en mots d'un phénomène physique cohérent avec l'équation fournie (plusieurs réponses sont possibles). Les auteurs affirment que les unités de mesure sont primordiales pour accéder à la profondeur conceptuelle (i.e. le sens physique) encodée dans une équation physique : « *units become more meaningful since they become the key to determining what physical quantities are involved [...] they become useful sources of information.* » (p. 254) Bref, les unités sont la clef permettant aux étudiants d'exercer un contrôle sémantique sur l'équation fournie et d'ainsi approcher le phénomène physique qu'encapsule l'équation.

III. ÉLÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES

Afin d'observer les opportunités de contrôle qu'offrent la présence d'unités de mesure lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique de niveau collégial, le manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent* – qui est rendu à sa neuvième édition – des auteurs S. Fortin et G. Poliquin (2023) a été sélectionné pour l'analyse. Ce manuel mentionne explicitement, dans ses premières pages, contenir une grande quantité de problèmes impliquant les sciences (naturelles et humaines). Ces problèmes sont aisément reconnaissables, car un pictogramme les accompagne indiquant la discipline dont ils relèvent (e.g. deux rouages pour la physique). Dans le manuel, un total de 106 problèmes à contexte physique sont ainsi identifiés. Ce corpus de problèmes a été soumis à une analyse de contenu (Bardin, 2013) afin de sélectionner un nombre restreint de problèmes pouvant le représenter fidèlement ; c'est-à-dire recouvrant l'ensemble des demandes mathématiques (e.g. calcul d'une limite, dérivation d'une fonction) comprises dans celui-ci. Nous avons fait le choix de discriminer les problèmes par leurs demandes mathématiques, puisque les composantes du contrôle sollicitées – et leurs manifestations – varient selon l'activité mathématique effectuée lors de la résolution (e.g. Saboya et Rhéaume, 2015). En plus de permettre la sélection d'une dizaine de problèmes représentatifs du corpus, l'analyse de contenu réalisée a permis de rassembler des données qualitatives et quantitatives autour d'autres attributs des 106 problèmes mathématiques à contexte physique, telles que la nature des unités de mesure utilisées et la manière dont elles sont présentées dans les énoncés. Une fois sélectionnée, cette dizaine de problèmes a été soumise à une analyse sous l'angle d'un contrôle passant par les unités de mesure, c'est-à-dire que nous avons mis l'accent sur l'exploration des possibilités d'une action contrôlée prenant ancrage dans la considération des unités de mesure lors de leur

² Avec le contrôle sémantique, le discernement et le contrôle sur les nombres et opérations sont d'intérêt dans ce texte.

résolution. La réalisation de cette analyse a donné naissance à un schéma récapitulatif des possibles manifestations d'un contrôle basé sur la présence d'unités de mesure pour chacun des 10 problèmes mathématiques à contexte physique. Ces schémas mettent en lumière les composantes du contrôle qui sont sollicitées lors de la résolution des problèmes (selon leurs demandes mathématiques) et leurs manifestations concrètes en lien avec les unités de mesure. Dans la prochaine section, nous présentons une partie de l'analyse d'un de ces problèmes.

IV. ANALYSE D'UN PROBLÈME MATHÉMATIQUE À CONTEXTE PHYSIQUE

Notre choix s'est porté sur le riche problème de l'avion (voir figure 1, où nous avons fait ressortir en bleu les unités) puisqu'il couvre un large éventail de demandes mathématiques (e.g. démonstration d'un résultat **(b)**, résolution d'une équation **(d.i)**). De plus, il permet une avancée dans la conceptualisation du contrôle, notamment en ce qui concerne le contrôle sémantique.

Problème de l'avion

Un avion, atterrissant sur une piste PQ longue de 1,5 **km**, touche le sol au point S. La distance x , en **mètres**, sur la piste entre l'avion et le point P est donnée par $x(t) = 900 + 75t - 2,5t^2$, où t est le temps, en **secondes**, écoulé depuis l'atterrissage jusqu'à l'immobilisation de l'appareil.

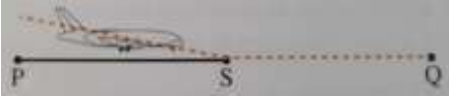
a. Déterminer la distance :
i. entre P et S;
ii. parcourue par l'avion pendant les 4 premières **secondes** après qu'il a touché le sol.

b. Démontrer qu'à partir du moment où l'avion atterrit, il ralentit.

c. Déterminer la vitesse de l'avion, en **kilomètres par heure (km/h)**,
i. 2 **secondes** après l'atterrissage; ii. 8 **secondes** après l'atterrissage.

d. Déterminer la distance entre P et l'avion :
i. lorsque l'avion a une vitesse de 54 **km/h**; ii. lorsque l'avion va s'immobiliser.

e. Déterminer la distance maximale entre P et S pour que l'avion puisse s'arrêter avant d'atteindre l'extrémité Q de la piste.



Tiré du manuel *Calcul différentiel* (Charron-Parent, 2023, p. 296)

Figure 1 – Énoncé du problème de l'avion

L'énoncé est constitué de deux parties : une mise en situation initiale accompagnée d'un schéma et huit sous-questions **(a.i à e)**. La mise en situation traite du mouvement horizontal d'un avion lors de son atterrissage sur une piste avec un schéma illustrant cette trajectoire. La figure 2 présente le schéma récapitulatif de l'analyse sous l'angle du contrôle de ce problème.

GT5 | Modélisation et interdisciplinarité
488 | EMF 2025

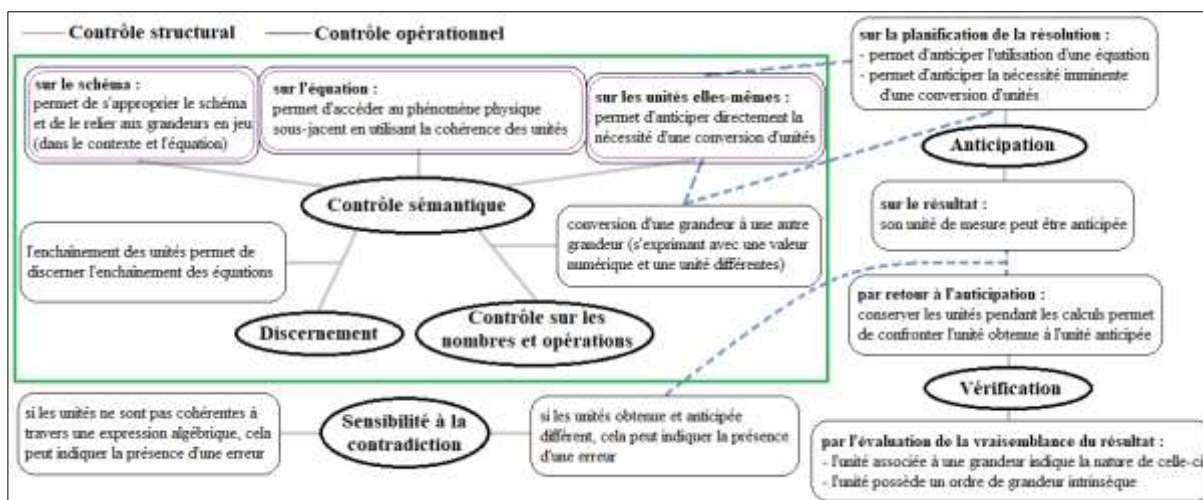


Figure 2 – Manifestations d'un contrôle par les unités de mesure lors de la résolution du problème de l'avion

Les composantes du contrôle sollicitées lors de la résolution de ce problème sont représentées dans les bulles ovales, tandis que les bulles rectangulaires – reliées par un trait plein – comprennent leur(s) manifestation(s) suscitée(s) par la présence d'unités de mesure. Les traits pointillés indiquent un chevauchement ou un rapprochement entre les manifestations de différentes composantes. Dans le cadre de ce texte, nous détaillerons les éléments compris dans la section encadrée en vert du schéma³, car cette dernière illustre une avancée dans la conceptualisation du contrôle, notamment autour du contrôle sémantique.

Un contrôle sémantique peut se mettre en place à trois différentes occasions et revêtir différentes formes lors du contrôle structural (voir les trois encadrés mauves de la figure 2). Dans la mise en situation initiale du problème de l'avion, les unités présentes sont le kilomètre – par le biais de son symbole – le mètre et la seconde (voir figure 1). D'abord, la présence du mètre et du kilomètre comme unités de mesure de distance permet d'anticiper la nécessité d'une conversion entre ces dernières à un moment ou à un autre de la résolution du problème. Une lecture des sous-questions du problème de l'avion confirme cette nécessité, puisque des vitesses sont exprimées en kilomètres par heure plutôt qu'en mètres par seconde (sous-questions **c** et **d.i**). Ici, le contrôle sémantique se manifeste par la reconnaissance de la coexistence de différentes unités de mesure de même nature, ce qui entraîne la reconnaissance d'une éventuelle conversion d'unités. Ensuite, un contrôle sémantique peut s'exercer sur le schéma lors du décodage de ses éléments et de leur association aux informations contenues dans l'énoncé. Dans ce schéma, la ligne pointillée représente la trajectoire générale qui sera suivie par l'avion lors de son atterrissage sur la piste PQ. La mise en commun de la phrase « le temps, en secondes, écoulé depuis l'atterrissage jusqu'à l'immobilisation de l'appareil » et de la phrase « un avion [...] touche le sol au point S » permet de comprendre que le temps commence à s'écouler au point S (voir figure 3) ; c'est-à-dire qu'à $t = 0$ s, l'avion se trouve au point S. Ainsi, pour un certain moment $t > 0$ s, l'avion se trouve sur la piste d'atterrissage entre les points S et Q, ce qui nous permet de représenter la grandeur $x(t)$, soit la distance entre le point P et l'endroit sur la trajectoire (ligne pointillée) où l'avion se situe à ce moment. La longueur de la piste peut également être ajoutée au schéma (voir figure 3). Bref, l'inclusion des unités dans le schéma permet de bien se l'approprier par la saisie rapide des grandeurs en jeu (distance et temps).

³ L'observation de ces éléments proviennent des sous-questions **b**, **d.i** et **e** du problème de l'avion.

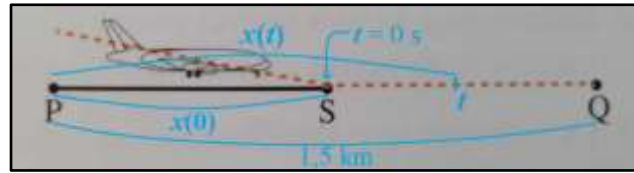


Figure 3 – Schéma (enrichi) du problème de l'avion

Enfin, les unités de mesure peuvent permettre l'exercice d'un contrôle sémantique sur l'équation donnée dans la première partie de l'énoncé, et l'établissement de liens entre cette dernière et la schématisation du problème. Par le recours à la cohérence des unités – stipulant que seulement des termes possédant la même unité peuvent être additionnés ou soustraits – nous pouvons accéder à la signification contextuelle des nombres présents dans l'équation $x(t) = 900 + 75t - 2,5t^2$. Puisque l'unité de x est le mètre, le 900 représente également des mètres, indiquant qu'il s'agit d'une distance. Nous pouvons aller plus loin en constatant qu'au temps initial ($t = 0$ s), nous obtenons $x(0) = 900$ m – puisque les deux autres termes de l'équation contiennent une multiplication par t – ce qui représente, en contexte, la distance entre P et S où l'avion touche initialement le sol. En outre, par la cohérence des unités, le terme $75t$ doit également s'exprimer en mètres, ce qui, combiné avec le fait que t s'exprime en secondes, implique que 75 représente des mètres par seconde, indiquant qu'il s'agit d'une vitesse. Afin d'arriver à cette conclusion, il faut évidemment savoir qu'une vitesse consiste en le rapport d'une distance par la durée prise pour la parcourir. Par un argument similaire, nous pouvons déduire que 2,5 représente des mètres par seconde carrée, indiquant qu'il est lié à l'accélération, qui est négative dans ce cas (décélération). Cependant, le lien entre les mètres par seconde carrée et l'accélération ne peut pas être facilement établi à partir de la vie courante; il s'agit d'une connaissance scolaire : l'accélération consiste au rapport d'une vitesse par une durée, c'est-à-dire le rapport d'une distance par une durée au carré. Ainsi, l'exercice d'un contrôle sémantique sur l'équation permet d'accéder au phénomène physique encapsulé par celle-ci (distance parcourue = distance initiale + vitesse (initiale) · temps + accélération · temps²).

La composante sémantique peut également être rattachée à un contrôle opérationnel. Par exemple, afin de résoudre la sous-question **b**, l'équation issue de la mise en situation initiale doit être dérivée au moins une fois, afin d'obtenir une équation sur la vitesse de l'avion selon le temps écoulé (ceci est une connaissance scolaire). Un contrôle sémantique peut alors s'exercer sur la nouvelle équation,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 75 - 5t$$

ce qui permet de confirmer que le 75 représente des mètres par seconde et indique une vitesse. De plus, il s'agit de la vitesse initiale de l'avion, puisque $v(t = 0 \text{ s}) = 75 \text{ m/s}$, ce qui correspond à la vitesse au moment où l'avion touche le sol au point S. Par la cohérence des unités à travers la nouvelle équation, nous pouvons déterminer que le nombre 5 représente des mètres par seconde carrée, puisque t s'exprime en secondes et que le terme doit posséder l'unité mètre par seconde ($\text{m/s}^2 \cdot \text{s} = \text{m/s}$). Tel qu'abordé précédemment, le mètre par seconde carrée est une unité d'accélération. L'accélération étant négative, la vitesse de l'avion diminue au fil du temps, du point S jusqu'à son point d'arrêt situé sur la piste d'atterrissage PQ (entre le point S et le point Q). Nous pouvons également remarquer que l'accélération est constante dans cette situation, puisque

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -5 \text{ m/s}^2 \text{ pour tout } t.$$

Ainsi, c'est par l'exercice d'un contrôle sémantique sur les équations (vitesse et accélération) que nous pouvons démontrer que l'avion ralentit dès qu'il touche le sol.

Dans la sous-questions **d.i**, une vitesse est explicitement donnée (54 km/h) et une distance est demandée. Cependant, par un contrôle sémantique sur les unités dans lesquelles s'expriment les grandeurs physiques figurant dans les équations de distance et de vitesse (par rapport au temps), nous pouvons anticiper la nécessité immédiate de convertir la vitesse de 54 km/h en mètres par seconde afin de pouvoir faire usage de ces équations. Évidemment, afin de réaliser adéquatement les conversions, une bonne connaissance des unités de mesure, notamment le SI, est cruciale. Un contrôle sur les nombres et opérations, en conjonction avec un contrôle sémantique, doit donc se mobiliser lors de la conversion d'unités (voir l'annexe) afin d'associer les valeurs numériques adéquates entre les grandeurs équivalentes de même nature (1 h = 3600 s ; 1 km = 1000 m) et de réaliser les opérations appropriées pour obtenir la grandeur convertie dans l'unité voulue

$$\left(\frac{54 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{54\,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 15 \text{ m/s}\right).$$

Excluant la conversion, la sous-question **d.i** demande de déterminer une distance (m) à partir d'une vitesse (m/s). Puisqu'il n'y a aucune équation comprenant une dépendance directe entre ces deux grandeurs physiques, l'enchaînement de deux équations est nécessaire ; ce qui peut être plus facilement discerné par la considération des unités des grandeurs présentes dans les équations. À partir de la vitesse en mètres par seconde (15 m/s), nous pouvons discerner que l'équation reliant la vitesse de l'avion (en m/s) au temps écoulé (en s) doit d'abord être utilisée, afin d'obtenir le moment où l'avion possède cette vitesse ($v(t) = 15 \text{ m/s} = 75 - 5t \rightarrow t = 12 \text{ s}$) ; c'est-à-dire que résoudre cette équation nous permet d'obtenir une grandeur exprimée en s (un temps) à partir d'une grandeur exprimée en m/s (une vitesse). Avec cette information en main, nous pouvons discerner que l'équation reliant la distance (en m) au temps écoulé (en s) doit ensuite être utilisée, afin d'obtenir la distance entre le point P et l'avion à ce moment ($x(t = 12 \text{ s}) = 900 + 75(12) - 2,5(12)^2 = 1440 \text{ m}$) ; c'est-à-dire que substituer une grandeur exprimée en s (un temps) dans cette équation permet d'obtenir une grandeur en m (une distance). Ainsi, considérer l'enchaînement des unités de mesure des grandeurs physiques (m/s $\rightarrow$ s $\rightarrow$ m) – plutôt que les grandeurs elles-mêmes (vitesse $\rightarrow$ temps $\rightarrow$ distance) – peut permettre de discerner plus facilement l'enchaînement des équations.

Afin de répondre à la sous-question **e**, un contrôle sémantique doit être mobilisé. Il faut comprendre implicitement que toutes les conditions (vitesse, accélération, durée de l'atterrissage) de cette nouvelle situation restent les mêmes que celles de la situation initiale, à l'exception de la distance entre les points P et S ($x(0)$) qui change. Plus précisément, cette distance augmente puisque nous cherchons à la maximiser de telle manière que l'avion s'immobilise à l'extrémité Q de la piste, au lieu d'un point situé entre S et Q. La figure 4 illustre la situation initiale et celle décrite en **e**.

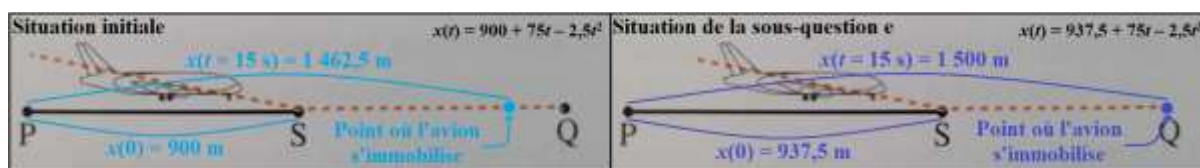


Figure 4 – Schémas de la situation initiale et de la situation décrite par la sous-question **e** du problème de l'avion⁴

Comme l'est présenté dans cette figure, un contrôle opérationnel peut être exercé par le biais d'un contrôle sémantique autour du schéma, afin d'accéder à une meilleure compréhension de la situation décrite par la sous-question **e**. Le schéma initial peut être revisité et enrichi par des informations issues de la résolution de sous-questions précédentes, en plus d'être comparé à la nouvelle situation (l'avion

⁴ Les informations supplémentaires ajoutées au schéma initial ont été obtenues lors de la résolution des sous-questions **a.i** et **d.ii** (voir en annexe).

s'immobilise au point Q, car $x(0)$ est augmenté). De surcroît, l'équation décrivant la situation initiale peut être modifiée afin d'obtenir l'équation reflétant la nouvelle situation, c'est-à-dire que la distance initiale (entre les points P et S) passe de 900 m à 937,5 m telle que l'avion s'immobilise à l'extrémité (point Q) de la piste après un atterrissage de 15 s, plutôt que plusieurs mètres avant l'extrémité (voir la résolution en annexe). Évidemment, effectuer cette modification requiert un bon contrôle sémantique sur l'équation et une bonne compréhension de la nouvelle situation et de ses liens avec la situation initiale.

V. DISCUSSION ET CONCLUSION

L'interdisciplinarité entre les mathématiques et la physique est au cœur de ce texte, car elle est centrale dans le nouveau programme du collégial au Québec. Généralement, celle-ci est étudiée avec la perspective des mathématiques servant la physique. Cet article, au contraire, se penche sur la possibilité d'utiliser des habiletés issues de la physique comme soutien à l'activité mathématique dans des problèmes mathématiques à contexte physique. Les unités de mesure étant intrinsèques à la physique, nous étudions le potentiel de celles-ci pour favoriser le développement d'un contrôle, à fois structural et opérationnel, qui s'appuie à la fois sur les mathématiques et sur la physique rendant ainsi possible une articulation entre ces deux disciplines. Dans la section précédente, nous avons présenté certains résultats de l'analyse sous l'angle d'un contrôle ancré aux unités de mesure d'un problème mathématique à contexte physique qui contribuent à une avancée sur la conceptualisation du contrôle, notamment sous l'angle du contrôle sémantique – qui est couplé à la fois au contrôle structural et opérationnel. Trois manifestations du contrôle sémantique ont été relevées : sur l'équation, sur le schéma et sur les unités elles-mêmes. Le contrôle sur l'équation, se mettant en place grâce aux unités de mesure par l'exercice d'un contrôle sémantique, semble être une spécificité du contrôle structural dans les problèmes mathématiques à contexte physique. Nos résultats rejoignent les propos de didacticiens de la physique qui précisent que réaliser un exercice d'interprétation d'une équation, qui passe par les unités de mesure, amènent les étudiants à élargir leur vision de cette dernière : « *The equation description of a process is now regarded more as a short story about some aspect of life – about a physical process – and less as a set of symbols that must be solved numerically to answer a question.* » (Van Heuvelen et Maloney 1999, p. 255).

Ainsi, pour les étudiants de mathématiques, porter leur attention sur l'équation fournie et y exercer un contrôle sémantique par l'entremise des unités de mesure associées pourrait permettre d'approfondir leur appréhension du contexte physique des problèmes mathématiques (à contexte physique) qui leur sont offerts. Soulignons que dans ce type de problèmes, où une équation accompagne la mise en situation initiale, l'équation offerte n'a pas vraiment besoin d'être comprise afin d'être utilisée pendant la résolution. Puisqu'il s'agit de problèmes visant l'application d'outils mathématiques en apprentissage, le contexte (encapsulé par l'équation) n'est donc pas réellement nécessaire à la résolution ; ce qui semble être contreproductif à l'atteinte d'une interdisciplinarité mathématiques-physique. Cependant, mettre en place un contrôle de nature sémantique sur les termes de l'équation par le biais des unités de mesure des variables y figurant – et leur cohérence – permet d'accéder au phénomène physique encodé dans l'équation ; ce qui permet d'atteindre une meilleure compréhension de l'équation et du phénomène physique exploité par le problème. Le contexte physique gagne ainsi en valeur, en pertinence, par la considération des grandeurs physiques, leur signification et leurs liens. Il n'est plus seulement une mise en situation pouvant motiver les étudiants ou montrer que leurs apprentissages mathématiques ont un intérêt dans le monde réel (vs le monde scolaire) ; le contexte physique peut être exploité afin de développer un contrôle sur l'activité mathématique, permettant un réel rapprochement des disciplines mathématiques et physique. Un argument similaire peut être fait concernant le contrôle sémantique mis en œuvre sur le schéma,

puisque son exercice permet de décoder le schéma et d'y relier en contexte les grandeurs physiques en jeu. Le schéma peut également être lié à l'équation physique et au phénomène physique qu'elle encapsule. Le contrôle sémantique portant sur les unités elles-mêmes permet plutôt d'anticiper la nécessité ou non d'une conversion d'unités par la reconnaissance d'unités différentes de même nature. Il est important de noter que les trois manifestations du contrôle sémantique (sur l'équation, sur le schéma, sur les unités elles-mêmes) peuvent relever d'un contrôle opérationnel lorsque, par exemple, une nouvelle équation est obtenue pendant la résolution ou que l'étudiant souhaite schématiser la situation modifiée par une sous-question. De plus, le contrôle sémantique peut être sollicité en conjonction avec d'autres composantes du contrôle opérationnel – le discernement et le contrôle sur les nombres et opérations – afin, respectivement, de discerner plus facilement l'enchaînement des équations (par l'enchaînement des unités) et d'effectuer adéquatement une conversion d'unités. Ces résultats sont préliminaires, puisque les analyses sont en cours. Nous nous attendons à ce que de nouvelles facettes du contrôle émergent au fil des analyses, puisque la présence de certains attributs des problèmes mathématiques à contexte physique – tels qu'une équation ou un schéma – affecte les composantes du contrôle pouvant être mobilisées et leurs manifestations autour des unités de mesure.

RÉFÉRENCES

- Bardin, L. (2013). *L'analyse de contenu* (2^e éd.). Presses universitaires de France.
- Bureau international des poids et mesures. (2019). *Le Système international d'unités* (ISO/IEC 80000).
<https://www.bipm.org/documents/20126/41483022/SI-Brochure-9.pdf/fcf090b2-04e6-88cc-1149-c3e029ad8232>
- Dorko, A. et Speer, N. (2015). Calculus students' understanding of area and volume units. *Investigations in Mathematics Learning*, 8(1), 23-46.
- Dufour, S. et Jeannotte, D. (2013). La tâche non routinière sous l'angle du contrôle : un exemple en calcul différentiel. *Bulletin AMQ*, 53(4), 29-43.
- Fortin, S. et Poliquin, G. (2023). *Calcul différentiel : Charron-Parent* (9^e éd.). Chenelière Éducation.
- Office québécois de la langue française. (2012). *Approche-programme* [définition].
<https://vitrinelinguistique.oqlf.gouv.qc.ca/fiche-gdt/fiche/8869821/approche-programme>
- Ministère de l'Enseignement supérieur. (2022). *Sciences de la nature (200.B1) – Programme d'études préuniversitaires*. Gouvernement du Québec.
- Morand, B. (2020). *Étude des structurations du contrôle déployées lors de la résolution en équipe de problèmes algébriques* [Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal].
- Redish, E. F. (2021). Using math in physics: Overview. *The Physics Teacher*, 59(5), 314-318.
- Redish, E. F. et Kuo, E. (2015). Language of physics, language of math: Disciplinary culture and dynamic epistemology. *Science & Education*, 24, 561-590.
- Rowland, D. R. (2006). Student difficulties with units in differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(5), 553-558.
- Rhéaume, S. (2020). *Les prises de décision des élèves du 3^e cycle du primaire lors de la résolution de problèmes de proportion : une analyse des contrôles mobilisés* [Thèse de doctorat, Université Laval].
- Rowland, D. R. et Jovanoski, Z. (2004). Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(4), 503-516.

- Saboya, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique coconstruite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire* [Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal].
- Saboya, M., Bednarz, N. et Hitt, F. (2015). Le contrôle exercé en algèbre : analyse de ses manifestations chez les élèves, éclairage sur sa conceptualisation. Partie 1 : La résolution de problèmes. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 20, 61-100.
- Saboya, M. et Rhéaume, S. (2015). Quel contrôle exercent les élèves lors de la résolution d'un problème de comparaison de fractions ? *Petit x*, 99, 5-31.
- Sokolowski, A. (2021). *Understanding physics using mathematical reasoning: A modeling approach for practitioners and researchers*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-80205-9>
- Van Heuvelen, A. et Maloney, D. P. (1999). Playing physics jeopardy. *American Journal of Physics*, 67(3), 252-256.

ANNEXE

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE L'AVION (POUR L'ÉNONCÉ, VOIR LA FIGURE 1 DU TEXTE PRINCIPAL)

- a) i) $t = 0$
 $x(0) = 900 + 75(0) - 2,5(0)^2 = \mathbf{900 \text{ m}}$
- ii) $t = 4$
 $x(4) - x(0) = x(4) - 900 = 900 + 75(4) - 2,5(4)^2 - 900 = \mathbf{260 \text{ m}}$
- b) $\frac{dx}{dt} = 75 - 2,5(2)t = 75 - 5t$; lorsque t augmente, la vitesse $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ diminue.
- c) i) $t = 2$
 $\frac{dx}{dt}(t = 2) = 75 - 5(2) = 65 \text{ m/s}$
 $\left(65 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ h}}\right) \div \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = \mathbf{234 \frac{\text{km}}{\text{h}}}$
- ii) $t = 8$
 $\frac{dx}{dt}(t = 8) = 75 - 5(8) = 35 \text{ m/s}$
 $\left(35 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ h}}\right) \div \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = \mathbf{126 \frac{\text{km}}{\text{h}}}$
- d) i) $(54 \text{ km/h} \cdot 1\,000 \text{ m/km}) \div 3\,600 \text{ s/h} = 15 \text{ m/s}$
 $\frac{dx}{dt} = 15 = 75 - 5t \rightarrow t = 12$
 $x(12) = 900 + 75(12) - 2,5(12)^2 = \mathbf{1\,440 \text{ m}}$
- ii) $\frac{dx}{dt} = 0 = 75 - 5t \rightarrow t = 15$
 $x(15) = 900 + 75(15) - 2,5(15)^2 = \mathbf{1\,462,5 \text{ m}}$
- e) $1,5 \text{ km} \cdot 1\,000 \text{ m/km} = 1\,500 \text{ m}$ ou $1,5 \text{ km} \cdot 1\,000 \text{ m/km} = 1\,500 \text{ m}$
 $1\,500 - 1\,462,5 = 37,5$ $1\,500 = x_0 + 75(15) - 2,5(15)^2 = x_0 + 562,5$
 $900 + 37,5 = \mathbf{937,5 \text{ m}}$ $x_0 = \mathbf{937,5 \text{ m}}$

Résumé | Dans cette contribution, nous nous intéressons aux liens entre l'équation en mathématiques et l'équation chimique. Nous explorons ces liens du point de vue du *savoir savant* (Chevallard, La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné, 1985), historiquement et épistémologiquement, et du *savoir à enseigner* (*ibidem*).

Mots-clés : équation, interdisciplinarité, mathématiques, chimie

Abstract | In this contribution, we focus on the potential links between the equation in mathematics and the chemical equation. We explore these links first in the *scholarly knowledge* (Chevallard, La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné, 1985), historically and epistemologically, and then in the *knowledge to be taught* (*ibidem*).

Keywords : equation, interdisciplinarity, mathematics, chemistry

I. INTRODUCTION

En mathématiques, l'équation est intimement liée à la résolution de problèmes (Polya, 1965) et ce, dans tous les domaines des mathématiques. Dans le curriculum belge, elle est introduite dès le début de l'enseignement secondaire et son étude se poursuit tout au long du curriculum.

Au cours de chimie, les élèves sont également confrontés à un objet appelé *équation* mais il s'agit ici d'une équation *chimique* qui modélise une transformation chimique et qui, bien qu'ayant certaines similitudes avec l'objet en mathématiques, s'en distingue par de nombreux aspects. Cependant, l'équation chimique telle que proposée par Lavoisier vise aussi à agir comme un outil de résolution de problèmes, plus particulièrement de détermination de masses inconnues : :

En effet, comme je l'ai déjà indiqué au commencement de cet article, je puis considérer les matières mises à fermenter et le résultat obtenu après la fermentation comme une équation algébrique ; et, en supposant successivement chacun des éléments de cette équation inconnus, j'en puis tirer une valeur et rectifier ainsi l'expérience par le calcul, et le calcul par l'expérience. (Lavoisier, 1789, p. 108)

Dans les deux cas, l'équation est donc utilisée pour modéliser un phénomène et comme outil de résolution de problèmes ; mais d'où vient cette dénomination commune ? Quels liens ces deux objets ont-ils entretenus au fil de l'histoire ? Comment sont traitées ces similitudes et différences dans l'enseignement secondaire, en mathématiques et en chimie ? Dans quelle mesure les élèves peuvent-ils investir, en chimie, leurs connaissances sur l'équation en mathématiques ? Dans une perspective interdisciplinaire, quelles stratégies didactiques pourraient permettre aux élèves d'établir des liens pertinents entre équation mathématique et équation chimique ? C'est à toutes ces questions que nous tentons d'apporter des éléments de réponse dans le travail en cours.

Dans cet article, en suivant les étapes de la *transposition didactique* (Chevallard, 1985), nous explorerons tout d'abord le savoir savant : d'une part au travers de quelques éléments historiques et, d'autre part, en proposant une formalisation de la pondération des équations chimiques. Ensuite, nous

* UNamur-IRDENa et ULiège – UER Opérations – Belgique – valerie.henry@unamur.be

** UNamur-IRDENa – Belgique – abir.bouabdo@unamur.be

*** UNamur-IRDENa – Belgique – christophe.dubussy@unamur.be

**** UNamur-IRDENa – Belgique – jeremy.dehon@unamur.be

nous intéresserons au savoir à enseigner par l'analyse de trois manuels de chimie utilisés en Belgique francophone.

II. CONTEXTE HISTORIQUE

1. *Construction du savoir équation en mathématiques*

Dans sa thèse consacrée à la constitution de l'écriture symbolique mathématique, Serfati (1997) décrit l'évolution historique de l'écriture en mathématiques qui de purement rhétorique, c'est-à-dire inscrite dans la langue commune, où tout se dit et se calcule en mots [a progressivement convergé vers] une écriture symbolique où le texte est presque réduit à une concaténation de signes (lettres, chiffres, ou signes figurés) (Serfati, 1997, p. 5).

C'est Diophante d'Alexandrie (IIe-IIIe siècle après J.-C.), savant grec considéré comme le père de l'arithmétique, qui fut le premier à utiliser les représentations symboliques. Selon Serfati (1998), les représentations de Diophante forment un système **pré-symbolique** (Tableau 1). Plus tard, Bhaskara (1114-1185), mathématicien indien, introduisit lui aussi un langage symbolique pour représenter l'inconnue et les puissances. Les représentations de Diophante et de Bhaskara n'ont pas le statut d'équation, l'égalité n'y étant pas présente.

C'est dans le monde arabe que les premières équations et leurs méthodes de résolutions sont écrites rhétoriquement, dès le 9^e siècle après J.-C. Le savant perse Al Khawarizmi (780-850) y utilise des termes de la **langue naturelle** (l'arabe ici) car son travail vise à résoudre des problèmes de la vie quotidienne de ses concitoyens (tableau 1).

Les premiers pas de l'écriture des équations en **langue symbolique** sont apparus avec Viète (1540-1603). Il amorce le troisième changement dans l'écriture des équations, passant de la langue naturelle d'Al Khawarizmi à la langue symbolique de l'algèbre de Descartes. Le langage de Viète est un mélange de la langue naturelle et de la langue symbolique. L'écriture complète d'une équation en langue symbolique est attribuée à Descartes (1596-1650). Le symbole actuel de l'égalité (deux tirets parallèles « = ») est attribué à Recorde (1557) (Serfati, 1998, p. 275).

Le tableau ci-dessous (Tableau 1) illustre les différentes écritures de la même équation $3x^2 + 10x = 39$ au fil du temps. Les exemples de la première ligne représentent l'expression $3x^2 + 10x - 39$.

Tableau 1 – *Evolution de l'écriture des équations au fil du temps*

Type de représentation	Exemple
Représentation pré-symbolique	Diophante : $\uparrow \Delta^3 \gamma \zeta \lambda \theta$ (Radford, 1991) Bhaskara : $\bar{y} \bar{a} v \bar{a} 3 \bar{y} \bar{a} 10 \bar{r} \bar{u} 39$ (Patte, 2006)
Langue naturelle spécialisée ¹	Al Khawarizmi : Trois carrées et dix racines sont égaux à trente-neuf dirhams
Langue symbolique	Viète : 3 in A quad + 10 in A æquatur 39 Descartes : $3 \cdot x^2 + 10 \cdot x \propto 39$

¹ La langue naturelle spécialisée peut être définie comme « l'usage d'une langue naturelle pour rendre compte techniquement de connaissances spécialisées » (Lerat, 1994, p. 21).

On observe donc, au fil des époques et des lieux, la construction et l'usage d'une succession de langages pour représenter l'équation mathématique, celle-ci n'atteignant sa forme actuelle qu'au XIV^e siècle.

Intéressons-nous maintenant à l'évolution de la représentation d'une transformation chimique sous forme d'équation.

2. *Évolution historique de l'équation chimique*

Les premières représentations des transformations chimiques remontent aux alchimistes, qui les ont dépeintes librement en superposant et juxtaposant des images d'éléments chimiques, appelées icônes alchimiques (Edeline, 2009). Au XVII^e siècle, une nouvelle forme de représentation apparaît en lien avec l'affinité chimique. Les réactions sont représentées par un schéma qui explique le déplacement des éléments. À cette époque, la flèche symbolise le déplacement des éléments en fonction de leur ordre d'affinité. Ces diverses représentations forment des schémas réactionnels constitués de **symboles non-standardisés**.

Au XVIII^e siècle, Lavoisier (1743-1794) fait la découverte importante que la masse ne change pas avant et après l'*opération* que constitue une réaction chimique. Cette conservation de la masse implique donc, selon Lavoisier, une égalité ou *équation* :

Rien ne se crée, ni dans les opérations de l'art, ni dans celles de la nature, et l'on peut poser en principe que dans toute opération, il y a une égale quantité de matière avant et après l'opération, que la qualité et la quantité des principes est la même, et qu'il n'y a que des changements, des modifications. C'est sur ce principe qu'est fondé tout l'art de faire des expériences en chimie. On est obligé de supposer dans toutes une véritable égalité ou équation entre les principes du corps qu'on examine et ceux qu'on en retire par l'analyse. (Lavoisier, 1789, p. 141)

Une nouvelle manière de représenter les réactions et les transformations apparaît alors : l'équation chimique écrite en langue naturelle spécialisée avec les symboles « + » et « = ». La première équation chimique nominative (c'est à dire, la fermentation du raisin en alcool et gaz carbonique) est écrite dans le *Traité élémentaire de chimie* (Lavoisier, 1789), en **langue naturelle spécialisée** et en **langue symbolique mathématique** :

moût de raisin = acide chlorydrique + alkool

En empruntant le terme *équation* et les symboles « + » et « = » aux mathématiques, Lavoisier tente d'introduire la rigueur du calcul mathématique dans la résolution de problèmes en chimie.

L'écriture symbolique de l'équation chimique apparaît au XIX^e siècle. Après les tentatives de Dalton, Berzelius propose en 1813 de représenter les réactions chimiques en une langue symbolique simple. Les éléments chimiques sont représentés par des lettres (en général, la première ou les deux premières lettres du mot latin de ces éléments). Berzelius utilise largement le langage mathématique, il recourt à de nombreux symboles et écritures mathématiques dans les équations chimiques. Ainsi, le chiffre, en haut à droite d'un élément, indique le volume d'un composé de premier ordre (comme CuO²). Cette utilisation de l'exposant, typique des mathématiques, sera abandonnée pour un positionnement en indice au cours du XIX^e siècle. Le signe « + » est également utilisé par Berzelius dans le cas des composés de deuxième ordre, vus comme des combinaisons de deux corps (un électronégatif et un électropositif), en vertu de la théorie de la dualité électrostatique (Berzelius, 1813). Selon Dehon (2018), les parenthèses, utilisées pour circonscrire les corps composés de deuxième ordre, sont des emprunts au système symbolique mathématique renforçant l'aspect algébrique de la formule chimique. Le signe « = », initié par Lavoisier (1789), continue à être utilisé par Berzelius. C'est à l'époque du développement de la chimie organique, au cours du XIX^e siècle, que le signe « = » sera graduellement remplacé par une flèche (→) symbolisant la réaction.

Après le repositionnement de l'exposant en indice et la suppression des parenthèses dans les formules chimiques, le remplacement du signe « = » par la flèche vient confirmer la volonté des chimistes d'éloigner l'écriture de l'équation chimique de l'écriture des équations mathématiques (Dehon, 2018).

On observe donc, comme pour l'équation mathématique, que l'évolution de l'équation chimique est marquée par une succession de langages, culminant par la construction d'une langue symbolique chimique contenant des emprunts à la langue symbolique mathématique.

3. Conclusion

Nous retiendrons de cette analyse que l'égalité dans l'équation chimique présente une signification épistémologique claire : celle de la conservation de la masse. Par la suite, le symbole « = » a été remplacé par la flèche « $\rightarrow$ » pour marquer l'idée de transformation, et masquer volontairement le caractère mathématique de l'équation chimique, comme le défendent Barlet et Plouin : *La flèche signifie simplement qu'il y a transformation des réactifs vers les produits. Il n'y a pas, dans la transformation, égalité mais conservation des masses, des atomes et des charges électriques* (Barlet et Plouin, 1994).

Suite à ces constats, on peut légitimement poser qu'il existe un intérêt didactique à discuter, avec les élèves, de l'import de symboles mathématiques (+, =, coefficient, exposant) pour modéliser une réaction chimique ; et, singulièrement, de l'abandon de l'égalité. Nous faisons l'hypothèse que ces aspects sont peu traités dans l'enseignement actuel en chimie alors qu'ils pourraient contribuer à rendre visible le processus de modélisation qui a mené à l'écriture actuelle du modèle des réactions chimiques sous forme d'équation. Dans la section IV, nous proposerons quelques éléments relatifs à cette hypothèse et issus de l'analyse des manuels de chimie utilisés en Belgique francophone.

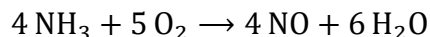
Peut-on donner une interprétation mathématique valide aux différents symboles utilisés dans les équations chimiques et empruntés aux mathématiques ? C'est à cette question que répond la section suivante.

III. FORMALISATION MATHÉMATIQUE DES ÉQUATIONS CHIMIQUES

En mathématiques formelles, une équation est un couple (F, x) où F est une formule exprimée dans un langage avec égalité et x une variable libre de F (*l'inconnue*). Résoudre une telle équation dans un ensemble E (*le domaine d'interprétation*), consiste à trouver le sous-ensemble des $x \in E$ tels que F soit satisfaite. Ce sous-ensemble est appelé sous-ensemble de solutions et dépend du domaine d'interprétation E de la formule. Par exemple $(x + 1 = y, x)$ est une équation dont l'ensemble des solutions est $\{y - 1\}$ si $E = \mathbb{R}$. L'équation $(x + 1 = y, y)$ (différente de la précédente) a pour ensemble de solution $\{x + 1\}$ si $E = \mathbb{R}$. Autrement dit, une équation est un objet purement syntaxique par nature alors que sa résolution présuppose un contexte sémantique.

Informellement, une équation est donc une formule mathématique où le symbole « = » apparaît explicitement et où une inconnue est spécifiée. Le plus souvent, le langage mathématique utilisé contient celui de l'arithmétique et permet donc d'avoir recours aux symboles « +, -, x... »

En chimie, une équation bilan ou équation chimique modélise la transformation de réactifs en produits, en respectant des ratios réactionnels donnés par les coefficients stœchiométriques. Par exemple, on a l'équation chimique suivante :



La question du statut des symboles « + » et « $\rightarrow$ » se pose immédiatement. A priori, une molécule correspond formellement à un graphe pondéré et étiqueté (les arêtes permettant de rendre compte de la structure chimique). Or l'addition de deux graphes, qui serait naïvement leur union disjointe, ne correspond pas à ce qu'il se passe au sein de l'équation chimique. Un autre problème est le symbole « $\rightarrow$ » qui est ambigu. Il a en effet une signification différente du symbole « = » car il marque une évolution temporelle liée au monde physique.

Pour comprendre les choses, il faut voir que le « contenu » d'une équation chimique est double :

1. une partie structurelle. En effet, dans l'exemple ci-avant, des molécules comme H_2N ou ONH n'auraient aucun sens physique. Seules certaines combinaisons de lettres sont autorisées si l'on tient compte des contraintes empiriques et syntaxiques (pour l'ordre dans lequel les lettres sont écrites).
2. une partie combinatoire. Dit simplement, il faut le même nombre de lettres de chaque côté de l'équation pour vérifier la loi de conservation de la masse énoncée par Lavoisier.

Il est à noter que dans de nombreux exercices, seule la partie combinatoire est testée, l'énoncé étant formulé à partir d'une équation à trous $\dots \text{NH}_3 + \dots \text{O}_2 \rightarrow \dots \text{NO} + \dots \text{H}_2\text{O}$ que l'élève est prié de compléter. Dès lors, on peut se demander si, a minima, la partie combinatoire pourrait être considérée comme une véritable équation mathématique.

Considérons la molécule H_2O . On serait tenté de dire que cette molécule est simplement l'ensemble $\{\text{H}, \text{H}, \text{O}\}$ (autrement dit, on ne garde que les sommets du graphe). Une molécule correspondrait donc à un ensemble et le signe « + » correspondrait quant à lui à la somme ensembliste, donc à l'union disjointe. Cependant, cette formalisation pose problème. En effet, dans la théorie des ensembles traditionnelle, seuls les éléments distincts présents au sein de l'ensemble sont comptabilisés. Autrement dit on a l'égalité $\{\text{H}, \text{H}, \text{O}\} = \{\text{H}, \text{O}\}$ et l'aspect combinatoire est évacué. On pourrait bien sûr contourner ce problème en utilisant des unions disjointes dans tous les sens et en posant $\{\text{H}, \text{H}, \text{O}\} = \{\text{H}\} \sqcup \{\text{H}\} \sqcup \{\text{O}\}$. Néanmoins, comme l'union disjointe ensembliste est définie à partir d'un produit cartésien, un tel empilement deviendrait rapidement lourd syntaxiquement. Une autre possibilité, sans doute plus naturelle, est d'utiliser la notion de *multi-ensemble*. Un multi-ensemble est simplement un ensemble classique muni d'une fonction de comptage permettant d'attribuer un nombre naturel (correspondant au nombre d'occurrences) à chaque élément de l'ensemble.

Définition 1. Un multi-ensemble est un couple (E, c) où E est un ensemble et $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction.

Exemple : Le multi-ensemble $(\{\text{H}, \text{O}\}, c)$ où $c(\text{H}) = 2$ et $c(\text{O}) = 1$ correspond à ce que l'on voudrait noter $\{\text{H}, \text{H}, \text{O}\}$, c'est à dire le fragment combinatoire de la molécule H_2O

On peut maintenant très naturellement définir l'addition de deux multi-ensembles.

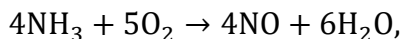
Définition 2. Soient (E, c) et (F, d) deux multi-ensembles. La somme $(E, c) + (F, d)$ est le multi-ensemble (G, f) tel que

1. $G = E \cup F$.
2. $f(x) = c(x)$ si $x \in E \setminus F$.
3. $f(x) = d(x)$ si $x \in F \setminus E$.
4. $f(x) = c(x) + d(x)$ si $x \in E \cap F$.

On peut aussi définir la multiplication d'un multi-ensemble par un naturel.

Définition 3. Soit (E, c) un multi-ensemble et $k \in \mathbb{N}$ un naturel. Alors $k \cdot (E, c)$ n'est rien d'autre que le multi-ensemble $(E, k \cdot c)$.

Si l'on revient à présent à l'exemple initial



on se rend compte que l'aspect combinatoire d'un tel bilan chimique peut être formulé comme une égalité entre multi-ensembles. Cette égalité est donc en particulier *une égalité fonctionnelle*, entre les diverses fonctions de comptage. On pourrait la réécrire

$$4c + 5d = 4f + 6g$$

où c, d, f, g sont respectivement les fonctions de comptage associées aux multi-ensembles représentant les molécules $\text{NH}_3, \text{O}_2, \text{NO}, \text{H}_2\text{O}$. Évidemment on ne peut pas a priori parler d'équation car il n'y a pas d'inconnues. L'équation associée, telle qu'elle serait proposée à un élève est

$$ac + bd = kf + lg$$

où l'inconnue est le quadruplet $(a, b, k, l) \in \mathbb{N}^4$. Comme il s'agit d'une égalité fonctionnelle, il suffit d'évaluer cette égalité en quatre points pour obtenir un système de quatre équations à quatre inconnues. Malheureusement nous n'avons que trois points disponibles : **N**, **H**, **O**. Effectuons ces trois évaluations pour voir quel phénomène est à l'œuvre. En évaluant en **N**, on obtient $a = k$, en évaluant en **O** on obtient $2b = k + l$, en évaluant en **H**, on obtient $3a = 2l$.

En résolvant « naïvement » ce système sous-déterminé, on tire directement une infinité de solutions de la forme $(k, \frac{5}{4}k, k, \frac{3}{2}k)$. On voit des fractions apparaître correspondant à des rapports de proportionnalité. En prenant pour k le PPCM de tous les dénominateurs (dans notre exemple, on prendra $k = 4$), on obtient la plus petite solution naturelle non-nulle possible, ce qui correspond à l'usage dans l'enseignement de la chimie au secondaire.

On voit ici que la formalisation mathématique de la pondération des équations chimiques fournit une stratégie de résolution de ce problème, qui, de plus, ramène en chimie le concept d'équation mathématique comme outil de résolution de problème. Plus théoriquement, nous venons de décrire une technologie au sens de (Chevallard, 1999) légitimant la technique dite "algébrique" de pondération des équations chimiques. Cette technique de pondération des équations chimique est-elle repérée dans les manuels scolaires de chimie en Fédération Wallonie-Bruxelles ? La section suivante s'intéresse notamment à cette question.

IV. ANALYSE DES MANUELS DE CHIMIE

Nous avons consulté les trois seuls manuels de chimie utilisés dans l'enseignement secondaire belge, en 3^e année (grade 9, sciences générales ou sciences de base) : (Buschen, Degosserie, Rondelet, Schweininger et Van Sul, 2018 ; Bordet, Castin, Pirson et Snauwaert, 2021 ; Matthys, Feys et Suys, 2011). C'est à ce niveau que sont abordées, en Fédération Wallonie-Bruxelles, les équations chimiques.

La méthodologie que nous avons élaborée se base sur l'analyse du contenu des manuels et elle vise quatre objectifs : décrire la manière dont la représentation symbolique de l'équation chimique est exposée, mettre en évidence si un lien explicite existe entre l'équation chimique et la conservation de la masse, rechercher si les manuels exposent la formalisation mathématique des équations chimiques et décrire les méthodes de pondération proposées. Dans les trois manuels, nous nous sommes focalisés sur la section « cours » du chapitre « réaction chimique ». Le cours s'étend sur quatre ou cinq pages qui

définissent la réaction chimique, son passage à une équation chimique et la pondération d'une équation chimique.

De nos analyses, nous retenons les éléments suivants :

- Tous les manuels explicitent de manière plus ou moins semblable les différents composants de l'équation chimique. Ainsi, il est précisé que l'équation est divisée en deux « membres » qui sont séparés par « une flèche ». Dans le « premier membre », les réactifs sont séparés par un « + » qui signifie « réagissent avec » et de même pour les produits dans le « deuxième membre ». Finalement, la flèche « $\rightarrow$ » qui sépare les deux membres « indique le sens de déroulement de la réaction ».
- Tous les manuels utilisent la flèche pour séparer les réactifs des produits.
- (Buschen, Degosserie, Rondelet, Schweininger et Van Sul, 2018) mentionnent explicitement que, contrairement aux équations en mathématiques, l'équation chimique utilise le signe « $\rightarrow$ » au lieu du signe « = ».
- Ces mêmes auteurs justifient ensuite l'utilisation du terme « équation » par le lien avec la conservation de la masse, ce que ne font pas les autres manuels. Dans ces autres manuels, la conservation de la masse est mentionnée plus tôt, lors de la description de la transformation chimique, au niveau macroscopique.
- Enfin, la démarche de pondération des équations chimiques est abordée systématiquement selon une méthode de tâtonnement, marquée par des essais et des erreurs. Cependant, deux types de méthodes émergent en fonction du niveau de savoir convoqué dans le chemistry triplet de (Johnstone, 1991). Une première démarche de pondération propose un inventaire chiffré sous la forme d'un tableau à double entrée (niveau symbolique de Johnstone). En modifiant les coefficients stœchiométriques, l'élève tente d'établir un nombre identique d'atomes, dans chaque colonne, pour chaque symbole noté dans le tableau. Une deuxième démarche de pondération consiste à dessiner les molécules et atomes impliqués dans l'équation chimique (niveau microscopique de Johnstone) à l'aide d'un modèle moléculaire en boules. L'élève ajoute alors, en les dessinant, les molécules et atomes nécessaires pour obtenir le même nombre d'atomes de chaque type chez les réactifs et les produits. Les coefficients stœchiométriques sont finalement inscrits dans l'équation chimique en comptant les modèles dessinés pour chaque acteur de l'équation. Ainsi, aucun manuel ne propose de formaliser la pondération des équations chimiques au travers d'un système linéaire d'équations mathématiques.

De cette analyse et de notre section III, nous retenons trois techniques de pondération des équations chimiques, deux basées sur le tâtonnement, cohérentes avec une volonté de mettre à distance les liens entre équation chimique et mathématiques, et une troisième, axée sur la construction d'un système d'équations mathématiques. Les deux premières font partie du curriculum actuel dans l'enseignement secondaire en Belgique tandis que nous n'avons pas trouvé trace de la troisième dans les manuels en vigueur actuellement. Cette dernière pourrait constituer une opportunité de travail interdisciplinaire autour de l'équation puisqu'elle s'appuie sur une situation ancrée en chimie, modélisée au sein de la discipline « chimie » par une équation chimique (étape que nous identifions à l'étape 1 du cycle de modélisation de Blum et Leiss (2007), voir Figure), dont la pondération peut, à son tour, être modélisée par un système d'équations mathématiques (étape 3 du cycle de modélisation de Blum et Leiss (2007)), outil de modélisation présent dans le curriculum mathématique. Nous pensons également que cette technique est une option didactique intéressante puisqu'elle permet a priori de diminuer l'incertitude des élèves en leur garantissant l'existence d'une solution au problème, calculable en peu d'opérations.

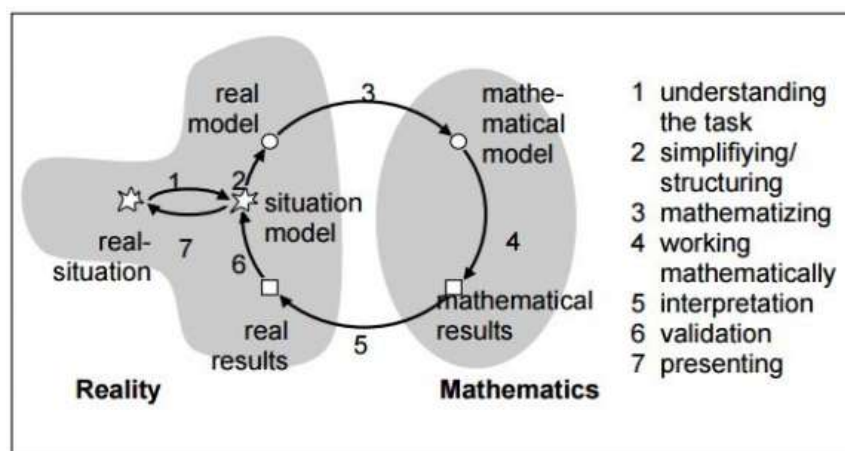


Figure 1 – Cycle de modélisation de Blum et Leiss (2007), cité dans (Kuzniak, 2024)

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

À la suite de ces différentes analyses, le travail devrait se poursuivre par une observation du savoir enseigné (Chevallard, 1985) dans les classes. Ces différentes observations devraient nous permettre de compléter les constats issus des analyses épistémologiques et des manuels concernant les liens entre équation mathématique et équation chimique dans l'enseignement actuel en Belgique francophone.

Cette étude devrait également nous permettre de formuler des propositions susceptibles d'enrichir l'apprentissage dans les deux disciplines. En particulier, nous visons la formation des enseignants de chimie, que nous espérons rendre plus conscients du lent processus de modélisation qui a conduit à la construction de l'équation chimique et de ses liens avec les mathématiques. La recherche vise également la proposition d'une séquence didactique interdisciplinaire, potentiellement en lien avec notre section III, qui mettrait en jeu les différents aspects relevés au cours du travail relativement aux liens entre équation mathématique et équation chimique.

RÉFÉRENCES

- Barlet, R. et Plouin, D. (1994). L'équation-bilan en chimie. Un concept intégrateur source de difficultés persistantes. *Aster : Recherches en didactique des sciences expérimentales*, 18(1), 27-56.
- Bordet, H., Castin, D., Pirson, P. et Snauwaert, P. (2021). *Chimie, 3^e Sciences générales*. Van In ; De Boeck.
- Buschen, J., Degosserie, N., Rondelet, M.-C., Schweininger, J. et Van Sul, P. (2018). *Référentiel Essentia, Sciences de base - sciences générales, 3^e année*. Plantyn.
- Chevallard, Y. (1982). Pourquoi la transposition didactique ? Dans *Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG, Université scientifique et médicale de Grenoble* (p. 167-194).
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=103
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Dehon, J. (2018). *L'équation chimique, un sujet d'étude pour diagnostiquer les difficultés d'apprentissage de la langue symbolique des chimistes dans l'enseignement secondaire belge*. Presses universitaires de Namur.
- Direction-générale-des-études-technologiques. (2022). *Guide des études d'ingénieurs*. Ministère de l'enseignement supérieur . http://www.mes.tn/page.php?code_menu=26&code_menu_parent=23
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31. <https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/>
- ENICARTHAGE. (2019). *Document étudiants-Plan d'études*.
http://www.enicarthage.rnu.tn/uploads/Documents_Document_Util/269ad43939c3172c8258db442ad206b3.Plans%20d%C3%A9tudes%20ENICarthage.pdf
- Johnstone, A. (1991). Why is science difficult to learn? Things are seldom what they seem. *Journal of Computer Assisted Learning*, 7, 75-83. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2729.1991.tb00230.x>
- Kilani, I., Kouki, R. et Beldi, M. (2022, 30 octobre). Analyse mathématique et regard didactique sur les formules de Taylor en vue d'une meilleure conceptualisation. *Educação Matemática Pesquisa*, 24(3), 62-107. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i3p062-107>
- Kuzniak, A. (2024). Enseignement de la modélisation mathématique et construction du travail mathématique : une dynamique problématique. Dans F. Vandebrouck, F. Emprin, C. Ouvrier-Buffet et L. Vivier (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Preuve, modélisation et technologies numériques. XXI^e école d'été de didactique des mathématiques, 18-24 octobre 2021, Sainte Marie de Ré* (p. 91-110). <https://hal.science/hal-04216192v2/document>
- Lavoisier, A.-L. (1965). *Traité élémentaire de chimie*. Librairie Blanchard. (Ouvrage original publié en 1789)
- Lerat, P. (1994). *Les langues spécialisées*. PUF.
- Matthys, N., Feys, M. et Suys, B. (2011). *Sciences, 3^e, Sciences base* (3^e éd.). De Boeck.
- Patte, F. (2006). L'algèbre en Inde au XII^e siècle. Dans *Comptes rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, n° 150 (p. 1897-1915).
- Polya, G. (1965). *Comment poser et résoudre un problème*. Dunod.

Quarteroni, A., Ricardo, S. et Saleri, F. (2007). *Méthodes numériques. Algorithmes, analyse et applications*. (J.-F. Gerbeau, Trad.) Springer ;Verlag Italia.

https://www.ceremade.dauphine.fr/~bey/enseignement/Enseignement/All_enseignement_dauphine/Module_analyse_numerique/livre%20analyse%20num%C3%A9rique/fiche_numerique/bok%25A978-88-470-0496-2.pdf

Radford, L. (1991). Diophante et l'algèbre pré-symbolique. *Bulletin AMQ*.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190. <https://revue-rdm.com/1998/outils-d-analyse-des-contenus/>

Serfati, M. (1997). *La constitution de l'écriture symbolique mathématique* [Thèse de doctorat, Université Paris I].

Serfati, M. (1998). Descartes et la constitution de l'écriture symbolique mathématique. *Revue d'histoire des sciences*, 51(2-3), 237-289. <https://doi.org/10.3406/rhs.1998.1323>

ÉVALUER LA MODÉLISATION INFORMATIQUE AVEC UNE APPROCHE INTERDISCIPLINAIRE

| LECOMPTE* GABRIEL

Résumé | Ce texte explore la définition des concepts de modèle et de démarche de modélisation à travers trois disciplines : la mathématique, l'informatique et la science et la technologie. Les textes relevés permettent de distinguer les similitudes des concepts de modèle et de modélisation à travers ces disciplines, mais aussi d'en comprendre les distinctions. Des méthodes pour évaluer le modèle et les compétences de modélisation sont abordées.

Mots-clés : programmation informatique, modélisation, science et technologie, évaluation, interdisciplinarité

Abstract | This text explores the definition of the concept of models and modelling approaches across three disciplines: mathematics, computer science, and science and technology. The targeted texts identify the similarities of the concepts of model and modelling across these disciplines and to understand the distinctions. Then, methods for evaluating the model and modelling skills are discussed.

Keywords: Coding, modelling, science education, evaluation, interdisciplinarity

I. LA PLACE DE LA MODÉLISATION INFORMATIQUE À L'ÉCOLE

Avec l'incorporation d'initiatives telles que le Plan d'action du numérique (Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur, 2018) et l'ajout d'un cours de programmation informatique dans le programme collégial des Sciences de la nature, l'enseignement de la programmation informatique prend de plus en plus d'ampleur au Québec (Ministère de l'Enseignement supérieur, 2021). La programmation est un terrain fertile à l'interdisciplinarité entre le domaine de la mathématique et celui de la science et la technologie (ST), car elle permet de mobiliser des notions de ces deux domaines pour concevoir un programme informatique. L'informatique peut aussi permettre de travailler des savoirs mathématiques et scientifiques à l'aide des outils qui lui sont propres. La démarche de modélisation se prête bien à cette interdisciplinarité. De plus, elle permet d'aborder les savoirs mathématiques dans un contexte proche du travail des scientifiques utilisant la programmation.

Cette communication s'inscrit dans le cadre de ma recherche doctorale. La communication cherche à circonscrire, le concept de modèle, l'activité de modélisation et son évaluation en informatique en mobilisant des recherches provenant des domaines de la mathématique, de la ST et de l'informatique. Ainsi, ce travail s'inscrit dans le domaine de la didactique et les textes sur lesquels il s'appuie sont issus du champ des sciences de l'éducation¹.

Les textes présentés dans ce qui suit ont d'abord été récoltés à l'aide de mots-clés sur plusieurs bases de données francophones et anglophones. À partir de ces textes, d'autres articles ont été répertoriés pour comprendre les définitions proposées, entre autres en examinant les références des textes bibliographiques d'abord sélectionnés. En raison de l'espace imparti pour ce texte et du champ

* Université du Québec à Trois-Rivières (UQTR) – Canada – gabriel.lecompte@uqtr.ca

¹ Ainsi, les définitions propres à des domaines spécifique de l'informatique, des mathématiques ou de la science n'ont pas été discuté. Par exemples, les définitions en lien avec la théorie des ensembles, la théorie des modèles et la théorie des catégories en mathématique ou encore la définition d'un modèle d'intelligence artificielle en informatique n'est, elle non plus, pas abordée ici.

d'expertise de l'auteur (en didactique de la science et de la technologie plus qu'en didactique des mathématiques ou de l'informatique), la recension ne vise pas l'exhaustivité.

Selon le domaine, le concept de modèle revêt des définitions somme toute similaires, mais des particularités disciplinaires sont relevées. Ainsi, cette proposition comparera les manières dont on conçoit le modèle en mathématique, en ST et en informatique – toujours lorsqu'il en est question en éducation – pour en relever les similitudes et les divergences. Puis, en s'appuyant sur une revue de la littérature sur les approches évaluatives de la modélisation, cet article proposera des pistes pour l'évaluation de modèles informatiques réalisés par les élèves en s'appuyant sur les approches utilisées dans les écrits.

II. QU'EST-CE QU'UN MODÈLE ET UNE MODÉLISATION ?

Dans la section qui suit, les définitions des modèles et des différentes démarches de modélisation en mathématique, en informatique et en ST seront présentées. Par la suite, une comparaison de ces trois disciplines sera dressée.

1. *Modèles et modélisations mathématiques*

Un modèle mathématique est une traduction d'un phénomène du monde réel à l'aide du langage mathématique pour pouvoir tirer des conclusions sur le monde réel à l'aide d'outils mathématiques (Niss, Blum et Galbraith, 2007). Pour Chevallard (1989), la modélisation mathématique est l'étude d'objets extra-mathématiques, par exemple des systèmes physiques, biologiques et sociaux à l'aide des mathématiques. Selon lui, le processus de modélisation comprend un système qui peut être mathématique ou non et un modèle mathématique de ce système. Bien que selon Chevallard, la modélisation d'éléments intra-mathématiques est aussi possible, cet article traitera seulement de la modélisation de systèmes extra-mathématiques en raison de leur proximité conceptuelle avec les autres modélisations présentées. La modélisation mathématique suit trois étapes. D'abord, le système est analysé afin de faire ressortir ses aspects pertinents. Ces aspects seront identifiés en tant que variables. Ensuite, un modèle est produit en établissant des relations entre ces variables. Finalement, le modèle obtenu est travaillé à l'aide de notions mathématiques afin de produire des connaissances sur le système prenant la forme de nouvelles relations mathématiques (Chevallard, 1989). Dans ce contexte, la mathématisation représente la traduction en éléments mathématiques des aspects importants du système. Kuzniak (2024) explique que le processus de mathématisation peut prendre une forme plus dynamique, comme avec le courant de la *Realistic Mathematics Education* (RME). Ce processus amène l'élève à réinventer progressivement les concepts mathématiques à partir d'une situation réelle, ou avec le courant des *Espaces de travail mathématique*, où la mathématisation est présente dans la représentation symbolique, le choix des outils mathématiques et la construction de la preuve mathématique.

Pour Greer et Verschaffel (2007), il existerait deux types de modélisation mathématique présentant des complexités différentes. D'abord, la modélisation implicite serait l'activité routinière de résolution de problèmes stéréotypés basée sur des modèles existants, qui est demandée aux élèves alors qu'ils doivent appliquer des méthodes de résolution de problèmes à des problèmes scolaires. Ils contrastent cette modélisation avec la modélisation explicite, qui demande plutôt à l'élève de résoudre des problèmes plus authentiques dans lesquels les apprenants sont amenés à réfléchir à l'activité de modélisation et à ses contraintes sociales. Les éléments suivants peuvent être considérés durant la création du modèle : les buts de la modélisation, les outils et l'aide disponibles, ou encore les débats entourant le choix du modèle. À la suite de la modélisation, l'élève peut aussi avoir à réfléchir à la communication de l'interprétation de son modèle à un public cible. La modélisation explicite propose

donc un enseignement qui dépasse l'application d'un modèle existant, mais qui considère la création et la critique d'un modèle.

2. Modèles et modélisations scientifiques

En ST, la définition du modèle est plus large. Comme le proposent Harrison et Treagust (2000), dans le cadre de l'enseignement de la ST, le concept de modèle peut revêtir plusieurs formes et fonctions, comme l'illustre le Tableau 1.

Tableau 1 – Topologie des modèles scientifiques selon Harrison et Treagust (2000)²

Types de modèle	Définition	Exemples
Modèles matériels	Représentation proportionnelle des formes, des structures et des couleurs d'un objet.	Modèle réduit d'un pont ou maquette d'une cellule animale
Modèles pédagogiques analogiques	Analogie concrète ou abstraite partageant des informations avec le concept qu'il représente. Cette catégorie de modèle comprend les représentations symboliques, les modèles mathématiques et les modèles concept-processus.	L'analogie du courant d'un fluide pour le courant électrique
Modèles iconiques et symboliques	Représentation symbolique ou iconique qui permet de communiquer ou d'expliquer un concept scientifique.	CO ₂ ou C=O=C pour le dioxyde de carbone
Modèles mathématiques	Des équations ou des graphiques permettant de décrire la relation entre des concepts du monde réel dans des conditions idéales (par exemple en négligeant le frottement dans le calcul de force)	L'équation $F = ma$ ou le diagramme de phase de l'eau
Modèles théoriques	Modèle décrivant une entité théorique soutenu par un argumentaire logique auquel sont rattachées des explications.	Le modèle de la théorie cinétique des gaz ³ , les lignes de champ magnétique
Cartes, diagrammes et tableaux	Représentation qui permet à l'élève de visualiser des motifs, des chemins ou des relations.	Une carte météorologique, un arbre phylogénétique ou le tableau périodique des éléments
Modèles concepts-processus	Représentation de processus plutôt que d'objet ou une relation.	La théorie de Brønsted-Lowry pour expliquer les réactions entre acides et bases.
Simulations	Représentation dynamique de processus complexes. Ces modèles permettent aux apprenants et chercheurs de développer des compétences sans nécessiter beaucoup de ressources et en minimisant les risques. Ce type de modèle comprend aussi les simulations informatiques.	Une simulation d'aérodynamisme ou une simulation de fluctuation de population

² Les exemples sont parfois tirés de Harrison et Treagust (2000) ou ont été ajoutés par l'auteur afin de fournir des exemples plus adaptés au système éducatif québécois. La traduction de Roy (2018) est utilisée dans un but de cohérence dans les recherches en français. Cependant, les traductions de la première et dernière catégorie du tableau ont été modifiées. La traduction de modèle matériel a été préférée à celle de Roy (modèle à l'échelle), puisque l'expression « à l'échelle » réfère à un sujet de même grandeur, alors que les modèles peuvent être une représentation agrandie ou réduite du référent, ou même qui n'en respecte pas les proportions initiales, comme dans le cas classique des représentations du système solaire. En ce qui concerne la simulation, Roy proposait « simulation informatique », alors qu'Harrison et Treagust expliquent que la catégorie des simulations peut inclure la réalité virtuelle. Par exemple, des simulations peuvent être réalisées de manière physique, comme c'est le cas de la rivière expérimentale du Complexe de recherche multi-échelle en hydrologie, hydraulique et environnement (Université de Sherbrooke, 2024).

³ Ce modèle est la représentation simplifiée des atomes comme étant des billes de volume négligeable seulement influencé par les collisions entre ces particules ou avec les parois du contenant.

Ces auteurs différencient dix types de modèles qu'ils divisent en quatre catégories. Les modèles scientifiques et pédagogiques (en vert) sont utilisés durant l'appropriation des connaissances. Ils permettent une comparaison entre des concepts proches de la réalité de l'élève et des apprentissages à réaliser. La catégorie des modèles pédagogiques analogiques (en blanc) comprend les modèles qui permettent à l'élève de construire un apprentissage conceptuel. Ces modèles peuvent être utilisés par l'élève pour résoudre des problèmes ou proposer des explications. La catégorie des modèles représentant plusieurs concepts ou procédés (en bleu) comprend la représentation de phénomènes complexes comme des procédés, des relations et des simulations. Harisson et Treagust (2000) proposent également une catégorie comprenant les modèles mentaux et les modèles synthétiques qui, bien qu'ils soient pertinents pour analyser l'apprentissage des élèves, ne sont pas manipulés par les élèves, donc ne seront pas discutés dans ce texte.

Face à ces différents types de modèles, Roy (2018) propose cinq caractéristiques de modèles scientifiques. Premièrement, ce sont des représentations simplifiées du monde réel. Deuxièmement, ce sont des outils de pensée agissant en tant qu'intermédiaire entre le monde théorique et le monde empirique pour la représentation, la description, l'explication et la prédiction des phénomènes. Troisièmement, un modèle peut être représenté par une grande diversité de registres de représentation sémiotique, c'est-à-dire qu'ils peuvent prendre des formes variées comme l'objet matériel, la représentation algébrique, l'animation, l'analogie, etc. Quatrièmement, un modèle peut représenter plusieurs référents, et plusieurs modèles peuvent représenter le même référent. Cinquièmement, les modèles peuvent être révisés.

Cette dernière caractéristique est importante dans la démarche de modélisation constructiviste proposée par Roy (2018). Ce processus est organisé autour de 4 étapes : 1) la création, c'est-à-dire la problématisation d'un phénomène ouvert et complexe et la réflexion à un modèle explicatif ; 2) la planification d'une validation de ce modèle explicatif ; 3) la mise à l'essai du modèle et 4) l'utilisation du modèle pour proposer des solutions au problème de base. Ces étapes sont réalisées de manière collective, ce qui permet de mettre à l'épreuve les modèles mis en place par l'argumentation. Cette démarche constructiviste ressemble au travail des scientifiques actuels, par exemple, lorsqu'on pense au modèle météorologique *Canadian Earth System Model*, qui est le fruit d'efforts collaboratifs de plusieurs laboratoires partageant leur expertise et leurs données pour améliorer ce modèle de simulation (Seinen et Kushner, 2024).

3. *Modèle et modélisation informatique*

Issu du domaine de l'informatique, le modèle informatique partage des caractéristiques avec les modèles mathématiques et scientifiques. Butterfield et Ekembe Ngondi (2016) proposent qu'un modèle soit une représentation simplifiée d'un référent. Ils ajoutent qu'en informatique, les modèles sont généralement abstraits et représentés sous forme de diagrammes. Par exemple, un diagramme de flux de données peut être utilisé en conception fonctionnelle ; un diagramme d'entité-association pour une organisation de données et un diagramme d'état-fonction peut être utilisé pour représenter un comportement désiré par le logiciel (Butterfield et Ekembe Ngondi, 2016). La figure 1 propose des exemples de ces diagrammes en lien avec le milieu scolaire pour illustrer leur fonctionnement. Pour Weintrop et ses collègues (2016), une autre caractéristique des modèles informatiques (*computational models*) est qu'ils sont des représentations non statiques de phénomènes qu'il est possible de simuler à l'aide d'un ordinateur. Ces auteurs soulignent que l'avantage pédagogique de ce type de modèles est que l'élève est en mesure de concevoir, de construire et de tester son propre modèle (Weintrop et al., 2016).

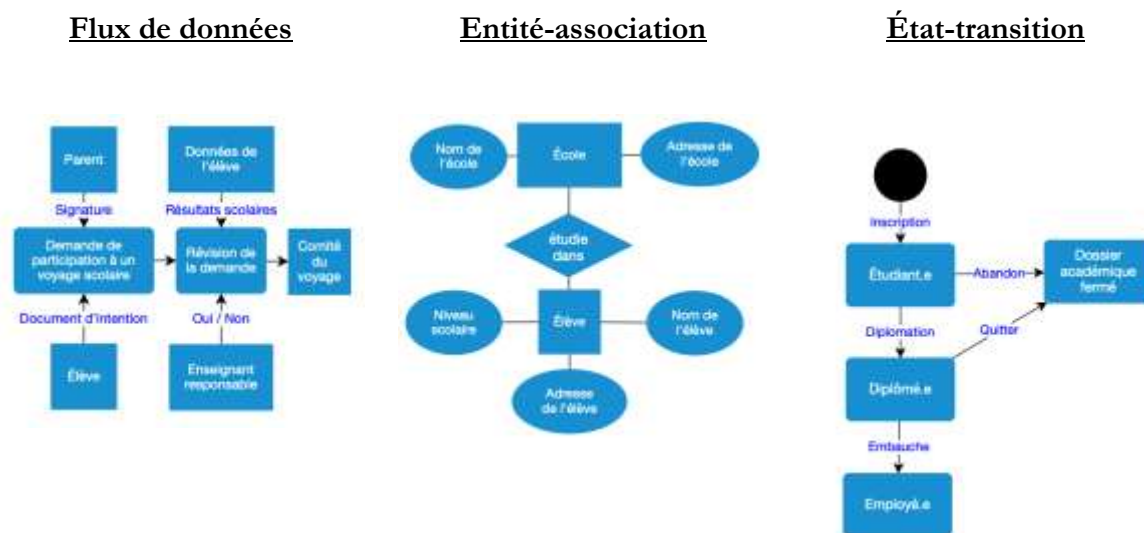


Figure 1 – Exemple de types de digrammes utilisés en informatique

Dans le contexte de l'informatique, la modélisation a pour objectif de représenter un référent dans un but spécifique, par exemple pour le décrire, le comprendre ou en déduire ses propriétés (Butterfield et Ekembe Ngondi, 2016). Cette démarche est réalisée par la simplification, l'idéalisation ou l'abstraction et oriente le type de représentation adoptée et les manières d'exprimer les propriétés sélectionnées du référent (Butterfield et Ekembe Ngondi, 2016).

4. Comparaison du concept de modèle et de la modélisation à travers ces disciplines

En somme, il est possible de constater des caractéristiques communes du concept de modèle dans les trois disciplines. Pour chacune d'entre elles, la modélisation est une représentation simplifiée d'un référent.

Cependant, les types de représentation et les démarches mises en place pour atteindre ces représentations varient. Les modèles mathématiques sont représentés à l'aide d'expressions, d'équations ou de notations symboliques propres à cette discipline. Un modèle scientifique, pour sa part, peut prendre une grande variété de modes de représentation incluant le modèle mathématique et le modèle informatique. Les modèles informatiques sont non statiques et sont généralement représentés sous forme de diagrammes.

Aussi, la définition du modèle scientifique, étant très large, englobe les modélisations des deux autres disciplines. On constate que les modèles présents dans les trois disciplines peuvent être en relation. Par exemple, une ou un élève pourrait concevoir un modèle informatique de simulation des populations d'un écosystème en s'appuyant sur un modèle mathématique de croissance exponentielle et afficher une carte de densité de population, un modèle scientifique. Cette relation permet d'entrevoir une possibilité de travail de ces concepts en parallèle.

Les disciplines placent différentes notions au centre de la démarche de modélisation. Pour la modélisation mathématique, le concept de mathématisation, soit la traduction en termes mathématiques des propriétés du référent, est au cœur de la démarche. Pour la modélisation scientifique, la validation revêt une place importante. La validation est planifiée juste après avoir proposé un modèle explicatif. Ainsi, la validation arrive tôt dans le processus de modélisation scientifique afin de prévoir avant même la réalisation du modèle les critères qui permettront de s'assurer qu'il est valide. Cette étape peut impliquer d'autres personnes dans la démarche. Cette étape est

comparable aux débats entourant le choix du modèle dans la modélisation explicite en mathématique. Cependant, en ST, la réflexion sur la validité du modèle arrive avant la réalisation du modèle alors qu'en mathématique, cette étape survient après la création du modèle. Pour la modélisation informatique, les concepts d'abstraction, de simplification et d'idéalisation prennent une place primordiale dans la démarche de modélisation. Ainsi, cette démarche a pour but de représenter un référent comme une abstraction ou une collection d'abstractions de manière schématisée en ne conservant que les caractéristiques (comportement, fonction, données, etc.) qui sont essentielles.

III. ÉVALUER UN MODÈLE ET L'ACTIVITÉ DE MODÉLISATION

Cette section propose des pistes d'évaluation de la modélisation et des modèles créés en mathématique, en science et technologie et en informatique.

1. Pistes d'évaluation en mathématique

Deux approches d'évaluation de la modélisation mathématique ont été relevées. Une approche cible le niveau d'habileté à réfléchir au modèle et l'autre vise à évaluer des habiletés de modélisation. La première approche, celle de Henning et Keune (2007), propose trois niveaux de développement des compétences de modélisation explicite. Dans le premier niveau, l'élève est en mesure de reconnaître et de décrire un processus de modélisation existant et d'en identifier et d'en caractériser les différentes phases. Dans le deuxième niveau, l'apprenant est en mesure de réaliser seul les différentes tâches relatives à la modélisation, c'est-à-dire qu'il est capable d'analyser et de structurer des problèmes, des quantités abstraites, d'adopter différentes perspectives, de mettre en place les modèles mathématiques ainsi que de les valider. Il est aussi capable d'adapter son modèle à de nouvelles circonstances. Dans le troisième niveau de compétence, l'apprenant est en mesure de réfléchir de manière critique à son modèle et de formuler des critères pour l'évaluer. Il est capable de réfléchir à l'utilité de la modélisation dans la création des savoirs.

La seconde approche vise l'évaluation des activités réalisée dans chacune des phases de la modélisation. Houston (2007) recense diverses listes de critères proposés pour évaluer les élèves lors de tâches de modélisation. Par exemple, la liste du groupe *Assessment Research Group* (ARG) propose vingt critères pour évaluer les élèves durant des processus de modélisation. Parmi ces critères, neuf concernent les aptitudes de communication et onze visent spécifiquement l'activité de modélisation. Les critères que l'élève doit respecter sont les suivants :

Tableau 2 – Critères proposés par l'Assessment Research group

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none">1. Énoncer les objectifs de la tâche.2. Identifier les principales caractéristiques de la tâche.3. Formuler des hypothèses simplificatrices.4. Identifier les variables d'intérêt possibles.5. Explorer les relations et développer un modèle mathématique.6. Énoncer le problème mathématique.7. Trouver une solution.8. Interpréter la solution.9. Valider la solution.10. Montrer des preuves de recherche.11. Faire preuve d'initiative, de détermination et de flair. |
|--|

(Source : Haines et Dunthorne, 1996, dans Houston, 2007)

2. Pistes d'évaluation en science et technologie

En ST, l'évaluation du processus de modélisation n'est pas directement abordée. L'apprentissage de la modélisation scientifique vise plutôt à favoriser l'apprentissage de concepts touchés dans le cadre de la démarche plutôt que le processus lui-même (Chastenay, 2013 ; Chastenay et Guay-Fleurent, 2022). Dans ce cas, la démarche est mobilisée pour créer un contexte de manipulation des concepts scientifiques.

La démarche peut aussi être évaluée par le biais de compétences disciplinaires en appréciant le développement de compétence en lien avec la modélisation. Au niveau secondaire, Talbot et Boissard (2021) proposent des grilles de vérification et des grilles descriptives facilitant l'évaluation de démarches. La liste de vérification est organisée autour des quatre composantes de la compétence 1 qui sont les suivantes (Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur, 2007, p. 14) : « Cerner le problème », « Élaborer un plan d'action », « Concrétiser le plan d'action » et « Analyser les résultats ». Ces critères peuvent donc être utilisés pour évaluer une démarche scientifique comme celle de modélisation.

3. Pistes d'évaluation en informatique

Louca et ses collègues (2011) ont proposé cinq éléments à observer pour évaluer un modèle informatique élaboré par les élèves. Ces critères sont la représentation de l'objet physique, la représentation des caractéristiques physiques de l'objet, la représentation des interactions entre les composantes du modèle, la représentation des comportements de l'objet ainsi que l'exactitude du phénomène étudié. La modélisation de phénomènes physiques était centrale à cette recherche, mais ces critères pourraient être élargis pour admettre d'autres types de modèle en les remplaçant « objet physique » par « objet modélisé ».

En ce qui a trait à la compétence de modélisation, Magana (2024) propose une échelle du niveau de compétence. Bien que cette proposition s'adresse aux personnes apprenantes de niveau universitaire, le premier niveau de l'échelle nous paraît pertinent pour baliser l'apprentissage de débutant en modélisation. Cette chercheuse propose d'évaluer les manifestations⁴ en lien avec quatre pratiques de modélisations. D'abord, les compétences attendues en lien avec la construction d'un modèle sont que l'élève soit en mesure de construire une représentation visuelle des données. Cette représentation peut prendre la forme d'un graphique, d'un tableau ou d'un schéma (Magana, 2024). Aussi, en leur fournissant un modèle mathématique simple, les élèves doivent être en mesure d'identifier les modèles mathématiques (ex. : une équation) correspondant à l'utilisation qu'ils cherchent et d'utiliser les méthodes de programmation adéquates pour représenter les abstractions au moyen de commande dans le code informatique (ex. : formule mathématique, équation, inégalité, conditions). Ensuite, par rapport à l'utilisation du modèle, l'élève doit employer des modèles ou simulations existants pour comprendre, caractériser ou interpréter des données en évaluant les conditions à la limite, en prenant en compte les *patterns* et en identifiant les relations dans les modèles. Puis, les manifestations en lien avec l'évaluation du modèle demandent que l'élève soit en mesure de comparer les résultats de modèles, par exemple ses prédictions, et de simulations avec des expériences ou des théories ainsi que de réaliser des tests concrets pour déterminer la justesse des modèles utilisés. Finalement, les manifestations en lien avec la révision des modèles demandent que l'élève adapte ou développe davantage un modèle simple. Cette adaptation demande de partir d'une situation à une autre, soit en modifiant le code informatique déjà existant ou en modifiant les paramètres du modèle existant.

⁴ Magana (2024) les nomme « *performances* ».

Aussi, bien qu'ils ne traitent pas exclusivement de modélisation, mais aussi de compétences de programmation, Vasconcelos et Kim (2020) présentent des modalités d'évaluation formatives et sommatives de l'activité de modélisation scientifique en classe d'informatique. Ils proposent quatre modalités évaluation formative. D'abord, il y a l'explication basée sur les artéfacts, c'est-à-dire que les élèves sont amenés à expliquer comment un concept de programmation est utilisé. Ensuite, les auteurs proposent l'utilisation de terminologie informatique et scientifique. Puis, les commentaires de pairs sur le code sont nommés et, finalement, les stratégies documentées de construction et de débogage lors de la simulation d'un phénomène sont abordées. Les évaluations sommatives que ces auteurs suggèrent sont l'explication de la manière dont le code est utilisé dans un scénario de modélisation scientifique, le débogage de code défectueux pour améliorer une simulation et le transfert de compétences de modélisation scientifique d'un contexte à un autre.

4. *Constats pour l'évaluation de la modélisation informatique*

En conclusion, cette contribution permet de baliser les pratiques évaluatives autour de la démarche de modélisation dans les trois disciplines et les approches pour l'évaluer. Ces différentes façons de concevoir l'évaluation de l'activité de modélisation permettent de réfléchir à différentes modalités d'évaluation qui ciblent différentes compétences. En effet, en mathématique, l'évaluation cible davantage la réflexion sur le modèle et le processus de modélisation, alors qu'en informatique, l'évaluation porte plutôt sur le modèle produit par l'apprenant. Dans le contexte de l'évaluation des modèles et de la modélisation en informatique, qui est un domaine encore peu développé, ces propositions permettent de ne pas seulement évaluer des éléments statiques comme un modèle complété ou le niveau de compétence à un certain moment de l'élève. Concrètement, des critères d'évaluation durant l'activité pourraient être intégrés afin de pouvoir fournir des rétroactions à l'élève durant la démarche. Les approches utilisées en mathématique et en ST permettent d'envisager la modélisation comme un processus dynamique dont la démarche peut être segmentée afin d'évaluer le processus de réalisation plutôt que seulement son produit.

Dans les recherches futures, il serait important de réfléchir aux manières dont ces cadres de référence peuvent être appliqués au contexte particulier de l'évaluation de la modélisation en informatique. Par exemple, une spécificité de ce contexte d'évaluation concerne les traces de l'évolution de la démarche de l'élève. Puisque le code informatique est travaillé par l'élève en ajoutant, modifiant ou en supprimant des portions lors du développement et la mise à l'essai du modèle, il sera important de réfléchir à des manières de consigner des ajustements réalisés durant la démarche de modélisation informatique.

RÉFÉRENCES

- Butterfield, A. et Ekembe Ngondi, G. (2016). *A dictionary of computer science* (7^e éd.). Oxford University Press.
- Chastenay, P. (2013). *Conception et évaluation d'une intervention didactique à propos des phases de la Lune dans un planétarium numérique* [Thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus.
<https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/9893>

- Chastenay, P. et Guay-Fleurent, F. (2022). Former à l'enseignement de l'astronomie par le biais d'une démarche d'investigation scientifique, d'observation, de modélisation et de vulgarisation : le cas des phases de la Lune. Dans A. Araújo-Oliveira et É. Tremblay-Wragg (dir.), *Des pratiques inspirantes au cœur de la formation à l'enseignement* (p. 69-91). Presses de l'université du Québec. <https://doi.org/10.1515/9782760556430-009>
- Chevallard Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.
- Greer, B. et Verschaffel, L. (2007). Modelling competencies - overview. Dans W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn et M. Niss (dir.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (p. 219-224). Springer.
- Harrison, A. G. et Treagust, D. F. (2000). A typology of school science models. *International Journal of Science Education*, 22(9), 1011–1026.
- Henning, H. et Keune, M. (2007). Levels of modelling competencies. Dans W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn et M. Niss (dir.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (p. 225-232). Springer.
- Houston, K. (2007). Assessing the “phases” of mathematical modelling. Dans W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn et M. Niss (dir.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (p. 249-256). Springer.
- Kuzniak, A. (2024). Enseignement de la modélisation mathématique et construction du travail mathématique : une dynamique problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (Numéro spécial), 91-110.
- Louca, L. T., Zacharia, Z. C., Michael, M. et Constantinou, C. P. (2011). Objects, entities, behaviors, and interactions: A typology of student-constructed computer-based models of physical phenomena. *Journal of Educational Computing Research*, 44(2), 173-201.
- Magana, A. J. (2024). *Teaching and learning in STEM with computation, modeling, and simulation practices: A guide for practitioners and researchers*. Purdue University Press.
- Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur. (2007). *Programme de formation de l'école québécoise. Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie*. Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur. (2018). *Plan d'action numérique en éducation et en enseignement supérieur*. Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Enseignement supérieur (2021). *Sciences de la nature (200.B1)*. Bibliothèque et Archives nationales du Québec.
- Niss, M., Blum, W et Galbraith, P. (2007). Introduction. Dans W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn et M. Niss (dir.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (p. 3-32). Springer.
- Roy, P. (2018). *Modèles et modélisation en physique dans les pratiques d'enseignement d'enseignants québécois du secondaire : le cas de la cinématique* [Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke].
- Seinen, C. et Kushner, P. (2024, 3 juin). 7030 collaborative earth system modelling in Canada [Session de congrès]. 58^e congrès CMOS. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=wtzDs-8oYMI&ab_channel=MeteorologicalandOceanographicSocietyCMOS

- Talbot, N. et Boissard, B. (2021). *Guide d'accompagnement en évaluation des apprentissages de la science et de la technologie – Deuxième cycle du secondaire*. AESTQ. <https://www.aestq.org/fr/guides-evaluation>
- Université de Sherbrooke. (2024). *Complexe de recherche multiéchelle en hydrologie, hydraulique et environnement*. <https://www.usherbrooke.ca/recherche/fr/udes/caractere-distinctif/infrastructures-uniques/complex-hydrologie-hydraulique-environnement>
- Vasconcelos, L. et Kim, C. (2020). Coding in scientific modeling lessons (CS-Model). *Educational Technology Research and Development*, 68(3), 1247-1273.

LE PROCESSUS DE MATHÉMATISATION DANS L'ÉLABORATION D'UN PROBLÈME EXTRA-MATHÉMATIQUE POUR L'ÉCOLE PRIMAIRE

| YVAIN-PRÉBISKI* SONIA

Résumé | Le travail du Léa MaPcV consiste tout d'abord à créer une situation de la vie quotidienne sous forme vidéo pour promouvoir la modélisation mathématique. Nous focalisons sur le passage de la situation réelle vers un problème mathématique, nous montrons comment la création d'une telle situation amène, dès son élaboration, à considérer les rapports dialectiques entre la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale, et analysons l'impact des choix des concepteurs sur l'activité des élèves.

Mots-clés : mathématisation, modélisation, problem posing, fragment de réalité, école primaire

Abstract | The work of LEA MaPcV consists firstly in creating an everyday life situation in video form to promote mathematical modelling. Focusing on the transition from a real-life situation to a mathematical problem, we highlight how the creation of such a situation leads, from the design on, to consider the dialectical relationships between horizontal mathematization and vertical mathematization and analyse the impact of the designers 'choices on the pupils' activity.

Keywords: mathematization, modelling, problem posing, piece of reality, primary school

I. INTRODUCTION

1. Contexte de l'étude

Le collectif français Léa¹ MaPcV (Mathématisation de problèmes concrets sous forme vidéo, [Mathématisation de problèmes concrets en vidéos \(MaPcV\) — Léa \(ens-lyon.fr\)](#)) s'est formé en septembre 2023. Il regroupe des enseignant·es du premier degré, des formateur·trice·s du premier degré, une inspectrice de l'Education Nationale et deux chercheuses en didactique des mathématiques. Son objectif est de mener sur trois années une recherche collaborative visant à favoriser l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation à l'école primaire en y incluant des réflexions sur la formation. Ce collectif est héritier d'un groupe mathématique qui existait depuis plus de 10 ans et dont l'originalité était de proposer des problèmes sous forme vidéo (<https://educabagnols.net>). Le travail pour l'année 2023-2024 a essentiellement porté sur l'élaboration de deux problèmes sous forme vidéo, l'un à destination d'élèves de CM1 et CM2 (Grade 5 et 6), l'autre pour des élèves de CE1 et CE2 (Grade 3 et 4) avec l'objectif de permettre de mettre en œuvre dans les classes une véritable activité de modélisation mathématique. Les enseignant·es ont ensuite expérimenté ces problèmes dans leurs classes.

2. Éléments théoriques de l'étude

Proposer un problème sous forme vidéo, dont la spécificité est d'être issu de la vie quotidienne nécessite une première étape pour le rendre accessible à un traitement mathématique, ce qui relève de la mathématisation horizontale (Yvain-Prébiski, 2023). De plus, le traitement mathématique, aspect vertical de la mathématisation, doit mobiliser des connaissances mathématiques accessibles aux élèves de l'école primaire. Ces deux aspects de la mathématisation empruntés à Treffers et repris dans la

* Université Claude Bernard Lyon 1, S2HEP UR 4148, Villeurbanne, 69622 – France – sonia.yvain@univ-lyon1.fr

¹ Lieu d'éducation associé porté par l'Institut Français de l'Éducation (IFÉ) au sein de l'ENS de Lyon.

Realistic Mathematics Education (Freudenthal, 1991) sont constitutifs de l'activité de modélisation mathématique.

Treffers, in his thesis of 1978, distinguished horizontal and vertical mathematising not sharply but with due reservations: Horizontal mathematising, which makes a problem field accessible to mathematical treatment (mathematical in the narrow formal sense) versus vertical mathematising, which effects the more or less sophisticated mathematical processing. (Freudenthal, 1991, p. 40)

Dans de précédentes recherches (Yvain-Prébiski, 2021, 2023), nous avons défini les formes de la mathématisation horizontale en jeu dans une activité de modélisation de situations extra mathématiques (voir figure 1). Le processus de mathématisation vertical relève lui du traitement mathématique une fois effectué le passage de la situation de départ à un problème mathématique.

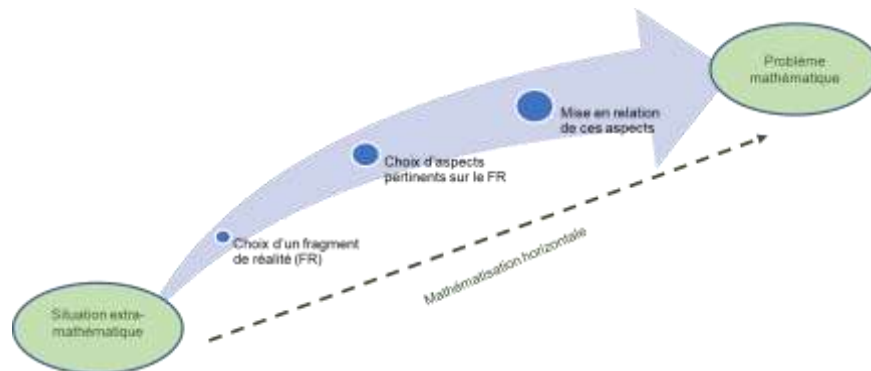


Figure 1 – Formes de la mathématisation horizontale

Nous mettons ainsi en évidence deux étapes intermédiaires pour passer de la situation extra-mathématique à un problème mathématique : tout d'abord le choix d'un fragment de réalité à partir duquel on va se questionner, le choix d'aspects pertinents (éléments de contexte, grandeurs...) du fragment de réalité pour envisager un traitement mathématique conduisant à un problème susceptible d'un traitement mathématique (PSTM), et enfin la mise en relation des aspects pertinents retenus conduisant au problème mathématique qui va être étudié. La figure 2 illustre l'ensemble du cycle de modélisation pour notre étude mettant en évidence le processus de mathématisation.

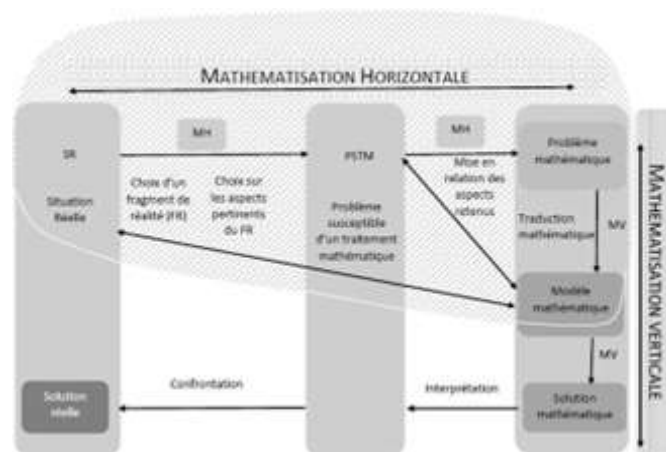


Figure 2 – Le cycle de modélisation de notre étude

Ce choix de représentation vise à mettre en lumière l'interconnexion entre la mathématisation horizontale et celle verticale dans une activité de modélisation à partir d'une situation ancrée dans le réel. En particulier, les doubles flèches à partir de modèle mathématique vers « la situation réelle » et

vers « le problème susceptible d'un traitement mathématique » illustrent que, dès la phase de l'identification des variables pertinentes et de leur mise en relation le solveur réfléchit à un traitement mathématique possible, voire à choisir un modèle existant en cohérence avec cette identification. Comme montré dans Yvain-Prébiski (2021), l'axe horizontal de notre schéma peut être vu comme un zoom explicite sur ce qui se joue entre les étapes « *simplifying / structuring* » et « *mathematizing* » du cycle de Blum & Leiss (2007) (figure 3).

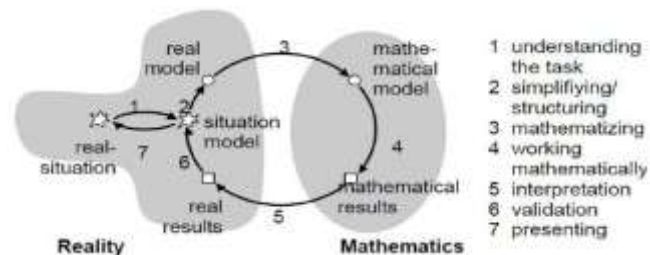


Figure 3 – Cycle de modélisation de Blum & Leiss (2007)

3. Question et hypothèses de recherche de notre étude

Notre question de recherche vise à étudier comment, dans l'élaboration d'une situation extra mathématique, sont pris en compte les rapports dialectiques entre la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale par les enseignant·es et formateur·trice.s du collectif Léa MaPcv. Nous faisons l'hypothèse H1 que, les mettre en position de concepteurs d'un problème ancré dans le réel, posé sous forme vidéo, les amène à faire des allers-retours entre ces deux aspects de la mathématisation. En particulier, nous supposons que le collectif sera tiraillé entre l'exigence de proposer un contexte authentique et celle de permettre un travail mathématique accessible aux élèves de l'école primaire.

Cette activité de création d'un problème nous amène également à considérer des éléments inhérents au courant *Problem posing* qui fait l'objet d'une attention accrue au cours de la dernière décennie en tant que processus mathématique important en soi, et aussi en tant qu'approche visant à promouvoir d'autres compétences (Cai and Leikin, 2020). Globalement le terme « *problem posing* » dans l'enseignement des mathématiques fait référence à deux processus : celui de développement de nouveaux problèmes et celui de reformulation de problèmes existants. Lors de l'élaboration du problème, le collectif a décidé de ne pas poser explicitement de question mais de faire en sorte que les éléments apportés par la vidéo suggèrent fortement la question qu'ils souhaitent que les élèves traitent mathématiquement. Or élaborer un problème implique déjà des activités qui sont nécessaires à la résolution ultérieure du problème (Baumanns & Rott, 2024). Par conséquent, au regard de notre question de recherche, il nous semble pertinent, dans l'élaboration et la résolution du problème de modélisation par le collectif Léa MaPcV, d'analyser les activités inhérentes au processus de mathématisation. Autrement dit, nous visons à mettre en évidence les choix opérés par cette équipe conceptrice lors de l'élaboration du problème vidéo en les mettant en parallèle avec leurs attentes concernant l'activité des élèves. Nous faisons l'hypothèse H2 que les élèves n'entreront pas nécessairement dans le processus de mathématisation visé par les concepteurs. En effet, de précédentes études (Yvain-Prébiski, 2023) ont montré que lors du processus de mathématisation horizontale, les choix de grandeurs pertinentes, d'éléments de contexte se font au regard de la question qu'on souhaite étudier. Or dans la vidéo qui sera proposée, les élèves devront choisir eux-mêmes la question à traiter les plaçant en cela dans une activité de type « *problem posing* ». L'activité de modélisation des élèves sera alors intrinsèquement liée à la question qu'ils vont se poser. Notre hypothèse H2 est renforcée par les travaux récents de Hartmann & al. (2022) qui ont mis en évidence que poser un problème lié à la

modélisation (donc se poser une question dans notre étude) implique une activité de compréhension. Les concepteurs d'un problème ont leur propre compréhension de la situation créée. Nous relierons cette activité de compréhension au travail relevant de la mathématisation horizontale. En effet, le choix des fragments de réalité que les concepteurs décident de faire apparaître dans leur problème sont pilotés par la question qu'ils envisagent de porter à l'étude. La phase d'exploration du problème qui s'en suivra sera conduite en fonction de cette compréhension de la part du solveur.

II. MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

Notre corpus de données est composé d'entretiens avec les différents acteurs du Léa MaPcV, des captations des trois réunions de travail du collectif concernant la création du problème de l'année pour le cycle 3 (grade 4 et 5) et celui du cycle 2 (grade 2 et 3) et de photos de productions d'élèves. Nous précisons que nos analyses sont toujours en cours. Tout d'abord, nous présentons dans cette section comment nous avons analysé la prise en compte des rapports dialectiques entre la MH et MV par le collectif lors de l'élaboration du problème (analyse relative à H1). Puis, concernant les mises en œuvre, nous exposons comment nous avons analysé la mise en œuvre par une enseignante du collectif exerçant en classe de double niveau CE2-CM1 (grade 3 et 4) au regard de H2. Un entretien avec cette enseignante (que nous nommerons E12) ainsi que son journal de bord complètent notre corpus de données.

1. Concernant l'étude relative à H1

H1 : Mettre des enseignant·es en position de concepteurs d'un problème ancré dans le réel, posé sous forme vidéo, les amène à faire des allers-retours entre l'aspect horizontal et vertical de la mathématisation.

Nous avons analysé qualitativement les trois captations des réunions de travail du collectif concernant la création du problème.

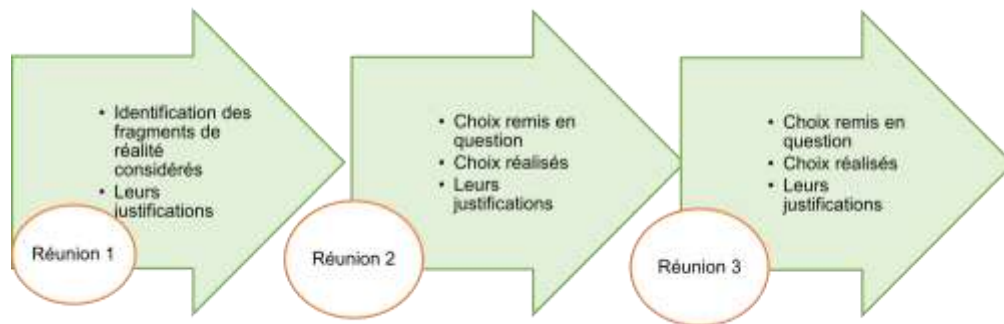


Figure 4 – Extraits de la méthodologie pour les trois temps de réunion

Nous avons pointé les choix et leurs justifications effectués en identifiant, selon notre cadre théorique, s'ils relèvent de la mathématisation horizontale ou de la mathématisation verticale. Ainsi nous avons suivi l'évolution des choix du collectif tout au long des trois réunions de travail en nous focalisant sur les fragments de réalité considérés et sur les raisons évoquées. Nous avons listé ces fragments et catégorisé ces raisons selon qu'elles évoquent une prise en compte du contexte réel proposé ou de celui du travail mathématique qui en découle. Nous présentons un extrait de ce travail d'analyse pour la première réunion en annexe 1.

2. Concernant l'étude relative à H2

H2 : Les élèves n'entreront pas nécessairement dans le processus de mathématisation visé par les concepteurs.

Concernant la mise à l'épreuve de H2, nous avons pour le moment seulement commencé l'analyse de la mise en œuvre d'une enseignante (E12) qui exerce en CE2-CM1 (grade 3 et 4). Pour ce faire, nous disposons de son journal de bord et de photos des activités des élèves (affiches réalisées, verbatims d'échanges, photos du tableau). Le journal nous donne accès à la mise en œuvre projetée par E12 ainsi qu'à ses régulations proposées au cours des séances. Nous précisons ici que E12 a l'habitude de proposer des activités de résolution de problèmes ouverts et a développé une certaine expertise dans leurs mises en œuvre comme en témoigne sa participation pendant plus de 10 ans à un groupe départemental mathématique proposant des rallyes mathématiques autour de la résolution de problèmes. Notre premier travail consiste à mesurer l'écart entre ce qu'a prévu E12 et le travail effectif des élèves et à en identifier les raisons au regard de la mathématisation du problème proposé. Nous rappelons que dans la vidéo proposée il n'y a pas de question explicitement posée. Les élèves devront se mettre d'accord sur la question à étudier et en cela se poser un problème. Ainsi, en appui sur les travaux de Bonotto & Santo (2015), nous nous sommes centrée dans l'activité des élèves sur les phases de compréhension, d'exploration et de génération de problème que l'on retrouve dans le courant du *problem posing*.

To pose problems that are based on given real-world situations, the given situation has to be understood and explored with regard to possibilities for posing a problem by distinguishing relevant from irrelevant information and establishing relationships between the relevant information. (Bonotto & Santo, 2015)

Based on these relationships, possible mathematical problems can be generated and evaluated with respect to whether or not the given information is coherent and sufficient for solving the problem (Bonotto & Santo, 2015)

La situation proposée ayant une visée de permettre une activité de modélisation, dans la lignée des travaux d'Hartmann & al (2022) qui consistent à interroger le processus de modélisation dans le cadre du *problem posing*, nous croiserons les éléments relatifs aux phases sus-citées avec le processus de mathématisation horizontale (MH) et son interconnexion avec la mathématisation verticale (MV).

III. PREMIERS RÉSULTATS DE NOTRE ÉTUDE

1. Relatifs à H1

Pour mieux comprendre les résultats, nous mettons en annexe 2 la retranscription de la vidéo et un lien vers la vidéo : [pizza_MaPcV.mp4](#)

Il ressort principalement des analyses, l'importance donnée par le collectif à proposer un contexte authentique tout en permettant un traitement mathématique accessible aux élèves. Il a retenu les fragments de réalité suivants : La préparation d'une pizza (le temps, la place sur le plan de travail et la nature des ingrédients), la cuisson (le temps), les commandes (gestion, nombre), les cartons (temps de gestion et pour réchauffer), le téléphone (temps passé), les ingrédients et le four (la place dans le four). La question que le collectif souhaite voir émerger est celle de savoir si le pizzaiolo aura le temps de préparer les deux commandes. Pour chacun de ces fragments, les choix opérés ont évolué au fur et à mesure des réunions avec des arguments soit liés à la volonté de proposer un contexte authentique soit liés à l'accessibilité du traitement mathématique inhérent au choix. Par exemple, l'extrait suivant des verbatims des échanges lors des réunions témoignent de leur volonté d'assurer l'authenticité du

contexte en ne remettant pas en cause l'expertise du pizzaiolo : « Ouais, pas le pizzaiolo, mais un apprenti pourrait se dire qu'il y avait largement le temps » ; « Il faut un apprenti ».

Les extraits ci-dessous montrent, quant à eux, la considération de la MV par le collectif :

- Concernant l'importance d'avoir un temps initial

« Peut-être pour la première commande, il pourrait préciser, la personne, je ne sais pas, commande 6 pizzas ou 7 pizzas et le pizzaiolo pourrait dire : « Ah ! Ben pour l'instant, ça tombe bien, je n'en ai aucune en cours », parce qu'en fait, il nous faut un temps initial. C'est à-dire, je n'en ai aucune en cours. Donc, je peux vous les faire pour telle heure ou je n'en sais rien, ce qu'on veut faire derrière. Mais il est quand même important de prendre un temps initial »

- Concernant les notions mathématiques à mobiliser et le degré associé de complexité

« Moi, je pensais plutôt travailler sur les durées. Quelqu'un appelle et demande si à telle heure il peut être servi alors qu'il y a des commandes avant et après ? »

« Avec ce nombre de pizzas et ce nombre de personnes, ce sont des variables qu'on peut ajuster pour faire travailler le cycle 2, là. Ça peut être plus facile. »

« Oui, d'en commander 3 ou d'en commander 15, ce n'est pas tout à fait le même problème, quoi. »

« Parce que du coup, ce que disait... Je ne sais plus si c'était E ou K, de dire : « On multiplie le nombre de pizzas fois le temps de préparation d'une pizza et on ajoute 3 minutes de cuisson pour 4 pizzas », c'est vrai que c'est un problème relativement simple. Mais si on ajoute là-dessus un problème d'organisation des tâches ou pendant qu'il en cuit, il prépare la fournée suivante, parce qu'il y a le bus du club de rugby qui est arrivé, et là, on a la complexification. Même si c'est uniquement par rapport au temps, on l'a quand même. »

« Et le temps, vitesse, durée, ça va être compliqué aussi. C'est moi qui l'ai mis, mais je pense que c'est compliqué non, le temps, la vitesse, la durée, rajouter ça aussi comme paramètre. C'est compliqué même en cycle 3. »

Les extraits suivants montrent un choix piloté par la MV et rejeté par des considérations ancrées dans le réel en lien avec la question à étudier :

« Et je me pose comme question aussi : est-ce qu'on ne pourrait pas aussi demander à chercher le nombre de pizzas ? On entend l'horaire, mais on n'entend pas le nombre de pizzas qu'il a prévu de livrer. »

« Mais dans la vraie vie, en fait, le pizzaiolo, lui, il va chercher plutôt à quelle heure il peut livrer sa pizza. Est-ce qu'on va lui donner le nombre de pizzas qu'on veut ? Donc, ce n'est pas trop une question naturelle. »

Les extraits suivants montrent un choix piloté par la MH et mis en relation avec le traitement mathématique qui en découle concernant l'heure à laquelle commencer la préparation des pizzas pour ne pas les livrer froides :

« Moi, quand j'ai fait le problème, je suis partie du temps, à quelle heure en fait je dois livrer ma pizza et pas de « tiens, j'ai ma commande, je la fais maintenant », parce qu'effectivement sinon, elles sont froides. »

« Tu dis tes pizzas, tu les livres, ça veut dire que pour quand même satisfaire le client, tu les mets au dernier moment dans ton four. Donc tu les mets jusqu'à 20 heures dans ton four pour que quand ils arrivent, au moins les dernières, elles soient bien chaudes. Voilà. Et donc ça veut dire que les autres, tu ne peux commencer le temps de préparation qu'à 19 h 56. »

Concernant les fragments de réalité « cuisson » et « préparation », au départ, le collectif n'a pas réalisé que pour la question qu'il souhaite voir étudier, il est nécessaire de les mettre en relation. Ce n'est que lorsqu'il a résolu leur première version de problème qu'il a noté que si le temps de préparation est supérieur au temps de cuisson alors la difficulté du traitement mathématique ne sera pas la même

que s'il lui est inférieur. Il a ainsi pris en compte l'importance pour les élèves de comprendre que pendant que des pizzas cuisent, la préparation d'autres pizzas peut se faire et a acté de simplifier le traitement mathématique en choisissant un temps de préparation d'environ 2'30" et un de cuisson de 3'. On peut souligner l'importance pour lui de donner le temps de cuisson dans la vidéo mais pas celui de préparation (sauf pour la situation donnée en cycle 2 pour rendre moins complexe le travail mathématique). Il a également souhaité permettre une prise de données instrumentées en filmant de manière accélérée le pizzaiolo préparant 4 pizzas (en indiquant « avance $\times 8$ »). Cela met en évidence la prise en compte de l'interconnexion entre la MH et la MV dans l'élaboration. Du point de vue du collectif, ce choix permet aussi de renforcer l'authenticité du contexte :

« Moi, je voulais insister là sur ce que tu avais dit, c'est ce que j'allais dire, le fait de prendre des données instrumentées donne aussi du sens certainement à la situation et rend la situation davantage réelle. »

2. *Relatifs à H2*

Comme déjà signalé, les résultats présentés proviennent d'une étude de cas de la mise en œuvre de l'enseignante E12. Les analyses portent sur ses 3 séances proposées, sur son journal de bord et sur l'entretien conduit après les mises en œuvre. Nous nous sommes attachée à étudier l'activité des élèves. Dans la première séance, E12 a d'abord proposé aux élèves le visionnage de la vidéo, puis elle leur a donné comme consigne de regarder une nouvelle fois la vidéo en notant quelle question ils pourraient traiter avec des mathématiques. Un troisième visionnage a été proposé avec comme consigne de noter tout ce qui semble utile aux élèves pour traiter la question qu'ils ont choisie. Si E12 avait comme objectif que les élèves se questionnent sur le fragment de réalité « temps de préparation », dans les phases de compréhension et d'exploration, c'est le choix du fragment de réalité « prix » (forme de la MH) qui a piloté le travail des élèves ce qui valide, pour cette étude de cas, notre hypothèse H2. Dans notre étude, les élèves ont souhaité travailler sur la question du prix des commandes et nous supposons que c'est en partie parce qu'ils ont anticipé l'accessibilité du traitement mathématique associé à cette question. En cela, ils ont répondu à la consigne en générant un problème mathématique mais pas celui attendu par E12. Dans un premier temps ils ont voulu chercher combien coutaient les 24 pizzas. Se rendant compte qu'ils ne disposaient pas d'informations sur la nature de la commande (« il peut y avoir différentes pizzas, on ne sait pas ce qui a été commandé, les prix ne sont pas les mêmes. » a dit un élève), ils ont décidé de vérifier le prix des 9 pizzas (soit 110€ annoncés par l'apprenti dans la vidéo). Nos analyses montrent que l'enseignante a d'abord laissé les élèves traiter mathématiquement cette question :

« Cette question n'était pas celle que j'attendais, mais dans la réalité on vérifie ce qu'on paye. J'ai trouvé cette question légitime et en plus tous les élèves voulaient traiter cette question » (E12).

Les élèves ont sélectionné dans la vidéo les grandeurs pertinentes et leurs valeurs (nature des pizzas et leur prix) pour étudier cette question et ont mobilisé un modèle additif pour la résoudre. Ils sont entrés dans un processus de mathématisation.

« La question du prix ne nécessitait qu'une lecture des données présentes dans la vidéo. Les élèves ont passé beaucoup de temps à voir et revoir le passage de la commande afin de noter les pizzas commandées puis la première image afin d'associer le nom des pizzas à un prix et de vérifier le montant de la facture. Ils ont tous noté le nom des pizzas, le prix des pizzas et là ils ont fait une addition. » (E12)

On note ici que lors de l'élaboration de la vidéo, E12 n'avait pas anticipé (tout comme le collectif) que le fragment de réalité « prix » pouvait aussi faire émerger une autre question accessible par un traitement mathématique :

« On a mis beaucoup d'informations dans la vidéo pour proposer un contexte le plus authentique possible, ancré dans la réalité. Donc c'est difficile d'enlever certains aspects tout en voulant rester ancré dans la réalité. Voilà, les choix ne sont pas si évidents à faire que. Ça nous a pris du temps de savoir ce qu'on voulait garder ou pas. Je ne m'attendais pas à ce que les élèves soient autant mobilisé sur la question du prix. On a pourtant pris du temps dans la vidéo pour montrer des éléments autour de la préparation des pizzas et du temps que cela prend » (E12)

Dans de précédentes recherches (Yvain-Prébiski, 2023) nous avons montré que les choix du fragment de réalité à considérer et l'identification des grandeurs pertinentes associées à ce fragment rentrent en connexion avec l'anticipation du travail de mathématisation verticale qui en découle témoignant des rapports dialectiques entre les deux aspects de la mathématisation dans une activité de modélisation. Nous faisons alors l'hypothèse que les choix des élèves sont liés à ce qu'ils se sentaient compétents à résoudre, une question autour du prix. Cette hypothèse est aussi partagée par E12 comme le montre l'extrait suivant issu de l'entretien après la mise en œuvre :

« Ils se sont saisis de la question sur le prix car les données sont concrètes et ne nécessitent pas un travail de représentation. Les mathématiques sont accessibles même pour les élèves plus en difficulté. »

Dans la deuxième séance, E12 a proposé aux élèves (installés en groupe de 4) de revoir la vidéo et d'essayer de trouver une autre question à étudier avec les mathématiques. La question sur le temps de préparation attendue par E12 a émergé dans certains groupes. Les élèves ont donc été amenés à résoudre la question suivante « est-ce que le pizzaiolo pourra honorer toutes les commandes ? ». Dans cette communication nous ne détaillons pas les stratégies des élèves mais soulignons tout de même que pour amener les élèves à comprendre que pendant que les pizzas cuisent dans le four, le pizzaiolo prépare d'autres pizzas, E12 a eu besoin d'une troisième séance.

IV. EN CONCLUSION

Nous avons montré que mettre des enseignant·es en position de concepteurs d'un problème ancré dans le réel, posé sous forme vidéo, les amène à faire des allers-retours entre l'aspect horizontal et vertical de la mathématisation. Lors de la création de la situation, leurs choix sont justifiés à la fois par le fait de garantir un contexte authentique et celui de permettre un traitement mathématique accessible aux élèves. Toutefois, c'est la question mathématique que le collectif souhaitait voir émerger qui a piloté leurs choix d'éléments de contexte et de grandeurs pertinentes à mettre en évidence dans la vidéo. Une fois cette question choisie, pendant les réunions, le collectif n'a pas pris en considération que les élèves pourraient se saisir d'un autre fragment de réalité. Selon le choix de fragment réalité choisi, la question portée à l'étude amène à un traitement mathématique différent, comme dans la classe de E12. Nos analyses en cours sur les mises en œuvre des autres enseignant·es montrent que dans toutes les classes, des élèves se sont questionnés sur le prix mettant parfois l'enseignant·e dans le dilemme de laisser vivre cette question (comme E12) ou de les guider vers celle souhaitée sur le temps de préparation. La situation proposée par le collectif LéA MaPcV a le potentiel de faire entrer les élèves dans une activité de modélisation où le processus de mathématisation est central et en particulier la mathématisation horizontale au regard des nombreux fragments de réalité proposés dans la vidéo.

La spécificité de la situation élaborée est de ne pas poser explicitement de question mais de la suggérer fortement ce qui place les élèves dans une activité de *problem posing*. Nous avons montré que, dans une activité de modélisation, la génération de problème est fortement liée à la mathématisation horizontale (comme le choix du fragment de réalité à étudier et les grandeurs pertinentes à identifier) et de son interconnexion avec la mathématisation verticale (comme envisager un choix dont on sait qu'on maîtrise les mathématiques pour résoudre la question choisie). Une perspective est d'approfondir ce qu'apporte le *problem posing* dans une activité de modélisation en termes de développement d'apprentissages pour les élèves. Concernant le développement des compétences sur la modélisation

des membres du collectif, nous envisageons de montrer qu'en les plaçant eux-mêmes en *problem posing* via la création d'une situation, ils développent des compétences inhérentes à la modélisation, comme exposé récemment dans les travaux de Hartmann et al. (2023).

RÉFÉRENCES

- Blum, W. et Leiss, D. (2007). How the students and teacher deal with mathematical modelling problems? Dans C. Haines, G. Galbraith, W. Blum et S. Khan (dir.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (p. 222–231). Horwood Publishing.
- Bonotto, C. et Santo, L. D. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in the primary school. Dans F. M. Singer, N. Ellerton et J. Cai (dir.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (p. 103–124). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_5
- Baumanns, L. et Rott, B. (2024). Problem-posing tasks and their influence on pre-service teachers' creative problem-posing performance and self-efficacy. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, article 101130.
- Cai, J. et Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, 105, 287–301.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic.
- Hartmann, L. M., Krawitz, J. et Schukajlow, S. (2022, février). *Modelling while problem posing: A case study of preservice teachers* [Communication]. 12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), Bozen-Bolzano, Italie.
- Hartmann, L. M., Krawitz, J. et Schukajlow, S. (2023). Posing and solving modelling problems – extending the modelling process from a problem posing perspective. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 44(2), 533–561.
- Yvain-Prébiski, S. (2021). Didactical adaptation of professional practice of modelling: A case study. Dans F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, K. L. Wong (dir.), *Mathematical modelling education in East and West. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (p. 305–319). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_26
- Yvain-Prébiski, S. (2023). La mathématisation horizontale : quels apports pour une recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation mathématique. Dans F. Vandebrouck et M.-L. Gardes (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Preuve, modélisation et technologies numériques. XXI^e école d'été de didactique des mathématiques, 18-24 octobre 2021, Sainte Marie de Ré* [Volume des séminaires et des posters] (p. 209–218). IREM de Paris. <http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/ACTESEEE21.pdf>

ANNEXE 1

EXTRAITS DE LA MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE RELATIVE À H1

- Premières discussions autour des différents fragments de réalité (MH)

Une certaine inquiétude face à autant de variables à prendre en compte

→ Décision de partir des notions mathématiques (MV) : « Les variables, elles sont multiples, comme on a marqué dans le tableau, en fait. De la préparation jusqu'à la cuisson, ou sur ce qu'on va noter sur le bon de commande aussi. Enfin, sur le planning d'organisation, il y a plein de choses aussi qu'on définira. Mais effectivement, il faut peut-être partir de la notion mathématique qu'on veut travailler. Et après, on adaptera les variables. »

- Discussions autour des notions potentiellement à travailler (MV)

la proportionnalité, le calcul sur les heures et les durées, la monnaie et après, plus complexe, temps, vitesse, durée

→ Décision de ne pas retenir la vitesse (MV) car trop complexe au vu du bagage mathématique des élèves

- Discussions articulant MH/MV

→ Tableau récapitulatif

Fragments de R	choix de grandeurs et ou d'éléments de contexte (MH)	Valeurs choisies	Choix ancrés dans le réel	Choix liés à MV
Préparation d'une pizza	Temps de prep	2 à 3 minutes Ou 10 en 30 minutes	Cohérent avec le pizzaiolo filmé	
Préparation d'une pizza	Nombre de place sur le plan de travail	4	Cohérent avec le plan de travail du pizzaiolo	
Préparation d'une pizza	Leur composition	Non pris en compte : même temps quel que soit leur composition		Trop compliqué pour le traitement mathématique
Préparation d'une pizza	Heure de départ des préparations	Permettre aux élèves de voir dans la vidéo « le temps initial » avant que démarre les préparations	Rester « authentique » Cad cohérent avec le réel d'une pizzeria	Permettre un temps « 0 » pour le point de départ des calculs

ANNEXE 2

TRANSCRIPTION DE LA VIDÉO

- La vidéo commence par un plan sur l'entrée d'une pizzeria où on peut voir le tableau des pizzas proposées et leur prix. 19H00 s'affiche. Puis, on voit dans la pizzeria, le pizzaiolo (P) et son apprenti (A) :
- 00:13.869 --> 00:22.000 : Ah Salut Patron. /Bonjour Luigi. /Comment allez-vous ? Très bien. /Nous avons une commande de 24 pizzas pour 20 heures. /Bueno.
- 00:23.000 --> 00:28.000 [La vidéo montre des pizzas en train de cuire dans le four, s'affiche « Four 4 pizzas flambant neuf »] Hey Boss, ça fait 3 minutes ou 2 minutes qu'elles cuisent ? /2 minutes et encore 1 minute. /Très bien, patron, très bien !
- [On voit ensuite le pizzaiolo retirer une pizza du four et la mettre dans un carton]
- 00:46.000 --> 01:02.000 [L'apprenti répond au téléphone, 19H30 s'affiche]
- Bonjour, Toto pizza ! /Je voudrais savoir s'il est possible de commander neuf pizzas. /Est-ce possible ? /Ecoutez oui oui oui disons oui disons oui ! Allons-y, de quoi avez-vous besoin ?
- 01:01.000 --> 01:29.000 [La liste de la commande va être donnée, l'apprenti répète quasi à chaque fois la nature de la pizza demandée. Il tape à chaque fois sur sa caisse enregistreuse]
- Je voudrais une fromage /Une fromage /Une jambon /Une Jambon /Une Végétarienne / Oui /
- Une Reine / Très bien / Une Trois fromages /Oui /Une Mozzarella /Parfait / Une Napolitaine /
- Tout à fait d'accord /Une Basquaise et une quatre fromages /Quatre fromages, c'est parti ! /
- Très bien, 110 € madame
- [La vidéo montre un plan du pizzaiolo en train de préparer 4 pizzas en mode « avance x8 » (cela est inscrit à l'écran) de l'étalage de la pâte à sa garniture et à la mise dans le four des 4 pizzas]
- 01:59.000 --> 02:05.000 [Le pizzaiolo rejoint l'apprenti]
- Ah patron je viens de prendre une commande de 9 pizzas pour 19h45. J'ai dit banco !
- 02:05.000 --> 02:10.000 [Réponse du pizzaiolo]
- Oui, ça va être compliqué ! Il y en a 24 pour 20 heures...
- 02:10.000 --> 02:12.000 Patron mais vous êtes vraiment bon, patron !
- 02:12.000 --> 02:14.000 [Réponse du pizzaiolo] Il y en a qui vont attendre...
- 02:14.000 --> 02:16.000 Patron je vais mettre les pizzas dans des cartons alors. [Fin de la vidéo avec un plan du four qui se ferme]

LE PROCESSUS DE DÉVOLUTION D'UN PROBLÈME EXTRA-MATHÉMATIQUE ET SES INFLUENCES SUR L'ENTRÉE DANS LA SITUATION PAR LES ÉLÈVES : DEUX ÉTUDES DE CAS

| DE SIMONE* MARINA, LACEK** YANA ET WEISS*** LAURA

Résumé | Nous analysons le processus de dévolution (Brousseau, 1990) d'un problème extra-mathématique dont la résolution requiert la mise en œuvre d'un ou plusieurs processus de modélisation au sens de Blum et Leiss (2007). Nous avons expérimenté le problème de la « tour Eiffel » dans deux classes (élèves de 14 ans) avec deux enseignants. Nous analysons sa mise en œuvre à l'appui de l'outil théorique développé par Yvain-Prébiski (2021) tout en intégrant la composante cognitive au sens de Borromeo Ferri (2006).
Mots-clés : modélisation, dévolution, enseignant, fragments de réalité, représentation mentale de la situation

Abstract | In this article, we analyze the devolution process (Brousseau, 1990) of an extra-mathematical problem whose resolution requires the implementation of one or more modelling processes in the sense of Blum and Leiss (2007). We focused on the “Eiffel Tower” problem in two classes of 14-year-old students with two teachers. We analyze its implementation using the theoretical tool developed by Yvain-Prébiski (2021) integrating the cognitive component in the sense of Borromeo Ferri (2006).

Keywords: modelling, devolution, teacher, reality fragments, mental representation of the situation

I. INTRODUCTION ET PRÉSENTATION DU CONTEXTE

La résolution de problèmes et la modélisation sont au cœur de l'activité mathématique, mais leur mise en œuvre et leur enseignement sont des questions complexes. Dans notre projet de recherche, nous nous intéressons particulièrement à la modélisation mathématique et à son implémentation efficace en classe, conformément aux exigences institutionnelles du Plan d'Études Romand (PER). Pour ce faire, nous avons créé un groupe de travail composé de trois chercheurs et de quatre enseignants afin d'expérimenter des situations de modélisation en classe. Ces enseignants sont des volontaires motivés, intéressés par la recherche, qui s'interrogent sur leurs pratiques et s'efforcent de transmettre une vision différente des mathématiques à l'école.

Dans cet article, nous présentons une expérimentation menée dans deux classes (élèves de 13-14 ans) en juin 2024 à propos de la fidélité d'un modèle réduit de la tour Eiffel (Annexe 1).

Nous nous intéressons à la mise en œuvre de la situation par les enseignants qui permet aux élèves de s'emparer de la problématique et de construire un modèle mathématique pour évaluer la fidélité de la miniature qui leur a été montrée. Après la présentation du cadre théorique, nous analysons comment les enseignants des deux classes gèrent l'entrée dans la situation et le travail de modélisation des élèves.

* Institut Universitaire de Formation pour l'enseignement – Université de Genève (Suisse) – marina.desimone@unige.ch

** Faculté de psychologie et de sciences de l'éducation – Université de Genève (Suisse) – yana.lacek@unige.ch

*** Université de Genève – Suisse – laura.weiss@unige.ch

II. CADRE THÉORIQUE

Dans ce travail, nous nous référons aux recherches d'Yvain-Prébiski (2021) qui s'interroge sur « comment dévoluer le travail de mathématisation nécessaire pour rendre une situation enracinée dans la réalité accessible à un traitement mathématique » (traduction libre d'Yvain-Prébiski 2021, p. 305). Pour cela, elle détaille et complète le cycle de modélisation (Annexe 2) de Blum et Leiss (2007) et propose une description des processus de modélisation combinant le travail d'Israël (1996) et le courant « *realistic mathematics education* » (Annexe 3).

En effet, Yvain-Prébiski (2021) caractérise la *mathématisation horizontale* et, en se basant sur les travaux d'Israël (1996), elle ajoute des éléments complémentaires à ces étapes : d'une situation extra-mathématique, c'est à travers le choix de *fragments de réalité* la caractérisant et de leurs *aspects pertinents* en fonction de la question qu'on se pose qu'il est possible d'élaborer un problème susceptible d'un traitement mathématique (*PSTM*). Puis, partant de ce *PSTM* et en établissant des relations à travers certains de ses aspects, le *problème mathématique* prend forme. Ces deux phases correspondent selon Yvain-Prébiski (2021) aux étapes 2 (*simplifier/structurer*) et 3 (*mathématiser*) du cycle de modélisation de Blum et Leiss (2007) et contribuent à les expliciter.

Dans leur modèle, « Blum et Leiss (2007) décrivent la transition entre la situation réelle et le modèle de la situation comme une phase de compréhension de la tâche qu'ils considèrent importante dans le processus de modélisation » (traduction libre de Vorhölter et al., 2019, p. 103). Borromeo Ferri (2006, p. 92) insiste que « dans cette transition prend place une reconstruction mentale du problème, souvent implicite et non consciente chez l'individu qui la pratique » [traduction libre], aboutissant à ce qu'elle nomme une *représentation mentale de la situation*. Pour Schukajlow et al. (2023, p. 261), une caractéristique importante du modèle de la situation « est sa structure holistique qui permet de faire des inférences pendant la résolution du problème » [traduction libre]. Si on considère la modélisation comme objet d'apprentissage, il est donc d'une grande importance de s'assurer d'une dévolution efficace (Brousseau, 1990) de la mathématisation horizontale de la situation réelle comme condition indispensable pour travailler des problèmes de modélisation dans la classe. La dévolution est définie par Brousseau (1990) comme un « acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage [...] et accepte lui-même les conséquences de ce transfert » (p. 325).

À l'aide de ce cadre théorique, nous formulons deux questions de recherche. Dans une situation réelle, comment les enseignants facilitent la construction de la *représentation mentale de la situation* ? Puis, comment les enseignants amènent les élèves à faire émerger les différents *fragments de réalité*, à sélectionner *leurs aspects pertinents* en vue de la construction d'un *PSMT* tout en les aidant à faire les liens afin d'aboutir à un *problème mathématique* ?

III. MÉTHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

Pour notre expérimentation, nous avons choisi une situation extra-mathématique (Annexe 1) visant la mobilisation du modèle de la proportionnalité mais dont la formulation ne donne pas d'indices dans cette direction. Ce problème a été proposé à deux enseignants de notre groupe de travail ayant chacun une classe de 12 élèves. La classe de Tom comporte des élèves en difficulté scolaire, alors que ceux de Noah suivent une orientation scientifique proposant un cours spécifique de « démarches mathématiques et scientifiques ».

Les enseignants étaient libres de choisir les modalités de la mise en œuvre de la situation qui a d'abord été expérimentée dans la classe de Tom où ils ont choisi d'être tous les deux présents. Le difficile rôle des enseignants des deux classes était de dévoluer la mathématisation horizontale de la situation aux élèves afin qu'ils perçoivent la pertinence des mathématiques pour la traiter.

Les données ont été prélevées en filmant la leçon depuis le fond de la classe, l'enseignant étant lui-même muni d'un micro-cravate. Chaque élève était de plus pourvu d'une caméra embarquée permettant d'enregistrer son travail. Les traces des élèves sur papier ont été ramassées à la fin du cours. Les chercheuses ont conduit des entretiens avec les enseignants avant et après l'expérimentation.

IV. ANALYSE DES DONNÉES

La présentation de la situation a été pratiquement identique dans les deux classes. Les enseignants ont fait le choix de ne pas distribuer l'énoncé écrit (Annexe 1), mais plutôt de raconter l'histoire d'un voyage à Paris dont ils avaient ramené un souvenir. Cette histoire est parlante pour les élèves qui, interrogés, ont eux-mêmes l'idée de ramener de Paris une miniature de la tour Eiffel. A ce moment, les enseignants montrent deux miniatures roses munies de faux diamants (Figure 1). Toutefois, malgré une préparation commune et la présence de Noah dans la classe de Tom, le déroulement de la séance diverge dans les deux classes.



Figure 1 – La miniature apportée en classe par les enseignants

1. *Analyse de la mise en œuvre de la situation dans la classe de Noah*

Noah termine l'histoire en disant que sa fille a dit que la miniature « n'était pas hyper fidèle à la grande tour Eiffel ». Il vérifie auprès des élèves s'ils comprennent ce que signifie l'expression « pas hyper fidèle » et ceux-ci l'interprètent comme « ça ne ressemble pas à ». Noah formule ensuite sa question : « est-ce que vous pensez que c'est fidèle, est-ce que vous avez l'impression que c'est fidèle à la vraie tour Eiffel ou pas ? ». Il lance alors les élèves pour 6 minutes de travail individuel avec la consigne « vous me notez tout ce qui vous passe par la tête, d'accord ? toutes les idées que vous avez, quoi que ce soit, on note [...] vous me notez le plus d'idées possible », afin que les élèves cherchent des *fragments de réalité* de tout type, inhérents à la situation.

Suite à cette phase, Noah procède à une mise en commun en notant à l'*open board* (OB) de manière succincte toutes les propositions des élèves sur deux colonnes (Figure 2) sans rien rejeter. Et pourtant, *a posteriori*, nous pouvons interpréter cette organisation spatiale du tableau comme une anticipation du tri (non explicite pour les élèves) des *fragments de réalité* selon leur pertinence pour le *PSTM*. Il anticipe ainsi la possibilité d'éliminer rapidement des éléments non pertinents pour construire le *PSTM*.

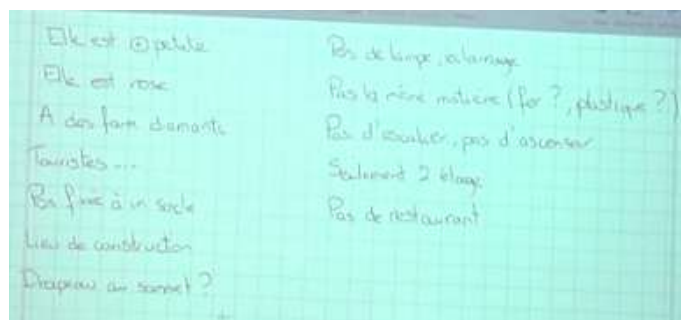


Figure 2 – Notes de la mise en commun

Il annonce donc :

Bon il va de soi qu'il y a des choses qu'on peut quand même je pense mettre de côté, oui elle est rose, c'est vrai, et en même temps je crois que, je ne pense pas que ce soit exactement ce qu'elle avait ... ce qu'elle avait en tête quand elle m'a dit « moi, je trouve pas qu'elle ressemble forcément, qu'elle est pas fidèle »

Ce geste est en contradiction avec son ouverture précédente. En ce sens, Noah cadre le travail, limitant ainsi le processus de dévolution de la *mathématisation horizontale*. Ce choix s'explique sans doute, d'une part, par sa présence dans la classe de Tom qui l'a mis en garde contre le temps long nécessaire aux élèves pour discuter de la pertinence de toutes les idées proposées et, d'autre part, en supposant que pour des élèves scolaires cela va de soi.

Noah propose alors aux élèves de travailler en petits groupes, mais probablement conscient d'avoir « court-circuité » le temps d'appropriation par les élèves de la situation, tente de les encourager à chercher des données permettant la construction d'un problème mathématique :

La question que je vous pose c'est : du coup, OK, c'est vrai qu'il y a pas tout ça sur ma tour Eiffel et pourquoi il y a pas tout ça ? Je veux que vous alliez me prendre le maximum d'informations et que vous arriviez à nous expliquer le pourquoi du coup ils ont pas fait la représentation la plus fidèle qu'ils pouvaient faire pour que ma fille soit contente.

En observant le travail des groupes, Noah réalise que la majorité de ses élèves sont au stade de donner comme réponse que cela serait trop cher à construire et que les éléments de la miniature seraient trop petits, sans mettre en œuvre un calcul proportionnel. Or, leurs arguments sont en soi suffisants pour décider que la miniature n'est pas fidèle, mais Noah ne les accepte pas et invite les élèves à creuser davantage en les laissant en autonomie.

Une partie de la difficulté nous semble provenir ici du mot « fidèle » qui est polysémique et ne pointe pas directement sur l'idée qu'un modèle réduit respecte tous les détails en les réduisant de façon proportionnelle. Autrement dit, les élèves en sont restés aux *fragments de réalité* sélectionnés par l'enseignant sans toutefois être en capacité d'identifier les *aspects pertinents* qui aboutiraient à la construction d'un *PSTM*. Ici, il est en effet crucial que les élèves interprètent le mot « fidèle » par rapport à l'idée d'une réduction proportionnelle.

En résumé, dans la classe de Noah, malgré une tentative initiale de laisser libre parole aux élèves, finalement la question à laquelle les élèves doivent répondre est posée par l'enseignant (la miniature n'est pas fidèle, pourquoi ?) et non dévolue à la classe ; de plus si l'enseignant note toutes les propositions des élèves, il les trie rapidement sans intégrer les élèves dans ce choix. Lors de cette phase, la *représentation mentale de la situation* que les élèves se sont construits n'a pas permis d'aboutir à un *PSMT*. En effet, l'idée de réduction proportionnelle n'est pas évoquée et n'apparaîtra que lors de la phase de travail de groupe amenée par l'enseignant.

2. *Analyse de la mise en œuvre de la situation dans la classe de Tom*

L'enjeu pour Tom semblait *a priori* plus ambitieux car il est confronté à des élèves qui ont peu confiance en leurs capacités et qui renoncent très vite devant les tâches scolaires. D'ailleurs, il commence plus lentement l'exposé de la situation, en donnant davantage la parole aux élèves.

- Tom : Avec M. Noah on est à allés à Paris tous les deux. Qu'est-ce qu'il y a de chouette à voir à Paris ?

Nombreuses réponses des élèves

- Tom : [...] on a voulu ramener des petits souvenirs, des petites tours Eiffel en miniature, on en a acheté mais vous allez me dire ce que vous en pensez. *Il montre les miniatures (Figure 1).* Qu'est-ce que vous en pensez ? Elles sont belles ?

Tom réoriente alors le regard des élèves vers la perception de la vraie tour Eiffel à partir des miniatures :

- Tom : Est-ce que vous croyez que les filles de M. Noah arrivent à avoir une bonne idée de la tour Eiffel si elles voient ça ?

Tom continue à débattre avec la classe demandant d'explicitier pourquoi les élèves répondent « non » à cette question. Afin d'enrichir pour les élèves le milieu au sens de Brousseau (1990), il les aide à se représenter la situation proposée en mimant sa situation à Paris :

- Tom : quand on regardait la tour Eiffel (*regard vers le haut*) et quand on regardait notre petit souvenir (*regard vers la miniature*)

Par cette comparaison, il fait vivre aux élèves une expérience mentale qui fait le lien entre la tour Eiffel et la miniature pour contribuer à la construction de la *représentation mentale de la situation* de réduction. Il amène ensuite l'expression « disons que ce n'était pas très fidèle ». Mais soucieux de la compréhension des élèves, il demande néanmoins le sens du mot « fidèle » et inscrit au tableau la proposition d'un élève « fidèle syn. réaliste ».

Il lance alors une première phase de réflexion individuelle, lors de laquelle les élèves sont censés identifier des *fragments de réalité* pertinents pour l'étude de la question posée.

- Tom : Ce n'est pas très fidèle ok, alors pour toutes les raisons qu'on a évoquées c'est-à-dire la couleur, les strass on trouvait que ce n'était pas vraiment réaliste. Votre travail à vous c'est que [...] vous allez écrire une ou deux raisons, allez deux chacun, expliquant pourquoi ce petit modèle réduit-là, il n'est pas fidèle, on a déjà évoqué la couleur et les diamants et donc ceux-là on ne va pas les prendre. Faites l'effort d'écrire.

À ce moment, il propose que les élèves regardent sur leur téléphone des photos de la tour Eiffel, puis il affiche une image (Figure 3) où l'on voit un modèle réduit photographié devant la tour Eiffel. Ainsi il œuvre à l'enrichissement du milieu qu'il focalise graduellement sur le passage de la tour Eiffel à la miniature et donc à l'idée de réduction.

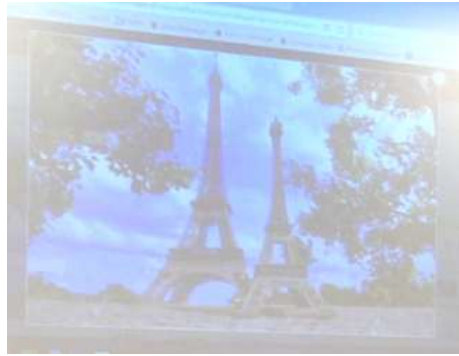


Figure 3 – Photo d'un modèle réduit devant la tour Eiffel projetée à l'OB

Mais constatant que les élèves n'avancent pas dans leur rédaction, il intervient alors une troisième fois en proposant ce que nous appelons et définirons ultérieurement une *expérience mentale dynamique* dont les élèves sont les protagonistes :

- Tom : Essayer de faire avec moi l'aventure, ok. Je vais à Paris en vrai, pardon, je me place devant la tour Eiffel, je la regarde et puis je suis dans la vraie vie donc je peux faire tout un tas de choses on est d'accord ? je peux la toucher, je peux la regarder, je peux tourner autour, je peux aller dessous, je peux observer faire tout ce que je fais en vrai, d'accord ? la question c'est imaginez-vous maintenant que j'ai une machine, un pistolet à rétrécir vous avez tous regardé les Totally Spies, non, ok je mets la miniature, je prends Edouard, je le rapetissis pour que, ben, il ait l'impression d'être devant la vraie tour Eiffel, alors qu'il est devant la miniature. La question c'est : qu'est-ce qui va faire qu'en regardant cette miniature, lui-même étant tout petit, il va se dire « Ah ça marche pas ». C'est cette expérience dynamique là que vous devez faire, qu'est-ce qui joue pas ? alors il y a plein d'idées mais si ça vous aide dans le travail de vous imaginer en tout petit petit devant cette pyramide-là, qu'est-ce qui vous permet ...

Ainsi Tom a enrichi successivement le milieu pour que l'idée de réduction puisse émerger. Toutefois la couleur restant une pierre d'achoppement pour un élève, Tom se réfère à l'image qu'il a projetée (Figure 3) et commente :

- Tom : oui on l'a dit la couleur regarde tu vois là je t'en ai mis une qui est quand même un peu plus fidèle mais est-ce que c'est suffisant, est-ce que, et c'est ça que je vous demande de faire dans ce cas-là, comment est-ce que toi, [...] tu te rends compte que c'est pas la vraie.

Après cette phase de travail individuel interrompu par les deux interventions de Tom, le résultat de la mise en commun est présenté sur la Figure 4.

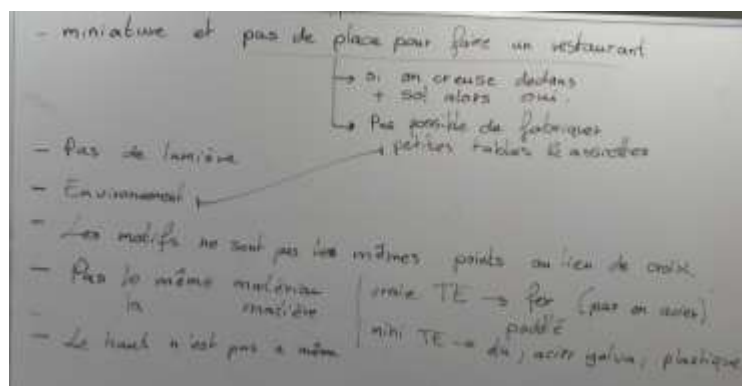


Figure 4 – Tableau de la mise en commun

En effet, il n'y a pas de mention de la couleur ou des diamants, et plusieurs élèves semblent avoir bien investi le concept de réduction. Par exemple, les élèves ont proposé que la forme des poutrelles n'est pas la même ou que sachant qu'il y a un restaurant au 2^e étage ils ont signalé que les assiettes seraient trop petites pour être fabriquées. Cela montre que parmi les *fragments de réalité* évoqués, les élèves ont su sélectionner les *aspects pertinents* de ces fragments pouvant constituer un *PSTM*. Quant au mot « proportionnalité », il est propre à un seul élève qui a clairement fait un pas de plus vers le modèle mathématique.

En résumé, Tom élabore avec les élèves la problématique, tout comme l'interprétation du mot « fidèle ». Il crée ensuite les conditions pour que les élèves puissent se construire une *représentation mentale de la situation* en tant que réduction grâce à l'enrichissement du milieu par les images proposées et les *expériences mentales dynamiques* suggérées. En ce sens, l'enseignant a réussi à ce que les élèves prennent en charge l'idée de réduction et donc à leur dévoluer une manière de voir la situation nécessaire à la création du *PSTM*.

V. DISCUSSION

L'analyse de ces deux séances nous permet de dégager quelques éléments clés pour comprendre ce qui peut se passer quand les élèves sont confrontés à une situation extra-mathématique.

Dans la classe de Noah d'élèves scolaires, les échanges vont plutôt à sens unique, avec relativement peu de répondant de la part des élèves qui semblent déstabilisés par une situation d'un genre nouveau. La relativement longue phase de travail individuel est peu productive pour identifier les *aspects pertinents des fragments de réalité* à retenir en vue de la construction du *PSTM*.

De ce fait, le travail de groupe des élèves qui a suivi la mise en commun débute donc avec un faible stock d'idées à partager et à débattre. L'enseignant devra intervenir dans les groupes pour les encourager à aller au-delà du « c'est trop petit » pour qu'ils quantifient ce « trop petit » en s'appuyant sur le modèle de la proportionnalité. A notre avis, parallèlement à la contrainte, temporelle, Noah a surévalué la capacité de ses élèves à identifier un problème de réduction dans la situation proposée et à lui appliquer le modèle mathématique de la proportionnalité. En effet, il n'est pas intervenu dans la construction de la *représentation mentale de la situation* qui permettrait d'aboutir au *PSTM*. Il nous semble donc que ces choix lui ont joué un mauvais tour et sont devenus un obstacle de la dévolution.

Tom, attentif à aider ses élèves faibles à entrer dans la tâche, leur propose d'opérer l'*expérience mentale dynamique* du rétrécissement. L'élimination initiale des *fragments de réalité* de la couleur et des diamants en affichant un modèle « plus fidèle » (Figure 3) oriente efficacement les élèves sur d'autres caractéristiques de la situation. Ainsi, dans cette classe, les élèves partent mieux armés pour le travail en groupe parce qu'ils ont vécu collectivement deux phases : la construction de la *représentation mentale de la situation* grâce aux interventions de Tom lors du travail individuel, notamment sous forme de l'*expérience mentale dynamique* puis, lors de la phase de mise en commun, la co-construction d'un *PSMT* et du *problème mathématique* associé. Pour ce faire, Tom s'appuie sur la contribution d'un élève qui, en regardant l'image du modèle réduit devant la tour Eiffel (Figure 3), évoque la proportionnalité. Bien que le modèle mathématique de proportionnalité pose des difficultés à ces élèves en termes de mise en œuvre, ils partent directement sur des calculs impliquant la proportionnalité. Si Tom, par le triple enrichissement du milieu, accorde à ses élèves beaucoup de temps pour bien comprendre la situation comme un phénomène de réduction, aboutissant ainsi à un *PSTM*, il doit amputer la situation initiale très large de ces errements qui caractérisent la mathématisation horizontale (ici couleur, diamants, forme, matière), pour aider les élèves à rentrer dans un problème de proportionnalité. Dans les deux cas la situation initiale doit être simplifiée (choix des *fragments de réalité*) et structurée (choix et mise en

relation des *aspects pertinents*), mais les enseignants s'y prennent différemment, l'un les laissant davantage en autonomie mais devant intervenir pour faire avancer le temps didactique, l'autre intégrant ses élèves dans le processus par l'enrichissement du milieu.

VI. CONCLUSION

Dans cette communication, nous avons analysé le travail des enseignants pour faire émerger dans la classe un *PSTM* à partir d'une situation de la vie réelle, à la lumière de l'outil théorique d'Yvain-Prébiski avec un focus sur sa composante de *mathématisation horizontale* tout en intégrant le concept de la *représentation mentale de la situation* au sens de Borromeo Ferri. Nous avons constaté dans les deux classes un travail laborieux qui, partant d'une situation de réalité complexe (à cause des miniatures choisies dont l'aspect est passablement éloigné d'un modèle réduit de l'original) visait à définir avec les élèves un problème de réduction régi par la proportionnalité, dont les résultats devaient remettre en cause la fidélité des miniatures.

Cette expérimentation montre les difficultés de l'implémentation de ce type de situations en classe. Les résultats de notre étude mettent en évidence l'importance de poser une question ouverte mais qui suscite *in fine* la nécessité d'un traitement mathématique. En particulier, elle nous amène ici à revoir la formulation de la question sur la « fidélité », car le terme « fidèle » est polysémique et appelle la réponse immédiate qu'il serait « trop petit et trop cher » de représenter tous les détails de la tour Eiffel dans la miniature. Cette réponse de bon sens est complète et pertinente ce qui rend le traitement mathématique artificiel.

Cette étude de cas s'inscrit dans une recherche dans laquelle nous désirons explorer et créer des outils à disposition des enseignants pour mettre en œuvre des situations issues de la vie réelle faisant appel à la modélisation. Pour cela, il pourrait se révéler utile d'anticiper de façon plus précise, lors de l'analyse *a priori*, les potentiels *fragments de réalité* qui vont apparaître dans la classe. Nous considérerons en effet ces *fragments de réalité* comme des variables didactiques de la situation qui déterminent, entre autres, la complexité de la mathématisation horizontale. L'observation du déroulement de ces leçons permet aussi de réfléchir à comment outiller des enseignants relativement à l'*expérience mentale dynamique* qui s'est révélée particulièrement efficace dans la construction d'une *représentation mentale* de cette situation et propice à la dévolution de la mathématisation horizontale. Nous définissons ici l'*expérience mentale dynamique* comme une expérience de pensée portant sur un processus qui varie dans le temps plutôt que sur un état statique et qui permet de se représenter une évolution.

La dévolution à mettre en œuvre s'appuie en grande partie sur la conception et l'aménagement du milieu didactique opérés par l'enseignant. Il s'agit de structurer le milieu par étapes afin de créer des conditions où l'élève peut explorer, expérimenter et construire ses *représentations mentales* de la situation. Ce milieu peut être enrichi au fur et à mesure par des ressources (ici, miniatures, photos, internet, puis instruments de mesure et calculatrice). Cet enrichissement du milieu favorise la dévolution en rendant la situation plus porteuse de sens et plus propice à l'émergence d'une prise en charge autonome par l'élève.

Si on souhaite que les mathématiques deviennent pour les élèves un outil de compréhension du monde, il ne faut pas restreindre leur enseignement à des problèmes déjà mathématisés comme souvent rencontré dans les cours de mathématiques. En même temps, il faut aussi reconnaître que la mise en œuvre des situations extra-mathématiques s'avère complexe. D'une part, les contraintes institutionnelles réduisent de manière conséquente le temps qui est nécessaire pour l'implémentation de ces situations et, d'autre part, les enseignants peuvent se retrouver démunis face à ce type de

situations concernant l'étayage à apporter aux élèves et les institutionnalisations liées à la modélisation comme objet d'enseignement.

RÉFÉRENCES

- Blum, W. et Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? Dans C. Haines, P. Galbraith, W. Blum et S. Khan (dir.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics* (p. 222-231). Elsevier. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95. <https://doi.org/10.1007/BF02655883>
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu : dévolution. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.
- Israel, G. (1996). *La mathématisation du réel : essai sur la modélisation mathématique*. Seuil.
- Schukajlow, S., Kaiser, G. et Stillman, G. (2023). Modeling from a cognitive perspective : Theoretical considerations and empirical contributions. *Mathematical Thinking and Learning*, 25(3), 259-269. <https://doi.org/10.1080/10986065.2021.2012631>
- Vorhölter, K., Greefrath, G., Borromeo Ferri, R., Leiß, D. et Schukajlow, S. (2019). Mathematical modelling. Dans H. N. Jahnke et L. Hefendehl-Hebeker (dir.), *Traditions in German-speaking mathematics education research* (p. 91-114). Springer International. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11069-7_4
- Yvain-Prébiski, S. (2021). Didactical adaptation of professional practice of modelling: A case study. Dans F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser et K. L. Wong (dir.), *Mathematical modelling education in East and West* (p. 305-315). Springer International. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_26

ANNEXE 1: L'ÉNONCÉ DE LA SITUATION



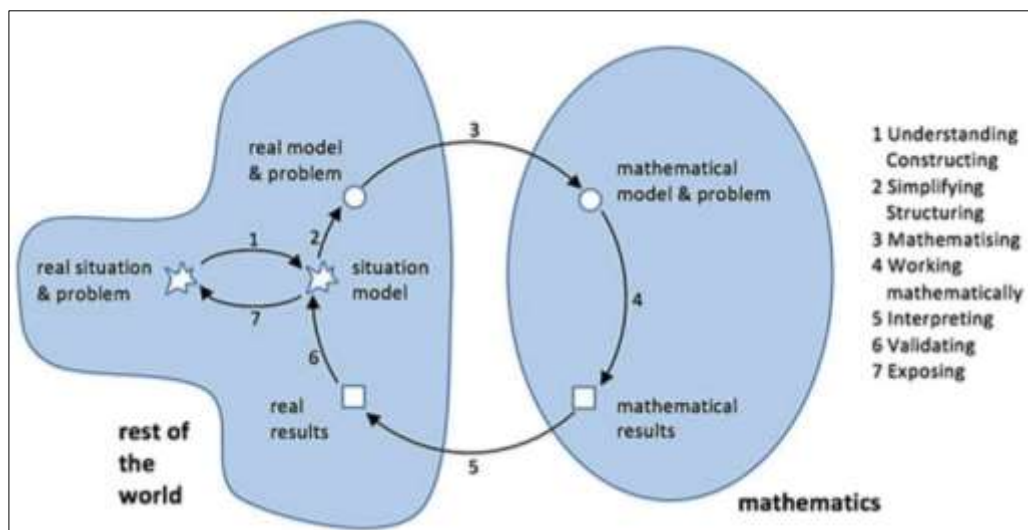
On a acheté un modèle réduit de la tour Eiffel de 30 cm de haut, fabriqué dans la même matière que la tour Eiffel (fer puddlé, le métal choisi pour la charpente métallique). On constate qu'il n'est pas vraiment fidèle à son original (ne contient pas autant de détails, n'est pas aussi aérien,...).



Comment l'expliquer ?

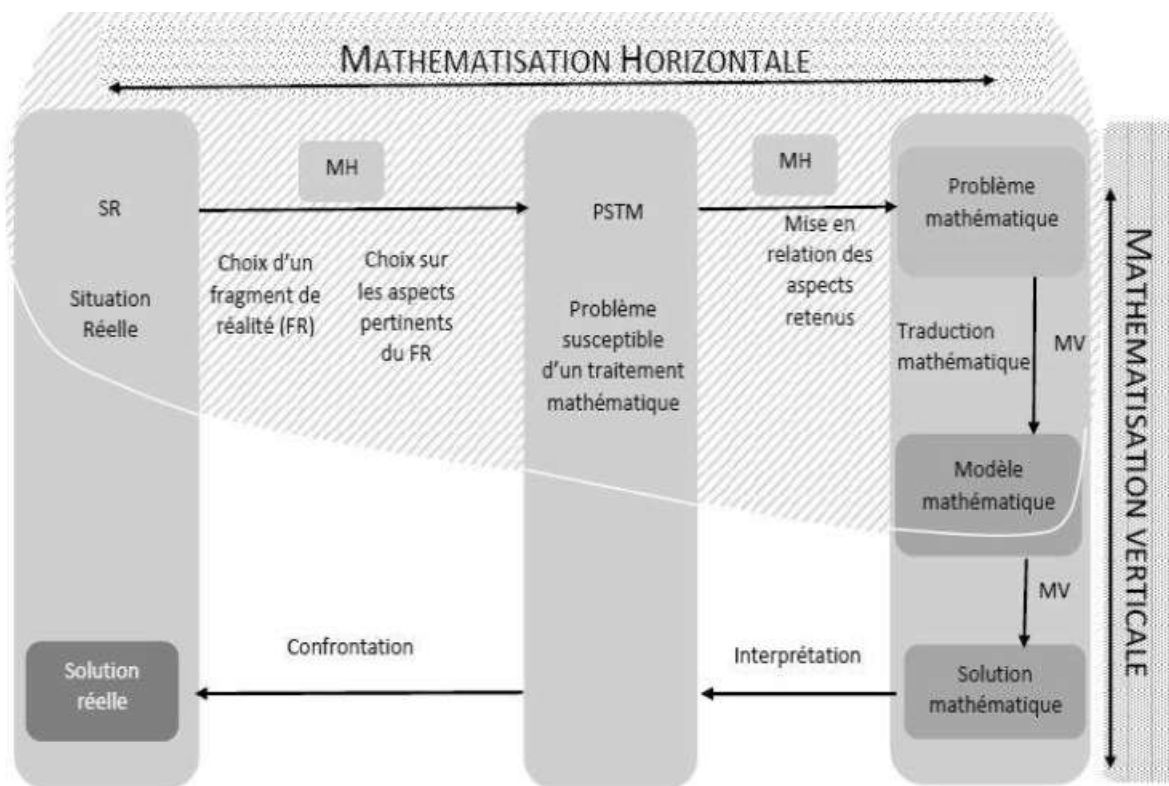
Serait-il possible de construire une miniature fidèle à l'original ?

ANNEXE 2 : CYCLE DE MODÉLISATION



(Blum et Leiss, 2007, p. 225)

ANNEXE 3 : DIAGRAMME DÉCRIVANT LE PROCESSUS DE MODÉLISATION (YVAIN-PRÉBISKI, 2021, p. 309)



ÉTUDE DU RAPPORT PERSONNEL À L'INTERDISCIPLINARITÉ ENTRE LES MATHÉMATIQUES ET LA CHIMIE : LE CAS DES ENSEIGNANTS DE LYCÉE AU CAMEROUN

| AMBOMO* NICOLE AIMÉE, TCHONANG YOUKAP** PATRICK ET NGUALA*** JEAN-BERKY

Résumé | Cet article explore les pratiques interdisciplinaires des enseignants de mathématiques et de chimie au Cameroun, en utilisant la théorie anthropologique du didactique (TAD). À partir d'entretiens semi-structurés, il analyse comment ces disciplines sont articulées et l'impact sur les apprentissages des élèves. Les résultats montrent des approches pédagogiques variées et soulignent les défis liés à la complexité des concepts et au besoin de formation continue. Malgré cela, des avantages comme une meilleure compréhension et motivation des élèves sont relevés.

Mots clés : interdisciplinarité, pratique enseignante, chimie, mathématique, lycée

Abstract | This article explores the interdisciplinary practices of mathematics and chemistry teachers in Cameroon, using the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). Based on semi-structured interviews, it analyzes how these disciplines are interconnected and their impact on student learning. The results reveal diverse pedagogical approaches and highlight challenges related to the complexity of concepts and the need for continuous professional development. Despite these challenges, benefits such as improved understanding and increased student motivation are observed.

Keywords: Interdisciplinarity, teaching practice, chemistry, mathematics, high school

I. INTRODUCTION

L'évolution rapide des connaissances scientifiques et technologiques, ainsi que les défis complexes auxquels la société est confrontée, exigent une refonte profonde des pratiques pédagogiques. Les disciplines scientifiques, longtemps enseignées de manière cloisonnée, peinent à refléter la complexité du monde réel où les phénomènes sont souvent interdépendants. La collaboration entre enseignants de mathématiques et de chimie peut enrichir l'apprentissage des élèves en liant des concepts mathématiques à des phénomènes chimiques. Comme le soulignent (Lenoir & Hasni, 2010), une telle collaboration peut non seulement améliorer la compréhension des contenus, mais aussi augmenter la motivation des élèves. Par exemple, la cinétique chimique, qui étudie les vitesses de réaction, repose sur l'utilisation d'équations différentielles pour modéliser les variations de vitesse en fonction des concentrations de réactifs. Cette interconnexion entre les mathématiques et la chimie suggère qu'une approche pédagogique intégrée serait bénéfique pour l'apprentissage des élèves. En liant ces deux disciplines il est possible de renforcer non seulement la compréhension des concepts, mais aussi de développer des compétences transversales essentielles telles que la modélisation, la résolution de problèmes complexes et la pensée critique (Bodinier & Sevrain, 2017).

Cependant, la mise en œuvre de cette approche interdisciplinaire présente des défis. Les enseignants, souvent formés dans une discipline spécifique, peuvent éprouver des difficultés à coordonner leurs

* LARIDI Laboratoire de Recherche Interdisciplinaire en Didactique – ENS- Université de Yaoundé I – Cameroun – nicoleaimeea@yahoo.fr

** LIM Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques – Université de Mayotte, 2, rue Joseph Wetzell 97490 Sainte-Clotilde – France – ptchonangyoukap@univ-mayotte.fr

*** LIM Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques – Université de Mayotte, 2, rue Joseph Wetzell 97490 Sainte-Clotilde – France – jean-berky.nguala@univ-mayotte.fr

cours et à créer des activités d'apprentissage interdisciplinaires pertinentes. De plus, les programmes scolaires et les évaluations nationales, souvent organisés de manière disciplinaire, restreignent les opportunités de collaboration. Ces programmes encouragent cependant le développement des compétences transversales comme la pensée critique et la résolution de problèmes, tout en soulignant l'importance de relier différentes matières (Bodinier & Sevrain, 2017 ; Lenoir & Sauvé, 1998). Les recherches camerounaises insistent sur la nécessité de former les enseignants à des pratiques pédagogiques interdisciplinaires, ainsi que sur l'importance de contextualiser les enseignements pour qu'ils soient en phase avec les réalités culturelles et sociales des élèves (Awomo Ateba, 2016 ; Ngansop & Youkap, 2016). Dans l'enseignement de la cinétique chimique et des équations différentielles par exemple, cette interdisciplinarité se manifeste clairement. Les équations différentielles, en permettant de quantifier la vitesse des réactions et d'établir des lois de vitesse, constituent un outil mathématique essentiel pour comprendre les mécanismes réactionnels (Saglam, 2004 ; Saglam, Chachoua, & Lacroix, 2004). Des études montrent que les élèves bénéficiant d'une approche interdisciplinaire développent une meilleure compréhension des concepts scientifiques et des compétences comme la modélisation et la résolution de problèmes complexes (Lenoir & Hasni, 2010). Cependant, les travaux sur la collaboration interdisciplinaire entre enseignants de mathématique et de chimie dans le contexte camerounais ne sont pas suffisamment référencés par la recherche. La question de recherche de cette étude est : Comment les enseignants de mathématiques et de chimie en terminale scientifique au Cameroun perçoivent-ils et intègrent-ils l'approche interdisciplinaire dans leur pratique ? Pour répondre à cette question nous avons inscrit cette recherche dans le cadre théorique de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) (Chevallard, 1999). Cette théorie offre un cadre pertinent pour l'analyse des pratiques enseignantes en lien avec un concept donnée.

II. CADRE THÉORIQUE

L'intégration des mathématiques et de la chimie dans une perspective interdisciplinaire repose sur une approche didactique rigoureuse, notamment à travers la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). Celle-ci permet d'analyser les pratiques enseignantes en identifiant les tâches proposées, les techniques employées, les technologies utilisées et les justifications théoriques sous-jacentes (Chevallard, 1999). L'organisation praxéologique des enseignants est ainsi scrutée pour comprendre comment ils amènent les élèves à trier et sélectionner les solutions pertinentes en mobilisant des outils mathématiques pour traiter des phénomènes chimiques. Toutefois, cette interdisciplinarité pose des défis majeurs : les élèves rencontrent des difficultés avec des concepts clés de la cinétique chimique, comme la distinction entre vitesse de réaction et rapidité des phénomènes chimiques (Boulanger & Hoarau, 2024 ; Carretto & Viovy, 1994). De plus, la maîtrise des équations différentielles et des dérivées apparaît comme un obstacle, les élèves privilégiant souvent des méthodes algébriques au détriment des approches numériques et qualitatives (Gueudet & Vandebrouck, 2022). Face à ces défis, la formation continue et l'adaptation des ressources pédagogiques s'avèrent essentielles pour permettre une réelle intégration disciplinaire (Abby-M'boua, 2018). Enfin, la modélisation en mathématiques offre une voie pertinente pour relier les équations différentielles aux phénomènes chimiques concrets, facilitant ainsi la compréhension des interactions complexes en jeu (Backov, 2013). Cette étude examinera donc les conditions favorisant une meilleure collaboration entre enseignants de mathématiques et de chimie, en interrogeant leur rapport à l'interdisciplinarité et en identifiant les leviers permettant d'améliorer l'apprentissage des élèves.

III. MÉTHODOLOGIE

Afin d'explorer le rapport enseignants de mathématiques et de chimie à l'interdisciplinarité en lien avec l'enseignement de la cinétique chimique et des équations différentielles, cette étude qui s'inscrit dans le cadre de la TAD opte pour une recherche qualitative. Elle permet une compréhension approfondie sur les perceptions, pratiques et défis rencontrés par les enseignants dans leurs pratiques en lien avec l'interdisciplinarité. Pour cette première étude, notre population est constituée de six enseignants, trois de mathématiques (EM1, EM2 et EM3) et trois de chimie (EC1, EC2 et EC3). L'instrument de collecte de données dans cette étude est constitué des entretiens semi-directifs (de 30 minutes par participant) dont la grille s'articule autour des thématiques suivantes :

1. **Perceptions de l'interdisciplinarité** : Perceptions des enseignants concernant l'importance de l'intégration des mathématiques et de la chimie dans l'enseignement des équations différentielles et de la cinétique chimique.
2. **Intégration dans les cours** : Stratégies pédagogiques utilisées par les enseignants pour intégrer les concepts des équations différentielles dans l'enseignement de la cinétique chimique, et réciproquement.
3. **Défis rencontrés** : Obstacles identifiés dans la mise en œuvre d'une approche interdisciplinaire.
4. **Impact sur les élèves** : Estimations des enseignants quant à l'impact de cette collaboration sur la compréhension et l'engagement des élèves.
5. **Ressources et soutien nécessaires** : Identification des ressources ou du soutien perçu comme nécessaire pour une meilleure intégration de l'approche interdisciplinaire dans l'enseignement de ces concepts.

Les données analysées sont constituées de quelques extraits de transcription des réponses des participants, centrées sur leurs praxéologies. La méthode d'analyse choisie est l'analyse de contenu des réponses des participants. Les données ont été organisées en fonction des thématiques abordées, permettant d'identifier les motifs récurrents et les discours institutionnels liés à l'interdisciplinarité. Cette approche met en évidence les pratiques des enseignants, leurs justifications, ainsi que les tensions institutionnelles influençant leur collaboration.

IV. RÉSULTATS

Dans cette section, nous présentons l'analyse de nos premiers résultats sur notre problématique.

1. *Perceptions institutionnelles de l'interdisciplinarité*

Les perceptions des enseignants face à l'interdisciplinarité ne peuvent être comprises sans considérer le cadre institutionnel qui façonne leurs pratiques. Le tableau 1 ci-dessous présente des extraits sur la perception des participants, en lien avec les praxéologies identifiées dans leurs enseignements respectifs.

Tableau 1 – Perception de l'interdisciplinarité par les participants

Enseignant	Perception - Extrait du discours des enseignants
EC1	« L'interdisciplinarité enrichit mes cours et permet d'aborder des concepts complexes ».
EC2	« Je suis un peu sceptique, car cela peut diluer certaines compétences disciplinaires ».
EC3	« C'est essentiel parce que ça crée des liens pratiques entre les disciplines ».
EM1	« Je pense que c'est une bonne approche, mais il y a des défis à surmonter ».
EM2	« Je crains que cela complique le programme et que les élèves ne suivent pas ».
EM3	« Cela a un grand potentiel pour améliorer les compétences des élèves ».

Les perceptions contrastées des enseignants face à l'interdisciplinarité reflètent les tensions au sein des praxéologies institutionnelles. Les enseignants EC1 et EC3 valorisent l'interdisciplinarité comme enrichissement praxéologique permettant d'établir des rapports nouveaux aux savoirs et techniques, tandis que EC2, EM2 expriment des réticences liées à la déstabilisation des organisations praxéologiques disciplinaires établies. Ces positionnements divergents s'expliquent par le conflit entre les assujettissements institutionnels traditionnels, qui structurent fortement les « logos » et « praxis » disciplinaires, et les nouvelles injonctions interdisciplinaires qui remettent en question ces équilibres. L'hétérogénéité des perceptions traduit ainsi les contradictions institutionnelles auxquelles sont soumis les enseignants, tiraillés entre la conservation des praxéologies disciplinaires historiquement légitimées et l'émergence de nouvelles configurations praxéologiques interdisciplinaires encore insuffisamment stabilisées dans l'écologie institutionnelle.

2. Intégration dans les cours

Le tableau 2 montre une diversité de praxéologies adoptées par les enseignants pour intégrer l'interdisciplinarité dans leurs cours de chimie et de mathématiques.

Tableau 2 – Diversité de praxéologies des participants

Discipline	Stratégies d'intégration	Exemples
Chimie	« Utilisation de projets communs avec les mathématiques »	« Nous analysons des réactions chimiques à l'aide de modèles mathématiques »
Mathématiques	« Propositions de problèmes interdisciplinaires »	« Utilisation d'équations pour prédire des résultats chimiques »

Les enseignants de chimie tendent à privilégier des projets interdisciplinaires qui relient les savoirs théoriques aux pratiques expérimentales. Cela se manifeste par l'utilisation de modèles mathématiques pour analyser des réactions chimiques. En revanche, les enseignants de mathématiques mettent en avant des problèmes interdisciplinaires, reliant des compétences algébriques à des phénomènes chimiques. Cette approche favorise l'application des concepts mathématiques dans un cadre réel. Ces stratégies reflètent des praxéologies spécifiques à chaque discipline : les tâches et techniques sont influencées par les savoirs institutionnalisés dans chaque domaine. Ainsi, les enseignants de chimie s'appuient sur une transposition didactique qui rend les modèles mathématiques accessibles dans le cadre de la chimie, tandis que les enseignants de mathématiques utilisent des technologies issues des équations différentielles pour traiter des phénomènes chimiques.

3. Défis rencontrés

Le tableau 3 présente quelques défis qui constituent un frein à l'intégration effective de l'interdisciplinarité dans les pratiques des enseignants.

Tableau 3 – Les défis qui freinent la mise en œuvre de l'interdisciplinarité

Enseignants	Défis	Description
EC1	Isolement des enseignants	« Manque de collaboration et de partage des pratiques entre disciplines »
EM2	Curricula rigides	« Difficulté à harmoniser les programmes d'études entre les disciplines »
EC2	Manque de formation	« Nécessité d'une formation sur l'interdisciplinarité »

Les défis identifiés dans le tableau 3 révèlent les contraintes institutionnelles qui entravent la transformation des praxéologies enseignantes. L'isolement des enseignants mentionné par EC1 met en évidence l'absence de conditions écologiques favorables à l'émergence d'une communauté praxéologique partagée, ce qui maintient les cloisonnements disciplinaires. Les curricula rigides signalés par EM2 illustrent la persistance d'organisations mathématiques et didactiques fortement codifiées par l'institution, limitant l'espace des possibles pour des reconfigurations interdisciplinaires. Quant au manque de formation souligné par EC2, il traduit l'insuffisance des dispositifs institutionnels permettant l'acquisition des techniques et technologies nécessaires à l'élaboration de nouvelles praxéologies intégratives. Ces obstacles manifestent les contradictions entre les injonctions institutionnelles favorisant théoriquement l'interdisciplinarité et l'absence de conditions écologiques et praxéologiques permettant son développement réel dans les pratiques enseignantes, révélant ainsi les tensions au cœur du processus de transposition didactique.

4. Impact sur les élèves

Le tableau 4 présente l'impact des pratiques interdisciplinaires sur la motivation et la performance des élèves du point de vue des participants. On y retrouve également dans ce tableau quelques extraits de leurs discours allant dans ce sens.

Tableau 4 – Impact des pratiques interdisciplinaires

Enseignants	Impact	Description-extrait du discours
EC3	Motivation accrue	« Les élèves montrent plus d'intérêt pour les matières »
EM1	Compétences développées	« Compétences analytiques et critiques des élèves se renforcent »
EM3	Compréhension améliorée	« Connexions entre disciplines améliorent l'apprentissage »

Le tableau 4 met en lumière les effets transformateurs des pratiques interdisciplinaires sur le rapport des élèves aux savoirs. Les observations d'EC3 concernant la motivation accrue des élèves peuvent s'interpréter comme une modification favorable du rapport personnel des apprenants aux objets de savoir, désormais perçus comme des éléments d'un système praxéologique plus vaste et significatif. Le développement des compétences analytiques et critiques relevé par EM1 traduit l'émergence de techniques et technologies transversales qui permettent aux élèves de mobiliser des éléments praxéologiques variés pour résoudre des situations complexes. Quant à l'amélioration de la compréhension évoquée par EM3, elle illustre comment l'établissement de connexions entre praxéologies disciplinaires distinctes favorise la construction d'un logos plus cohérent et intégratif,

facilitant la création de sens. Ces impacts positifs suggèrent que les pratiques interdisciplinaires, lorsqu'elles parviennent à s'établir malgré les contraintes institutionnelles, permettent une reconfiguration des rapports institutionnels et personnels aux savoirs, favorisant ainsi l'émergence d'organisations praxéologiques plus robustes et mieux ancrées dans l'expérience cognitive des apprenants.

5. Ressources et soutien nécessaires

Les participants ont exprimé des approches de solution pour une mise en œuvre effective de la pratique interdisciplinaire entre mathématique et chimie au lycée. Le tableau 5 ci-dessous en plus de proposer des dispositifs évoqués par les participants propose également des extraits de leur discours.

Tableau 5 – Dispositif de soutien à une approche interdisciplinaire

Enseignants	Ressources nécessaires	Description-Extrait du discours
EC1	Formation continue	« Besoin de formations sur l'interdisciplinarité »
EM2	Matériel pédagogique	« Ressources adaptées pour faciliter l'intégration »
EC2	Soutien institutionnel	« Soutien administratif essentiel pour encourager l'interdisciplinarité »

Le tableau 5 révèle les conditions institutionnelles jugées nécessaires par les enseignants pour établir des praxéologies interdisciplinaires viables entre mathématiques et chimie. La demande de formation continue exprimée par EC1 traduit la nécessité d'un dispositif permettant l'élaboration collective de nouvelles technologies didactiques capables de justifier et d'organiser des techniques d'enseignement interdisciplinaires. Le besoin de matériel pédagogique adapté souligné par EM2 met en évidence l'importance des artefacts didactiques comme supports matériels aux nouvelles organisations praxéologiques, ces ressources constituant des éléments cruciaux dans la chaîne de transposition didactique. La revendication d'un soutien institutionnel formulée par EC2 indique la conscience qu'ont les enseignants que toute transformation praxéologique significative nécessite une légitimation et un accompagnement par les institutions qui déterminent les conditions et contraintes de leur activité professionnelle.

V. DISCUSSION ET PISTES D'AMÉLIORATION

L'analyse des résultats, à travers le prisme de la TAD, révèle que l'interdisciplinarité entre mathématiques et chimie au lycée camerounais est caractérisée par des tensions praxéologiques significatives. Les perceptions contrastées des enseignants traduisent un conflit entre les assujettissements institutionnels traditionnels et les nouvelles configurations praxéologiques interdisciplinaires insuffisamment stabilisées. Pour surmonter ces obstacles, plusieurs pistes d'amélioration s'imposent : (1) une formation continue structurée centrée sur l'élaboration collective de praxéologies interdisciplinaires, incluant des ateliers pratiques sur la modélisation des phénomènes chimiques par les équations différentielles ; (2) le développement de ressources pédagogiques adaptées servant de support à la transposition didactique interdisciplinaire, notamment des manuels et outils numériques intégrant les approches mathématiques et chimiques ; (3) un accompagnement institutionnel renforcé à travers la révision des curricula pour favoriser les connexions entre disciplines et l'aménagement d'espaces-temps dédiés à la collaboration entre enseignants. Cette étude ouvre la voie à des recherches futures qui pourraient observer plus en profondeur des pratiques de classe, qui sont essentielles pour mettre en œuvre cette approche interdisciplinaire. Cela offrirait une perspective plus complète sur l'interdisciplinarité et ses impacts sur les apprentissages des élèves. Il est crucial d'examiner comment structurer les formations des enseignants pour qu'elles soient efficaces et

adaptées aux besoins spécifiques des disciplines enseignées. De plus, la recherche devrait envisager de tester différents modèles pédagogiques qui favorisent l'intégration des savoirs, en identifiant les meilleures pratiques et en évaluant leur impact sur les apprentissages des élèves.

Cependant, il convient de reconnaître certaines limites à cette étude. Le nombre restreint d'enseignants interrogés pourrait ne pas être représentatif de l'ensemble des pratiques au Cameroun. De plus, les résultats sont basés sur des perceptions et des auto-évaluations, ce qui pourrait introduire un biais.

RÉFÉRENCES

- Abby-M'boua, P. (2018). Pratiques du professeur conseiller pour préparer la première séance de classe d'un professeur stagiaire de mathématiques. *Liens*, 26(1), 37-46.
https://fastef.ucad.sn/liens/LIEN26/liens26v1_article3.pdf
- Awomo Ateba, J. (2016). *Enseignement de la chimie au Cameroun : analyse des programmes de 1960 à 2013. Impact sur les pratiques enseignantes*. Université de Yaoundé I. <https://hdl.handle.net/20.500.12177/7647>
- Backov, R. (2013). *Chimie intégrative : un outil pour la synthèse rationnelle de matériaux avancés*.
<https://doi.org/10.51257/a-v1-re173>
- Bodinier, G. et Sevrain, D. (2017). *L'utilisation des mathématiques en sciences physiques et chimiques* [Écrit réflexif]. <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01647595/document>
- Boulanger, Q. et Hoarau, M. (2024). *Quels sont les obstacles que rencontrent les élèves dans l'apprentissage de la physique - chimie dans le secondaire ?* [Mémoire de master, INSPÉ de la Réunion et Université de la Réunion]. <https://auf.hal.science/dumas-04639379v1>
- Carretto, J. et Viovy, R. (1994). Relevé de quelques obstacles épistémologiques dans l'apprentissage du concept de réaction chimique. *Aster : Recherches en Didactique des Sciences Expérimentales*, 18(1), 11–25.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Gueudet, G. et Vandebrouck, F. (2022). Transition secondaire-supérieur : ce que nous apprend la recherche en didactique des mathématiques. *EpiDEMES*, 1. <https://doi.org/10.46298/epidemes-7486>
- Lenoir, Y. et Hasni, A. (2010). Interdisciplinarity in Quebec schools: 40 years of problematic implementation. *Issues in Integrative Studies*, 28, 238–294.
- Lenoir, Y. et Sauvé, L. (1998). Note de synthèse. De l'interdisciplinarité scolaire à l'interdisciplinarité dans la formation à l'enseignement : un état de la question. *Revue Française de Pédagogie*, 125(1), 109–146.
- Ngansop, J. N. et Youkap, P. T. (2015, 10-14 octobre). *Le changement de langage dans l'activité mathématique* [Communication]. EMF2015, Alger, Algérie.
- Saglam-Arslan, A. (2004). *Les équations différentielles en mathématiques et en physique. Étude des conditions de leur enseignement et caractérisation des rapports personnels des étudiants de première année d'université à cet objet de savoir* [Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-00271402v1>

Saglam, A., Chachoua, H. et Lacroix, D. (2004). *L'objet équations différentielles en mathématiques et en physique : de sa naissance à nos jours.*

https://emf.unige.ch/application/files/6414/5459/8096/EMF2003_GT9_Chaachoua.pdf

LES DÉFIS DE L'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE DE LA PHYSIQUE FACE À L'INTERDÉPENDANCE ENTRE LES CONCEPTS PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

| HIDOUSSI* MOUNA ET AKROUTI** INEN

Résumé | Cet article explore les défis de l'enseignement-apprentissage de la physique face à l'interdépendance entre les concepts physiques et mathématiques. Il souligne que l'enseignement cloisonné des deux disciplines limite la capacité des élèves à modéliser des phénomènes physiques et à établir des relations entre grandeurs physiques et équations mathématiques. En s'appuyant sur le concept de ePCK (les connaissances mises en œuvre par les enseignants dans l'action), l'étude examine comment les enseignants utilisent les mathématiques dans l'enseignement du champ magnétique. Les résultats montrent une pluralité d'ePCK mobilisées par les enseignants, révélant des convergences sur les difficultés mathématiques rencontrées par les élèves.

Mots-clés : ePCK, enseignement de la physique, interdisciplinarité, modélisation mathématique, interaction maths-physique

Abstract | This article examines the challenges of teaching and learning physics considering the interdependence between physical and mathematical concepts. It emphasizes that compartmentalizing these two disciplines' teaching limits students' ability to model physical phenomena and establish relationships between physical quantities and mathematical equations. The study utilizes the ePCK (enacted PCK) to investigate how teachers employ mathematics in teaching the magnetic field. The findings reveal a plurality of ePCK used by teachers, highlighting commonalities regarding students' mathematical difficulties.

Keywords: ePCK, physics education, interdisciplinarity, mathematical modeling, math-physics interaction

I. INTRODUCTION

Dans l'histoire, les mathématiques et la physique étaient étroitement liées, formant un champ d'étude unique. La plupart des savants ont mené des recherches à la fois en mathématiques et en physique et les résultats de ces recherches ont abouti au développement de ces deux champs. À titre d'exemple, nous citons l'étude de la relation cinématique entre la vitesse et la distance par Newton a conduit à la découverte du théorème fondamental de l'analyse. Et inversement, certains concepts physiques ont été découverts à partir d'une réflexion mathématique comme les travaux de Galilée. Par ailleurs, l'enseignement d'un phénomène sous différents points de vue révèle une richesse et une profondeur qui rend ce phénomène plus accessible aux sujets apprenants (Akrouti, 2022). En reliant les mathématiques et la physique au sein d'un même contexte, les élèves peuvent attribuer un sens plus profond à ces disciplines. Cependant, plusieurs recherches soulignent que les élèves éprouvent des difficultés à modéliser des phénomènes afin d'associer des relations entre grandeurs physiques à des équations mathématiques (Beichner, 1994). Ouvrier-Buffet et Perrin-Glorian (2009) constatent une confusion potentielle engendrée par la divergence des systèmes de notation et de vocabulaire pour un même objet dans les cours de mathématiques et de physique. Ils mettent en lumière une fausse conception courante parmi les acteurs du système éducatif (enseignants et décideurs) : l'idée que les

* Université de Sherbrooke – Canada – mouna.hidoussi@usherbrooke.ca

** Université de Jendouba ISSHJ / Université de Carthage LaRiNa – Tunisie – inenakrouti@issjh-u.jendouba.tn

mathématiques utilisées en physique sont distinctes de celles employées en mathématiques. Il est évident que l'interaction entre les mathématiques et la physique va bien au-delà d'une simple complémentarité disciplinaire. La transition d'un cadre mathématique à un cadre physique s'accompagne de variations, parfois des ruptures, certaines évidentes, d'autres plus subtiles. On se demande alors de savoir si les enseignants doivent posséder des connaissances approfondies dans les deux disciplines pour percevoir pleinement les liens qui les unissent. Lacroix (2006) souligne que la décontextualisation des mathématiques pour identifier les régularités et les représentations abstraites trouve un écho dans la physique, où les lois visent à généraliser des situations spécifiques. Cependant, la transformation des concepts mathématiques en concepts physiques n'est pas toujours évidente. En fait les mathématiques ne sont pas simplement un langage pour exprimer les phénomènes physiques, elles représentent également une façon de structurer la pensée et de percevoir le monde.

En Tunisie, pays concerné par cette recherche, la formation des enseignants ne met pas l'accent sur l'établissement de liens entre la physique et les mathématiques (Akrouti, 2022), ce qui crée une rupture entre les deux disciplines. L'enseignement de la physique et des mathématiques est cloisonné, les deux disciplines étant traitées comme si elles appartenaient à des univers distincts. Ces réflexions nous ont conduits à examiner un élément crucial des connaissances professionnelles des enseignants (Pedagogical Content Knowledge : PCK) (Shulman, 1986), en lien avec l'enseignement de la physique. Nous nous interrogeons particulièrement sur les ePCK (enacted PCK) des enseignants en lien avec l'utilisation des mathématiques lorsqu'ils enseignent des concepts physiques, en l'occurrence le champ magnétique.

II. REVUE DE LA LITTÉRATURE

Dans un article publié en 2009, Beaufils explore deux axes principaux : l'interrelation entre les mathématiques et la physique dans les processus de modélisation, ainsi que la transition entre les enseignements de physique au secondaire et au supérieur, en particulier au niveau de la terminale S en prenant comme cas d'étude les équations différentielles. L'auteure conclut qu'il serait pertinent d'introduire une séquence d'enseignement spécifique visant à sensibiliser les élèves à la pluralité des registres de représentation en physique et à clarifier les articulations entre les aspects phénoménologiques et mathématiques des concepts physiques. Dans ce même axe de recherche sur la modélisation, Béguin et al. (1996) soulignent que la modélisation ne se limite pas à la recherche du modèle quantitatif optimal et à son implémentation numérique. Ce processus stimule également une réflexion critique sur le modèle lui-même, suggérant de nouvelles expériences pour l'affiner et donner une signification plus profonde à ses paramètres. Cette dimension itérative de la modélisation est particulièrement importante pour notre étude, car elle nous permet de mieux comprendre les mécanismes sous-jacents aux phénomènes observés. Par ailleurs, Ba (2011) souligne l'évolution des relations entre les enseignements des mathématiques et des sciences physiques. Il met en évidence une distanciation croissante entre les disciplines, ainsi qu'une hiérarchisation qui ne favorise pas une collaboration équitable entre les enseignants. Les enseignants des deux disciplines sont placés dans une logique qui empêche la collaboration là où elle devrait se faire et conduit à une méconnaissance des vrais enjeux. Ainsi, les élèves s'habituent à un discours en porte-à-faux. Cette situation entraîne des conséquences directes sur les pratiques pédagogiques et sur les apprentissages des élèves, en limitant notamment les possibilités d'articulation entre les différentes disciplines scientifiques. Rachel et al. (2012) précisent que les élèves rencontrent des difficultés à combiner des idées de physique avec des calculs mathématiques, ce qui entraîne des difficultés à mettre en place et à interpréter les calculs. Rachel et al. (2012) précisent également que les élèves rencontrent des difficultés à combiner des idées de physique avec des calculs mathématiques, ce qui entraîne des difficultés à mettre en place et à interpréter les calculs. Cette dissociation entre les concepts physiques et les outils mathématiques limite

leur capacité à appréhender de manière globale les phénomènes naturels et à développer une pensée scientifique rigoureuse.

La question de l'articulation entre les concepts physiques et mathématiques et les difficultés qu'elle pose aux élèves a été largement étudiée dans la littérature scientifique. Les travaux de Bodinier et Sevrain (2017) constituent un exemple pertinent de ces recherches. Ces deux chercheurs ont apporté un éclairage intéressant sur cette question en identifiant que les difficultés rencontrées par les élèves à articuler les concepts physiques et mathématiques étaient liées à des facteurs pédagogiques et l'insuffisance des connaissances mathématiques des enseignants de physique. Selon ces deux auteurs, les lacunes en mathématiques de certains enseignants de physique constitueraient un frein important à l'acquisition de compétences solides en physique par les élèves. Toutefois, une grande majorité de ces travaux s'est particulièrement concentrée sur l'étude des phénomènes de modélisation et leur impact sur le processus de conceptualisation des sujets apprenants sans approfondir la question du rôle de la formation des enseignants qui prend en considération ces liens. Cette différence de registres langagiers crée une véritable fracture dans les apprentissages, empêchant les élèves de saisir les liens entre les différentes disciplines scientifiques. Ce constat nous amène à interroger les pratiques pédagogiques mises en œuvre en troisième année de sciences en Tunisie : cas du champ magnétique, afin de comprendre comment les enseignants favorisent l'utilisation cohérente des outils mathématiques dans l'enseignement de ce concept. Il est essentiel d'analyser les stratégies pédagogiques déployées pour assurer une continuité didactique entre les mathématiques et la physique, en particulier en ce qui concerne la résolution de problèmes et la modélisation de phénomènes physiques.

III. CADRE THÉORIQUE

Initialement le concept de PCK a été introduit par Shulman (1986) comme une forme de connaissances transformées par les enseignants lorsqu'ils enseignent un contenu particulier. Cette conceptualisation du concept de la PCK permet de comprendre que le contenu à enseigner doit être transformé en forme compréhensible par les élèves. Cette transformation se produit lorsque l'enseignant interprète ce contenu et trouve les manières adéquates de le présenter aux élèves Shulman (1986). Depuis lors, le concept de PCK a suscité l'intérêt des chercheurs et a été largement utilisé dans les recherches sur les connaissances des enseignants (Abell, 2008 ; Berry, Friedrichsen et Loughran, 2015 ; Gess-Newsome, 2015 ; Grossman, 1990 ; Magnusson, Krajcik et Borko, 1999 ; Marks, 1990 ; Park et Oliver, 2008 ; Tamir, 1988). Même si ces chercheurs ont tenté de définir la PCK et de déterminer ses composantes, ils ne sont pas parvenus à s'unifier autour d'une vision commune des types de connaissances dans la PCK.

Pour atteindre un consensus sur la PCK, plusieurs chercheurs en sciences se sont réunis afin de formuler un modèle consensuel de PCK susceptible de développer une compréhension plus approfondie de connaissances des enseignants en science. Ainsi, en s'appuyant sur les modèles développés antérieurement, le modèle consensuel raffiné de la PCK (Refined Consensus Model) a été introduit en 2019 (voir figure 1).



Figure 1 – modèle consensuel raffiné de la PCK réduit (Carlson et Daehler, 2019)

Ce modèle de PCK identifie trois domaines de PCK, à savoir la cPCK (PCK collective), la pPCK (PCK personnelle) et la ePCK (PCK en action). Les cPCK font référence à l'ensemble de connaissances spécialisées pour l'enseignement d'une discipline scientifique développées en dehors de la classe. Les pPCK et les ePCK renvoient aux connaissances propres à chaque enseignant : les pPCK représentent les connaissances personnelles à la fois tacites (issues des expériences de l'enseignant) et explicites (issues de contributions d'autres personnes) alors que les ePCK représentent les connaissances dans des contextes de classe spécifiques, tout en enseignant un contenu particulier à leurs élèves. Ainsi, ce sont les ePCK qui ont un impact direct sur l'apprentissage des élèves. C'est pour cette raison, nous nous limitons dans ce travail à l'étude des ePCK des enseignants mobilisés en situation de travail.

Pour rendre plus explicite la vision de la PCK, le cadre conceptuel de cette étude sera basé sur le modèle RCM de la PCK (Carlson et Daehler, 2019) auquel nous associons les cinq composantes de la PCK identifiées par Magnusson et al. (1999), qui sont applicables aux trois domaines de la PCK, comme le montre la figure 2.



Figure 2 – Cadre conceptuel des connaissances professionnelles des enseignants basé sur la combinaison du modèle RCM de la PCK (Carlson et Daehler, 2019) et le modèle de Magnusson et al. (1999)

Pour Magnusson et al. (1999), la composante « orientations sur l'enseignement des sciences » se réfère à un ensemble de connaissances et de croyances des enseignants sur les buts et les objectifs de l'enseignement des sciences. « Les connaissances sur la compréhension des sciences par les élèves » renvoient aux connaissances que les enseignants devraient avoir des élèves afin de les aider à développer des connaissances scientifiques. « Les connaissances des stratégies pédagogiques d'enseignement » font référence aux stratégies spécifiques qui sont utiles pour aider les élèves à comprendre des concepts scientifiques. « Les connaissances curriculaires » représentent, selon Magnusson et al. (1999), la connaissance qui distingue les spécialistes du contenu des pédagogues. Elles renvoient à l'ensemble de connaissances sur les buts et les objectifs du programme d'enseignement

ainsi que les programmes et le matériel curriculaire spécifique. « Les connaissances sur l'évaluation » renvoient aux connaissances des aspects de l'apprentissage des sciences qui sont importants à évaluer et les connaissances des méthodes d'évaluation. Ainsi, nous postulons qu'un enseignant est considéré comme professionnel s'il est capable de mobiliser ces types de connaissances d'une manière notable dans leur enseignement. Dit autrement, les enseignants doivent rendre leurs connaissances curriculaires compréhensibles par les élèves. Or, pour que cette transformation soit réussie dans différentes situations de classe souvent complexes et aléatoires, les enseignants ne doivent pas se contenter seulement de leurs connaissances curriculaires, certes nécessaires, mais pas suffisantes pour réussir son enseignement. Cela dit, les formateurs des enseignants devraient former des enseignants capables de réfléchir sur les manières de transformer le contenu disciplinaire en un contenu compréhensible par quelqu'un d'autre, en l'occurrence, l'élève.

En nous appuyant sur l'idée que les PCK devraient être saisies dans le contexte d'un sujet scientifique spécifique (Mavhunga et Rollnick, 2013 ; Nilsson et Loughran, 2012), nous avons choisi le concept de champ magnétique comme sujet à travers lequel nous avons étudié les PCK des enseignants de physique. Ce choix réside dans le fait que ce concept est considéré comme un sujet difficile à enseigner et à comprendre, principalement en raison de sa nature abstraite (Dori and Belcher, 2005 ; Jelacic et al., 2017). Ainsi, connaître et comprendre les difficultés d'apprentissage chez les élèves constituent des éléments importants des connaissances que les enseignants doivent avoir pour aider les élèves à développer des connaissances scientifiques spécifiques (Shulman, 1999). Il y a alors lieu de s'interroger sur les PCK des enseignants pour favoriser l'apprentissage du concept de champ magnétique.

IV. MÉTHODOLOGIE

Considérant l'objectif de cette étude, nous avons opté pour une recherche qualitative. L'étude de cas est le type de méthode retenu pour examiner et étudier en profondeur les ePCK des enseignants qui ont participé à cette étude. La description détaillée du contexte de cette étude ainsi que les caractéristiques de ses participants peuvent assurer la transférabilité des résultats à d'autres contextes similaires ce qui permettra d'étendre les cas étudiés et de généraliser une théorie (Cohen et al., 2013).

Cette étude a été menée auprès de deux enseignants volontaires que nous avons nommés P1 et P2 ayant chacun une bonne expérience professionnelle dans le domaine de l'enseignement de la physique (aux alentours de 20 ans d'expérience pour chacun). Ils exercent dans deux établissements publics présentant des différences au niveau de leur contexte social et culturel.

La démarche méthodologique adoptée dans cette étude consiste à observer et filmer toutes les séances de classes qui couvrent l'enseignement du concept de champ magnétique. La durée totale des enregistrements vidéo est de huit heures ; ce qui correspond à quatre séances de cours observées sur le lieu de travail de chaque enseignant. Nous avons regardé ces enregistrements plusieurs fois afin de transcrire tous les échanges entre les enseignants et leurs élèves. Chaque leçon a été divisée ensuite en plusieurs thèmes afin de repérer des situations « clés » des enseignements que nous qualifions d'épisodes remarquables. Ces épisodes correspondent à des situations singulières propices qui révèlent des aspects intéressants de leur enseignement. Ces situations correspondent généralement à des hiatus sur le plan de l'échange entre les acteurs en classe et renvoient aux moments des choix et de prise de décision de l'enseignant dans son action.

Se limiter aux enregistrements vidéo nous place dans une situation délicate pour inférer les ePCK des enseignants. La situation est délicate dans le sens où il s'agit pour nous de comprendre et de décrire des connaissances tacites mobilisées par un autre sujet, l'enseignant en l'occurrence. Afin de contourner

les limites de l'observation directe, nous avons mené avec les enseignants observés des entretiens d'autoconfrontation. Cette approche qualitative nous a permis de comprendre non seulement ce que les enseignants font en classe, mais aussi les raisons qui motivent leurs choix pédagogiques.

Ces entretiens ont porté sur les épisodes remarquables identifiés et ont fait l'objet d'un enregistrement audio. Lors de ces entretiens, les enseignants ont été invités à commenter leurs actions pendant ces situations afin de mettre des mots sur leur manière d'agir de telle ou telle manière dans une situation de classe donnée. Comme l'activité enseignante est complexe et incertaine, nous avons proposé aux enseignants des questions qui nous permettent d'inférer des ePCK. Nos questions étaient de type : faites-vous toujours cela comme ça ? Qu'est-ce que vous cherchez ici ? Est-ce que les élèves réagissent souvent de cette manière ?

La triangulation de toutes les données recueillies, nous ont permis de comprendre les éléments que les enseignants prennent en compte lors de ces épisodes pour faire des choix et prendre des décisions. Les explications données nous ont permis de repérer et décrire les ePCK de deux enseignants dans le contexte de l'enseignement du concept de champ magnétique. Nous avons essayé de comprendre plus particulièrement le poids des démonstrations mathématiques lorsqu'ils enseignent et le temps accordé aux argumentations des résultats. En d'autres termes, nous avons cherché à déterminer dans quelle mesure les enseignants accordent de l'importance à la rigueur mathématique et à la justification des résultats dans leurs pratiques pédagogiques. Une fois les ePCK identifiés, nous les avons classés en suivant rigoureusement les descriptions de chaque catégorie de PCK telles qu'elles sont définies par Magnusson et al. (1999). Cette démarche nous a permis d'obtenir une classification fiable et comparable des différentes connaissances mobilisées par les enseignants dans leurs pratiques en classe.

V. RÉSULTATS ET DISCUSSION

Bien que les enseignants observés aient mobilisé une variété de ePCK, les résultats de cette étude montrent que les deux catégories de connaissances ePCK/stratégies et ePCK/élèves sont les composantes les plus sollicitées par les deux enseignants. Ce résultat n'est pas surprenant, puisque ces deux ePCK sont les deux catégories de connaissances les plus spécifiques du métier d'enseignant (Chan et Hume, 2019 ; Demirdöğen et al., 2016 ; Norville, 2019). C'est pourquoi, dans le cadre de ce texte, nous mettons l'accent sur ces deux catégories afin de comprendre les principales difficultés d'ordre mathématique rencontrées par des élèves lors de l'apprentissage du concept de champ magnétique et d'examiner les stratégies pédagogiques employées par les enseignants afin d'aider les élèves dans leur apprentissage.

1. *La nature vectorielle d'un champ magnétique*

Le champ magnétique est constitué par un ensemble de vecteurs. Mathématiquement, un champ de vecteur est une fonction qui associe un vecteur à chaque point de l'espace euclidien, caractérisé par un sens, une direction et une norme. Notre analyse montre que cette notion est peu familière aux élèves. Ils ont souvent du mal à se représenter les vecteurs de champ en tout point de l'espace. Se représenter le champ comme un espace vectoriel, c'est-à-dire comme un ensemble de vecteurs, ajoute une couche d'abstraction supplémentaire qui peut être déroutante pour les élèves. En effet, les représentations graphiques du champ magnétique (lignes de champ) peuvent être trompeuses et ne pas refléter fidèlement la nature vectorielle du champ. Les élèves ont du mal à interpréter ces représentations et à les relier à la notion d'espace vectoriel. Les échanges entre l'enseignant et les élèves dans cet extrait rendent compte de cette difficulté.

– P : Qu'est-ce qu'un champ ?

- E : Un ensemble de lignes.
- P : Non... non... champ en général ?
- E : Des lignes.
- P : Champ !
- E : Des charges.
- P : Non... le champ ?
- E : Espace.
- E : Région de l'espace.
- P : Oui une région de l'espace. Par exemple, lorsque vous regardez National Geographic... vous remarquez que le lion a un champ bien déterminé... un espace qui lui est propre et personne ne peut se rapprocher de ce champ. Par exemple, les footballeurs ont un rectangle sur lequel doivent jouer les joueurs... si la balle sort, c'est un hors-jeu ? C'est donc hors champ.

Dans cet extrait, on voit que l'enseignant mobilise une ePCK/stratégie en intégrant des exemples de la vie quotidienne dans son enseignement (le terrain de foot, le territoire réservé au lion). Selon lui, cela permet aux élèves de mieux comprendre la notion du champ : *« j'essaye toujours de rapprocher cette notion [le champ] à travers des exemples concrets. Cela permet aux élèves de faire le lien par la suite »*. Cependant, on voit bien que la construction de la connaissance, du sens, n'est pas allée à son terme. En effet, ces exemples n'ont pas pu aider l'élève à saisir la nature spatiale du champ. Cette lacune chez l'enseignant pourrait s'expliquer par une insuffisance de sa formation initiale en mathématiques, particulièrement en ce qui concerne la capacité à établir un lien entre un phénomène physique concret, tel que le champ magnétique, et son modèle mathématique.

Une autre difficulté, inhérente à ce cadre conceptuel, est la double nature du champ magnétique. Le champ magnétique possède à la fois une nature vectorielle (caractérisée par un sens, une direction et une intensité) et une nature spatiale (il existe en tout point de l'espace). Cette dualité peut être difficile à saisir par les élèves, qui ont tendance à privilégier l'une ou l'autre de ces dimensions. Par ailleurs, la nature tridimensionnelle du champ pose également un problème aux élèves. En général, ils pensent que le vecteur champ magnétique est un vecteur à deux dimensions. Cela avait un impact sur la compréhension des effets magnétiques dans un espace tridimensionnel. Ce constat a été confirmé par P2 lorsqu'il déclare, lors de l'entretien d'autoconfrontation, que les élèves « trouvent généralement des difficultés de travailler avec des vecteurs dans l'espace ». Pour sa part, P1 souligne que « les élèves ne vont pas trop loin lorsqu'on parle de notions dans l'espace à trois dimensions ».

Bien que les enseignants soient conscients des difficultés de leurs élèves, notre analyse montre que les ePCK/stratégie qu'ils mobilisent n'ont pas pu aider leurs élèves à comprendre la nature tridimensionnelle du champ. Par exemple, pour expliquer comment déterminer le sens du vecteur champ magnétique, les enseignants expliquent et utilisent la règle de la main droite.

Ils se contentent souvent de répéter leurs explications à plusieurs reprises en espérant que les élèves finiront par comprendre et par appliquer la règle de manière autonome. Or, même si nous avons observé que certains élèves parviennent à appliquer cette règle, ce n'est pas nécessairement parce qu'ils en ont saisi la profondeur ou la logique sous-jacente, mais plutôt parce qu'ils ont mémorisé une procédure ou un schéma de résolution. Nous émettons l'hypothèse que cette difficulté est liée à

l'absence d'une ePCK/stratégie mise en œuvre par les enseignants permettant aux élèves d'établir un lien clair entre la règle en question et le concept de produit vectoriel. Cela pourrait, à notre sens, aider les élèves qui ont des difficultés « à regarder » dans l'espace. Cela nécessite une attention particulière dans la formation des enseignants physiques. Les enseignants doivent être capables de traduire des phénomènes physiques en modèles mathématiques et d'interpréter les résultats obtenus.

Une troisième difficulté rencontrée par les élèves en lien avec la nature vectorielle du champ magnétique réside dans le calcul de la somme vectorielle. Afin que les élèves comprennent le comportement du vecteur champ résultant de la présence de deux sources créatrices d'un champ, ils doivent déterminer et caractériser le vecteur somme de deux vecteurs champs magnétiques créés par ces sources. Notre analyse souligne que les élèves ont de la difficulté à calculer cette somme. Bien que les élèves aient déjà vu en mathématiques la règle du parallélogramme pour calculer la somme de deux vecteurs non colinéaires, en physique, ils prédisent souvent le résultat de cette somme sans même en construire sa représentation graphique. Lors de la deuxième séance de l'enseignant P1, ce dernier a achevé une expérience sur l'utilisation d'un teslamètre pour mesurer un champ magnétique. À la suite de cette expérience l'enseignant a demandé aux élèves de caractériser le champ résultant de la présence de deux aimants dont les axes sont perpendiculaires et demande aux élèves de déterminer la valeur du champ total.

- E : Monsieur avec le teslamètre
- P : D'accord ! Mais si vous n'avez pas un teslamètre ? Maintenant les deux à la fois ? le champ total.
- E : Aucune réponse
- P Comme le champ électrostatique exactement. C'est quoi ?
- E : On détermine le sens ?
- P : Ici on parle de la valeur du champ résultant. Attention. Comment déterminer cette valeur ?
- E : la somme ?
- P : oui... oui... La somme vectorielle. Comment peut-on déterminer cette somme ?
- E : La norme ?
- P : oui la norme de B. Comment la calculer ?
- E : avec le teslamètre
- P : Mais vous avez déjà vu ça (surpris). C'est la racine de ?
- E : de $B_1^2 + B_2^2$.

L'observation de la vidéo relative à cet épisode révèle une méconnaissance de la difficulté des élèves de la part de l'enseignant. Il a même été surpris par l'intervention de l'élève disant « avec le teslamètre ». Cela montre que les élèves manquent de repères pour visualiser et appliquer la notion de somme vectorielle dans un contexte physique. Or, face à cette difficulté, l'enseignant n'a pas vraisemblablement saisi l'opportunité et mobilisé une ePCK/stratégie permettant aux élèves de surmonter cette difficulté. Il a simplement rappelé la formule mathématique sans la contextualiser.

Il nous semble que la dichotomie artificielle entre la physique et les mathématiques dans l'enseignement secondaire tunisien est à l'origine de certaines difficultés. Une réforme s'impose pour favoriser le développement de compétences en résolution de problèmes mathématiques appliqués à la physique, en mobilisant divers registres sémiotiques (analytiques, numériques, graphiques).

2. Identification des composantes du vecteur champ magnétique terrestre

Notre observation d'une séance consacrée au champ magnétique terrestre a révélé que les élèves éprouvaient des difficultés à identifier les composantes de ce champ. Le champ magnétique terrestre est une grandeur vectorielle. En chaque point de l'espace, ce vecteur peut être décomposé en deux composantes orthogonales : une composante verticale, notée B_v , et une composante horizontale, notée B_h . L'identification de ces composantes nécessite des connaissances de la géométrie euclidienne et de la trigonométrie qui ne sont pas assez disponibles chez les élèves et qui requièrent une attention particulière de la part de l'enseignant.

Au cours de l'entretien d'autoconfrontation avec l'enseignant P1, nous avons attiré son attention sur ce point particulier. Il a corroboré notre analyse en révélant des ePCK/élève :

« Je savais que les pôles Nord magnétique et Nord géographique seraient confondus...i (l'angle d'inclinaison) et D (l'angle de déclinaison) aussi. Euh, ils vont certainement donner le sens et la direction de $\vec{B_T}$ mais ils vont trouver de difficultés à déterminer les composantes B_h et B_v du vecteur champ terrestre ».

Nos analyses montrent que les enseignants ont un répertoire riche en ePCK/élève spécifique au champ magnétique terrestre. Ils ont cerné tout ce qui peut poser des problèmes ou pas pour les élèves lors de l'apprentissage de ce concept. Cependant, ils ne sont pas conscients que les difficultés des élèves proviennent, en partie du manque de l'interaction entre les mathématiques et la physique. Autrement dit, les difficultés rencontrées par les élèves résident principalement dans la transposition des connaissances mathématiques à la résolution de problèmes physiques. Cela dit, les enseignants doivent développer des ePCK/stratégies permettant de combiner visualisation concrète et calculs mathématiques. Par exemple, l'utilisation des simulations numériques permet aux élèves de visualiser en temps réel comment B_h , B_v en fonction de l'angle d'inclinaison.

VI. CONCLUSION

Il ressort de notre analyse que les enseignants observés, malgré leur grande expérience en enseignement et leurs connaissances sur les difficultés des élèves, ne tiennent pas compte du niveau de leurs élèves et recourent à un enseignement où l'utilisation des mathématiques est assez rigide. En fait, la plupart des élèves de cette étude rencontrent des difficultés à faire le lien entre le phénomène physique concret et le monde abstrait des mathématiques. Nous nous interrogeons souvent sur les raisons pour lesquelles les élèves éprouvent des difficultés à appréhender des notions qui nous semblent aisément compréhensibles. Il est fréquent d'oublier que la conjonction de raisonnements mathématiques et de concepts physiques requiert des compétences particulièrement élaborées, qui ne sont pas accessibles à tous, y compris aux élèves les plus doués. Afin que les élèves aient une compréhension adéquate de la physique et de la nature de cette discipline, il est nécessaire que les enseignants accordent une attention particulière à l'utilisation des mathématiques lors de l'enseignement de la physique.

Cela dit, il devient nécessaire que la formation à l'enseignement se focalise sur le développement des ePCK des enseignants, notamment les ePCK/élève et les ePCK/stratégies. Cela permettrait aux

enseignants non seulement de mieux comprendre ce que les élèves trouvent difficile, mais aussi de préparer des activités adaptées à leur besoin.

Nos résultats préliminaires apportent un premier éclairage sur les difficultés rencontrées. Des recherches ultérieures pourraient enrichir cette étude en documentant de manière plus approfondie les connaissances relatives aux difficultés des élèves, permettant ainsi de constituer une base de ePCK spécifiques aux enseignants de physique.

RÉFÉRENCES

- Akrouti, I. (2022). La situation du barreau : une alternative possible pour l'enseignement de l'intégrale à l'entrée à l'université. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 1(1), 72-110.
<https://rqdm.recherche.usherbrooke.ca/ojs/ojs-3.1.1-4/index.php/rqdm/article/view/55>
- Ba, C. (2011). Vecteurs au lycée : difficile articulation entre mathématiques et physique. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 14(1), 71–83. <https://doi.org/10.7202/1008844ar>
- Beaufils, D. (2009). Le modèle et son phénoménographe. *Aster*, (48), 15-38.
https://www.persee.fr/doc/aster_0297-9373_2009_num_48_1_1507
- Bechner, R. (1994). Testing student interpretation of kinematic graphs. *American Journal of Physics*, 62(8), 750-762.
- Béguin, C., Gurtner, J. L., de Marcellus, O., Denzler, M., Tryphon, A. et Vitale, B. (1996). Activités de représentation et de modélisation dans une approche exploratoire de la mathématique et des sciences. Deuxième partie – Les activités de modélisation dans le continu. *Petit x*, (41), 51-82.
- Bodinier, G. et Sevrain, D. (2017). *L'utilisation des mathématiques en sciences physiques et chimiques* [Écrit réflexif]. <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01647595/document>
- Chan, K. K.-H. et Hume, A. (2019). Towards a consensus model: Literature review of how science teachers' pedagogical content knowledge is investigated in empirical studies. Dans A. Hume, R. Cooper et A. Borowski (dir.), *Repositioning PCK in teachers' professional knowledge* (p. 3-76). Springer.
- Demirdöğen, B. (2016). Interaction between science teaching orientation and pedagogical content knowledge components. *Journal of Science Teacher Education*, 27(5), 495-532.
<https://www.jstor.org/stable/26157968>
- Gess-Newsome, J. (2015). *A model of teacher's professional knowledge and skill including PCK*. Dans A. Berry, P.-J. Friedrichsen et J. Loughran (dir.), *Teaching and learning in science series. Re-examining pedagogical content knowledge in science education* (p. 28–41). Routledge.
- Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. Teachers College Press.
- Jelicic, K., Planinic, M. et Planinsic, G. (2017). Analyzing high school students' reasoning about electromagnetic induction. *Physical Review Physics Education Research*, 13(1), 1-18.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.010112>
- Lacroix, R. (2006). Angles et distances, deuxième partie. *ENVOL*, (134), 35-41.
- Magnusson, S., Krajcik, J. et Borko, H. (1999). *Nature, sources and development of pedagogical content knowledge for science teaching*. Dans J. Gess-Newsome et N. Lederman (dir.), *Examining pedagogical content knowledge : The construct and its implications for science education* (p. 95-132). Kluwer.

- Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of teacher education*, 41(3), 3–11.
- Mavhunga, E. et Rollnick, M. (2013). Improving PCK of chemical equilibrium in pre-service teachers. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 17(1-2), 113-125.
- Nilsson, P. et Loughran, J. (2012). Exploring the development of pre-service science elementary teachers' pedagogical content knowledge. *Journal of Science Teacher Education*, 23(7), 699-721.
- Ouvrier-Buffet, C. et Perrin-Glorian, M. J. (dir.). (2009). *Approches plurielles en didactique des mathématiques : Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ? Colloque DIDIREM, 4-6 septembre 2008, Université Paris Diderot – Paris 7*. Laboratoire de didactique André Revuz. <https://bibnum.publimath.fr/IPS/IPS09002.pdf>
- Park, S. et Oliver, J. S. (2008). Revisiting the conceptualization of pedagogical content knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education*, 38, 261-284. <https://doi.org/10.1007/s11165-007-9049-6>
- Pepper, R. E., Chasteen, S. V., Pollock, S. J. et Perkins, K. K. (2012). Observations on student difficulties with mathematics in upper-division electricity and magnetism. *Physical Review Physics Education Research*, 8(1), article 010111. <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.010111>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Tamir, P. (1988). Subject matter and related pedagogical knowledge in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 4(2), 99-110. [https://doi.org/10.1016/0742-051X\(88\)90011-X](https://doi.org/10.1016/0742-051X(88)90011-X)

INTERDISCIPLINARITÉ DANS L'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES : ANALYSE DES DIFFICULTÉS

| MESSOU* DÉSIRÉE BETHEL

Résumé | Depuis ces dernières décennies, les injonctions visant à intégrer une dimension interdisciplinaire sont présentes dans les programmes scolaires en Côte d'Ivoire. Les enseignants de mathématiques du secondaire général¹ peinent à pratiquer l'interdisciplinarité mathématiques - physique chimie et mathématiques – Sciences de la Vie et de la Terre (SVT) dans leur enseignement. Pour analyser les difficultés, nous avons mené une enquête auprès de 103 enseignants de sciences. Cette étude a permis d'en relever des causes : la formation des enseignants, la structure des programmes éducatifs et la collaboration entre enseignants de Sciences.

Mots-clés : Interdisciplinarité, programmes scolaires, mathématiques, enseignants, difficultés.

Abstract | Injunctions to integrate an interdisciplinarity dimension are present in school programs in Côte d'Ivoire. General secondary mathematics teachers struggle to practise interdisciplinarity mathematical-physical and mathematical- life and earth sciences in their teaching. To analyze the difficulties, we conducted a survey of 103 of them. This study identified the causes: teacher training, the structure of educational programs and collaboration between science teachers.

Keywords: interdisciplinarity, school programs, mathematics, teacher, difficulties.

I. INTRODUCTION

L'importance d'une approche interdisciplinaire dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques au niveau secondaire découle du double aspect que revêt un concept mathématique. D'une part, sans contexte spécifique, les notions et les théorèmes mathématiques sont considérés comme des objets nécessitant une décontextualisation et une dépersonnalisation pour capitaliser le savoir. D'autre part, lorsqu'ils sont utilisés pour résoudre des problèmes ou interpréter de nouvelles questions, les notions et théorèmes mathématiques fonctionnent comme des outils qui sont employés dans des contextes spécifiques, sous contrôle et à un moment donné (Douady, 1993). Les situations qui sont génératrices de sens pour ces outils sont souvent complexes et les comprendre nécessite l'utilisation de différents savoirs disciplinaires. Les liens entre ces savoirs ne peuvent être établis par les apprenants sans l'intervention active d'un enseignant ou d'un groupe d'enseignants. En utilisant une approche interdisciplinaire, l'enseignant fait appel à différents angles disciplinaires interreliés pour faciliter l'intégration des processus d'apprentissage par les apprenants (Lenoir, 2015). Dans cette dynamique, la mise en œuvre de l'interdisciplinarité dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques a une place de choix. À ce titre, Fourez et al. (2002) insistent sur le fait que l'interdisciplinarité permet de mieux représenter des problèmes et des situations plus que ne saurait le permettre un seul regard disciplinaire. Cependant, la mise en place d'activités d'enseignement établissant un lien entre les mathématiques et les autres disciplines entraîne des difficultés pour les enseignants et se fait relativement rare (Hasni, 2006).

La Tunisie, le Cameroun, le Sénégal, la Belgique, l'Algérie et le Canada rencontrent des difficultés propres ou communes dans la mise en œuvre de l'interdisciplinarité dans l'enseignement-apprentissage

* École Normale Supérieure d'Abidjan – Côte d'Ivoire – desireebeyao@gmail.com

¹ Le système éducatif ivoirien présente deux parcours pour le niveau d'études secondaire après l'obtention du Brevet d'Étude du Premier Cycle (BEPC) : le secondaire général et le secondaire technique et professionnel.

de mathématiques (chellougui et al., 2018). De plus, Zongo et Sawadogo (2018) relèvent les difficultés de la pratique de l'interdisciplinarité entre les sciences physiques et les mathématiques dans l'enseignement secondaire au Burkina Faso. En Côte d'Ivoire, la pleine mise en œuvre de l'interdisciplinarité piétine malgré les recommandations officielles dans les programmes éducatifs qui encouragent à décloisonner les disciplines du domaine scientifique. De ce constat découle la question suivante :

- Quelles sont les principales difficultés rencontrées par les enseignants des disciplines scientifiques dans la mise en œuvre effective de l'interdisciplinarité dans leurs pratiques pédagogiques au secondaire ivoirien ?
- Y a-t-il un manque de volonté de la part des enseignants de sciences ?
- La conception des progressions et programmes des disciplines du domaine des sciences favorise – t – elle l'interdisciplinarité ?
- Les enseignants de mathématiques bénéficient – ils d'une formation initiale ou continue spécifique à la mise en œuvre de l'interdisciplinarité dans leurs pratiques pédagogiques ?
- Existe – il des cadres formels de coopération entre enseignants du domaine des sciences ?

L'objectif de cet article est de mettre en évidence les principales difficultés liées à la coopération entre enseignants de mathématiques, physique chimie, SVT², et à l'intégration de concepts de physique chimie ou de SVT dans l'enseignement – apprentissage des mathématiques au secondaire général ivoirien.

II. CADRE THÉORIQUE

1. *Notion de discipline*

Le mot discipline est issu de « disciple » et désigne une personne qui suit la doctrine d'un maître et s'y soumet. On comprend qu'une discipline est une branche de connaissance donnant matière à enseignement. Au sens strict, une discipline est un savoir organisé selon l'ordre de la raison, tel que les mathématiques ou la physique, où les règles sont rigides et immuables. Cependant, dans un sens plus large, une discipline désigne un champ de connaissances et de pratiques qui présente une spécificité socialement reconnue avec ses propres méthodes, théories, concepts et normes de pratique (Payette, 2001).

2. *Courants de conceptions de l'interdisciplinarité*

L'on distingue globalement deux courants qui permettent de bien cerner les différentes conceptions de l'interdisciplinarité. Selon le concept de coopération, les personnes qui appartiennent à des disciplines ou des professions différentes pratiquent l'interdisciplinarité si elles partagent leurs points de vue et leurs expertises, se transmettent de l'information, se consultent et travaillent ensemble dans une même équipe. En ce qui concerne la notion d'intégration, chaque spécialiste impliqué accepte de fournir un effort hors de son domaine propre et de son propre langage technique pour s'aventurer dans un domaine dont il n'est pas le propriétaire exclusif (Payette, 2001 ; Gusdorf, 1990). Il existe différentes terminologies utilisées pour caractériser la collaboration entre les disciplines : intradisciplinarité, multidisciplinarité, pluridisciplinarité, transdisciplinarité et l'interdisciplinarité au sens strict (Rivard, 2008). En fonction du niveau de collaboration et de l'intensité de l'intégration, l'interdisciplinarité se différencie de pluridisciplinarité et de la transdisciplinarité.

² Sciences de la Vie et de la Terre.

3. *L'interdisciplinarité au sens stricte*

Dans le cadre scolaire, l'interdisciplinarité au sens strict se distingue du projet ou de l'approche thématique. Elle se rapporte à la nécessité d'une analyse curriculaire pour trouver des points convergents entre les disciplines, une relation entre ces disciplines, un partage des objectifs, une poursuite de l'apprentissage des contenus et des démarches pour chacune des disciplines (Hasni, 2006). L'interdisciplinarité implique une véritable interaction entre deux ou plusieurs disciplines, qui va au-delà d'une simple juxtaposition de points de vue, dans l'objectif d'élaborer une représentation originale d'une notion, d'une situation, d'une problématique (Gusdorf, 1990).

Dans cet article, nous utilisons les termes « interdisciplinarité » ou « interdisciplinaire » en référence à l'interdisciplinarité scolaire au sens strict qui va au-delà du concept de coopération pour se concentrer sur la notion d'intégration des savoirs scolaires (Gusdorf, 1990 ; Fourez et al. 2002 ; Hasni, 2006).

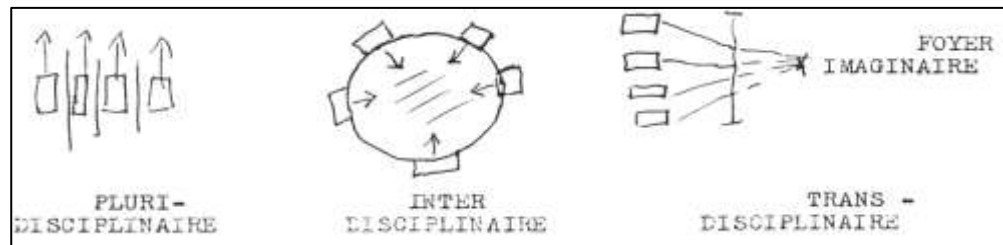


Figure 1 – Différences entre les approches pluri-, inter- et trans-disciplinaire (GUSDORF, 1990)

4. *Notion de difficulté*

Une difficulté peut être définie comme : « le caractère de ce qui est difficile ; ce qui rend quelque chose difficile » (LeRobert en ligne, s. d.). Sans fournir de définition stricte, Brousseau (1998) lie étroitement et différencie la notion de difficulté à celle d'un obstacle. Une difficulté est une condition, un caractère d'une situation qui accroît de façon significative la probabilité de non-réponse ou de réponse erronée des sujets actants impliqués dans cette situation. Cet actant peut être un élève, mais aussi un enseignant qui peut éprouver une difficulté à obtenir les apprentissages qu'il projette. Il fait remarquer qu'une difficulté est une caractéristique d'un système précis : telle situation proposée dans telles conditions à des actants qui disposent de tel « répertoire » de conceptions, de techniques, présente plus de difficultés que telle autre proposée dans telles autres conditions à des actants qui disposent de tel autre répertoire. Un obstacle est une connaissance qui a un domaine de validité et d'efficacité, et donc aussi un domaine où elle est a priori pertinente mais où elle se révèle fausse, inefficace, source d'erreurs, etc. Il définit ainsi l'erreur comme étant l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée. En clair, un obstacle en mathématique se manifeste par un ensemble de difficultés communes à de nombreux actants (sujet ou enseignant) qui partagent une conception inappropriée d'une notion mathématique.

Dans cet article, nous utilisons le terme « difficultés » en référence à ce qui rend la pratique de l'interdisciplinarité difficile.

III. MÉTHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

1. *Le choix de la population*

Notre étude s'est faite avec des enseignants de mathématiques, de physique chimie et de SVT du secondaire général. L'enquête auprès des enseignants de mathématiques a pour but de mieux

appréhender les difficultés de coopération et d'intégration de savoirs disciplinaires de leur point de vue. Ajouter les enseignants de physique chimie et de SVT a pour but d'identifier de leur point de vue d'une part, les difficultés de coopération nécessaire à une approche interdisciplinaire avec les enseignants de mathématiques et d'autre part, les difficultés d'intégration des savoirs de leurs disciplines respectives en mathématiques.

2. *Élaboration du questionnaire*

Pour atteindre cette population cible de manière efficace et garantir une diversité géographique dans la composition de l'échantillon, un questionnaire en ligne a été privilégié. Pour son élaboration, nous nous sommes appuyés sur les résultats de l'enquête menée au Burkina Faso par Zongo et Sawadogo (2018) sur l'interdisciplinarité mathématiques et sciences physiques. Sur la base de ces résultats, nous avons réalisé des entretiens semi-directifs avec une poignée d'enseignants. L'objectif est d'autre part, de découvrir si les difficultés relevées par Zongo et Sawadogo (2018) au Burkina Faso sont les mêmes qu'en Côte d'Ivoire et éventuellement en découvrir d'autres. D'autre part, nous avons voulu découvrir si les difficultés soulignées par la poignée d'enseignants étaient aussi partagées par un plus grand nombre d'enseignants de sciences à travers le pays.

Nous avons structuré ce questionnaire en trois parties adressées respectivement aux enseignants de mathématiques, de physique chimie et de SVT. En fonction du choix de la discipline, le répondant est dirigé automatiquement vers le questionnaire qui lui est destiné. Les parties contiennent les mêmes sections au nombre de 06.

Les deux premières sections permettent d'identifier la perception qu'a le répondant de l'interdisciplinarité, de recueillir des données sur le profil professionnel et la ville d'exercice de la fonction d'enseignant. La troisième section permet au répondant de choisir parmi les difficultés présentées, celles qui correspondent à ses réalités. Avec la section 04, le répondant donne des informations sur une éventuelle formation en interdisciplinarité au cours de sa formation initiale, formation continue ou toute autre formation pédagogique. L'avant-dernière section a pour objectif de faire l'état du degré de collaboration entre enseignants de sciences d'un même établissement ou d'une même direction régionale. Enfin, le répondant fait des suggestions sur le sujet d'étude dans la dernière section.

IV. PRÉSENTATION ET DISCUSSION DES RÉSULTATS DE LA RECHERCHE

1. *Entretiens avec 06 enseignants avant l'élaboration du questionnaire*

Nous avons réalisé des entretiens semi-directifs avec des enseignants de plus de 15 années d'ancienneté chacun, en fonction dans la ville de Grand-Bassam et dans le district d'Abidjan. Ils sont tous responsables d'unité pédagogique dans leur discipline respective ; 2 enseignants de physique chimie, 2 enseignants de mathématiques et 2 enseignants de SVT. Après avoir présenté les résultats de l'enquête menée au Burkina Faso par Zongo et Sawadogo (2018) sur l'interdisciplinarité mathématiques et sciences physiques, nous leur avons demandé de les comparer à ce qu'ils rencontrent personnellement et de proposer chacun, une liste des difficultés qu'ils rencontrent. Nous avons harmonisé les différentes listes et obtenu :

- La non-existence d'un cadre formel de collaboration entre enseignants des sciences d'un même établissement ou d'une même direction régionale

- L'intégration de concepts de physique chimie ou de SVT dans l'enseignement – apprentissage des mathématiques n'est pas clairement définie et traduite en habiletés dans le programme des contenus à enseigner en mathématiques
- le savoir des mathématiques servant d'outil en physique chimie ou en SVT n'a pas été programmé dans les savoirs à enseigner dans les classes précédentes ou le sera plus tard. Par exemple, les équations différentielles sont enseignées en mathématiques en fin d'année de terminale alors qu'en physique chimie il s'agit d'un prérequis pour un savoir à enseigner en début de la même année.
- -le savoir mathématique indispensable à l'activité interdisciplinaire a été enseigné, mais pas appris par les apprenants.
- L'absence d'instructions précises sur l'organisation et le déroulement d'une activité interdisciplinaire.
- Le volume horaire est insuffisant.
- Aucune formation initiale ou continue en interdisciplinarité.
- Une connaissance limitée du contenu des programmes à enseigner en physique chimie et en SVT pour pouvoir en faire référence dans leurs enseignements.

Sur la base de cette liste, nous avons élaboré un questionnaire.

2. *Profil professionnel et perception de l'interdisciplinarité*

Cent trois personnes, enseignants de mathématiques, de physique chimie et de SVT exerçant dans quarante localités de la Côte d'Ivoire ont répondu au questionnaire que nous avons élaboré. Dans les établissements du secondaire général, il y a deux principaux types d'enseignants : les diplômés et les non-diplômés de l'École Normale supérieure (ENS) d'Abidjan.

Tableau 1 – Pourcentage des diplômés de l'ENS parmi les répondants (source étude)

	Diplômés de l'ENS	Non diplômés de l'ENS
Enseignants de Mathématiques	83 %	17 %
Enseignants de Physique – Chimie	95 %	5 %
Enseignants de SVT	40 %	60 %

La majorité des répondants est diplômée de l'ENS d'Abidjan avec une moyenne d'expérience professionnelle comprise entre 10 et 15 ans (Tableau 2). Qu'ils soient diplômés de l'ENS ou pas et d'année d'expérience différente, 76 % des enseignants reconnaissent l'importance de l'interdisciplinarité.

Tableau 2 – Perception de l'interdisciplinarité (source étude)

Question	Réponses	Effectif en pourcentage
Selon vous, l'intégration de concepts de physique chimie ou de SVT dans l'enseignement – apprentissage des mathématiques, est-ce important ?	OUI	76 %
	NON	12 %
	NEUTRE	15 %

Parmi ces répondants, 71 % des enseignants de mathématiques, la moitié des enseignants de SVT et tous les enseignants de physique chimie reconnaissent l'importance de l'interdisciplinarité dans l'enseignement-apprentissage. D'ailleurs, tous les répondants ont pu donner 04 potentiels avantages de

l'interdisciplinarité dans l'enseignement – apprentissage des mathématiques. Cependant, le constat est que 52 % des répondants enseignants de mathématiques intègrent rarement, voire pas du tout, des concepts de physique chimie ou de SVT dans leurs pratiques enseignantes, 50 % des répondants enseignants de SVT et 95 % des répondants enseignants de physique chimie utilisent régulièrement des approches interdisciplinaires dans leurs enseignements. Malgré, l'importance bien connue de l'interdisciplinarité, les enseignants de sciences ne sont pas nombreux à la mettre en œuvre dans leurs pratiques enseignantes.

3. *Formation et ressources*

La majorité des répondants affirment ne pas avoir reçu de formation en interdisciplinarité ni au cours de leur formation initiale, ni en formation continue, ni en toute autre formation pédagogique. Certains ont juste suivi des études universitaires interdisciplinaires (Tableau 3). Étant en grande partie des diplômés de l'École Normale Supérieure d'Abidjan, nous déduisons que les enseignants de Sciences n'y sont pas formés à la pratique de l'interdisciplinarité.

Tableau 3 – Pourcentage de répondants ayant reçu une formation en interdisciplinarité

	Ayant reçu une formation en interdisciplinarité	N'ayant pas reçu de formation en interdisciplinarité
Enseignants de Mathématiques	10 %	90 %
Enseignants de Physique – Chimie	11 %	89 %
Enseignants de SVT	10 %	90 %

À la fin de cette section, les répondants ont indiqué ce qu'ils jugent nécessaire pour faciliter la mise en œuvre de l'interdisciplinarité dans les cours de mathématiques. Entre autres :

4. *Collaboration et échange d'idées*

Plus du trois quarts des enseignants de SVT et de mathématiques ne prennent pas l'initiative de collaborer avec les autres enseignants de sciences. Tandis que presque la moitié des enseignants de physique chimie prennent cette initiative. Dans ce cas, les échanges se font de manière informelle sur une notion mathématique spécifique.

5. Classification des difficultés rencontrées, indiquées par les enseignants ayant répondu au questionnaire

Tableau 4 – Classification des difficultés indiquées par les répondants

	Description	Pourcentage
Difficultés liées à la structure des programmes	L'intégration de concepts de physique chimie ou de SVT dans l'enseignement – apprentissage des mathématiques n'est pas clairement définie et traduite en habiletés dans le programme des contenus à enseigner en mathématiques	40,77 % des répondants
	38,9 % des répondants enseignants de physique chimie et 10 % de SVT pointent deux difficultés liées à l'ordre d'exécution des programmes. Dans certains cas, le savoir des mathématiques servant d'outil dans en physique chimie ou en SVT n'a pas été programmé dans les savoirs à enseigner dans les classes précédentes ou le sera plus tard.	38,9 % des répondants enseignants de physique-chimie 10 % de SVT
	Le savoir mathématique indispensable à l'activité interdisciplinaire a été enseigné, mais pas appris par les apprenants.	33,3 % en physique-chimie 20% en SVT
	L'absence d'instructions précises sur l'organisation et le déroulement d'une activité interdisciplinaire.	37,89 % des répondants
	Le volume horaire insuffisant	28,15 % des répondants
Difficultés liées à la formation des enseignants	33,3 % des répondants enseignants de mathématiques estiment avoir une connaissance limitée du contenu des programmes à enseigner en physique chimie et en SVT pour pouvoir en faire référence dans leurs enseignements.	33,3 % des répondants enseignants de mathématiques
	La majorité des répondants affirment ne pas avoir reçu de formation en interdisciplinarité ni au cours de leur formation initiale, ni en formation continue, ni en toute autre formation pédagogique	90 % en mathématiques 89 % en physique-chimie 90 % en SVT
Difficultés liées à la coopération entre enseignants	Non-existence de cadre formel de collaboration entre enseignants des sciences d'un même établissement ou d'une même direction régionale est une difficulté	46,60 % des répondants

V. DISCUSSION DES RÉSULTATS

Nous avons constaté que, même si la majorité des enseignants reconnaît l'importance de l'interdisciplinarité dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques et est disposée à la mettre en œuvre dans les pratiques pédagogiques, très peu d'enseignants essayent de le faire. Cela n'est pas dû à un manque de volonté de la part des enseignants.

En comparant nos résultats à ceux de Zongo et Sawadogo (2018), nous remarquons qu'en Côte d'Ivoire les difficultés rencontrées sont identiques à celles rencontrées au Burkina Faso. En ajoutant les SVT à notre étude, nous avons réussi à étendre les difficultés liées à l'interdisciplinarité mathématiques - SVT.

Les difficultés d'intégration de concepts de physique chimie ou de SVT dans l'enseignement – apprentissage des mathématiques au secondaire général ivoirien sont dues à la structure des programmes et progressions du domaine des sciences et à la formation des enseignants.

Pour assurer une approche interdisciplinaire cohérente et significative, il y a des exigences à satisfaire. L'une d'elle est d'établir une réelle complémentarité entre les contenus cognitifs provenant des différentes disciplines scolaires retenues. Une autre est une articulation intégrative des disciplines du curriculum Lenoir (2017). En tant qu'exécutants, les enseignants ne peuvent que suivre les progressions et les programmes dans leurs pratiques enseignantes. Pourtant, les enseignants interrogés soulignent que la structure des progressions ne favorise pas l'interdisciplinarité et les programmes n'indiquent pas explicitement à travers les habiletés à installer tous les concepts interdisciplinaires. Nous avons découvert que des enseignants reconnaissent avoir une connaissance limitée du contenu des programmes à enseigner dans les autres disciplines scientifiques pour pouvoir faire des approches interdisciplinaires. À cela s'ajoute le manque de formation initiale ou continue en interdisciplinarité destinée aux enseignants de mathématiques.

Les difficultés de coopération entre enseignants de mathématiques, physique chimie, SVT sont dues à la non – existence d'un cadre formel ayant pour objectif principal la pratique de l'interdisciplinarité.

Perrenoud (1997) souligne la complexité d'une équipe interdisciplinaire efficace en abordant les problèmes liés à sa création, au lancement d'une dynamique de coopération et de l'émergence d'un projet commun à la fois ouvert et mobilisateur. En absence de cadre formel et institutionnel ayant pour objectif principal la pratique de l'interdisciplinarité, nos résultats indiquent que les enseignants se réfugient dans leurs disciplines. Force est de constater que les collaborations au sein des Unités Pédagogiques de mathématiques ainsi qu'avec d'autres disciplines pour des activités interdisciplinaires sont faibles, voire inexistantes.

Nos résultats soulignent la nécessité d'une collaboration accrue entre les enseignants de différentes disciplines scientifiques, ainsi que des suggestions pratiques pour faciliter la mise en œuvre de l'interdisciplinarité, telles que la conception de programmes éducatifs interdisciplinaires, l'organisation de séminaires de formation, et l'insertion des notions mathématiques pertinentes dans les curricula de chaque discipline.

VI. CONCLUSION

Depuis ces dernières décennies, les injonctions visant à intégrer une dimension interdisciplinaire sont présentes dans les programmes scolaires en Côte d'Ivoire. Les enseignants de mathématiques du secondaire général peinent à mettre en œuvre l'interdisciplinarité mathématiques - physique chimie et mathématiques – Sciences de la Vie et de la Terre (SVT). Pour mettre en évidence ces difficultés, nous avons réalisé des entretiens et mené une enquête auprès de 103 enseignants de sciences. Cette étude a permis d'en relever des causes : la formation des enseignants, la structure des programmes éducatifs et la collaboration entre enseignants de sciences.

Malgré ces résultats significatifs, cette étude présente certaines limites. D'abord, notre étude s'est principalement concentrée sur l'analyse de l'interdisciplinarité entre les mathématiques et les disciplines scientifiques telles que les SVT et la physique chimie. Cependant, il est important de souligner que l'interdisciplinarité entre d'autres disciplines mérite également d'être explorée dans le contexte éducatif.

Ensuite, les encadreurs, les formateurs à l'ENS d'Abidjan et les inspecteurs pédagogiques n'ont pas participé à l'enquête. Les données reposent entièrement sur les autodéclarations des enseignants, ce qui pourrait introduire des biais ou une subjectivité dans les résultats. De plus, l'échantillon pourrait ne pas être représentatif de l'ensemble des enseignants de mathématiques, de physique chimie et de SVT en Côte d'Ivoire.

Enfin, nos investigations limitées par des contraintes, ne nous ont pas permis d'avoir accès à d'éventuelles études menées sur le même sujet en Côte d'Ivoire. Il n'en demeure pas moins qu'au

niveau théorique, cette étude contribue à la littérature en mettant en lumière les difficultés spécifiques rencontrées par les enseignants dans la mise en œuvre de l'interdisciplinarité. Cependant, Des recherches supplémentaires pourraient approfondir notre compréhension des stratégies efficaces pour surmonter ces difficultés et favoriser une véritable intégration interdisciplinaire dans l'enseignement des mathématiques.

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées :

- **Étude des interactions entre les différentes disciplines didactiques** : en particulier mathématiques, Physique Chimie, SVT pour mieux appréhender la manière dont ces disciplines peuvent se croiser pour favoriser les apprentissages.
- **Développement de programmes de formation** : Concevoir des programmes de formation initiale et continue spécifiquement axés sur l'interdisciplinarité pour les enseignants de mathématiques, de physique chimie et de SVT.
- **Étude des pratiques interdisciplinaires** : Des études de cas approfondies pourraient être menées pour analyser les pratiques interdisciplinaires réussies dans d'autres contextes éducatifs.
- **Renforcement des collaborations** : Explorer des moyens de renforcer et de rendre formelle la collaboration entre les enseignants de différentes disciplines scientifiques au sein des établissements scolaires.
- **Intégration des technologies** : Étudier comment les technologies de l'information et de la communication peut être utilisées pour faciliter l'enseignement interdisciplinaire des mathématiques.
- **Évaluation des impacts** : Il est essentiel d'évaluer les impacts de l'interdisciplinarité sur l'apprentissage des élèves en mathématiques et dans les autres disciplines scientifiques.

L'exploration de ces pistes, enrichira notre compréhension de l'interdisciplinarité dans l'enseignement des mathématiques et identifiera des stratégies efficaces pour surmonter les difficultés rencontrées par les enseignants.

RÉFÉRENCES

- Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. La pensée sauvage.
- Chellougui, F., Ka, M., Njomgang, N. J., Schneider, M., Semri, A. et Squalli, H. (2018). Table ronde. Interdisciplinarité et mathématiques : dispositifs et prescriptions curriculaires. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du Colloque de l'Espace Mathématique Francophone 2018 « Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines »* (p. 51-76). IREM de Paris.
- Douady, R. (1993). *L'ingénierie didactique. Un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage* (n° 19). IREM de Paris.
- Fourez, G., Maingain, A. et Dufour, B. (2002). *Approches didactiques de l'interdisciplinarité*. De Boeck Université.
- Gusdorf, G. (1990). Réflexions sur l'interdisciplinarité. *Bulletin de psychologie*, 43(397), 869-885.
- Hasni, A. (2006). Statut des disciplines scientifiques dans le cadre de la formation par compétences à l'enseignement des sciences au secondaire. A. Hasni, Y. Lenoir et J. Lebeaume (dir.), *La formation à l'enseignement des sciences et des technologies au secondaire : dans le contexte des réformes par compétences* (p. 122-156). PUQ.

- Lenoir, Y. (2015). Quelle interdisciplinarité à l'école. *Les cahiers pédagogiques*, (54), 1-8.
- Lenoir, Y. (2017). Être interdisciplinaire dans mon enseignement, c'est respecter un certain nombre d'exigences. *Apprendre à enseigner aujourd'hui*, 6(2), 9-14.
- Payette, M. (2001). Interdisciplinarité : clarification des concepts. *Interactions*, 5(1), 19-35.
- Perrenoud, P (1997). Travailler en équipe. *L'éducateur*, (15), 26-33.
- Rivard, A. D. (2008). Études des pratiques interdisciplinaires en mathématiques et en sciences au secondaire : réflexion sur le concept d'interdisciplinarité. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec (GMD2008), 22-23 mai 2008, Université de Sherbrooke, Sherbrooke* (p. 75-88).
- Zongo, M. et Sawadogo, T. (2018). Interdisciplinarité mathématiques et sciences physiques au Burkina Faso : réalités et perspectives. *Liens Nouvelle Série*, 1(26), 159-168.
- LeRobert. (s. d.). Difficulté. Dans *LeRobert en ligne*. Repéré le 19 février 2025 au <https://dictionnaire.lerobert.com/definition/difficulte>

**GT6 | ENSEIGNEMENT
DES MATHÉMATIQUES AU
POST-SECONDAIRE, AU
SUPÉRIEUR ET DANS LES
FILIÈRES
PROFESSIONNELLES**

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL 6

ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU POST-SECONDAIRE, AU SUPÉRIEUR ET DANS LES FILIÈRES PROFESSIONNELLES

| GONZÁLEZ-MARTÍN* ALEJANDRO S., PLANCHON** GAËTAN ET BRIDOUX*** STÉPHANIE

I. PRÉSENTATION

Le thème du colloque EMF 2025 soulève la question, pour le GT6, des enjeux pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques aux niveaux post-secondaire, supérieur et dans les filières professionnelles dans un monde « en accélération ». Cette accélération est particulièrement présente à ces niveaux d'enseignement. Par exemple, après la pandémie qui a démarré en 2020, nous avons assisté à une utilisation accrue des technologies dans l'enseignement des mathématiques dont l'impact mérite aujourd'hui d'être étudié (p.ex., Winsløw et al., 2023). Les questions liées à la formation sont elles aussi de plus en plus vives, que ce soit pour interroger les contenus enseignés aux étudiants débutants (Barquero et al., 2011) ou sur la présence de cours universitaires de mathématiques dans la formation des futurs enseignants (Wasserman, 2018) ou encore sur les compétences à développer chez des étudiants non-spécialistes en mathématiques (Quéré, 2019).

Ces enjeux liés au thème du colloque s'inscrivent dans la continuité des travaux sur l'enseignement des mathématiques aux niveaux post-secondaires menés lors des précédents colloques EMF : EMF 2015 (González-Martín et al., 2015), EMF 2018 (González-Martín et al., 2019) et EMF 2022 (Gibel et al., 2025). Notre appel à contributions a ainsi suggéré que les propositions d'articles s'inscrivent dans les axes suivants :

- L'étude de l'identité professionnelle des enseignants-chercheurs en mathématiques au supérieur, ainsi que l'influence de leurs pratiques de recherche dans leurs pratiques enseignantes.
- L'expérimentation d'approches innovantes pour l'enseignement des mathématiques au niveau post-secondaire, ainsi que l'étude des enjeux ou obstacles de leur implémentation effective et durable.
- Le rôle des technologies ou d'autres ressources dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques au supérieur, en particulier pendant la pandémie de covid avec la contrainte des enseignements à distance.
- La formation en mathématiques des enseignants du secondaire.
- La formation et les pratiques des enseignants du post-secondaire.
- Les pratiques évaluatives au supérieur.
- La collaboration entre mathématiciens et didacticiens, ainsi qu'entre didacticiens et experts d'autres domaines professionnels.

* Coresponsable du groupe de travail 6 – Département de Didactique – Université de Montréal – Canada – a.gonzalez-martin@umontreal.ca

** Coresponsable du groupe de travail 6 – Université de Montpellier – France – gaetan.planchon@umontpellier.fr

*** Correspondante du comité scientifique – Université de Mons – Belgique – stephanie.bridoux@umons.ac.be

Durant le colloque, 9 articles et 3 posters ont été présentés dans le GT6. Les présentations ont été organisées autour des quatre thèmes suivants, en lien avec les axes de travail que nous avons précédemment identifiés :

- Thème 1 : la formation mathématique des enseignants du secondaire (3 articles) ;
- Thème 2 : la formation et les pratiques des enseignants au post-secondaire (2 articles) ;
- Thème 3 : les pratiques des enseignants, les ressources et les liens avec d'autres disciplines (2 articles et 1 poster) ;
- Thème 4 (2 articles et 2 posters) : l'apprentissage de contenus spécifiques et l'utilisation des technologies.

Dans ce qui suit, nous présentons une synthèse des travaux présentés dans chaque thème et nous rendons également compte des discussions menées dans le GT6.

II. TRAVAUX PRÉSENTÉS DANS LE GROUPE

Le GT6 a réuni 17 participants au travers d'une communauté variée de chercheurs, formateurs et enseignants, issus de contextes institutionnels et culturels divers. Cette diversité se reflète dans la pluralité des approches théoriques mobilisées et dans la variété des objets étudiés, allant des contenus mathématiques à enseigner aux dispositifs de formation et à la formation des enseignants. Les échanges ont mis en évidence la vitalité du champ, mais aussi certaines tensions et déséquilibres persistants dans les thématiques abordées. Dans ce qui suit, nous synthétisons les présentations se trouvant dans ces actes.

1. *Thème 1 : la formation mathématique des enseignants du secondaire*

La formation mathématique des enseignants, sa pertinence et la mise en place de dispositifs pour établir des liens avec les contenus à enseigner ont été au cœur des trois articles présentés dans ce thème. **Rolland** s'intéresse à la formation en théorie des groupes des futurs enseignants, montrant des difficultés chez ces derniers qui peuvent limiter leur capacité à enrichir leur pratique d'enseignement. **Morcos et González-Martín** analysent des manuels universitaires et du secondaire en ce qui concerne la combinatoire, montrant la présence d'un ensemble de tâches communes, mais à résoudre avec des techniques très différentes, ainsi que la présence de tâches à chaque niveau n'ayant pas d'équivalent dans l'autre niveau ; ces résultats suggèrent des difficultés importantes chez les enseignants pour établir des liens entre leur formation universitaire en combinatoire et les contenus de combinatoire à couvrir au secondaire. Enfin, **Planchon et Durand-Guerrier** ont mis en place une expérimentation autour de l'équation fonctionnelle de Cauchy, suite à une analyse épistémologique montrant tout le potentiel de l'activité pour rendre visible le rôle de l'ordre en analyse dans différents ensembles de nombres ; les résultats indiquent qu'un travail spécifique autour de la notion de densité, notamment celle de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, ainsi qu'un renfort sur la notion de monotonie en lien avec la relation d'ordre, est à mener dans les cursus de licence de mathématiques.

2. *Thème 2 : la formation et les pratiques des enseignants au post-secondaire*

Deux articles se sont intéressés de près à ces enjeux. Dans le cas de l'enseignement des équations différentielles, **Bridoux et Grenier-Boley** étudient les liens entre les pratiques d'un enseignant universitaire et la perception de ces pratiques chez ses étudiants ; les résultats montrent que, malgré les bonnes intentions de l'enseignant, l'importance donnée aux spécificités épistémologiques et son souci de rigueur font en sorte que ses pratiques restent loin de la réalité des étudiants. En contraposition à

ces résultats, **Bridoux** présente un dispositif de formation initiale des enseignants du secondaire ; en dépit des tensions identifiées par les participants dans l'exercice du métier, ils semblent disposer d'outils appropriés pour amener leurs élèves à donner du sens aux contenus enseignés, sans négliger les aspects plus opératoires. La question de si de telles formations seraient possibles pour les enseignants universitaires émerge à travers ces deux présentations.

3. Thème 3 : les pratiques des enseignants, les ressources et les liens avec d'autres disciplines

Deux articles (Grenier-Boley et Bridoux, Hitier et González-Martín) et un poster (Kouassi) ont été groupés dans ce thème, s'intéressant à d'autres éléments en lien avec les pratiques des enseignants. **Grenier-Boley et Bridoux** s'intéressent aux limites des fonctions et leur présentation dans un cours magistral et dans des manuels ; en s'appuyant sur l'outil des proximités discursives, leurs analyses montrent plusieurs modes d'introduction de la définition de limite de fonction, avec une qualité variable qui peut favoriser ou contraindre la présentation de ce contenu. Pour leur part, **Hitier et González-Martín** analysent des manuels de calcul et de mécanique au niveau préuniversitaire (*collégial* au Québec) pour identifier des praxéologies assez différentes autour de la dérivée dans les deux cours ; des entretiens avec des enseignants de ces deux cours révèlent que leurs praxéologies sont similaires à celles des manuels, ce qui peut avoir comme conséquence que les étudiants compartimentent les praxéologies et s'adaptent aux pratiques à l'intérieur de chacun des cours. Enfin, **Kouassi** présente les premières étapes d'un projet de recherche visant à étudier l'utilisation de l'intégrale en ingénierie électrique.

4. Thème 4 : l'apprentissage de contenus spécifiques et l'utilisation des technologies

Deux articles (Sisco et Ouvrier-Bufferet ; Train et Coulangue) et un poster (Ouvrier-Bufferet et De Vleeschouwer) se trouvent dans ces actes en lien avec ce thème. Travaillant avec des futurs enseignants, en première année de master, **Train et Coulangue** s'intéressent à leur utilisation du registre graphique des fonctions ; leurs résultats montrent, entre autres, la persistance de difficultés à considérer le registre graphique comme support d'une analyse locale des fonctions. **Ouvrier-Bufferet et De Vleeschouwer** analysent les résultats d'un questionnaire sur la preuve distribué en France et en Belgique ; des difficultés récurrentes identifiées dans la littérature sont observées, ainsi que différentes conceptualisations de la preuve et son rôle. Enfin, **Sisco et Ouvrier-Bufferet** analysent l'évolution des conceptions des étudiants universitaires sur la preuve après des séances mobilisant des assistants de preuve ; leurs résultats indiquent que ces assistants permettent l'évolution de la formalisation des énoncés en langue naturelle, mais que cette évolution n'est pas corrélée à une meilleure compréhension des objets mathématiques en jeu.

5. Aspects saillants de nos discussions à partir des présentations dans le groupe

Nous observons que, parmi les thèmes dominants, l'analyse et le calcul occupent encore une place prépondérante dans les recherches présentées. Cette centralité, déjà observée lors des précédentes éditions, s'explique en partie par le poids historique de ces contenus dans les curricula universitaires et par leur rôle structurant dans la formation des enseignants. Toutefois, d'autres domaines, tels que la géométrie, les mathématiques discrètes et le dénombrement, sont également présents. Ces travaux ouvrent des perspectives intéressantes, notamment en ce qui concerne la prise en compte des spécificités épistémologiques de ces domaines et leurs implications pour l'enseignement.

Les différentes communications présentées ont également mis en lumière l'importance et la variété des cadres théoriques permettant d'étudier finement les problématiques de l'enseignement des

mathématiques au niveau post-secondaire. On y trouve des cadres plutôt centrés sur les savoirs et d'autres plutôt centrés sur les pratiques ; pris ensemble, ils offrent des outils pertinents pour comprendre les dynamiques d'enseignement-apprentissage dans des contextes variés de l'enseignement supérieur.

Néanmoins, les discussions du GT6 mettent aussi en avant la nécessité de mieux documenter les difficultés rencontrées par les étudiants, en particulier dans les premières années du supérieur. Sur ce point, plusieurs participants ont relevé que les travaux existants restent limités et s'interrogent quant à la stabilité de ces difficultés dans le temps. Un autre axe fort des discussions concerne l'évolution des curricula dans l'enseignement supérieur. Si des questionnements émergent sur la pertinence des contenus proposés et sur leur articulation avec les besoins des étudiants et des futurs enseignants, il apparaît que ces curricula font encore l'objet de peu de réflexions critiques dans la recherche. Cette relative absence interroge, d'autant plus que les transformations institutionnelles (pression pour la réussite, injonctions liées à la satisfaction étudiante, réformes structurelles) exercent une influence croissante sur les pratiques d'enseignement et sur les attentes vis-à-vis des enseignants.

Enfin, la formation des enseignants constitue un thème transversal qui a suscité de nombreuses discussions. D'une part, on note une émergence de travaux qui étudient les pratiques des enseignants du supérieur ce qui conduit à un questionnement sur la formation didactique des enseignants du post-secondaire. Cette dernière apparaît comme une préoccupation croissante, portée par des enjeux institutionnels (pression des universités, attentes en matière de qualité pédagogique, réformes successives en particulier dans le contexte français) et par des mouvements plus larges visant à repenser la professionnalité enseignante. Parallèlement, la formation mathématique des enseignants du secondaire prend de l'ampleur dans les débats, avec, là aussi, une pluralité d'approches théoriques permettant de penser le savoir mathématique des enseignants du secondaire, mais également la prise en compte de la formation mathématique à l'université des futurs enseignants. Les recherches sur leur formation didactique restent encore peu nombreuses. Cette asymétrie interroge, d'autant plus que les deux niveaux sont étroitement liés dans la construction des parcours de formation et dans la continuité des apprentissages.

III. PISTES POUR LA RECHERCHE À VENIR

Pour terminer ce bilan, nous évoquons ici, compte tenu des travaux menés par le GT6 en 2025, quelques pistes à explorer pour le prochain colloque EMF. Comme nous l'avons précédemment expliqué, la formation des enseignants aux niveaux post-secondaires a été largement discutée durant les travaux du GT6. Cette problématique semble soulever des questionnements qui pourraient être abordés dans le futur. Ainsi, alors que les premiers travaux sur la transition entre le secondaire et le supérieur ont émergé dans les années 2000 et font encore l'objet de nouveaux questionnements (p. ex., Biehler et al., 2024), il nous semblerait pertinent de vérifier si les difficultés des étudiants sur des contenus qui ont été beaucoup étudiés, comme l'Analyse par exemple, sont toujours les mêmes aujourd'hui. Ont-elles évolué et si oui, comment ?

Dans les discussions du groupe, nous avons identifié d'autres enjeux et sujets qui méritent plus de recherches. La question de mieux comprendre l'impact des pratiques des enseignants du supérieur sur les apprentissages effectivement réalisés par leurs étudiants mérite elle aussi d'être approfondie et elle soulève par ailleurs la question de la raison d'être des contenus mathématiques actuellement enseignés aux niveaux post-secondaires. Ainsi, dans le questionnement de la raison d'être des contenus, le rôle de la modélisation prend une importance particulière, ainsi que l'étude des pratiques de modélisation chez les enseignants du supérieur et leur appropriation par les étudiants. L'étude des éléments mentionnés dans ce paragraphe pourrait également mener à des recherches en lien avec la rétention

des étudiants, les facteurs qui ont le plus de poids dans leur décision de rester dans un programme, malgré les difficultés dans les cours de mathématiques, ou de quitter leur formation à cause de ces difficultés.

Enfin, l'évolution des pratiques des enseignants du supérieur intervenant dans des programmes spécialisés et orientés vers l'industrie mérite d'être questionnée, tout comme celle des curricula dans ces formations. Dans ce contexte, questionner la relation entre les curricula actuels et le public visé apparaît également comme une perspective à développer dans les prochains travaux du groupe. Par ailleurs, l'émergence des technologies et des intelligences artificielles dans la société, ainsi qu'au niveau de l'enseignement secondaire, interroge leur intégration dans les cursus post-secondaires. Des études portant sur leurs impacts sur les pratiques et les apprentissages au post-secondaire devraient émerger lors du prochain colloque.

RÉFÉRENCES

- Barquero, B., Bosch, M. et Gascón J. (2011). 'Applicationism' as the dominant epistemology at university level. Dans M. Pytlak, T. Rowland et E. Swoboda (dir.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 1938-1948). University of Rzeszów.
- Biehler, R., Durand-Guerrier, V. Trigueros, M. (2024). New trends in didactic research in university mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, 56(7), 1345-1360.
- Gibel, P., Bergé, A. et Cherikh, O. (2024). Présentation et bilan du groupe de travail n° 6. Enseignement des mathématiques au post-secondaire, au supérieur et dans les filières professionnelles. Dans A. C. Adihou (dir.), *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2022 (EMF2022)* (p. 543-550). Les Éditions de l'Université de Sherbrooke.
- González-Martín, A. S., Bridoux, S., Ghedamsi, I. et Grenier-Boley, N. (2015). Enseignement des mathématiques aux niveaux post-secondaire et supérieur – Compte-rendu du groupe de travail n° 7. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015 (EMF2015)* (p. 640-649). Université d'Alger.
- González-Martín, A. S., De Vleeschouwer, M., Ghedamsi, I. et Hausberger, T., (2019). Bilan du groupe de travail n° 5. Mathématiques dans la pluralité des enseignements au supérieur. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMF2018 « Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines », 22-26 octobre 2018, Gennevilliers, Paris* (p. 513-519). Université Cergy-Pontoise.
- Quéré, P.-V. (2019). *Les mathématiques dans la formation des ingénieurs et sur leur lien de travail : études et propositions (cas de la France)*. [Thèse doctorale, Université de Bretagne Occidentale].
- Wasserman, N. H. (dir.) (2018). *Connecting abstract algebra to secondary mathematics, for secondary mathematics teachers*. Springer Cham.
- Winslow, C., Bosch, M., González-Martín, A. S. et Huo, R. (2023). Technology in university mathematics education. Dans B. Pepin, G. Gueudet et J. Choppin (dir.), *Handbook of digital resources in mathematics education* (p. 1-27). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_34-1

ÉTUDE DE LA CONNAISSANCE DE LA THÉORIE DES GROUPES DE FUTURS ENSEIGNANTS DU SECONDAIRE FRANÇAIS

| ROLLAND* AGATHE

Résumé | Cet article examine les difficultés en théorie des groupes rencontrées par de futurs enseignants de mathématiques du secondaire. L'étude, basée sur un questionnaire rempli par seize étudiants s'appêtant à devenir enseignants, révèle des problèmes variés. Les résultats montrent que ces étudiants seront difficilement en mesure d'utiliser des notions de théorie des groupes pour enrichir leur pratique d'enseignement, soulignant une discontinuité entre les mathématiques universitaires et celles du secondaire.

Mots-clés : Théorie des groupes, seconde discontinuité de Klein, difficultés d'apprentissage, formation des enseignants

Abstract | This article examines the difficulties in group theory encountered by future secondary school mathematics teachers. The study, based on a questionnaire completed by sixteen students preparing to become teachers, reveals a variety of problems. The results show that these students will find it difficult to use group theory concepts to enrich their teaching practice, highlighting a discontinuity between university mathematics and secondary mathematics.

Keywords: Group theory, Klein's second discontinuity, learning difficulties, prospective teachers training

I. INTRODUCTION

En France, les étudiants qui se destinent à enseigner les mathématiques dans le secondaire complètent le plus souvent une licence de mathématiques, durant laquelle ils suivent en général un cours d'introduction à la théorie des groupes. Des éléments de cette branche de l'algèbre abstraite figurent aux programmes des deux concours de recrutement des enseignants de mathématiques du secondaire public¹, le CAPES² (Certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré) et l'agrégation.

Du point de vue des étudiants, ce contenu mathématique peut sembler éloigné de leurs futures pratiques enseignantes (Zazkis et Leikin, 2010). De plus, des recherches ont montré que la théorie des groupes est difficile pour les étudiants de licence (Lajoie, 2000 ; Melhuish, 2015). Parmi les travaux consacrés à cette théorie, aucun n'a pris en compte le devenir professionnel des étudiants. Cette communication étudie donc les difficultés en théorie des groupes rencontrées par des étudiants s'appêtant à devenir enseignants de mathématiques dans le secondaire. L'objectif est de documenter la transition entre la posture d'étudiant et celle d'enseignant du secondaire, connue dans la littérature sous le nom de « seconde discontinuité de Klein » (Klein 1908/2016).

Cette communication est tirée d'un mémoire de recherche (Rolland, 2023) et présente un questionnaire. Le but était d'identifier les difficultés rencontrées par les futurs enseignants du

* LDAR (EA4434) Université Paris Cité – France – agathe.rolland@etu.u-paris.fr

¹ Elèves âgés de 11 à 18 ans.

² Pour les programmes du CAPES externe 2023, voir

https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/capes_externe/23/1/p2023_capes_ext_mathematiques_1426231.pdf

Pour ceux de l'agrégation, voir

https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agreg_externe/14/3/p2023_agreg_ext_math_1428143.pdf

secondaire vis-à-vis de certaines notions de théorie des groupes. Quelles notions en lien avec les groupes semblent suffisamment bien maîtrisées pour servir de levier dans la formation des enseignants, ou au contraire nécessiteraient d'être consolidées ?

II. OUTILS THÉORIQUES

1. *APOS (Action, Processus, Objet, Schéma)*

La théorie APOS, développée par Asiala et ses collègues (1996), repose sur l'hypothèse selon laquelle un individu appréhende graduellement les mathématiques en construisant des *actions*, *processus* et *objets* mentaux, puis en les organisant en *schémas*. Ce cadre théorique me semble pertinent pour analyser les réponses au questionnaire, dans la mesure où il a été développé pour rendre compte de l'apprentissage des mathématiques dans le supérieur.

Pour les auteurs, l'apprentissage d'un concept mathématique débute par une conception en tant qu'*action*. Une action transforme des objets en d'autres objets à l'aide d'une suite d'opérations. Cette transformation est perçue par l'individu comme étant externe, c'est-à-dire qu'il ne peut effectuer la transformation qu'à l'aide d'indications externes qui lui donnent les étapes à effectuer. Par exemple, dans le cas des opérations binaires, un individu a une conception action de l'opération s'il n'est capable de l'effectuer qu'à condition de pouvoir appliquer une formule explicite (Brown et al., 1997, p. 191). Melhuish et Fagan (2018, p. 33) introduisent la conception E-O-E (Élément-Opération-Élément) des opérations binaires. Il s'agit d'une conception en tant qu'action : l'opération est l'action entre deux éléments.

Après avoir répété l'action et y avoir réfléchi, l'individu peut l'internaliser. Elle devient un *processus*, indépendant d'indications externes, contrôlé par l'individu. Toujours dans le cas des opérations binaires, l'individu conçoit que l'opération prend deux variables en entrée, les transforme, et renvoie quelque chose en sortie. Le processus peut ensuite être « encapsulé » pour former un *objet*. L'individu passe alors d'une conception dynamique (« ça fait quelque chose ») à une conception structurelle (« c'est quelque chose »). Par exemple, l'individu reconnaît que plusieurs opérations binaires peuvent être définies sur le même ensemble, et que leurs propriétés varient suivant l'ensemble considéré (Brown et al., 1997). Enfin, un *schéma* est un ensemble cohérent d'actions, de processus, d'objets et d'autres schémas qui, pour l'individu, sont liés entre eux. La notion de schéma est proche de celle de concept image de Tall et Vinner (1981), avec en plus l'exigence de la cohérence entre les éléments qui composent le schéma (Dubinsky et McDonald, 2002).

2. *Concept image et concept définition*

La notion de concept image, définie par Tall et Vinner (1981), va me permettre de distinguer la définition formelle d'un concept, et la définition personnelle qu'un étudiant se construit. Le concept image correspond à l'interprétation subjective qu'un individu se fait d'un concept. Il peut contenir tout ou partie d'une définition formelle, une définition personnelle, des exemples, des représentations mentales, des mots, des symboles, etc. Contrairement aux schémas définis précédemment, il ne s'agit pas nécessairement d'un ensemble cohérent.

Un concept définition peut être *formel*, s'il s'agit de la définition d'une notion acceptée par la communauté mathématique, ou bien *personnel*, si la définition a été reconstruite par l'étudiant.

III. MÉTHODOLOGIE

1. Contexte

J'ai fait passer mon questionnaire à seize étudiants de première année de master MEEF (Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation), qui se préparent au métier d'enseignant de mathématiques du secondaire, et en particulier au CAPES de mathématiques. Les étudiants inscrits dans cette formation ont donc tous pour objectif d'enseigner les mathématiques dans le secondaire. La formation dure deux ans, et combine des cours de mathématiques, pédagogie, didactique, psychologie de l'éducation, des stages en milieu scolaire, un travail de recherche, ainsi qu'une préparation au concours.

Pour intégrer cette formation, les étudiants doivent être titulaires d'une Licence³ ou d'un diplôme équivalent. Tous les étudiants ayant complété le questionnaire étaient titulaires d'une licence de mathématiques. En particulier, ils ont tous suivi un cours de théorie des groupes dans leur cursus, majoritairement en troisième année (11/16)⁴. La plupart des étudiants ayant validé ce cours (14/16), je m'attends à ce que les notions de base en théorie des groupes soient relativement assimilées et présentes à leurs esprits.

Le questionnaire a été diffusé durant le mois de décembre 2022, avant que des rappels sur la théorie des groupes ne soient faits. De tels rappels ne sont pas systématiques dans tous les Masters MEEF, et ils peuvent être faits aussi bien en première qu'en deuxième année de Master. J'ai donc préféré diffuser mon questionnaire avant, afin d'être sûre que les réponses soient liées à des connaissances acquises en Licence, et non à des rappels récents.

Les étudiants ont eu une heure pour le compléter, sous la surveillance d'un enseignant, afin de contrôler qu'ils n'aient pas recours à des notes de cours ou à une aide extérieure. Il leur a été précisé que le questionnaire était anonyme et ne constituait pas une évaluation notée, et les tentatives de réponse partielle ou informelle ont été encouragées.

2. Présentation du questionnaire

Dans sa thèse, Melhuish souligne que bien que quelques chercheurs aient tenté de définir ce que sont les notions fondamentales d'un cours d'introduction à la théorie des groupes, ils ne s'accordent pas entre eux (2015, p. 49).

À l'université, en France, il n'existe pas de programme officiel. Des comités locaux d'enseignants-chercheurs divisent le savoir à enseigner en modules et en établissent de brèves descriptions. L'enseignant-chercheur qui donne le cours bénéficie donc d'une large marge de manœuvre. Un moyen de s'approcher du savoir enseigné est de s'appuyer sur des photocopies de cours. Il ne s'agit cependant pas du savoir véritablement enseigné, car il peut exister des différences avec ce que l'enseignant aura effectivement dit ou écrit dans l'amphithéâtre.

J'ai donc choisi de comparer trois photocopies de cours de L3, issus de trois enseignants chercheurs de trois universités différentes : *Algèbre : le grand combat*⁵, de Grégory Berhuy (Université Grenoble-Alpes, 2017), *Introduction à la Théorie des Groupes*, de Paul Lescot (Université de Rouen, 2021), ainsi que

³ Premier cycle universitaire, d'une durée de trois ans.

⁴ Parmi les cinq étudiants restants, un a suivi un cours de théorie des groupes en deuxième année, et les quatre autres affirment qu'ils en ont suivi un mais ne savent plus en quelle année.

⁵ Il s'agit bien d'un photocopié de cours, et non de son ouvrage portant le même titre, beaucoup plus complet, qui a été composé à partir de photocopies.

la première partie d'*Algèbre linéaire et théorie des groupes*, de Pierre-Louis Montagard (Université de Montpellier (2019)). Je fais l'hypothèse que si une notion théorique ou une technique est présente dans chacun de ces trois polycopiés, c'est qu'il est également enseigné dans la majorité des cours de Licence portant sur la théorie des groupes, et qu'il appartient donc à un savoir commun partagé par les étudiants de Licence de mathématiques français. Cet ensemble de notions théoriques et de techniques constitue donc la référence de ce que signifie pour moi dans ce contexte la théorie des groupes.

J'ai restreint cette liste de notions en m'appuyant sur le programme de l'écrit 1 du CAPES, qui porte sur du contenu mathématique, et sur un ensemble de notions identifié dans une recherche précédente qui apparaît de façon sous-jacente dans les programmes du secondaire (Rolland, 2024). Les notions retenues sont les suivantes : loi de composition interne, associativité, commutativité, groupe, sous-groupe, relation d'équivalence, classes d'équivalences, groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, (iso)morphisme de groupe, ordre d'un élément, groupe cyclique, ordre d'un groupe, groupe des racines quatrièmes de l'unité, isométrie, groupe des isométries du plan.

Le questionnaire était destiné à être diffusé à des étudiants lors d'un cours, et devait être faisable en une heure. J'ai donc fait le choix d'exclure les théorèmes du questionnaire, car leur restitution se base davantage sur la mémorisation que la compréhension. Afin d'en évaluer la compréhension, il aurait fallu pouvoir les mettre en œuvre dans la résolution de problèmes, ce qui aurait été trop long. Les questions étaient donc composées de définitions, qui avaient pour but de contrôler le sens que les étudiants associaient aux notions, suivies de demandes d'exemples ou de mises en jeu des notions sur de petits exercices.

Le questionnaire était composé de quatorze questions. Dans cette communication, je ne vais en présenter que quatre.

IV. ANALYSE A PRIORI

1. *Considérons la loi interne $*$ définie sur $\mathbb{R}$ par $a * b = \frac{1}{3}(a + b)$. Cette loi est-elle associative ?*

Lajoie souligne que certains étudiants qu'elle a interrogés dans le cadre de sa thèse confondent les propriétés d'associativité et de commutativité (2000, p. 115-117). Je cherche donc à déterminer s'il en va de même pour mes sujets. Cette question est inspirée par un questionnaire conçu par Melhuish (2018, p. 32). La question d'origine portait sur la moyenne de a et de b , mais je l'ai modifiée afin d'éviter que les étudiants n'aient recours à leur sens commun.

Melhuish et Fagan font état de difficultés similaires chez les étudiants qui ont complété leur questionnaire à choix multiple (2018). En effet, parmi les quatre réponses possibles, vingt étudiants en « *mathematics education* » sur quatre-vingt-trois (24,1 %) ont choisi « Oui, car $\frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(b + a)$ ». Je m'attends donc à obtenir des réponses semblables.

De plus, vingt-huit étudiants (33,7 %) ont choisi la réponse « Oui, l'addition (et la multiplication) sont associatives, donc $*$ l'est aussi ». Ces étudiants ont une conception conservatrice de l'associativité : si deux opérations ont cette propriété, alors leur combinaison l'a également. Je m'attends à obtenir des réponses qui mettent en lumière cette conception.

Enfin, pour répondre à cette question, il est nécessaire d'effectuer une substitution. En France, les étudiants ne sont pas spécifiquement entraînés à ce type de tâche, car les substitutions sont des « savoirs transparents », c'est-à-dire qu'ils sont perçus comme allant de soi par les enseignants (Constantin,

2021). Ici, il est nécessaire de se rappeler de la formule $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a * b) * c = a * (b * c)$, puis être capable de substituer $\frac{1}{3}(a + b)$ à $a * b$, et finalement de voir $\frac{1}{3}(a + b)$ comme un seul élément. Une seconde substitution est nécessaire, mais cette fois dans l'expression $a * b = \frac{1}{3}(a + b)$. Les étudiants doivent être en mesure de reconnaître que a prend la valeur $\frac{1}{3}(a + b)$ tandis que b prend la valeur c . Cette seconde substitution pourrait être source de confusions.

2. $(\mathbb{R}, \times)$ et $(\mathbb{Z}^*, +)$ sont-ils des groupes ?

Cette question a pour but de faire varier les notions d'éléments neutre et inverse, afin de déterminer si les étudiants les distinguent. $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe, car 0 n'est pas inversible. Le fait que 0 soit l'élément neutre pour l'addition pourrait entraîner des confusions entre les deux notions. $(\mathbb{Z}^*, +)$ n'est pas non plus un groupe, car il n'y a pas d'élément neutre.

3. Définir ce qu'est une isométrie

L'objectif de cette question est de mettre en lumière la définition personnelle que les étudiants ont de la notion d'isométrie, afin d'éclairer les réponses à la question suivante. Plusieurs définitions sont possibles ; en particulier une isométrie du plan est une transformation géométrique qui conserve les distances entre deux points, telles que les translations, les symétries axiales et les rotations. L'ensemble des isométries du plan, muni de la loi de composition, forme un groupe. Cette notion figure au programme du CAPES.

4. Soit $(H, \circ)$ le groupe des isométries du plan qui conservent un triangle équilatéral donné. Quels sont ses éléments ? La loi $\circ$ est-elle commutative ? Justifiez.

Cette question répond à deux objectifs. D'une part, déterminer si les étudiants sont familiers du groupe des isométries du plan, d'autre part, mettre en jeu la notion de commutativité. En comparant les réponses obtenues à la première question, j'espère pouvoir identifier de potentielles confusions avec la notion d'associativité.

Les éléments de $(H, \circ)$ sont l'identité, les trois réflexions d'axe les médiatrices des côtés du triangle, la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre, le centre de gravité du triangle. La loi $\circ$ n'est pas commutative. En effet, soient ABC un triangle équilatéral orienté dans le sens horaire, s_A la réflexion d'axe la médiatrice passant par A et r la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$. Alors $s_A \circ r(B) = s_A(C) = B$ et $r \circ s_A(B) = r(C) = A$. Donc $s_A \circ r \neq r \circ s_A$, d'où la non-commutativité de loi $\circ$.

V. RÉSULTATS

1. Considérons la loi interne $*$ définie sur $\mathbb{R}$ par $a * b = \frac{1}{3}(a + b)$. Cette loi est-elle associative ?

Treize étudiants sur seize ont essayé de répondre à cette question, huit d'entre eux ont donné une réponse correcte en justifiant. Un étudiant répond « Non » en précisant que $(a * b) * c \neq a * (b * c)$, sans détailler. Quatre étudiants concluent que la loi est associative, et donnent des justifications variées, que je reproduis ci-après.

$$a * b = \frac{1}{3} (a+b) = \frac{1}{3} (b+a) \quad \text{car la loi "+" est associative sur } \mathbb{R}$$

$$= b * a \quad \text{donc la loi "*" est associative sur } \mathbb{R}$$

Figure 1 – Réponse de E6 à la question 1

$$\frac{1}{3} (a+b) = \frac{1}{3} a + \frac{1}{3} b$$

Où cette loi est associative

Figure 2 – Réponse de E2 et E3 à la question 1

associativité : $(a+b)+c = a+(b+c)$

$$a+b = \frac{1}{3} a + \frac{1}{3} b \quad a+(b+c) = \frac{1}{3} b + \frac{1}{3} c + \frac{1}{3} a$$

$$(a+b)+c = \frac{1}{3} a + \frac{1}{3} b + \frac{1}{3} c \quad \text{Donc Oui}$$

Figure 3 – Réponse de E10 à la question 1

L'étudiant E6 (Figure 1) paraît confondre l'associativité avec la commutativité, en accord avec les recherches susmentionnées. Pour E2 et E3 (Figure 2), l'opération en jeu est la multiplication par $\frac{1}{3}$. Il se pourrait que pour ces étudiants, être associatif signifie « pouvoir ôter les parenthèses ». L'étudiant E10 (Figure 3) énonce la propriété d'associativité avant de commencer les calculs. Elle est incorrecte, car les quantificateurs sont absents, mais cela est suffisant pour voir que son concept définition personnel est proche du concept définition formel, c'est-à-dire que sa définition correspond globalement à celle partagée par la communauté mathématique. Cependant, il a du mal à réaliser la substitution. Cela peut être dû au fait que ce type de tâche est rarement rencontré dans le secondaire en France, et parce que cet étudiant n'a pas souvent été amené à manipuler des opérations binaires composées de deux opérateurs. Cet étudiant semble avoir une conception E-O-E des opérations binaires : $\frac{1}{3}a$ et $\frac{1}{3}b$ sont des éléments, combinés par l'opérateur $+$. L'opération semble donc ici conçue comme une action entre deux éléments.

Si je retrouve bien certaines conceptions des lois binaires observées par Melhuish dans sa thèse, cela reste mineur. La moitié des étudiants semblent connaître la définition de l'associativité, et sont capables de la faire fonctionner avec une opération qui n'a pas une structure de type E-O-E.

2. $(\mathbb{R}, \times)$ et $(\mathbb{Z}^*, +)$ sont-ils des groupes ?

Treize étudiants sur seize ont répondu à la première partie de la question, et quatorze à la seconde. Seuls sept étudiants justifient pourquoi $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe, tandis que treize le font pour $(\mathbb{Z}^*, +)$. Six étudiants n'ont donc pas vu que 0 n'est pas inversible dans $(\mathbb{R}, \times)$. Cependant, il semble qu'ils distinguent clairement les notions de neutre et d'inverse, et que $(\mathbb{Z}, +)$ soit un groupe qui leur est familier.

3. Définir ce qu'est une isométrie.

Onze étudiants sur seize ont répondu à cette question, et cinq d'entre eux ont donné une réponse correcte. Parmi eux, un seul donne un exemple. Les exemples sont davantage présents dans les réponses des étudiants qui n'ont pas une définition générale du concept d'isométrie.

Six étudiants ont donné une réponse partielle ou erronée. Deux d'entre eux semblent avoir associé l'idée de conservation à celle d'isométrie. En effet, pour E9, une isométrie est une « application qui

conserve», tandis que pour E8 il s'agit d'une « transformation qui conserve les propriétés, par exemple une symétrie ou une homothétie ». La symétrie conserve par exemple les distances, et l'homothétie conserve les angles.

Un étudiant définit les isométries comme « une transformation, par exemple symétrie, rotation, translation ». Il est donc en mesure de donner des exemples d'isométries, mais sans parvenir à identifier leur propriété commune.

Pour E2 et E3, une isométrie est simplement une symétrie. Il est à noter que tous les étudiants qui donnent des exemples d'isométries citent les symétries. Il semble donc que cette transformation particulière soit bien ancrée dans leur concept image.

Pour E14, une isométrie est « une opération qui transforme tous les éléments d'un groupe ». Cet étudiant semble confondre les notions d'isométrie et d'action de groupe. Si les isométries forment bien un groupe, celui-ci agit sur les points d'un espace géométrique, pas sur les éléments d'un groupe. Cet étudiant fait peut-être une confusion avec l'action par translation d'un groupe sur lui-même, qui transforme effectivement tous les éléments d'un groupe. Cette erreur est sémiotique : les translations sont des isométries, mais leur interprétation diffère selon le contexte. Dans le cas des isométries du plan, il s'agit d'une transformation géométrique qui préserve les distances, tandis que dans le cas des actions de groupes, il s'agit d'une transformation algébrique, sans lien nécessaire avec un espace affine euclidien.

Cinq étudiants semblent donc connaître une définition d'isométrie. Cependant, il n'est pas certain que dans leur concept image, cette définition soit associée à des types d'isométries. Quatre autres étudiants sont en mesure de citer des exemples d'isométrie, mais sans pouvoir dire ce que ces exemples ont en commun.

4. *Soit $(H, \circ)$ le groupe des isométries du plan qui conservent un triangle équilatéral donné. Quels sont ses éléments ? La loi $\circ$ est-elle commutative ? Justifiez.*

Le taux de réponse à cette question est particulièrement faible. En effet, seuls quatre étudiants ont écrit quelque chose. De plus, aucun d'eux n'a fait de dessin. Le taux de réponse aurait peut-être été plus important si le dessin d'un triangle équilatéral avait été fourni. Cela aurait pu inciter les étudiants à chercher les axes de symétrie et les rotations qui laissent le triangle invariant. De plus, il s'agissait de la dernière question du questionnaire ; certains étudiants ont peut-être manqué de temps pour y répondre.

L'étudiant E14 liste correctement les éléments de H . Il semble donc que cet étudiant sache que les rotations et les symétries sont des isométries, ce qui n'était pas évident d'après sa réponse à la question précédente, où il affirme qu'« une isométrie est une opération qui transforme tous les éléments d'un groupe ». Il répond ensuite que la loi est commutative, sans justification. Son erreur peut être due à une difficulté à composer une réflexion avec une autre transformation. En effet, dans leurs travaux, Veith et Bitzenbauer (2022, p. 14) soulignent que cela est source d'erreur pour leurs étudiants. Pour certains étudiants, l'axe de symétrie est « attaché » au sommet dont la transformation porte le nom. Ainsi, pour eux, l'axe de symétrie de S_A devrait toujours passer par le sommet A , ce qui signifie que l'axe est également sujet à des transformations. Cette conception de la composition des rotations conduit à penser que la loi de composition est commutative.

Pour E11, les éléments de H sont « $\{id, r_{\frac{2\pi}{6}}, r_{\frac{4\pi}{6}}\}$ et les translation [sic] » Il semble donc que les rotations soient bien ancrées dans son concept image du groupe des isométries du triangle équilatéral, mais pas les symétries. Il affirme que le groupe est « commutatif », sans justifier.

Pour E8, les éléments de H sont les « Translation / symetrie / homotethie [sic] ». Il fait donc peut-être une confusion avec le groupe des isométries du plan. Il semble en aller de même pour E10, pour qui les éléments de H sont les « symetrie, reflexion, rotation [sic] ».

E9 n'a pas répondu à la question, mais a dessiné une accolade sous la question portant sur la commutativité, et a écrit « $s * t = t * s$? » Il semble donc que la définition de la commutativité ne soit pas claire pour lui. Il en va peut-être de même pour d'autres étudiants ; j'aurais donc pu m'assurer qu'ils savaient de quoi il s'agit en leur demandant une définition, ou en les encourageant à souligner les termes des énoncés dont ils ne connaissaient pas la signification dans l'ensemble du questionnaire. Il est probable que les trois étudiants qui ont répondu à la question sans justifier possèdent un concept image de la commutativité contenant autre chose que la définition attendue.

Il apparaît donc que les étudiants ne sont pas du tout familiers du groupe des isométries du triangle équilatéral. Puisque seuls trois d'entre eux ont essayé de déterminer si la loi est ou non commutative, et qu'ils ont tous répondu « oui » sans justifier, les réponses ne permettent pas de mettre en lumière d'éventuelles confusions entre associativité et commutativité.

VI. CONCLUSION

Les étudiants qui ont répondu à mon questionnaire ont à la fois des représentations erronées et solides de certaines notions de théorie des groupes apparaissant dans les programmes des concours de recrutement d'enseignants. La moitié des étudiants semblent connaître la définition de l'associativité et sont capable de l'appliquer à une opération binaire qui n'a pas une structure de type E-O-E. Dès lors, leurs connaissances des propriétés des opérations binaires pourraient servir de point d'appui pour un cours de type « capstone ». Attirer l'attention des étudiants sur ces propriétés, expliquer qu'elles ne sont pas transparentes pour les élèves du secondaire et donner des outils pour travailler ces propriétés en classe pourrait enrichir les pratiques enseignantes.

Bien que certains étudiants n'aient pas reconnu que 0 n'est pas inversible dans $(\mathbb{R}, x)$, ils ne semblent pas confondre les propriétés d'identité et d'inversibilité. De plus, ils paraissent familiers du groupe $(\mathbb{Z}, +)$, qui pourrait être utilisé comme exemple paradigmatique pour un cours « capstone ». La structure de ce groupe pourrait servir de point d'appui pour comparer différentes stratégies d'introduction des nombres négatifs dans le secondaire.

Les étudiants semblent peu familiers du concept d'isométrie, et en particulier des isométries du triangle équilatéral. Les isométries du plan euclidien sont cependant enseignées dans le secondaire. Il paraît donc nécessaire de revisiter ces notions dans la formation des enseignants.

RÉFÉRENCES

- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. et Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Dans J. Kaput, A. Schoenfeld, E. Dubinsky et T. Dick (dir.), *CBMS issues in mathematics education* (Vol. 6, p. 1-32). American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/cbmath/006/01>
- Berhuy, G. (2017). *Algèbre : Le grand combat* [Cours de L3 Mathématiques]. Université Grenoble Alpes.

- Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E. et Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(3), 187-239. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(97\)90028-6](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90028-6)
- Constantin, C. (2021). La substitution, points de vue écologique et sémiolinguistique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Revue internationale de didactique des mathématiques*, (26), 157-194. <https://doi.org/10.4000/adsc.1118>
- Dubinsky, E. et McDonald, M. A. (2002). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. Dans D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss et A. Schoenfeld (dir.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (Vol. 7, p. 275-282). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25
- Klein, F. (2016). *Elementary mathematics from a higher standpoint. Volume I: Arithmetic, algebra, analysis* (G. Schubring, trad.). Springer Berlin Heidelberg. (Ouvrage original publié en 1908)
- Lajoie, C. (2000). *Difficultés liées aux premiers apprentissages en théorie des groupes*. Université Laval.
- Lescot, P. (2021). *Introduction à la Théorie des Groupes* [Cours de L3 Mathématiques]. Université de Rouen.
- Melhuish, K. (2015). *The design and validation of a group theory concept inventory*. Portland State University. <https://doi.org/10.15760/etd.2487>
- Melhuish, K. et Fagan, J. (2018). Connecting the group theory concept assessment to core concepts at the secondary level. Dans N. Wasserman (dir.), *Connecting abstract algebra to secondary mathematics, for secondary mathematics teachers* (p. 19-45). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-31999214-3_2
- Montagard, P.-L. (2019). *Algèbre linéaire et théorie des groupes* [Cours de L3 Mathématiques]. Université de Montpellier, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques.
- Rolland, A. (2023). *La théorie des groupes au prisme de la seconde transition de Klein* [Mémoire de M2, Université Paris Cité]. http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/Memoire_Rolland.pdf
- Rolland, A. (2024, juin 10). *Uncovering group theory in French secondary school curricula* [Communication]. 5th conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics, Barcelone.
- Tall, D. et Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Veith, J. M. et Bitzenbauer, P. (2022). What group theory can do for you: From magmas to abstract thinking in school mathematics. *Mathematics*, 10(5), article 703. <https://doi.org/10.3390/math10050703>
- Zazkis, R. et Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(4), 263-281. <https://doi.org/10.1080/10986061003786349>

FORMATION MATHÉMATIQUE UNIVERSITAIRE DES FUTURS ENSEIGNANTS

AU SECONDAIRE : DISCONTINUITÉS DANS LES TECHNIQUES DE

RÉSOLUTION RELATIVES À LA COMBINATOIRE

| MORCOS* JONATHAN ET GONZÁLEZ-MARTÍN** ALEJANDRO

Résumé | Cet article présente les résultats d'une analyse des techniques de résolution de tâches de combinatoire dans des manuels universitaires et guides de l'enseignant au secondaire dans l'optique d'étudier la formation mathématique des futurs enseignants. Nous observons un lien quant à l'utilisation fréquente de la règle du produit, mais aussi des ruptures comme le fait que certaines techniques utilisées dans les manuels au secondaire ne sont pas présentées dans les manuels universitaires, ce qui peut avoir des impacts sur la formation mathématique universitaire pour l'enseignement.

Mots-clés : Mathématiques universitaires dans la formation des enseignants, combinatoire, analyse de manuels, Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), seconde discontinuité de Klein

Abstract | This paper presents some results from the analysis and comparison of techniques employed to solve combinatorics tasks in textbooks used in the training of prospective teachers and in secondary textbooks. We observe consistency in the frequent use of the multiplication principle in both samples, but also some inconsistencies, primarily that certain techniques present in secondary education are not covered in university textbooks, which could have an impact on teacher training.

Keywords: University mathematics for prospective teachers, combinatorics, textbook analysis, Anthropological Theory of the Didactic (ATD), Klein's second discontinuity

I. INTRODUCTION

La formation mathématique universitaire des futurs enseignants au secondaire est un enjeu d'actualité de la recherche en didactique des mathématiques. Plusieurs futurs enseignants considèrent leurs cours de mathématiques universitaires comme déconnectés et peu pertinents par rapport à leur profession (Biza et al., 2022). Des ruptures entre les pratiques mathématiques universitaires et celles au secondaire génèrent un phénomène de discontinuité dans le transfert des apprentissages en mathématiques universitaires à l'enseignement au secondaire (Klein, 1908/2016). Afin d'améliorer la formation mathématique des futurs enseignants, il importe de favoriser les points de connexion entre ces niveaux d'enseignement (Wasserman et al., 2023).

En parallèle, l'enseignement de contenus relatifs à la combinatoire — la branche des mathématiques qui s'intéresse à l'énumération et au dénombrement d'ensembles discrets d'objets (Sandefur et al., 2022) — suscite également un intérêt accru récemment. Bien que la combinatoire présente plusieurs difficultés pour les élèves, documentées par la littérature scientifique, l'intégration de tâches de ce domaine mathématique dans les cursus scolaires au secondaire est associée à plusieurs bénéfices potentiels (Sandefur et al., 2022) ; par exemple, l'intérêt marqué des élèves envers ces tâches, les possibilités de raisonnement mathématique profond qu'elles promeuvent et leurs applications possibles en probabilité et en informatique. Or peu de connaissances scientifiques existent à propos de la formation concernant la combinatoire reçue par les enseignants (Lockwood et al., 2020). En particulier, la littérature manque de travaux sur comment les enseignants sont outillés pour faire face

* Université de Montréal — Canada — jonathan.morcos@umontreal.ca

** Université de Montréal — Canada — a.gonzalez-martin@umontreal.ca

aux difficultés de leurs élèves et sur si les cours suivis à l'université s'avèrent pertinents ou non à cet égard.

Le projet de maîtrise du premier auteur (Morcos, 2025) s'intéresse simultanément à ces deux enjeux en cherchant à identifier les liens et les ruptures dans les pratiques mathématiques relatives à la combinatoire au secondaire et à l'université. Ce faisant, nous souhaitons étudier la possible discontinuité à laquelle font face les futurs enseignants lors du transfert de leurs apprentissages universitaires en combinatoire vers l'enseignement de cette dernière au secondaire. Dans le présent article, nous nous concentrons sur les techniques de résolution proposées à l'université et au secondaire pour solutionner des tâches relatives à la combinatoire.

Lamanna et al. (2022) s'intéressent aux techniques de résolution en combinatoire employées par des élèves du secondaire. Ils identifient six techniques : 1) l'énumération (aussi appelée la liste ordonnée) ; 2) le diagramme en arbre ; 3) le recours aux règles de la somme, du produit ou du quotient ; 4) la formule de dénombrement ; 5) la référence à un problème équivalent ; et 6) la subdivision en problèmes de plus petites dimensions. Lamanna et al. (2023) notent que des futurs enseignants tendent à se tourner vers une stratégie d'application de formules de dénombrement pour solutionner des tâches de combinatoire, ce qui appelle à une étude du rôle de la formation universitaire à cet égard en raison du risque de limiter la richesse du raisonnement combinatoire développé chez les futurs enseignants et potentiellement aussi, conséquemment, chez leurs élèves. Ces deux éléments nous amènent à questionner l'organisation des contenus de combinatoire autant à l'université qu'au secondaire afin d'identifier les liens entre les techniques de résolution employées ou, dans le cas contraire, des éléments de discontinuité qui pourraient nuire au transfert d'apprentissages universitaires des futurs enseignants vers leur enseignement au secondaire. Nous formulons notre question de recherche comme suit : *Quels sont les liens et ruptures dans les techniques de résolution relatives à la combinatoire présentées dans la formation mathématique universitaire des futurs enseignants au secondaire et dans l'enseignement au secondaire ?*

II. CADRE THÉORIQUE

Nous nous appuyons sur la Théorie anthropologique du didactique (TAD, Chevallard, 1999) afin d'étudier les pratiques mathématiques relatives à la combinatoire à l'université et au secondaire. Ce choix d'approche nous permet de considérer ces deux ordres d'enseignement comme deux institutions distinctes : en parallèle d'une transposition didactique du *savoir savant* au *savoir à enseigner* au sein de ces institutions (Chevallard, 1985), ces dernières imposent des contraintes qui façonnent les manières d'organiser et d'enseigner les contenus (Winsløw et al., 2014). Ces contenus s'en trouvent donc relatifs à l'institution qui les transmet, et le « même » savoir (ici, la combinatoire) peut en fait être abordé de façon très différente en fonction des institutions didactiques où il est utilisé (ici, les cours de mathématiques universitaires dans la formation des futurs enseignants et l'enseignement des mathématiques au secondaire). La TAD est utilisée dans plusieurs autres cas d'études de la formation mathématique des futurs enseignants. Par exemple, Planchon (2022) s'appuie sur cette approche théorique pour analyser les pratiques relatives à l'intégrale aux niveaux universitaire et préuniversitaire et développer un dispositif permettant aux futurs enseignants de prendre conscience des liens et ruptures entre celles-ci afin d'exploiter efficacement leurs apprentissages universitaires pour l'enseignement de l'intégrale. De même, Bourgade et Durringer (2024) répertorient les pratiques relatives à la proportionnalité au secondaire afin d'orienter efficacement la formation des enseignants à cet égard grâce aux outils proposés par la TAD. Nous rejoignons donc un courant de recherche existant à propos du phénomène de discontinuité entre les cours de mathématiques universitaires et l'enseignement au secondaire, et nous nous intéressons spécifiquement aux techniques de résolution

relatives à la combinatoire à partir des constats posés par Lammana et al. (2022) et Lammana et al. (2023).

Ainsi, dans cet article, nous cherchons à étudier en particulier une des quatre composantes des contenus de combinatoire, soit les techniques de résolution. De fait, la TAD propose de décomposer le savoir selon les tâches proposées (T), les techniques (τ) suggérées pour les résoudre, les justifications (appelées technologies, θ) qui supportent le bloc pratique $[T, \tau]$ nommé *praxis*, et les théories (Θ) qui assurent la validité des explications données (Winsløw et al., 2014). Au sens de la TAD, le quadruplet $[T, \tau, \theta, \Theta]$ forme une praxéologie. Dans le cadre de cet article, nous avons choisi de nous concentrer spécifiquement sur les techniques de résolution des tâches pour trois raisons : 1) cela nous permet d'amorcer un travail d'adaptation des concepts théoriques de Lamanna et al. (2022) au cadre théorique que nous mobilisons dans notre étude (ce qui nous permet en retour d'approfondir les connaissances scientifiques concernant les techniques de résolution en combinatoire ; nous discutons de cela dans la conclusion) ; 2) cela donne une vision globale du travail réalisé même si l'espace de présentation pour ce faire est limité dans le cadre de cet article ; 3) nos analyses préliminaires nous ont amenés à constater que la comparaison des groupements en termes de techniques permet de mettre en lumière des liens et des ruptures entre les institutions que nous étudions. Les analyses de données sont encore en cours ; nous poursuivons le travail afin d'approfondir les constats présentés dans cet article et de les bonifier en considérant les praxéologies complètes qui se rattachent aux techniques discutées ici. De fait, en plus d'une analyse des techniques de résolution, nous sommes bien sûr également intéressés à comprendre le lien entre ces dernières et les autres composantes du savoir, entre autres les tâches associées à chaque technique de résolution. Ces résultats additionnels font et feront l'objet d'autres publications.

III. MÉTHODOLOGIE

Nous souhaitons étudier les techniques relatives à la combinatoire suggérées à l'université et au secondaire. Pour ce faire, nous analysons les manuels de référence des cours de mathématiques universitaires traitant de la combinatoire dans la formation des futurs enseignants (MU) et des manuels scolaires et guides de l'enseignant approuvés par le Ministère de l'Éducation pour l'enseignement au secondaire (MS) : MU1) Rosen (2002) ; MU2) Ross (2014) ; MS1) Miloudi et al. (2008) ; MS2) Guay et al. (2008) ; MS3) Ledoux et al. (2008). Les références complètes de ces manuels sont disponibles [ici](#). Cette approche méthodologique est cohérente avec d'autres travaux adoptant une posture institutionnelle afin de questionner le savoir à enseigner au sein d'une ou plusieurs institutions (p.ex., González-Martín et al., 2013).

Nous procédons selon un processus d'analyse mixte (L'Écuyer, 1990), c'est-à-dire que le cadre théorique et les techniques de résolution décrites par Lamanna et al. (2022) nous servent de guides dans le processus d'analyse sans pour autant restreindre la création de nouvelles catégorisations. Nous ciblons les sections des manuels qui introduisent la combinatoire, même si cette dernière peut ensuite être utilisée dans d'autres sections ou chapitres. Cela nous permet d'étudier les praxéologies introduites formellement dans les MU et dans les MS afin de voir si et comment les futurs enseignants sont outillés pour l'enseignement de la combinatoire au secondaire. Nous nous intéressons au chapitre consacré à la combinatoire dans MU1, à l'exception des sections sur son utilisation en probabilités discrètes, et à toutes les sections du premier chapitre de MU2, dédié à la combinatoire. Dans les MS, la combinatoire est présentée dans le chapitre des probabilités ; nous nous concentrons sur les contenus liés au dénombrement dans chacune des tâches. La Figure 1 montre un exemple d'analyse des données. Le premier auteur a réalisé une phase initiale d'analyse des données, puis le deuxième auteur a réalisé cette même tâche de manière indépendante. Des points de tension mineurs entre les deux analyses ont été

corrigés. Les résultats présentés découlent d'analyses qui sont encore en cours ; les conclusions de cet article permettront d'aiguiller les prochaines phases d'analyse des données.

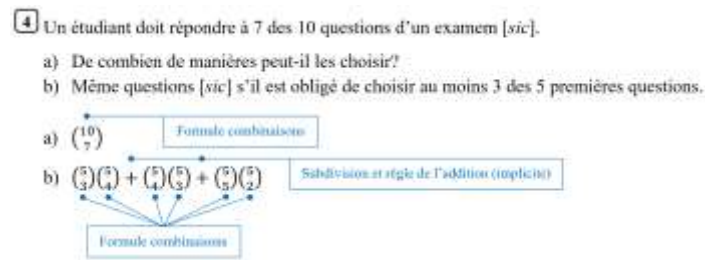


Figure 1 – Exemple d'analyse des techniques de résolution de tâches de MU2 (p. 26 et 549)

IV. ANALYSE DES RÉSULTATS

1. Les techniques de résolution présentées au niveau universitaire

Les deux MU analysés sont organisés similairement : les chapitres traitant de dénombrement sont découpés en sections introduisant chacune un type de tâche et une technique de résolution. Une section de tâches variées faisant appel à plusieurs techniques présentées précédemment est aussi incluse à la fin du chapitre de MU2. Dans chaque section des deux manuels (à l'exception de la dernière de MU2), une première tâche sert d'exploration des contenus traités dans la section, puis une technique de résolution est présentée. Le nombre de tâches suivant chaque présentation d'une technique varie considérablement d'une section à une autre. Au total, nous recensons 47 tâches solutionnées dans MU1 et 40 dans MU2. Le Tableau 1 (colonnes bleues) compile les occurrences des techniques dans chacun des MU. Ces derniers ne présentent pas tout à fait les mêmes contenus de combinatoire. Entre autres, MU1 discute du principe d'inclusion-exclusion¹, de tirages avec remise (avec ou sans ordre, c'est-à-dire autant pour des permutations que des combinaisons d'objets) et du principe des nids de pigeon², tandis que MU2 discute quant à lui des coefficients multinomiaux et consacre une section indépendante au calcul du nombre de solutions d'équations à valeurs entières³. Toutefois, ces contenus peuvent être considérés comme « avancés » dans l'introduction des principes de combinatoire. Alors, au vu de notre objectif de comparer les techniques de résolution à l'université et au secondaire, nous n'approfondissons pas notre analyse des tâches qui emploient ces techniques.

Dans 16 des 47 tâches (34,0 %) de MU1 et 21 tâches des 40 (52,5 %) de MU2, nous observons l'emploi de la règle du produit. Cette technique permet de résoudre une tâche en une étape ou elle est utilisée avec une ou plusieurs autres techniques de résolution. Par exemple, la subdivision en problèmes de plus petites dimensions est généralement jumelée à la règle du produit ; c'est le cas dans 3 des

¹ « Lorsqu'on peut accomplir deux tâches simultanément, on ne peut utiliser le principe de la somme pour compter le nombre de façons d'effectuer l'une des deux tâches. En additionnant le nombre de façons d'effectuer deux tâches, on obtient un surdénombrement, puisque les façons d'effectuer les deux tâches sont comptées deux fois. Pour compter correctement le nombre de fois qu'on peut faire l'une des deux tâches, on additionne le nombre de façons d'exécuter chacune des deux tâches et on soustrait le nombre de façons de faire les deux tâches. » (MU1, p. 224)

² « Si $k + 1$ objets ou plus sont rangés dans k boîtes, alors il y a au moins une boîte qui contient deux objets ou plus. » (MU1, p. 230) ; et sa forme généralisée : « Si N objets sont rangés dans k boîtes, alors il y a au moins une boîte qui contient au moins $\lceil N/k \rceil$ objets. » (MU1, p. 231)

³ « Il y a $\binom{n-1}{r-1}$ vecteurs distincts à composantes entières et positives satisfaisant à la relation $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$; $x_i > 0, i = 1, 2, \dots, r$. [...] Il y a $\binom{n+r-1}{r-1}$ vecteurs distincts à composantes entières et non négatives satisfaisant à la relation $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$. » (MU2, p. 15)

4 tâches de MU1 et dans 11 des 14 tâches de MU2 faisant appel à la technique de subdivision. Dans ces cas, la règle du produit permet de séquencer la démarche en étapes de résolution ; elle sert d'organisation et de structure à la démarche.

Tableau 1 – Occurrences des techniques de résolution dans les MU et MS

Techniques		MU1	MU2	MS1	MS2	MS3
Énumération/liste ordonnée		5	2	8	8	13
Diagramme en arbre		2	0	4	4	17
Règle de combinatoire	Somme	6	8	10	4	0
	Produit	16	21	16	14	12
	Quotient	0	4	0	0	1
Formule de dénombrement	Principe d'inclusion-exclusion	1	0	0	0	0
	Principe des nids de pigeon	9	0	0	0	0
	Permutations	3	8	0	0	2
	Arrangements	0	0	0	0	2
	Combinaisons	5	14	0	1	1
	Théorème du binôme	3	2	0	0	0
	Permutations avec remise	0 ⁴	0	0	0	2
	Combinaisons avec remise	3	0	0	0	0
	Permutations d'objets partiellement indiscernables	0	4	0	0	0
	Distribution d'objets dans des boîtes	0 ⁶	0	0	0	0
	Coefficients multinomiaux	0	4	0	0	0
	Solutions d'équations à valeurs entières	0	2	0	0	0
Référence à un problème équivalent		3	8	2	1	4
Subdivision en problèmes de plus petites dimensions		4	14	4	2	0
Essai-erreur		0	0	3	0	0
Grille	Bidimensionnelle	0	0	2	1	1
	Multidimensionnelle	0	0	1	0	0
Généralisation à partir d'un plus petit problème		0	0	2	2	1

De plus, les formules de dénombrement occupent une place importante dans les MU. Elles sont utilisées afin de solutionner 23 des 47 tâches (48,9 %) de MU1 et 31 des 40 tâches (77,5 %) de MU2. Les manuels présentent ces formules sous la forme de théorèmes, ce qui semble accentuer leur importance. Ces analyses permettent de donner un contexte aux observations de Lamanna et al. (2023) concernant la tendance des futurs enseignants à recourir aux formules de dénombrement pour résoudre des tâches de combinatoire : cette tendance s'exprime également dans les pratiques institutionnelles liées à la formation des enseignants, représentant un possible facteur d'influence pour les pratiques que mobilisent ensuite les étudiants/futurs enseignants.

Dans un autre ordre d'idée, la règle du quotient (la division du total des possibilités par le nombre de cas d'équivalence) n'est explicitement présentée dans aucun des deux MU, et ce, malgré qu'elle soit employée (implicitement) dans MU2. Pourtant, le dénombrement de « trop » de cas pour ensuite diviser par les cas d'équivalence afin d'obtenir le nombre final de possibilités est une méthode de

⁴ Une formule est donnée, mais aucune solution à une tâche dans le chapitre analysé ne l'emploie.

dénombrement qui peut s'avérer efficace (Lockwood et Reed, 2020). De même, bien que l'addition de cas distincts afin de déterminer le nombre total de possibilités soit utilisée à 8 reprises (20 % des tâches) dans MU2, la règle de la somme n'y est pas présentée explicitement ; elle est utilisée de manière implicite et sans justification. Quant à MU1, nous remarquons qu'il traite une même formule, $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$, comme technique de résolution pour deux types de tâches : pour les permutations d'objets indiscernables et pour la distribution d'objets dans des boîtes (voir Morcos et González-Martín, 2025b, pour plus de détails à ce sujet). Ainsi, il semble que des justifications données à l'emploi de certaines techniques dans les MU et ces dernières en elles-mêmes ne sont pas évidentes. Dans les cas où ces contenus sont enseignés au secondaire, cela pourrait empêcher les enseignants de développer un discours justificatif rigoureux et approprié.

MU1 présente aussi la technique du diagramme en arbre, mais n'y a recours que pour deux tâches. Il ne donne pas d'explication à propos des contextes d'utilisation de cette technique. Les tâches proposées semblent être des cas où l'application directe d'une formule n'est pas possible en raison des contraintes inhérentes au dénombrement souhaité (c'est-à-dire, la situation étudiée ne correspond pas parfaitement à l'un des types de tâches identifiés dans le manuel), mais cela n'est pas justifié explicitement. Qui plus est, l'absence de cette technique dans MU2 suggère que peu d'accent est mis sur cette technique au niveau universitaire. De même, les deux MU ont recours 7 fois à l'énumération et 10 fois à la référence à un problème équivalent, en particulier pour le dénombrement des façons d'obtenir « au moins » un certain résultat (il est alors possible de dénombrer les cas où cette contrainte n'est pas respectée, puis de les soustraire au total des possibilités), mais sans présentation explicite de ces techniques.

2. *Les techniques de résolution présentées au niveau secondaire : liens et ruptures*

Alors que les MU introduisent de manière systématique la technique de résolution proposée pour chaque type de tâches, les MS présentent plutôt les techniques de résolution dans une seule section (à caractère technique), puis emploient l'une ou l'autre des techniques sans justifications théoriques additionnelles dans les résolutions de tâches. Nous recensons 28 tâches solutionnées dans MS1, 23 dans MS2 et 39 dans MS3. Le Tableau 1 (colonnes vertes) compile les occurrences des techniques dans les MS. Comme dans les MU, la règle du produit occupe une place importante des techniques de résolution employées, un élément de continuité entre les pratiques à l'université et celles au secondaire : 16 des 28 tâches (57,1 %) de MS1, 14 des 23 tâches (60,9 %) de MS2 et 12 des 39 tâches (30,8 %) de MS3 y ont recours. Nous notons également que MS3 suggère de s'appuyer sur le diagramme en arbre (une technique très présente dans ce manuel) pour construire un raisonnement semblable à la règle du produit, par exemple : « Quelques élèves pourraient avoir de la difficulté à dégager une façon de calculer le nombre de codes possible. Au besoin, leur suggérer de construire un arbre de probabilités. » (p. 333). Nous développons ce constat dans Morcos et González-Martín (2025a).

Concernant les formules de dénombrement, un constat nuancé semble émerger. En effet, MS1 ne présente aucune formule de dénombrement, MS2 a recours une seule fois à une formule (afin de calculer des combinaisons, quoique le manuel ne classe pas les tâches selon cette terminologie), tandis que MS3 utilise cette technique de dénombrement dans 6 de ses 39 tâches (15,4 % ; une des tâches emploie deux formules — permutations et arrangements — dans la même résolution). Ainsi, cette technique est nettement moins employée dans les MS que dans les MU, ce qui représente une rupture qui pourrait nuire à la pertinence des cours de mathématiques universitaires pour la formation des futurs enseignants. De fait, cela suggère que les pratiques universitaires s'appuient sur un certain type

de technique (les formules de dénombrement) dans une plus grande proportion que ce qui pourrait être requis pour l'enseignement au secondaire.

L'absence de formules de dénombrement dans MS1 et MS2 a une autre conséquence notable sur les techniques de résolution employées : nous constatons que dans ces deux manuels, la règle du produit est parfois utilisée dans des contextes de combinaisons (4 tâches dans MS1 et 3 tâches dans MS2). Or les combinaisons sont par définition une séquence non ordonnée d'objets tandis que la règle du produit tient compte d'un ordre de sélection, ce qui représente d'ailleurs une difficulté pour plusieurs élèves (Lockwood et Purdy, 2020). Dans MS1 et MS2, les tâches de probabilité, dans lesquelles la réponse attendue est de la forme $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$, permettent de calculer un rapport qui peut ou non tenir compte de l'ordre, peu importe le contexte initial dans la tâche, en autant que le choix d'ordre ou non soit le même entre le numérateur et le dénominateur. Par exemple, MS1 inclut la tâche suivante : « [Une] formation est offerte sur une base volontaire : 12 femmes et 16 hommes s'y sont inscrits. Virginie choisit au hasard quatre personnes parmi les volontaires pour constituer le premier groupe. Quelle est la probabilité que ce groupe soit formé uniquement d'hommes ? » (p. 411). La résolution proposée est $\frac{16}{28} \cdot \frac{15}{27} \cdot \frac{14}{26} \cdot \frac{13}{25} = \frac{43\,680}{491\,400} = \frac{4}{45}$. Ce faisant, le manuel tient implicitement compte de l'ordre des individus des groupes (A-B-C-D et A-B-D-C, par exemple, sont considérés comme distincts). Nous estimons qu'il s'agit d'une rupture entre les pratiques à l'université et au secondaire, puisque cela indique qu'entre ces deux niveaux d'enseignement, d'une part la technique proposée pour résoudre un même type de tâche (les combinaisons) n'est pas semblable et d'autre part la règle du produit est utilisée dans des conditions différentes (à l'université, seulement quand l'ordre importe ; au secondaire, avec ou sans ordre selon d'autres manipulations dans la résolution). Il n'est toutefois pas évident via l'analyse des manuels de comprendre comment cette rupture peut être perçue par les futurs enseignants ni comment elle influence l'apprentissage des contenus de combinatoire qui y sont liés ; nous explorons davantage ces questionnements à l'aide de résultats d'entretiens avec des futurs enseignants dans Morcos et González-Martín (2025a).

Nous notons une autre rupture dans les pratiques relatives à des techniques de résolution présentées aux deux niveaux d'enseignement : la subdivision en problèmes de plus petites dimensions est habituellement jumelée à la règle du produit dans les MU alors qu'elle est plutôt associée à la règle de la somme dans 5 des 6 tâches qui y font appel dans MS1 ou MS2. On divise le problème en différents « cas distincts » plutôt qu'en étapes, ensuite additionnés pour obtenir le total de possibilités. Cela montre un décalage dans l'organisation des contenus relatifs à la technique de subdivision. Là encore, une analyse de ce cas spécifique pourrait permettre de comprendre l'impact de cela sur les pratiques enseignantes et sur les apprentissages possibles.

Finalement, nous remarquons que les MS introduisent quelques techniques de résolution qui ne sont pas traitées dans les MU. Nous avons déjà soulevé ce possible enjeu précédemment (Morcos et González-Martín, 2024), et les analyses et résultats du présent article permettent de systématiser ce constat. Entre autres, dans 5 tâches des MS (2 dans MS1, 2 dans MS2 et 1 dans MS3), les explications fournies pour la résolution proposée incluent l'idée de commencer avec une petite quantité d'objets, puis d'augmenter ce nombre jusqu'à étudier la situation complète⁵. Ce faisant, les élèves peuvent

⁵ Par exemple, MS3 « [suggère] aux élèves de refaire le problème avec un nombre restreint de personnes et de costumes, par exemple, trois, et de se servir d'un arbre de probabilités » (p. 353), puis ce manuel trace les diagrammes en arbre pour un choix d'un objet par une personne (1 possibilité), puis de deux objets par deux personnes (2 possibilités), puis trois objets par trois personnes (6 possibilités), et quatre objets par quatre personnes (24 possibilités), et conclut en proposant de « demander aux élèves d'évaluer à combien devrait s'élever le nombre de résultats si le nombre de personnes et de costumes était porté à 5, à 6, à 7, etc. » (p. 354).

reconnaître la régularité qui se développe et prendre conscience de la structure sous-jacente au calcul de dénombrement. Cette technique est la « généralisation à partir d'un plus petit problème », qu'étudie Lockwood (2015). Cette dernière s'intéresse aux différents moyens d'employer cette technique dont deux apparaissent dans nos données : 1) utiliser des plus petits problèmes pour faciliter l'énumération des cas possibles, et 2) énumérer de façon systématique de plus petits problèmes afin de détecter des régularités et généraliser une solution. Plus récemment, Lehmann (2022) reprend cette idée via l'heuristique du « modeling the general on the particular » (p. 1060). Il conclut que cette technique peut s'avérer efficace pour permettre aux élèves du secondaire d'explorer une tâche de combinatoire, puis de produire un algorithme pour résoudre la tâche. Notre analyse montre que cette technique fait partie des suggestions proposées par des manuels au secondaire, mais pas à l'université. De plus, nous recensons deux techniques dans MS1 absentes de tous les autres manuels. D'une part, une grille multidimensionnelle, c'est-à-dire un tableau à double-entrée dont chaque case est elle-même divisée en cas possibles, sert de technique de dénombrement pour une tâche qui comporte plus de deux étapes (voir l'Annexe 1). D'autre part, MS1 inclut quelques tâches qui admettent plusieurs solutions pour lesquelles la technique suggérée est de procéder par essai-erreur, par exemple : « [...] les élèves peuvent décider d'enlever des aliments ne contenant pas cette vitamine, ajouter des aliments qui en contiennent, ou encore remplacer les aliments sans vitamine D par d'autres qui en contiennent. La contrainte de conserver au moins 150 combinaisons différentes amène les élèves à découvrir qu'ils ne peuvent pas enlever plus d'un aliment dans la colonne "Légumes et fruits" ou plus d'un aliment dans la colonne "Viandes et substituts". » (MS1, p. 355) Individuellement, ces techniques ne sont pas nécessairement très fréquentes dans les MS, mais globalement, 10 des 90 tâches au total (11,1 %) ont recours à au moins une de ces techniques, qui ne sont pourtant pas présentes dans les MU. Cela montre de possibles lacunes dans la formation des futurs enseignants : ces derniers pourraient ne pas être outillés à l'enseignement de certaines techniques de résolution utilisées au secondaire.

V. CONCLUSION

Les contributions de cet article s'expriment sur quatre plans. De prime abord, nos analyses répertorient des techniques de résolution présentées aux niveaux universitaire et secondaire pour des tâches de combinatoire, des résultats pertinents pour la didactique de la combinatoire et qui bonifient la classification proposée par Lammana et al. (2022) en identifiant certaines techniques que ces auteurs n'avaient pas observées dans leur étude. Ce faisant, nous contribuons également à l'argumentaire selon lequel les tâches de combinatoire favorisent des réflexions et actions mathématiques riches en recensant de vastes possibilités de techniques de résolution.

Toutefois, nous notons une tendance du niveau universitaire à avoir principalement recours aux formules de dénombrement, ce qui limite ces potentialités à ce niveau d'enseignement. Les pratiques relatives à la combinatoire observées dans les MU semblent fortement axées vers l'application d'une règle ou d'une formule. La formation des futurs enseignants se base sur cette approche ; cela aide à comprendre les observations de Lammana et al. (2023) concernant les stratégies principalement employées par ces derniers à la suite de leur passage à l'université.

À l'inverse, dans les manuels au secondaire, nous notons la présence de techniques variées, dont certaines ne sont pas présentées dans les manuels universitaires (essai-erreur, grille bidimensionnelle ou multidimensionnelle et généralisation à partir d'un plus petit problème). Cela soulève des questionnements quant à la formation en combinatoire des enseignants : certains contenus du secondaire liés à la combinatoire pourraient ne pas être vus à l'université, présentant le risque que la formation mathématique universitaire ne permette pas d'être adéquatement outillé pour

l'enseignement de ces contenus au secondaire. Cela pourrait aussi contribuer au sentiment négatif des futurs enseignants à l'égard de leurs cours universitaires.

Finalement, nous identifions des ruptures entre les MS et les MU dans l'utilisation de la subdivision en problèmes de plus petites dimensions ainsi que dans les techniques employées pour le calcul de combinaisons. Cet article permet d'identifier ces points de ruptures et d'explorer leurs manifestations dans les manuels scolaires, mais nos analyses sont limitées quant à la compréhension de ces enjeux. Nous comptons poursuivre notre travail afin d'étudier ces situations, entre autres en menant des entretiens auprès des futurs enseignants.

REMERCIEMENTS

Ce projet est financé par le Conseil de recherches en sciences humaines (CRSH – #766-2024-1117) et par les Fonds de recherche du Québec (FRQ) – Secteur Société et Culture (# 343978).

RÉFÉRENCES

- Biza, I., González-Martín, A. S. et Pinto, A. (2022). 'Scaffolding' or 'filtering': A review of studies on the diverse role of calculus courses for students, professionals and teachers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 8(2), 389-418. <https://doi.org/10.1007/s40753-022-00180-1>
- Bourgade, J.-P. et Durringer, C. (2024). Klein's second discontinuity: the case of proportion theory. Dans A. S. González-Martín, G. Gueudet, I. Florensa et N. Lombard (dir.), *Proceedings of the Fifth conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM2024)* (p. 569-578). Escola Univeristària Salesiana de Sarrià; Univ. Autònoma de Barcelona et INDRUM.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266. <https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/>
- González-Martín, A. S., Giraldo, V. et Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: An institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education*, 15(3), 230-248, <http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2013.803778>
- Klein, F. (1908/2016). *Elementary mathematics from a higher standpoint. Volume I: Arithmetic, algebra, analysis*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-49442-4>
- Lamanna, L., Branchetti, L. et Bolondi, G. (2023). Combinatorial reasoning in problem solving strategies: A pilot study with pre-service teachers. Dans P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmer, K. Gosztonyi et E. Konya (dir.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (p. 964-971). Alfréd Rényi Institute of Mathematics et ERME.
- Lamanna, L., Gea, M. M. et Batanero, C. (2022). Do secondary school students' strategies in solving permutation and combination problems change with instruction? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(3), 602-616. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00228-z>
- L'Écuyer, R. (1990). *Méthodologie de l'analyse développementale de contenu : méthode GPS et concept de soi*. Presses de l'Université du Québec.

- Lehmann, T. H. (2022). Making sense of algorithms in discrete mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(5), 1057-1077. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10180-3>
- Lockwood, E. (2015). The strategy of solving smaller, similar problems in the context of combinatorial enumeration. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1, 339–362. <https://doi.org/10.1007/s40753-015-0016-8>
- Lockwood, E. et Purdy, B. (2020). An unexpected outcome: Students' focus on order in the multiplication principle. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 6, 213–244. <https://doi.org/10.1007/s40753-019-00107-3>
- Lockwood, E. et Reed, Z. (2020). Defining and demonstrating an equivalence way of thinking in enumerative combinatorics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 58, article 100780. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100780>.
- Lockwood, E., Wasserman, N. H. et Tillema, E. S. (2020). A case for combinatorics: A research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior*, 59, 1-15. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100783>
- Morcos, J. (2025). *La formation mathématique des enseignants au secondaire. Une analyse praxéologique des contenus liés à la combinatoire au secondaire et dans la formation mathématique des futurs enseignants : liens et ruptures* [Mémoire de maîtrise, Université de Montréal].
- Morcos, J. et González-Martín, A. S. (2025a). Implications for teacher training of inconsistencies between university and secondary textbooks regarding the multiplication principle. Dans C. Cornejo, P. Felmer, D. M. Gómez, P. Dartnell, P. Araya, A. Peri et V. Randolph (dir.), *Proceedings of the 48th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME48), 28 juillet au 2 août 2025, Santiago, Chili* (p. 123-130). IGPME. https://www.igpme.org/wp-content/uploads/2025/07/PME48_GeneralContributions_ISSN_3081-0833.pdf
- Morcos, J. et González-Martín, A. S. (2025b). Permutations with indistinguishable objects: inconsistencies in the university mathematics training of prospective secondary teachers. Dans M. Bosch, G. Bolondi et S. Carreira (dir.), *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14), 4-8 février 2025, Bozen-Bolzano, Italie*. ERME.
- Morcos, J. et González-Martín, A. S. (2024). Tertiary mathematics for prospective secondary teachers: the case of combinatorics. Dans A. S. González-Martín, G. Gueudet, I. Florensa et N. Lombard (dir.), *Proceedings of the Fifth conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM2024)* (p. 709-710). Escola Univeristària Salesiana de Sarrià; Univ. Autònoma de Barcelona et INDRUM.
- Planchon, G. (2022). *Relations entre connaissances universitaires et connaissances enseignées dans le secondaire : la seconde discontinuité de Klein dans le cas de l'intégrale* [Thèse de doctorat, Université de Montpellier]. <https://theses.fr/2022UMONS081>
- Sandefur, J., Lockwood, E., Hart, E. et Greefrath, G. (2022). Teaching and learning discrete mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 54(4), 753-775. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01399-7>
- Wasserman, N. H., Buchbinder, O. et Buchholtz, N. (2023). Making university mathematics matter for secondary teacher preparation. *ZDM Mathematics Education*, 55(4), 719-736. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01484-5>
- Winslow, C., Barquero, B., De Vleeschouwer, M. et Hardy, N. (2014). An institutional approach to university mathematics education: from dual vector spaces to questioning the world. *Research in Mathematics Education*, 16(2), 95-111. <https://doi.org/10.1080/14794802.2014.918345>

ANNEXE 1

Une loterie fait deux tirages quotidiens à l'aide de bouliers contenant 10 boules numérotées de 0 à 9.

Le premier tirage génère un numéro de trois chiffres à l'aide de trois bouliers différents. [...] Détermine la probabilité que [...] les chiffres formant le numéro gagnant soient tous différentes et par ordre croissant.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Nombre de combinaisons possibles
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$0 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$
1		0	1	2	3	4	5	6	7	8	$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$
2			0	1	2	3	4	5	6	7	$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$
3				0	1	2	3	4	5	6	$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$
4					0	1	2	3	4	5	$4 + 3 + 2 + 1 = 10$
5						0	1	2	3	4	$3 + 2 + 1 = 6$
6							0	1	2	3	$2 + 1 = 3$
7								0	1	2	1
											$36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 120$

Figure 2 – Tâche de dénombrement à trois étapes dans MS1 (p. 421) et résolution proposée en utilisant une grille multidimensionnelle (p. 423)

L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE CAUCHY : UN OUTIL POUR RENDRE VISIBLE L'ORDRE EN ANALYSE ?

| PLANCHON* GAËTAN ET DURAND-GUERRIER** VIVIANE

Résumé | Dans cette communication, nous présentons les premiers résultats d'une expérimentation menée en 3^e année de licence de mathématiques (parcours enseignement) visant à rendre visible le rôle de l'ordre en analyse autour de la résolution de l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$ dans différents ensembles de nombres et différentes classes de fonctions. Ceci s'inscrit dans la perspective de la seconde discontinuité de Klein visant à relier les mathématiques universitaires et les mathématiques du secondaire.

Mots-clés : didactique des mathématiques, épistémologie des mathématiques, équations fonctionnelles, ordre, double discontinuité de Klein

Abstract | In this paper we present the first results of an experiment carried out in the third year of a mathematics degree course (teaching path), which aims to show the role of order in analysis in solving the equation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ in different sets of numbers and different classes of functions. This is in line with Klein's second discontinuity, which aims to link university mathematics with secondary school mathematics

Keywords: Didactics of mathematics, epistemology of mathematics, functional equations, order, Klein double discontinuity

I. INTRODUCTION

Pendant les études à l'université en France le rôle de l'ordre est souvent masqué, notamment en analyse : c'est par exemple le cas pour la définition de l'intégrale où l'utilisation de la notion de limite remplace la notion de borne supérieure ou encore par l'utilisation de théorèmes puissants dans les preuves (propriété des limites de fonctions par exemple). Nous faisons l'hypothèse que le bloc logos des praxéologies (Chevallard, 1999a, 2017) liées à l'ordre est insuffisamment travaillé à l'université, ce qui ne permet pas une transition réussie entre le secondaire et le supérieur (Winslow, 2006). Comme le montrent les résultats de Branchetti et Durand-Guerrier (2023) les étudiants futurs enseignants de mathématiques éprouvent de grandes difficultés à penser les ensembles ordonnés comme des structures pouvant avoir certaines propriétés (être dense, discret, continu) ; ceci conduit les autrices à considérer qu'il est nécessaire de proposer des stratégies d'enseignement pertinentes afin de travailler ces concepts.

Dans cette perspective, nous faisons l'hypothèse que l'étude des équations fonctionnelles de Cauchy (Cauchy, 1821) peut permettre de mettre en évidence le rôle de l'ordre dans des preuves à l'interface entre analyse et algèbre (Durand-Guerrier & Planchon, 2024). Pour notre étude, nous avons retenu la première équation de Cauchy ($f(x + y) = f(x) + f(y)$). Le choix de cette équation est motivé d'une part par son importance en mathématiques à l'interface entre algèbre et géométrie (Cauchy, 1821, Hamel 1905, Banach, 1920, Sierpinski, 1920), et d'autre part par la possibilité de proposer des preuves faisant appel à la définition de la borne supérieure qui sont accessibles en début d'université. En outre, cette équation entretient des liens étroits avec la linéarité et la notion de proportionnalité (Bourgade et Durringer, 2024), qui sont abordées en France dès l'école primaire et au collège (Comin, 2002).

* IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier – France – gaetan.planchon@umontpellier.fr

** IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier – France – viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Dans cette communication, nous présentons une expérimentation menée en 3^e année de licence de mathématiques (parcours enseignement) à l'Université de Montpellier. L'objectif est de rendre visible différents aspects relatifs à l'ordre à travers une activité de résolution de l'équation fonctionnelle de Cauchy $f(x + y) = f(x) + f(y)$ dans différents ensembles de nombres et pour différentes classes de fonctions. La méthodologie générale de notre étude est celle de l'ingénierie didactique (Gonzales-Martin et al., 2014) : nous avons conduit dans un premier temps une analyse épistémologique qui, d'une part, nous a permis d'identifier les principales variables didactiques et de choisir leurs valeurs dans l'expérimentation et, d'autre part, de discuter en retour, à partir des productions des étudiants, de la pertinence de ces choix au regard des objectifs d'apprentissage. Cette étude s'inscrit dans le contexte plus large de l'étude de la double discontinuité de Klein (Kilpatrick, 2019) et de la mise en lumière des liens entre les mathématiques du supérieur et les mathématiques du secondaire.

Dans une première partie, nous présentons les principaux éléments de notre étude épistémologique comme contribution à notre analyse a priori. Dans une seconde partie, nous présentons notre organisation didactique, le contexte de notre expérimentation et la méthodologie d'analyse des données recueillies. Enfin, nous présentons les premiers résultats de nos analyses visant à évaluer la potentialité de cette activité à faire émerger différentes notions liées à l'ordre avant de la retravailler et l'expérimenter à plus grande échelle. Nous apportons des premiers éléments de réponses aux deux questions de recherche ci-dessous :

QR1 : Une situation construite autour de l'équation de Cauchy permet-elle a priori de contribuer à travailler le rôle de l'ordre en analyse dans la perspective de la seconde discontinuité de Klein ?

QR2 : Une telle situation permet-elle à des étudiants se préparant aux métiers d'enseignants du secondaire (3^e année de licence ou master) de mobiliser leurs connaissances universitaires liées à l'ordre ?

II. ÉTUDE ÉPISTÉMOLOGIQUE

1. *La solution de Cauchy (1821)*

Dans le premier volume de son cours de l'école royale polytechnique intitulé *Analyse algébrique*, Cauchy (1821) consacre le chapitre V à la *Détermination de fonctions continues d'une seule variable propre à vérifier certaines conditions*, en commençant par les quatre équations fonctionnelles conservant ou échangeant la somme et le produit. Nous nous intéressons ici à la première de ces quatre équations : $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Comme le souligne Dhombres (1992), Cauchy n'est pas le premier à s'intéresser à ces quatre équations ; ce qui est nouveau, c'est la méthode employée d'abord pour la première équation, et ensuite appliquée aux trois autres. De fait, Cauchy (p. 105-106) commence par établir qu'étant donné un entier naturel m et une constante positive, a (sous-entendu réelle) une solution g de (1) vérifie $g(ma) = mg(a)$; il étend ensuite ceci au cas où m est un rationnel positif. Il étend finalement cette relation à un nombre quelconque (sous-entendu réel positif) par passage à la limite en utilisant la continuité de la fonction g (il s'est placé d'emblée dans la classe des fonctions continues) et en utilisant (implicitement) la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, puis en utilisant la parité, il montre que $g(0) = 0$ et que la relation s'étend aux réels négatifs. En choisissant 1 comme valeur de a , il conclut que les fonctions cherchées sont les fonctions linéaires.

Résolution par extensions successives des domaines de résolutions

Une autre approche possible pour résoudre cette équation consiste à la résoudre d'abord dans l'ensemble des entiers naturels, puis d'étendre successivement à l'ensemble des entiers relatifs, puis des

rationnels, sans faire d'hypothèse au départ sur les propriétés des fonctions cherchées. Nous présentons cette méthode qui permet de mettre en lumière la nécessité de faire des hypothèses sur la fonction pour le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, et la possibilité d'envisager pour cela d'autres classes de fonctions que les fonctions continues.

On commence par établir que les fonctions cherchées sont linéaires sur l'ensemble des entiers naturels, puis en utilisant la parité, sur l'ensemble des entiers relatifs et enfin sur l'ensemble des rationnels : en utilisant que $g(m) = g\left(n \frac{m}{n}\right) = ng\left(\frac{m}{n}\right)$ et $g(m) = mg(1)$, on en déduit que $g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}g(1)$ pour m et n entiers relatifs, n non nul, autrement dit les fonctions cherchées sont des fonctions linéaires sur $\mathbb{Q}$.

Arrivé à ce point, il est manifeste que l'on ne peut pas étendre le procédé sans faire des hypothèses complémentaires sur les fonctions cherchées.

Il semble que Cauchy n'ait pas envisagé de résoudre ces équations fonctionnelles dans des classes autres que celles des fonctions continues. Ceci sera fait au début du 20^e siècle par plusieurs mathématiciens dont Hamel (1905), Banach (1920) ou Sierpinski (1920).

Résolutions de l'équation dans l'ensemble des réels dans des classes de fonctions autres que la classe des fonctions continues

Hamel (1920) a démontré, en utilisant l'axiome du choix, l'existence des bases de $\mathbb{R}$ vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ (bases de Hamel). Une telle base est une famille de réels $(x_a)_{a \in A}$, telle que tout réel x , peut s'écrire de façon unique comme une combinaison linéaire finie de certains éléments de $(x_a)_{a \in A}$. C'est-à-dire que pour tout réel x , il existe un unique entier naturel n et une unique famille $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de rationnels et une unique famille $x_{a_1}, \dots, x_{a_n}$ d'éléments de A tels $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{a_i}$.

Ainsi, si on se donne une telle base et une famille quelconque de réels $(y_a)_{a \in A}$, alors l'application qui à tout réel $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{a_i} \in \mathbb{R}$ associe $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{a_i}$ (en particulier, pour tout $a \in A$, $y_a = f(x_a)$) vérifie bien l'équation de Cauchy. Par ailleurs, s'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que, pour tout $a \in A$, $y_a = rx_a$, alors la fonction solution est continue et de la forme $x \mapsto rx$. S'il n'existe pas un tel réel r , alors il existe a et b dans A tels que $\frac{f(x_a)}{x_a} \neq \frac{f(x_b)}{x_b}$. Par suite, le graphe de f , c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ contient la somme directe $\mathbb{Q}(x_a, f(x_a)) \oplus \mathbb{Q}(x_b, f(x_b))$ et donc le graphe de f est dense dans $\mathbb{R}^2$. Ceci prouve qu'il existe des solutions de l'équation de Cauchy discontinues : Hamel a montré que de telles solutions sont totalement discontinues.

Banach (1920) et Sierpinski (1920) se sont aussi intéressés à l'équation de Cauchy et ont démontré que les seules solutions définies et mesurables sur $\mathbb{R}$ de l'équation de Cauchy sont les fonctions continues. Banach s'appuie sur le théorème de Lusin¹ pour démontrer ce résultat. En fait, il montre que si une fonction est mesurable et solution du problème de Cauchy, alors elle est nécessairement continue. Le cas continu est celui traité par Cauchy, donc Banach en conclut que les seules fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation de Cauchy sont celles de la forme $x \mapsto rx$. Sierpinski, quant à lui, n'utilise pas le théorème de Lusin². En considérant une fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, solution mesurable de l'équation de Cauchy, on introduit la fonction définie par $g(x) = f(x) - xf(1)$. Après avoir

¹ Toute fonction mesurable définie et presque partout finie dans $[0,1]$ est continue, quand on néglige un ensemble de mesure inférieure strictement à ε , ε étant aussi petit que l'on veut (Sierpinski, 1922).

² En fait, sa démonstration repose sur le lemme suivant : Si deux ensembles mesurables linéaires P et Q sont de mesure positive, il existe un point p de P et un point q de Q tel que la distance entre p et q est rationnelle.

montré que cette fonction vérifie l'équation de Cauchy, et pour tout r rationnel, $g(r) = 0$, il en déduit que $g(x) = 0$ pour tout réel x : en effet, s'il existe un réel a tel que $g(a) \neq 0$, alors il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $g(x_1) > 0$, $g(x_2) < 0$ et $x_1 - x_2$ est rationnel, ce qui est absurde. Ainsi, la fonction f est de la forme $x \mapsto ax$. On notera que, dans cette démonstration, Sierpinski n'a pas recours au résultat de Cauchy sur les solutions continues de l'équation fonctionnelle.

Résolution de l'équation de Cauchy dans la classe des fonctions monotones

Parmi les classes de fonctions pour lesquelles les solutions de l'équation sont nécessairement les fonctions linéaires se trouve la classe des fonctions monotones (Aczel & Dhombres, 1989). Cette classe, bien qu'incluse dans la classe des fonctions mesurables, nous intéresse tout particulièrement pour deux raisons. La première est sa présence dans le secondaire, notamment dans le cadre de l'étude des variations des fonctions. La seconde est la possibilité d'établir directement que la monotonie est une condition suffisante pour que les solutions soient nécessairement linéaires sans établir d'abord que les fonctions sont continues. Nous donnons trois preuves de ce type dans Durand-Guerrier et Planchon (2024), l'une s'appuyant sur la propriété des suites adjacentes, les deux autres sur la borne supérieure via la méthode des coupures.

En conclusion de notre étude épistémologique, nous considérons que l'équation fonctionnelle de Cauchy est un bon candidat pour mettre en lumière des liens entre les mathématiques universitaires et les mathématiques enseignées dans le secondaire en ce qui concerne les questions liées à l'ordre à travers différents aspects : propriétés de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$, continuité, monotonie, densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, complétude.

III. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

L'objectif de notre étude expérimentale est d'étudier les potentialités d'une activité portant sur la résolution de l'équation de Cauchy à mobiliser des connaissances universitaires liées à l'ordre sur $\mathbb{R}$ à travers la relation d'ordre et les notions de densité et de complétude. Pour répondre à nos questions de recherche, nous nous plaçons dans le cadre de l'ingénierie didactique décrite par Gonzales-Martin et al. (2014). Il s'agit ici de confronter l'analyse a priori et l'analyse a posteriori dans le cadre d'une réalisation didactique autour de la résolution de l'équation de Cauchy. L'étude épistémologique nous permet d'identifier deux variables didactiques : la classe de fonctions sur laquelle résoudre l'équation de Cauchy et le domaine de définition des fonctions. L'expérimentation a été conduite avec un groupe d'étudiant de 3^e année de licence de mathématique, dans un module spécifique du parcours enseignement des mathématiques de l'Université de Montpellier. Dans le cadre de ce parcours, les étudiants suivent un module de 82 heures : « Compléments de mathématiques pour l'enseignement. » Dans ce module, l'objectif est de mobiliser des outils mathématiques déjà travaillés dans les premières années de licence en intégrant une importante activité de résolution de problème. Ainsi, les séances sont organisées autour de différents aspects de la résolution de problèmes : techniques de recherche en groupe, résolution partielle, questions liées à la preuve et communication des résultats.

Une étudiante et cinq étudiants ont participé à notre expérimentation et ont constitué librement deux groupes de trois. L'enseignant distribue alors l'énoncé ci-dessous.

On considère l'équation (dite de Cauchy) (E) d'inconnue f :

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Le but est de résoudre l'équation (E).

Vous formulerez des hypothèses sur le domaine de définition des fonctions, ainsi que de la classe des fonctions sur lequel vous résolvez l'équation.

Consignes : pendant 30 minutes, vous travaillerez individuellement à ce problème en écrivant, si possible, les questions que vous vous posez. Puis, pendant 1h, vous travaillerez par groupe de 3.

A l'issue de cette phase, chaque groupe viendra exposer ses questions et réponses éventuelles pour une discussion collective.

Figure 1 – Fiche étudiant

Un temps de travail individuel (30 minutes) est prévu, avant un temps de réflexion en commun, par groupe de 3, suivi d'un temps d'exposé au tableau. Le temps de travail individuel de 30 minutes correspond à une phase de dévolution, où chacun, individuellement, peut tenter de mettre en œuvre des techniques de résolution. La seconde phase en groupe a pour fonction de permettre aux étudiants du groupe de confronter les différentes techniques qu'ils ont mises en œuvre et d'explicitier éventuellement des éléments de logos (justification des techniques). La phase d'exposé devant le reste du groupe a vocation à faire formaliser les techniques, et les justifications qui vont avec.

Il y a deux variables didactiques mathématiques principales dans cette situation : le domaine de définition des fonctions (précisé, ou non précisé) et la classe des fonctions recherchées (précisée, ou non précisée). Dans les deux cas, nous avons choisi de ne pas les préciser dans la première partie de l'activité. Comme nous l'avons vu, selon le choix du domaine de définition, deux preuves différentes peuvent émerger. Pour les classes de fonctions, nous souhaitons voir si la classe des fonctions monotones est mobilisée ou non dans cette première phase. Les données analysées sont les productions des groupes ainsi que les enregistrements des discussions dans les groupes.

En arrivant en 3^e année de licence, les étudiants ont déjà rencontré différentes techniques qui sont justifiées par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (par exemple pour démontrer les propriétés usuelles de la fonction exponentielle) et ont déjà été confronté au type de tâche : « Résoudre une équation fonctionnelle ». Ainsi, après avoir identifié le type de tâche, les étudiants pourront mettre en œuvre certaines techniques déjà vues à l'université, mais nous faisons l'hypothèse que les discussions sur la validité (ou non) des techniques proposées peut permettre de mettre en lumière le rôle de certaines notions liées à l'ordre.

IV. PREMIERS RÉSULTATS

1. Méthodologie d'analyse

Dans cette section, nous confrontons les productions et discussions des étudiants avec notre analyse épistémologique. Les données analysées sont les productions écrites des groupes ainsi que les enregistrements audios des échanges. Pour répondre à QR2, nous mobiliserons certains outils issus de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) : le rôle des ostensifs (Bosch et Chevallard, 1999) et la notion de praxéologie mathématique (Chevallard, 1999a). Dans les données analysées, nous relèverons certains ostensifs pouvant renvoyer à des praxéologies développées dans le cursus de licence, et nous décrirons les techniques mises en œuvre par les différents groupes, ainsi que les éléments technologiques mis en avant, ou au contraire, non identifiés par les étudiants.

Ce qui émerge de l'analyse des données

Les deux preuves mentionnées dans l'étude épistémologique apparaissent dans les productions des étudiants. La mention de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est présente dans toutes les productions, ce qui n'est pas le cas d'hypothèses faites sur la fonction. En particulier, la monotonie n'est jamais spontanément mentionnée.

Le premier groupe a identifié la classe des fonctions linéaires comme étant un ensemble de solution. La définition d'une fonction linéaire renvoie à la définition dans l'enseignement supérieur (dans le cadre de l'algèbre linéaire) car ils ont cherché à montrer que si une fonction f est solution de l'équation de Cauchy sur $\mathbb{R}$, alors elle vérifie :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, f(ax + y) = af(x) + f(y).$$

Pour démontrer ce résultat, ce groupe a montré, comme Cauchy, que pour tout entier naturel n et pour tout réel x , on a $f(nx) = nf(x)$; puis qu'une fonction solution sur $\mathbb{R}$ est nécessairement paire, ce qui permet le passage à $\mathbb{Z}$. Le passage à $\mathbb{Q}$ n'est pas abouti et certains éléments des discussions montre le peu de disponibilité de techniques de travail dans $\mathbb{Q}$ pour certains étudiants

E1.1 : "Je voulais passer par les rationnels (...) je n'ai pas l'habitude de travailler avec les rationnels".

La question de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est identifiée. Cependant, aucune hypothèse sur la fonction f n'est explicitée (continuité, monotonie, mesurabilité) dans les productions des étudiants du groupe et aucune n'apparaît pas dans les discussions collectives ; on ne trouve dans ces productions que l'expression "par densité...", comme dans l'exemple ci-dessous :

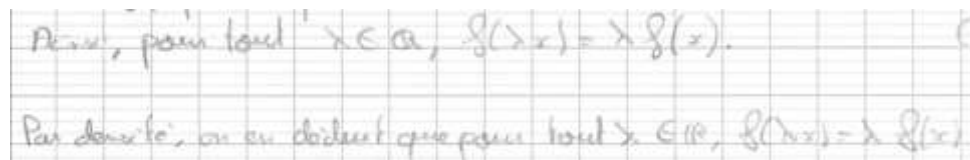


Figure 2 – Extrait de la production de E1.1

L'ostensif « par densité » paraît jouer le rôle d'une boîte noire sans activer d'éléments théoriques sur la densité. Ainsi, le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ s'appuie uniquement sur la densité pour conclure à la linéarité des solutions dans $\mathbb{R}$, ce qui ne suffit pas, comme le montre l'existence de solutions discontinues (mentionnées dans notre étude épistémologique.). Nous faisons l'hypothèse qu'à l'université, les conditions de validité de preuves qui mobilisent la densité ne sont habituellement pas explicitées, si bien que celles-ci restent dans le topos de l'enseignant. Dans les données analysées, l'absence de considérations théoriques ne permet pas aux étudiants d'identifier la nécessité d'hypothèses supplémentaires sur la fonction : l'insuffisante mobilisation du logos des étudiants de ce groupe empêche la mise en œuvre d'une technique correcte pour la résolution de la tâche.

Dans le deuxième groupe, un des étudiants (E2.2) propose la preuve par extension successive en établissant que les solutions sont linéaires dans $\mathbb{N}$, puis dans $\mathbb{Q}$. Pour le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, il se place explicitement dans le cadre des fonctions continues et caractérise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ par l'existence, pour tout réel, d'une suite de rationnels qui converge vers ce réel. Cette production, par contraste avec l'étudiant E1.1, illustre que l'identification d'une hypothèse supplémentaire pour la résolution de l'équation de Cauchy est articulée avec la mobilisation de la notion théorique de densité. Dans ce même groupe, l'étudiant E2.1 évoque explicitement la continuité comme condition nécessaire pour le passage à la limite.

Dans la première partie de l'activité, la classe des fonctions monotones n'apparaît jamais comme une classe de fonctions à considérer, contrairement à la continuité qui, comme nous venons de le voir, est mentionnée par certains étudiants en lien avec la densité. Ceci pourrait paraître surprenant car les fonctions monotones jouent un rôle fondamental dans l'enseignement secondaire (étude du sens de variation des fonctions) et dans l'enseignement supérieur (convergence de suites, existence de limites). En revanche, dès que l'enseignant propose la résolution dans la classe des fonctions monotones, les propriétés de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ émergent du travail des étudiants. L'étudiante E1.1 démontre (voir Figure 3.) que si une fonction f est solution de l'équation et croissante, alors f est linéaire (c'est à dire vérifie que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$). Pour cela, elle introduit pour un λ donné, deux suites adjacentes de rationnels qui convergent vers λ , et mobilise les différentes propriétés de corps ordonné de $\mathbb{R}$, autrement dit la compatibilité de l'ordre avec les opérations arithmétiques comme elle est travaillée dans le secondaire. Elle exploite également la monotonie de la fonction, en utilisant la conservation de l'ordre dans le cas de la composition avec des fonctions croissantes. La mobilisation de ces notions centrales dans l'enseignement secondaire s'inscrit dans la perspective de seconde discontinuité de Klein visée par cette activité.

Soit 2 suites adjacentes (q'_m) et $(q_m) \rightarrow \lambda$
 $\in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$
 Supposons f croissante
 * $q'_m \leq \lambda \leq q_m$
 Si $f(n) > 0$ $q'_m f(n) \leq \lambda f(n) \leq q_m f(n)$
 Si $f(n) \leq 0$ $q_m f(n) \geq \lambda f(n) \geq q'_m f(n)$
 * Si $x > 0$
 $q'_m \leq \lambda \leq q_m$
 $q'_m x \leq \lambda x \leq q_m x$
 $f(q'_m x) \leq f(\lambda x) \leq f(q_m x)$
 $q'_m f(x) \leq f(\lambda x) \leq q_m f(x)$
 * Si $x < 0$
 $\rightarrow q'_m f(x) \geq f(\lambda x) \geq q_m f(x)$
 par unicité des limites $\lambda f(x) = f(\lambda x)$

Figure 3 – Extrait de la production de E1.1

Du point de vue de la *seconde discontinuité de Klein*, on note également qu'au moins un étudiant fait le lien entre la situation proposée, la notion de proportionnalité enseignée dans le secondaire (et même en fin de primaire) et la représentation graphique des fonctions linéaires, comme le montre l'extrait ci-dessous (E2.2), Figure 4. On trouve, dans cette production, différents ostensifs : la définition d'une fonction linéaire comme étant de la forme ax , la « droite passant par l'origine », et la « situation de proportionnalité ». Cela étant, un objectif de l'activité proposée : établir des liens avec des contenus du secondaires sont ainsi établis.

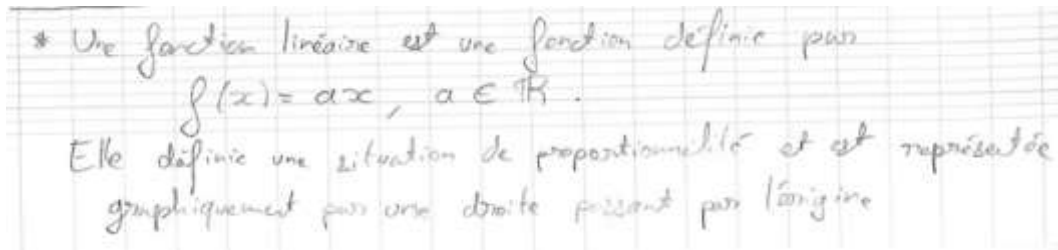


Figure 4 – Extrait de la production de E2.2

V. CONCLUSION GÉNÉRALE

L'analyse épistémologique que nous avons présentée dans la première partie nous a permis d'identifier les potentialités de l'équation fonctionnelle de Cauchy pour travailler le rôle de l'ordre en analyse à travers différentes dimensions : la relation d'ordre, la compatibilité avec les opérations arithmétiques, la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ tous les deux munis de l'ordre standard, les propriétés de monotonie, continuité, mesurabilité des fonctions. Les premiers résultats de l'analyse des données confirment ces potentialités visibles dans les productions des étudiants (appel explicite à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, travail sur la relation d'ordre et la compatibilité avec les opérations arithmétiques). Néanmoins, ces données donnent à voir une maîtrise peu assurée des techniques de calculs dans $\mathbb{Q}$, une évocation de la densité sans discussion des conditions d'application ainsi que le fait que les fonctions monotones ne sont pas identifiées comme constituant une classe pertinente dans la résolution de cette équation fonctionnelle. La classe des fonctions continues reste encore mobilisée de manière implicite, comme si la continuité allait de soi, ce qui suggère qu'un travail spécifique sur l'étude de fonctions non continues serait nécessaire à l'université.

Cette expérimentation ouvre des perspectives dans l'étude de la seconde discontinuité de Klein en favorisant comme on l'a vu, des liens explicites entre des connaissances du secondaire et du supérieur. Le développement de praxéologies de Klein (Planchon, 2022, Planchon & Hausberger, sous presse), dans le cadre d'une Activité d'Étude et de Recherche (Chevallard, 1999b) en prenant comme objet d'étude cette équation fonctionnelle pourrait permettre aux étudiants de relier la notion de proportionnalité enseignée au collège avec les fonctions linéaires et les applications linéaires de l'enseignement supérieur en mobilisant les propriétés liées à l'ordre dans le corps ordonné des réels. L'identification des hypothèses formulées dans les situations de modélisation extra-mathématiques que l'on rencontre dans l'enseignement secondaire et au-delà pourraient dans certains cas être reliée aux solutions de l'équation fonctionnelle de Cauchy dans une classe de fonctions donnée (dans certaines situations, l'hypothèse de monotonie peut paraître plus naturelle que l'hypothèse de continuité).

RÉFÉRENCES

- Aczel, J. et Dhombres, J. (1989). *Functional equation in several variables*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139086578>
- Banach S. (1920) Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$. *Fundamenta Mathematicae*, 1(1), 123-124. <http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm1/fm1115.pdf>
- Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77–124. <https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/>

- Bourgade, J.-P. et Durringer, C. (2024). Klein's second discontinuity: the case of proportion theory. Dans A. S. González-Martin, G. Gueudet, I. Florensa et N. Lombard (dir.), *Proceedings of the Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (p. 569-577). Escola Univeristària Salesiana de Sarrià; Univ. Autònoma de Barcelona et INDRUM2024. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-04912386>
- Branchetti, L. et Durand-Guerrier, V. (2023). Secondary prospective teachers grappling with ordered dense or discrete denumerable number sets: a pilot study. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 43(1), 47–86.
- Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique. 1^{re} partie : analyse algébrique*. Debure Frères.
- Chevallard, Y. (1999a). Analyse des pratiques enseignants et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (dir.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'Université d'été, 4-11 juillet 1998, La Rochelle - Charentes-Maritimes, Clermont-Ferrant*. IREM de Paris.
- Chevallard, Y. (1999b). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Chevallard, Y. (2017). La TAD et son devenir : rappels, reprises, avancées. Dans G. Cirade, M. Artaud, M. Bosch, J.-P. Bourgade, Y. Chevallard, C. Ladage et T. A. Sierra (dir.), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (p. 27–65). <https://citad4.sciencesconf.org>
- Comin, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2–3), 135–182. <https://revue-rdm.com/2002/l-enseignement-de-la/>
- Dhombres, J. (1992). Le rôle des équations fonctionnelles dans l'analyse algébrique de Cauchy. *Revue d'histoire des Sciences*, 45(1), 25-50.
- Durand-Guerrier, V. et Planchon, G. (2024). The study of functional equations to highlight the role of order in proof and proving at the interface between algebra and analysis. Dans A. S. González-Martin, G. Gueudet, I. Florensa et N. Lombard (dir.), *Proceedings of the Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (p. 95-104). Escola Univeristària Salesiana de Sarrià; Univ. Autònoma de Barcelona et INDRUM2024. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-04912386>
- González-Martín, A. S., Bloch, I., Durand-Guerrier, V. et Maschietto, M. (2014). Didactic situations and didactical engineering in university mathematics: cases from the study of calculus and proof. *Research in Mathematics Education*, 16(2), 117-134.
- Hamel, G. (1905). Eine basis aller zahlen und unstetigen lösungen der funktional gleichung. *Mathematische Annalen*, 60(3), 459-462.
- Kilpatrick, J. (2019). A double discontinuity and a triple approach: Felix Klein's perspective on mathematics teacher education. Dans H.-G. Weigand, W. McCallum, M. Menghini, M. Neubrand et G. Schubring (dir.), *The legacy of Felix Klein* (p. 215–226). Springer International.
- Planchon, G. (2022). *Relations entre connaissances universitaires et connaissances enseignées dans le secondaire : la seconde discontinuité de Klein dans le cas de l'intégrale* [Thèse de doctorat, Université de Montpellier].
- Planchon, G. et Hausberger, T (Sous presse). Developing Kleinian praxeologies: The case of the integral. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

Sierpinski, W. (1920). Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$. *Fundamenta Mathematicae*, 1(1), 116-122. <http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm1/fm1114.pdf>

Sierpinski, W. (1922). Démonstration de quelques théorèmes fondamentaux sur les fonctions mesurables. *Fundamenta Mathematicae*, 3(1), 314-321. <https://bibliotekanauki.pl/articles/1385869.pdf>

Winsløw, C (2006). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. Dans A. Rouchier et I. Bloch (dir.), *Actes de la XIII^e école d'été de didactique des mathématiques* (p 1-12). La pensée Sauvage.

ENSEIGNER LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES EN PREMIÈRE ANNÉE D'UNIVERSITÉ : QUELS LIENS ENTRE LES PRATIQUES ENSEIGNANTES ET LES APPRENTISSAGES DES ÉTUDIANTS ?

| BRIDOUX* STÉPHANIE ET GRENIER-BOLEY** NICOLAS

Résumé | Nous étudions ici les liens entre les pratiques d'un enseignant universitaire et la manière dont ses étudiants les perçoivent à l'issue d'un cours sur les équations différentielles ordinaires. Le relief nous permet d'étudier, dans le discours de l'enseignant, les proximités avec les connaissances (anciennes et nouvelles) des étudiants. Dans le cas présent, un questionnaire adressé aux étudiants à l'issue du cours montre des malentendus entre les pratiques de cet enseignant et les apprentissages visés chez ses étudiants.

Mots-clés : équations différentielles ordinaires, pratiques enseignantes, vécu des étudiants, proximités discursives, relief sur les notions à enseigner

Abstract | We study the relationship between a university teacher's practices and his/her students' perceptions of those practices at the end of a course on ordinary differential equations. The relief allows us to bring out the proximities between the teacher's discourse and the students' (prior and new) knowledge. In the present case, a questionnaire proposed to students at the end of the course reveals misunderstandings between the teacher's practices and the students' intended learning.

Keywords: ordinary differential equations, teachers' practices, students' perceptions, discursive proximities, relief on the taught notions

I. CONTEXTE DU TRAVAIL

Dans cette communication, nous nous intéressons aux liens entre les pratiques des enseignants universitaires et la manière dont ces pratiques sont reçues par les étudiants dans le contexte des cours magistraux. Cette recherche en cours s'inscrit dans la continuité des travaux menés par Bridoux et al. (2023) qui ont étudié, sur base des pratiques déclarées par des enseignants-chercheurs, leurs représentations du métier, ce qu'ils projettent sur les étudiants ou encore leur regard sur la discipline qu'ils enseignent. Trois marqueurs caractérisant les pratiques des enseignants-chercheurs ont ainsi été mis en évidence : la culture disciplinaire (par exemple des conceptions sur leur discipline et les objets à enseigner), la prise en compte du public étudiant (par exemple la place des prérequis, les difficultés repérées chez les étudiants) et l'impact du métier de chercheur sur le métier d'enseignant (donner pendant les cours des exemples issus du domaine de recherche, par exemple). En nous appuyant sur ces travaux, nous faisons l'hypothèse que ces marqueurs amèneront les enseignants à faire des choix qui auront des conséquences sur l'organisation de leurs enseignements et sur les apprentissages de leurs étudiants.

Dans ce contexte, Bridoux et al. (2024) ont interrogé cinq enseignants-chercheurs avant un cours magistral proposé en première année d'université dans des filières scientifiques pour en comprendre les objectifs, les difficultés pressenties chez les étudiants. Les chercheurs ont ensuite assisté au cours et ont proposé à la fin de celui-ci un questionnaire aux étudiants dans le but d'étudier dans quelle

* Université de Mons – Belgique – stephanie.bridoux@umons.ac.be

** Univ Rouen Normandie, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, F-76000 Rouen – France – nicolas.grenier-boleyn@univ-rouen.fr

mesure leur ressenti est en adéquation d'une part avec les propos de leur enseignant durant l'entretien mené avant le cours et d'autre part avec les pratiques développées par celui-ci dans le cours. Nous présentons ici le travail réalisé avec un enseignant-chercheur en mathématiques dont le cours visait à introduire les équations différentielles ordinaires, en complétant le travail précédent par une analyse du discours de l'enseignant pendant le cours. Ce choix de contenu est simplement motivé par le fait que les enseignants ont été choisis sur base volontaire et cet enseignant allait démarrer un nouveau chapitre traitant de ce type d'équations.

Dans un premier temps, nous présentons nos outils d'analyse du discours des enseignants et la problématique qui en découle. Nous décrivons ensuite notre méthodologie, puis l'étude de terrain que nous avons menée et ses principaux résultats.

II. OUTILS D'ANALYSE DU DISCOURS DES ENSEIGNANTS ET PROBLÉMATIQUE

Notre inscription dans la Théorie de l'Activité, adaptée à la didactique des mathématiques (Vandebrouck, 2008), nous amène à étudier les apprentissages des étudiants par le prisme de leurs activités mathématiques. Celles-ci sont influencées par les choix des enseignants en termes de contenus et de déroulements en classe. Les activités des étudiants étant difficilement observables durant un cours magistral, nous nous centrons sur le discours de l'enseignant pour étudier comment l'enseignant va agir sur ces activités.

Pour étudier le discours des enseignants, nous nous demandons comment ils s'appuient ou prolongent des activités antérieures, comme par exemple le fait de remobiliser chez les étudiants des connaissances anciennes pour en introduire de nouvelles, et comment ils préparent les activités ultérieures, par exemple pour contextualiser des connaissances présentées à un niveau général. Cela nous amène à étudier dans le discours des enseignants les occasions de se rapprocher de ce que les étudiants savent, font, ont fait, [...]. Ces rapprochements sont appelés des « proximités discursives » (Robert et Vandebrouck, 2014). Nous distinguons trois types de proximités (Bridoux et al., 2016) : les proximités ascendantes se situent entre ce que l'enseignant fait et l'introduction d'un nouvel objet (passage du contextualisé au décontextualisé), les proximités descendantes se situent entre ce qui a été exposé et des exemples ou des exercices (passage du décontextualisé au contextualisé). Enfin, les proximités horizontales n'amènent pas de changement entre le contextualisé et le décontextualisé. Elles consistent en des reformulations, des explications sur des liens entre les notions, des commentaires sur la structure du cours, ... L'outil des proximités a par exemple été mobilisé pour étudier le discours d'un enseignant qui introduit la définition formelle de limite d'une fonction (Bridoux et Grenier-Boley, 2024). Nous avons ainsi repéré des tentatives de proximités horizontales dans son discours sous la forme de reformulations dans la construction de la définition. Toutefois notre étude de relief nous amène à penser que ces proximités ont peu d'impact sur la prise de sens des étudiants, car elles portent majoritairement sur des connaissances peu disponibles au niveau d'enseignement visé. Des exemples de proximités seront donnés dans la suite du texte dans le contexte précis des équations différentielles ordinaires.

De manière à anticiper les occasions de proximités dans le discours d'un enseignant, nous menons une étude de relief qui résulte d'un croisement entre des analyses mathématiques et épistémologiques (pour étudier les spécificités des notions), d'analyses cognitives (pour répertorier les difficultés repérées chez les étudiants) et d'analyses curriculaires (les programmes scolaires, quand il y en a). Le relief sert alors de référence au chercheur et l'aide à baliser les choix de scénarios possibles, à décrire la conceptualisation attendue et à étudier ensuite les proximités tentées dans le discours des enseignants.

Notre intérêt pour étudier les liens entre les pratiques enseignantes et les apprentissages des étudiants qui en résultent nous amène, au regard des outils présentés, à formuler les questions de recherche suivantes : quels sont les liens entre les choix d'organisation des enseignants et les proximités tentées dans leur discours ? Et quel en est l'impact sur la compréhension des étudiants ? Bridoux et al. (2020) abordent une problématique similaire en analysant les pratiques déclarées de deux enseignants universitaires. Des questionnaires sont aussi proposés à leurs étudiants à l'issue d'un cours pour étudier comment ils reçoivent ces pratiques. Nous utilisons donc une méthodologie analogue pour inférer des éléments de réponse à nos questions. Celle-ci est renforcée ici par l'étude des pratiques effectives de l'enseignant. Ainsi, nous avons tout d'abord mené un entretien avec l'enseignant de mathématique avant son cours sur les équations différentielles ordinaires. L'entretien permet à l'enseignant d'expliquer le sujet du cours, ses objectifs et les éventuelles difficultés pressenties chez les étudiants. Cet entretien nous permet également de dresser un « profil » de l'enseignant en lien avec les trois marqueurs décrits dans la section précédente (la culture disciplinaire, la manière de s'adapter aux étudiants, l'impact du métier de chercheur sur le métier d'enseignant). Nous avons ensuite observé les pratiques in situ de cet enseignant, que nous analysons au regard de notre étude de relief. À la fin du cours, un questionnaire portant sur la séance a été proposé aux étudiants. Ils ont notamment été interrogés sur leur compréhension du cours, leurs difficultés, la présence d'exemples.

Nous choisissons ici de nous centrer sur l'introduction de la définition d'une équation différentielle ordinaire (notée EDO dans la suite du texte). Ce choix est motivé par le fait que l'enseignant au cœur de ce travail enseigne en Belgique. Dans ce contexte institutionnel, les EDO ne sont pas étudiées au lycée, comme c'est le cas actuellement en France. Il s'agit donc d'un sujet complètement nouveau à introduire aux étudiants au deuxième semestre de cours. Ceux-ci ont toutefois eu un enseignement de physique au premier semestre qui aborde principalement la cinématique et l'étude des mouvements. L'enseignant de mathématiques pourrait donc tenter de s'appuyer sur des concepts de physique pour introduire les EDO.

III. RELIEF SUR LES NOTIONS À ENSEIGNER

Historiquement, les équations différentielles ont émergé au 17^e siècle pour modéliser des phénomènes physiques continus en fonction du temps et des situations en géométrie (Saglam, 2004). Actuellement, les équations différentielles ont des applications dans de nombreuses disciplines telles que la physique (par exemple la radioactivité) ou la biologie (pour étudier la dynamique des populations). Les équations qui nous intéressent ici sont les EDO. Une EDO peut être définie de la manière suivante : une EDO d'ordre n est une relation entre la variable réelle t , une fonction inconnue $t \rightarrow x(t)$ et ses dérivées $x', x'', \dots, x^{(n)}$ au point t définie par $F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$ (Demailly, 2006).

Les EDO ont fait l'objet de nombreux résultats, par exemple des méthodes qui permettent de trouver explicitement les solutions d'une EDO linéaire à coefficients constants. D'autres résultats concernent l'existence de solutions ou l'unicité, sans les connaître explicitement. Ainsi, les EDO sont à la fois un objet dont le mathématicien peut étudier les propriétés et un outil de modélisation auquel peut aussi s'associer l'usage des technologies (Saglam, 2004). Dans ce contexte, Moreno Gordello (2006) explique que la conceptualisation des EDO va nécessiter de la part des étudiants une certaine disponibilité et une flexibilité entre différents registres de représentation sémiotique (langue naturelle, algébrique, graphique notamment) au sens de Duval (1993) et différents cadres (géométrie, physique, analyse, algèbre) au sens de Douady (1986). Pourtant, Artigue et Rogalski (1990) soulignent que l'enseignement des EDO peut vite devenir très algorithmisé et opératoire, donc limité au seul cadre algébrique. Les travaux de Habre (2000) montrent eux aussi que pour un nombre important

d'étudiants, résoudre une équation différentielle se limite souvent à une activité purement algébrique et procédurale, sans lien avec le cadre géométrique.

Comme nous l'avons expliqué, les équations différentielles ne sont pas enseignées au lycée en Belgique. Les élèves de terminale (élèves de 17-18 ans) étudient les fonctions exponentielles mais le fait que $(e^x)' = e^x$ n'est jamais interprété en « la fonction exponentielle de base e est solution de l'équation différentielle $u' = u$ ». L'introduction des EDO en première année d'université est donc la première rencontre des étudiants avec des équations où l'inconnue est une fonction, et plus un nombre (réel ou complexe) comme au lycée. Or, de nombreux travaux en didactique des mathématiques ont montré les difficultés des élèves avec l'objet « fonction » (Vandebrouck, 2011) et les travaux de Rasmussen (2001) montrent que cela engendre des difficultés dans la compréhension des équations différentielles, notamment dans le cadre géométrique. Le formalisme contenu dans la définition d'une EDO est également complexe à ce niveau d'enseignement. Et même si la majorité des étudiants ont rencontré dans leur parcours antérieur (lycée et université) la deuxième loi de Newton qui s'écrit souvent sous la forme $\vec{F} = m\vec{a}$, le fait que cette loi puisse s'écrire sous la forme d'une équation différentielle est passé sous silence. Ainsi, même si les liens avec la physique existent, ils seront sans doute difficiles à établir pour un nombre important d'étudiants. Kwon (2020) explique d'ailleurs à ce sujet que les difficultés des étudiants sont à la fois liées aux spécificités mathématiques des équations différentielles qu'à leurs liens avec les autres disciplines.

Du côté des pratiques enseignantes, le cours magistral reste prédominant pour enseigner les équations différentielles (Kwon, *ibid.*). Toutefois, il existe peu de travaux qui se penchent spécifiquement sur l'étude du discours des enseignants dans cet espace d'enseignement. D'autres stratégies d'enseignement visant à impliquer davantage les étudiants ont été développées telles que les démarches d'investigation (Stefan et Rasmussen, 2002). Apkarian et al. (2023) s'appuient également sur ces démarches pour travailler avec des futurs enseignants. Les expériences menées montrent qu'ils donnent davantage de sens à des objets nécessaires à la conceptualisation des équations différentielles comme $\frac{dy}{dt}$. Ce type de dispositif fait aussi évoluer positivement le rapport de ces futurs enseignants aux mathématiques universitaires en leur permettant de faire davantage de liens avec les mathématiques à enseigner au lycée.

Ainsi, ces quelques éléments de relief montrent la possibilité, pour l'enseignant, de s'appuyer sur des exemples issus de différents domaines au moment d'introduire les EDO, avant la définition notamment. Il pourrait alors expliquer aux étudiants comment la forme des équations différentielles particulières liées aux phénomènes étudiés se généralise et ainsi introduire le formalisme de la définition. Cette démarche offre des occasions de proximités ascendantes, par exemple en évoquant que l'ordre d'une EDO peut être quelconque et pas limité à l'ordre 1 ou 2 ou en expliquant à quoi la fonction F présente dans la définition générale correspond dans les cas particuliers traités. Des exemples pourraient également être donnés après la définition pour la décontextualiser et adapter le formalisme sur des cas particuliers. Ce choix serait alors l'occasion de trouver des proximités descendantes dans le discours de l'enseignant pour montrer en quoi il s'agit d'un cas particulier qui s'inscrit dans la définition donnée. Des commentaires explicatifs sur la notion de solution, notamment pour insister sur le fait que l'objet « solution » est une fonction, pourraient donner lieu à des proximités horizontales. Ce type de proximités pourrait également se retrouver si l'enseignant prend des exemples dans un autre domaine que les mathématiques, ce qui l'amènerait à expliciter comment passer d'un cadre à un autre, au niveau des notations utilisées, par exemple.

IV. ÉTUDE DE TERRAIN

Dans cette partie, nous analysons le discours de l'enseignant en étudiant comment il introduit la définition d'une EDO. Nous avons réalisé un enregistrement audio de la séance et nous avons photographié le tableau de l'enseignant. Nous avons ensuite retranscrit son discours pour y chercher des occasions de proximités.

Nous avons également eu accès aux notes d'un étudiant qui a un bon niveau en mathématiques, ce qui nous permet de comparer le discours oral de l'enseignant avec les traces écrites au tableau (l'étudiant nous a confié qu'il avait strictement noté ce qui était écrit par l'enseignant). Cette analyse est complétée par des extraits de l'entretien pré-cours avec l'enseignant pour confronter ses pratiques déclarées avec les pratiques effectives. Nous revenons ensuite sur quelques aspects frappants issus des questionnaires proposés aux étudiants à l'issue du cours.

1. *Observations in situ*

L'enseignant présente trois exemples issus de la physique avant d'introduire la définition formelle d'une EDO : le mouvement d'un ressort, la décroissance radioactive et le mouvement d'un pendule. Dans l'entretien, l'enseignant a motivé ce choix d'introduction par l'absence de liens, dans le cours de physique, avec le concept d'équation différentielle. Nous le citons :

« Ce que je vais faire c'est d'abord présenter quelques exemples d'équations en essayant de lier avec le cours de physique, si possible, parce que la vérité ici c'est que dans le cours de mécanique, ils voient pas, enfin le concept d'équations différentielles ne ressort pas. Ils ressortent du cours de mécanique sans savoir que $F = ma$ est une équation différentielle ».

Cet enseignant pense également que le cours ne posera pas de difficulté aux étudiants, comme l'illustre l'extrait suivant :

« Je pense que pour ce que je vais dans la première partie, sauf si je vais jusqu'à l'ordre 1 pas l'ordre 2, pour disons pour l'unicité, il n'y a rien de difficile... le truc qu'on pourrait s'imaginer c'est la notion de solution, parce que remplacer il y a le quantificateur universel sur le temps. Donc j'en fais parfois une en disant je remplace et ça ne marche que pour un certain t , mais c'est... comment dire... Disons que si on creuse pas dans les petits détails, c'est pas un problème ».

Nous choisissons ici de nous centrer sur le traitement du ressort, qui est le premier exemple traité par l'enseignant. Nous avons tout d'abord regardé comment le ressort était étudié dans le cours de physique. La diapositive donnée en annexe est celle présentée par l'enseignant de physique au premier semestre. La loi de Hooke y est énoncée sous la forme : $F_{\text{ressort}}(x) = -kx$. Les notations utilisées relèvent du domaine de la physique et le concept d'EDO est absent. La diapositive montre également que la fonction qui est l'inconnue de l'équation s'appelle x et que sa dépendance par rapport au temps est implicite. Des notations telles que $x = 0$ ou $x > 0$ sont utilisées pour caractériser la position du ressort et pourraient laisser penser à certains étudiants qu'il s'agit d'un nombre réel et pas d'une fonction.

Nous avons retranscrit ci-dessous le discours de l'enseignant de mathématiques et nous l'accompagnons des notes prises par un bon étudiant (voir Figure 1).

Donc, on cherche... la manière... donc l'évolution de la position x en fonction du temps, et ça, qu'est-ce que ça veut dire ? La position x , elle va dépendre du temps, et donc, par conséquent, ça va être une fonction du temps. Donc, on va chercher une fonction qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et qui, à chaque temps, va me donner la position correspondante. Vous voyez, ça, ça donne bien... l'inconnue de l'équation, c'est le x là, mais c'est plus un nombre, c'est une fonction. Et maintenant, il faut essayer d'écrire pour cette fonction-là l'équation qu'il satisfait. Il (le ressort) va exercer une force qui va être k fois x et on a tiré ici vers la droite, donc, on aura un signe moins, puisque la

force va être dans ce cas-là, elle va aller vers la gauche. Si on fait l'inverse, si on compresse le ressort, le x va être négatif mais maintenant le ressort va exercer une force pour se redilater, donc le moins x va être positif, et donc la force sera dans l'autre sens. Si on a compressé le ressort,... on va faire un dessin vu la tête que vous faites...

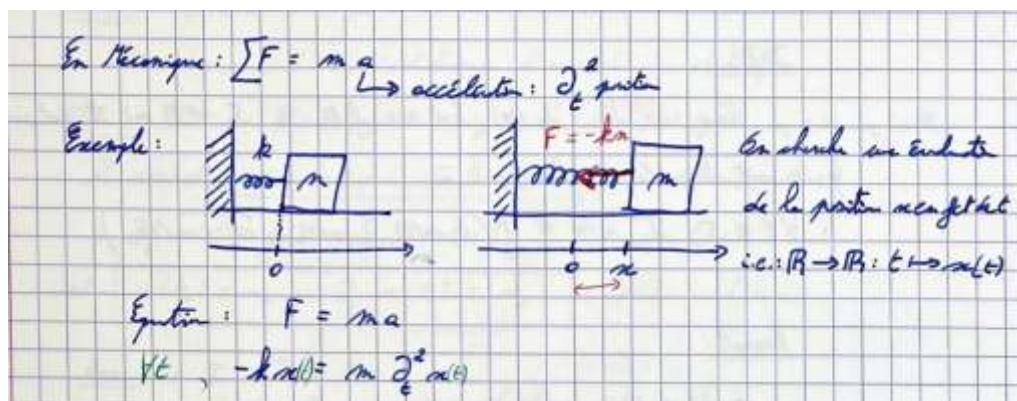


Figure 1 – Le ressort. Notes d'un étudiant

Comme l'enseignant pense que le cours ne posera pas de difficultés aux étudiants, il est fort possible qu'il considère que les étudiants ont le bagage mathématique et physique nécessaire pour comprendre les exemples. Les détails mathématiques et physiques sont donnés rapidement et à l'oral. Les notes de l'étudiant montrent que les traces écrites au tableau par l'enseignant sont des symboles mathématiques et des représentations graphiques. Le registre de la langue naturelle est donc très peu mobilisé à l'écrit. L'aspect fonctionnel de l'inconnue de l'équation ne fait l'objet d'aucune explication, tout comme la dépendance par rapport au temps. L'enseignant considère peut-être que le fait de rechercher une fonction va de soi pour les étudiants. Nos éléments de relief ont pourtant révélé que la nature des objets qui sont solutions d'une EDO est une difficulté répertoriée dans les travaux de recherche. L'enseignant ne dit rien non plus sur le passage de l'équation $F = ma$ à l'EDO correspondante. Le passage des notations liées au domaine de la physique à celles du domaine mathématique sont donc à la charge des étudiants. Nous n'avons pas trouvé de proximités horizontales telles que nous les avons anticipées dans le relief sur le traitement des exemples dans différents cadres.

Après avoir traité les trois exemples, l'enseignant veut motiver le besoin d'une définition :

« On n'a pas envie de se limiter en termes d'ordre. Donc je vais mettre un ordre quelconque. Tout à l'heure j'ai vu l'ordre un et l'ordre deux, ça arrive plus moins fréquemment qu'on va au-delà de l'ordre deux, surtout en mécanique classique... Alors qu'est-ce qu'on veut ici ? C'est que il y a une équation j'ai écrit l'égalité et le membre de droite il est pas spécialement prescrit, donc c'est simplement une fonction qui peut dépendre du temps ainsi que de toutes les dérivées d'ordre inférieur, c'est-à-dire du coup de x , de la dérivée de x , etc. jusqu'à la dérivée m moins unième de x . Donc ça va être ce genre de choses-là où ça veut dire que ici vous pensez une expression qui peut mélanger les dérivées à votre bon vouloir ».

L'enseignant évoque la possibilité de généraliser les ordres 1 et 2 des EDO rencontrées dans les exemples et amène l'idée d'une fonction générale qui dépend des dérivées pour écrire la forme générale d'une EDO. Nous pensons que ce type de commentaire est lié à une tentative de proximité ascendante de la part de l'enseignant mais ce passage qui est rapidement évoqué par l'enseignant reste une fois encore oral et il n'y en a pas de trace écrite au tableau. La généralisation est donc susceptible d'être difficile pour les étudiants.

Il donne alors la définition et la figure 2 reprend les notes de l'étudiant :

« Une EDO pour équation différentielle ordinaire comme dans mon titre, d'ordre m est simplement la donnée, qu'est-ce que je dois faire pour vous donner ça ben me donner F . Alors F , il va de quoi vers quoi ? Alors ici, je vais simplifier les choses pour ne pas complexifier le détail de domaine, etc. j'ai pas trop envie d'en parler, donc je vais prendre $\mathbb{R}$ qui est défini partout, donc qu'est-ce qu'il va faire ? (inaudible) le temps, et puis elle va accepter dérivée, donc elle va accepter combien de dérivées ? Chaque dérivée sera un nombre réel et j'en ai m , parce que je vais d'ordre 0 à l'ordre m moins 1, donc j'ai m dérivées. Mais qu'est-ce que ça doit me retourner ? Ça doit me retourner un truc compatible avec la dérivée m ème ici, donc un nombre réel. Comme je l'ai dit, vous voyez ici c'est que chacun de ces trucs-là, a priori, est un nombre réel et donc la fonction a juste suffisamment d'arguments pour les accepter tous et puisque la dérivée m ième sera aussi un nombre réel, elle doit retourner quelque chose de compatible. »

Déf:
 Une EDO d'ordre n est la donnée de $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^n$

(*) $\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t), \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t)\right)$

Déf:
 Une solution de (*) est un fct $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ si I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
 q. x est dérivable m fois sur I .
 • $\forall t \in I, \frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t), \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t)\right)$

Figure 2 – Définitions d'une EDO et d'une solution. Notes d'un étudiant

De nouveau, tous les commentaires sont oraux. Ce passage illustre aussi selon nous à quel point l'enseignant s'accroche au formalisme mathématique. Dans l'entretien pré-cours, l'enseignant explique qu'un bon cours de mathématiques se caractérise selon lui par une forme d'entraînement de l'esprit et que la rigueur est aussi importante, ce qui explique peut-être cette centration sur les symboles mathématiques. Il évoque également l'importance de développer de l'intuition chez les étudiants pour accéder à cette rigueur. Sur cet aspect, il y a pour nous ici un décalage entre les intentions de l'enseignant et les pratiques qu'il met en œuvre dans ce cours. Enfin, les exigences de rigueur de cet enseignant semblent être impactées par son métier de chercheur lorsqu'il explique que

« La sensibilité de recherche c'est aussi le fait de comprendre les choses et pas se dire on accepte et c'est bon quoi et leur [les étudiants] dire ok vous avez une intuition mais il faut aussi la technique sachant que à quoi ça sert après ».

Il est vrai que l'enseignant donne beaucoup de détails à l'oral, ce qui est peut-être un témoin de sa volonté de développer une compréhension approfondie des concepts mais reste à voir comment ce type de pratiques est reçu par les étudiants. Ce sera l'objet de la section suivante.

2. Questionnaire adressé aux étudiants

Le questionnaire a été proposé à 49 étudiants des filières mathématiques et informatique. Les réponses des étudiants au questionnaire révèlent tout d'abord que 82 % d'entre eux apprécient peu les cours magistraux donnés par cet enseignant. Concernant le traitement des exemples dans le cours sur les EDO, il leur a d'abord été demandé si l'enseignant avait proposé des exemples (réponses possibles : oui ou non). Tous les étudiants ont identifié la présence d'exemples dans le cours. À la question « peux-tu citer un ou deux exemples proposés par l'enseignant », c'est principalement le ressort et le pendule qui sont cités ou les étudiants se contentent de dire « des exemples issus de la physique ». Enfin, 87 %

d'entre eux estiment que les exemples n'ont pas du tout aidé à comprendre les nouveaux concepts. Cet aspect est illustré dans les propos suivants de trois étudiants qui répondent à la question « Les exemples t'ont-ils aidé à comprendre le cours ? » :

- E1 Le professeur a tellement pris d'exemples que je me suis perdu, j'aurais préféré qu'il en prenne moins mais qu'il passe plus de temps à les expliquer.
- E2 La vitesse à laquelle les notions sont présentées. Les exemples d'initiation n'étant pas clairs, la formalisation qui a suivi était très dure.
- E3 À part le fait qu'on utilise les différentielles en physique, ces exemples ne m'ont servi à rien.

Le décalage entre la conceptualisation visée par l'enseignant en termes de rigueur et de sens sur lequel nous nous interrogeons à l'issue de nos observations in situ semble donc se confirmer et les propos des étudiants montrent clairement des malentendus entre les intentions de l'enseignant et le vécu des étudiants.

V. BILAN ET PERSPECTIVES

L'enseignant au cœur de ce travail vise une compréhension approfondie des concepts qu'il enseigne. Pour développer cette compréhension, il fait ici appel à des exemples introductifs qu'il traite avec beaucoup de détails et de rigueur au niveau du formalisme utilisé. Toutefois, son discours contient très peu de proximités au regard de celles que nous avons anticipées dans notre étude de relief. Les pratiques de cet enseignant ne semblent donc pas adaptées au public étudiant. La recherche menée par Bridoux et al. (2024) a montré que des pratiques visant la rigueur et une compréhension fine des concepts mènent souvent, comme dans notre cas, à des malentendus entre les intentions de l'enseignant et le vécu des étudiants. Il y a en revanche une meilleure conformité entre les pratiques et le vécu des étudiants chez les enseignants qui acceptent de faire le deuil de certains détails et qui interagissent davantage avec les étudiants. Bridoux et al. (ibid.) ont également montré qu'au-delà de la variété des pratiques enseignantes, celles-ci s'organisent en fonction de la représentation que les enseignants-chercheurs ont de leur discipline et de la compréhension visée chez les étudiants. Nous retrouvons ici ces aspects. L'enseignant donne beaucoup d'importance aux spécificités épistémologiques des mathématiques dans l'entretien pré-cours et cela peut expliquer son souci de rigueur dans sa manière de détailler les raisonnements. Ce faisant, tout se passe selon nous comme s'il s'adressait à un « étudiant modèle » qui n'est pas l'étudiant réel.

Ce travail montre donc qu'il y a de nombreux implicites dans le discours des enseignants qui ne sont pas partagés par les étudiants. En ce sens, les cours magistraux ne sont pas que transmissifs et n'induisent pas que la passivité chez les étudiants. Cette étude de cas s'intègre dans les travaux actuels du groupe pluridisciplinaire « enseignants du supérieur » du Laboratoire de Didactique André Revuz (Université Paris Cité, France) où nous mobilisons une méthodologie identique à celle développée ici pour poursuivre l'étude des pratiques enseignantes, aussi dans une visée comparatiste entre les disciplines.

RÉFÉRENCES

Apkarian, N., Habre, S., La Tona-Tequida, T. et Rasmussen, C. (2023). Prospective secondary teachers' emergent knowledge and beliefs: Inquiry-oriented differential equations contributing to teacher preparation. *ZDM Mathematics Education*, 55, 823-835.

- Artigue, M. et Rogalski, M. (1990). *Enseigner autrement les équations différentielles en DEUG*. Commission Inter-IREM Université.
- Bridoux, S. et Grenier-Boley, N. (2024). What teaching practices should be used to introduce the limits of functions in the first year of university? A case study. Dans A. González-Martín, G. Gueudet, I. Florensa et N. Lombard (dir.), *Proceedings of the Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2024)*, 10-14 June 2024 (p. 791-800). Escola Universitària de Sarrià; Univ. Autònoma de Barcelona et INDRUM2024.
- Bridoux, S., Grenier-Boley, N. et Lebrun, N. (2024). Pratiques *in situ* d'enseignants-chercheurs et confrontation avec le vécu des étudiants : une étude de cas en mathématiques et en physique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 29(Thématique 2), 209-227.
- Bridoux, S., Grenier-Boley, N. et Leininger-Frézal, C. (dir.) (2023). *Les recherches en pédagogie universitaire, vers une approche disciplinairement située*, ISTE éditions.
- Bridoux, S., de Hosson, C. et Nihoul, C. (2020). Pratiques *in situ* d'enseignants universitaires et confrontation avec le vécu des étudiants : une étude de cas. Dans T. Hausberger, M. Bosch et F. Chellougui (dir.), *Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics, Tunisia* (p. 179-188). Université de Carthage et INDRUM.
- Bridoux, S., Grenier-Boley, N., Hache, C. et Robert, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances. Analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 187-233.
- Demailly, J.-P. (2006). *Analyse numérique et équations différentielles* (3^e éd.). EDP sciences.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-32.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Habre, S. (2000). Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), 455-472.
- Kwon, O. N. (2020). Differential equations teaching and learning. Dans S. Lerman (dir.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 220-223). Springer.
- Moreno Gordillo, J. A. (2006). *Articulation des registres graphique et symbolique pour l'étude des équations différentielles avec Cabri Géomètre. Analyse des difficultés des étudiants et du rôle du logiciel* [Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1].
- Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations, A framework to interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 55-87.
- Robert, A. et Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2/3), 239-285.
- Saglam, A. (2004). *Les équations différentielles en mathématiques et en physique. Étude des conditions de leur enseignement et caractérisation des rapports personnels des étudiants de première année à cet objet de savoir* [Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1].
- Stephan, M. et Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations, *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 459-490.

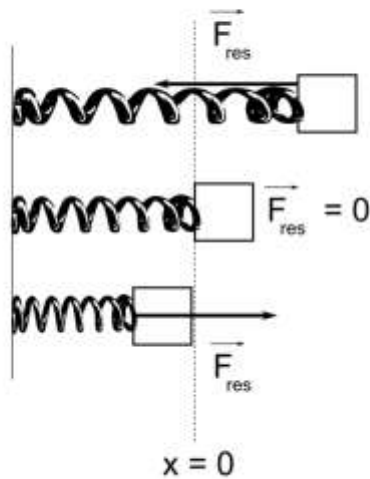
Vandebrouck, F. (2011). Points de vue et domaines de travail en analyse. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 149-185.

Vandebrouck, F. (dir.). (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octares.

ANNEXE

LE RESSORT DANS LE COURS DE PHYSIQUE

Travail effectué par un ressort



Loi de Hooke :

$$F_{\text{ressort}}(x) = -kx$$

où k est la constante de rappel du ressort (avec unité N/m).

$x = 0$: position 'naturelle' de l'extrémité libre

$x < 0$: compression (axe x vers la droite)

$x > 0$: élongation

$$\begin{aligned} W_{\text{ressort}} &= \int_{x_i}^{x_f} F_{\text{ressort}}(x) dx = - \int_{x_i}^{x_f} kx dx \\ &= -\frac{1}{2}k (x_f^2 - x_i^2) \end{aligned}$$

Donc le travail dépend uniquement des positions initiale et finale.

IMPACT D'UN DISPOSITIF DE FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS DU SECONDAIRE SUR LES PRATIQUES D'ENSEIGNANTS DÉBUTANTS : UNE ÉTUDE DE CAS EN BELGIQUE FRANCOPHONE

| BRIDOUX* STÉPHANIE

Résumé | Nous étudions ici l'impact d'un dispositif de formation initiale sur les pratiques d'enseignants débutants. Nous nous plaçons pour cela dans le cadre de la Théorie de l'Activité et de la double approche didactique et ergonomique. Des entretiens menés avec cinq enseignants montrent que, malgré certaines tensions dans l'exercice du métier, ils semblent disposer d'outils pour élaborer des scénarios d'enseignement et des déroulements en classe propices à développer les apprentissages des élèves.

Mots-clés : formation initiale, pratiques des enseignants débutants, double approche didactique et ergonomique, contraintes institutionnelles, activités des élèves

Abstract | We study the impact of pre-service teachers' training on prospective teachers' practices. We use tools from Activity Theory and Didactic and Ergonomic Double Approach. Interviews with five teachers show that, despite certain tensions in the practice of their profession, they seem to have tools to elaborate teaching scenarios and classroom teaching that lead to develop students' learning.

Keywords: pre-service teachers' education, prospective teachers' practices, didactic and ergonomic double approach, institutional constraints, students' activities

I. CONTEXTE DU TRAVAIL

Dans cette communication, nous présentons une recherche en cours qui se donne comme objectif d'étudier les liens entre la formation initiale d'enseignants du lycée (niveau d'enseignement visant les élèves de 15 à 18 ans) et les pratiques qu'ils développent en entrant dans le métier. Cette problématique est motivée par notre expérience de formatrice qui cherche à comprendre ce qui peut, dans une formation, se diffuser utilement à de futurs enseignants pour les aider à gérer leurs premières expériences d'enseignement ou même ce qui est manqué. Ce travail s'inscrit donc dans le contexte de la deuxième discontinuité de Klein, c'est-à-dire dans l'étude des difficultés posées par cette transition qui requiert de passer du monde universitaire au monde professionnel. Cette transition soulève notamment la question de savoir comment les futurs enseignants s'appuient sur les savoirs mathématiques universitaires pour revisiter les savoirs mathématiques à enseigner dans le secondaire (Winsløw et Grønbaek, 2014). Dans notre cas, nous faisons l'hypothèse que la formation que nous proposons permet aux futurs enseignants d'adopter une posture réflexive qui facilitera leur entrée dans la profession en articulant des savoirs mathématiques et l'exercice de leur métier. Nous supposons donc que cette posture les aidera à mieux gérer cette transition, en leur donnant des outils qui les aident à appréhender les contenus à enseigner et à construire des scénarios d'enseignement en fonction des conditions réelles des classes dont ils ont la responsabilité.

Dans un premier temps, nous présentons le positionnement théorique retenu dans ce travail et nous décrivons quelques aspects de cette formation, ce qui nous amène à préciser notre question de recherche. Nous donnons alors les premiers résultats issus d'entretiens menés avec des enseignants

* Université de Mons – Belgique – stephanie.bridoux@umons.ac.be

ayant bénéficié de cette formation et qui ont moins de cinq années d'expérience professionnelle. Nous concluons sur les pistes qui s'ouvrent et les limites du travail.

II. POSITIONNEMENT THÉORIQUE ET PROBLÉMATIQUE DE RECHERCHE

1. *Des travaux sur les pratiques enseignantes et les formations*

Même si de nombreuses recherches se sont penchées sur l'étude des pratiques enseignantes, la difficulté à étudier les effets de ces pratiques sur les apprentissages des élèves reste bien présente, tout comme les modalités à choisir pour installer ces pratiques (Horoks et Robert, 2024). Se pose donc la question, pour la formatrice que nous sommes, de réfléchir au contenu et à la forme que peut prendre une formation initiale qui facilitera l'entrée dans le métier des enseignants débutants. En particulier, quelles sont les connaissances à enseigner à des futurs enseignants pour participer à leur développement professionnel ? La question des connaissances « professionnelles » des enseignants a fait l'objet de nombreux travaux (voir Gueudet et al., 2016, pour une synthèse). Cependant, ces connaissances sont rarement définies précisément (Thompson, 2013). En ce qui concerne plus particulièrement les formations initiales, Gueudet et al. (2016) soulignent qu'il leur est souvent reproché de manquer de liens avec la réalité du métier. D'autre part, ces formations semblent peu différer des formations proposées aux étudiants qui ne se destinent pas à l'enseignement. Différentes pistes ont été développées pour favoriser cette transition entre l'enseignement universitaire et l'entrée dans le métier d'enseignant, comme par exemple la mise en place de cours (« capstone courses ») visant davantage de connections entre les mathématiques universitaires et les mathématiques du secondaire (Winslow et Grønbaek, 2014 ou Grenier-Boley et Robert, 2024). Enfin, il existe également des cours portant sur les relations entre connaissances mathématiques et connaissances didactiques (Krauss et al., 2013). Néanmoins, les travaux traitant de la formation initiale pointent très souvent la difficulté des futurs enseignants à établir des liens entre les mathématiques universitaires et les mathématiques du secondaire, confirmant ainsi les travaux de Klein, même s'il est également partagé qu'un enseignant du secondaire doit « en savoir plus » que ce qu'il doit enseigner (Wasserman et al., 2019).

Des recherches se sont également penchées sur les difficultés des enseignants qui entrent dans le métier (Robert et al., 2012). Il en ressort que les enseignants débutants ont souvent des difficultés à prendre en main les élèves, soit en ayant tendance à ne pas prendre en compte leurs difficultés, soit en se laissant au contraire envahir par leurs difficultés (ibid.). Ils peuvent aussi avoir une vision très locale des savoirs à enseigner et éprouvent des difficultés à concevoir « un texte complet inscrit dans une vision globale » (ibid.). Ils ont parfois aussi tendance à négliger le sens des notions au détriment d'aspects plus techniques et opératoires.

Notre positionnement théorique s'appuie ici sur des éléments issus de la Théorie de l'Activité, adaptée à la didactique des mathématiques. Nous les développons en nous appuyant sur la présentation qui en est faite dans Horoks et Robert (2024). Rappelons tout d'abord que nous faisons des activités des élèves (ce qu'ils pensent, disent, font, ... ou pas) notre objet d'étude pour analyser les liens entre l'enseignement et les apprentissages. Pour étudier ces activités, nos analyses vont porter à la fois sur l'organisation globale des tâches proposées, sur la variété de ces tâches et les modifications des activités attendues suite aux déroulements en classe (travail organisé pour les élèves, accompagnements de l'enseignant, évaluations, ...). Les outils d'analyse de tâches développés par Robert (1998) nous amènent à étudier quelles adaptations les élèves ont à réaliser sur les connaissances tout en tenant compte de la manière dont ces tâches s'insèrent dans le scénario global de l'enseignant et à apprécier l'impact des activités attendues sur les activités effectives. Le relief (Bridoux et al., 2016) sert de

référence à cette étude pour préciser les spécificités des notions au regard des programmes scolaires tout en tenant compte des difficultés répertoriées chez les élèves. Le relief imbrique donc des aspects épistémologiques, curriculaires et cognitifs sur les notions à enseigner. En ce qui concerne les déroulements en classe, nous les apprécions au regard de l'autonomie laissée aux élèves, aux initiatives qu'ils doivent prendre et aux diverses aides et accompagnements proposés par l'enseignant, en relation avec ce qui vient des élèves.

Nous savons toutefois que les enseignants sont soumis à des contraintes, tant liées aux élèves, qu'à l'exercice de leur métier ou encore à leur personnalité. La double approche didactique et ergonomique développée par Robert et Rogalski (2002) vise à étudier les pratiques enseignantes en tenant compte de ces contraintes pour restituer la complexité des pratiques et leur cohérence (Vandebrouck, 2008). Cette étude imbrique différentes composantes qui permettent de comprendre comment les enseignants s'adaptent aux contraintes de leur métier et aussi de mieux apprécier les activités des élèves : la *composante cognitive* est renseignée par les choix des contenus enseignés, la *composante médiative* concerne les modalités de travail en classe, la *composante institutionnelle* renvoie à la manière de s'inscrire dans les programmes, la *composante sociale* concerne la prise en compte des spécificités sociales des classes et l'engagement auprès des collègues, la *composante personnelle* relève des conceptions, des connaissances et expériences de l'enseignant, y compris les « missions » qu'il se donne. Ainsi, les difficultés précédemment décrites à propos des enseignants débutants montrent que ceux-ci semblent avoir des difficultés à articuler les composantes cognitive et médiative.

De manière à élaborer notre problématique de recherche, nous décrivons maintenant dans les grandes lignes les objectifs de la formation que nous mettons en place, ce qui permettra d'expliciter, parmi les éléments qui viennent d'être présentés, ce que nous cherchons précisément à analyser pour étudier l'impact de cette formation sur les pratiques enseignantes.

2. *La formation initiale*

En Belgique francophone, les étudiants qui se destinent à enseigner au lycée commencent par trois années de licence exclusivement disciplinaires dans lesquelles ils sont confrontés à des mathématiques universitaires. Durant les deux années de master qui suivent, ces étudiants continuent d'être formés aux mathématiques universitaires et l'autre partie de la formation comprend des cours et des projets dans le domaine de la didactique des mathématiques, la réalisation d'un mémoire de fin d'études comportant une dimension « recherche » et une partie pratique contenant des stages d'enseignement. Nous visons ici les cours et les projets en didactique dont nous avons la charge.

Un aspect important dans le déroulement de cette formation est qu'elle concerne un nombre très réduit d'étudiants (entre 1 et 5 chaque année en moyenne). Un des enjeux que nous nous donnons est d'envoyer sur le terrain des enseignants qui ont déjà un peu articulé des aspects cognitifs et médiatifs très généraux. Il nous semble donc important de sensibiliser nos étudiants à la notion de relief sur les notions à enseigner. Les aspects médiatifs sont cependant réduits puisque nous n'irons pas en classe dans cette formation (nous n'avons en effet pas la responsabilité de la supervision des stages d'enseignement). Sur le plan didactique, nous présentons des outils tels que les notions de cadres, de registres, les dimensions objet et outil des notions, l'importance de la dialectique entre sens et technique, ... pour amener nos étudiants à étudier les spécificités des notions qu'ils auront à enseigner. Sur le plan curriculaire, ces outils leur permettent également d'analyser finement les programmes scolaires. Nous travaillons aussi avec nos étudiants des aspects cognitifs, soit en abordant leurs questions sur leur futur métier en termes de conception de scénarios, de pratiques à développer, soit en introduisant nous-même des questions sur leur futur métier (par exemple, des pratiques à développer devant les élèves), tout cela avec une visée de conceptualisation des notions. Nos étudiants

sont aussi amenés, pour compléter ces réflexions, à lire et à présenter des textes de recherche accessibles à de futurs enseignants. Vu le nombre réduit d'étudiants dans cette formation, l'aspect réflexif est très présent, c'est-à-dire que la confiance règne. Les échanges peuvent donc amener des rectifications dans les conceptions des futurs enseignants, avec des prises de conscience de la nécessité d'imbriquer les aspects cognitif et médiatif de leur futur métier. Lorsqu'une question liée à l'enseignement des mathématiques est abordée, nous laissons ainsi les étudiants faire leurs propres choix. Par exemple, à propos de l'introduction des équations du second degré, nous laissons le choix aux étudiants de délimiter les connaissances anciennes sur lesquelles ils pourraient s'appuyer pour les introduire (cela peut être des équations réduites ou un appui sur les fonctions du second degré) et nous présentons ensuite des outils qui permettent de réfléchir aux choix de scénario des étudiants, de les confronter aux choix faits dans des manuels,... Le travail mené amène donc de nombreuses discussions collectives et un besoin ressenti par nos étudiants d'introduire des outils adaptés à leurs questions.

3. *Problématique de recherche*

La formation initiale que nous mettons en place vise donc à développer chez les futurs enseignants des savoirs didactiques (reconnus par la littérature professionnelle) tout en revisitant les mathématiques de l'enseignement secondaire. Ces choix nous amènent à formuler les hypothèses suivantes qui prennent appui sur les composantes cognitive et médiative des futurs enseignants : la formation peut avoir des effets sur les choix ultérieurs des futurs enseignants en ce qui concerne les contenus à enseigner avec des outils adaptés aux futurs enseignements (relief, pratiques prenant en compte les difficultés des élèves, la dynamique entre sens et technique,...). Elle leur permet également de faire des paris assumés à partir du relief sur des scénarios d'enseignement susceptibles d'amener les élèves à développer des activités appropriées et ce, même si les déroulements en classe ne sont pas travaillés (pour des raisons évoquées plus haut).

Dans ce contexte, notre problématique de recherche peut se formuler de la manière suivante : en quoi l'acquisition de ces savoirs dans la formation initiale permet-elle aux enseignants de développer des pratiques susceptibles d'articuler les composantes cognitive et médiative et ainsi favoriser la transformation des activités mathématiques de leurs élèves en savoirs ?

III. MÉTHODOLOGIE

Nous avons tout d'abord cherché à caractériser ce qui a été acquis par ces futurs enseignants à partir de leurs pratiques déclarées. Nous sommes consciente que cela donne juste à voir des indices de ce qu'ils mettent en œuvre dans l'exercice de leur métier. Ce premier travail sera complété par des observations en classe, pour confronter ces pratiques déclarées aux pratiques effectives. Pour aborder notre problématique, nous avons ciblé cinq enseignants (notés P1, P2,..., P5 par la suite) ayant suivi notre formation et qui ont moins de cinq années d'expérience dans le métier. Le tableau suivant reprend l'expérience professionnelle des cinq enseignants.

Tableau 1 – *Les enseignants interrogés*

Enseignant	Expérience (en année[s])
P1	1
P2	1
P3	3
P4	3
P5	4

Un premier aspect abordé dans l'entretien concerne le ressenti des enseignants à propos de la formation initiale et les éventuelles difficultés qu'ils rencontrent dans l'exercice de leur métier. Nous avons donc demandé aux enseignants s'ils pensaient que la formation initiale leur avait permis d'endosser un « habit » d'enseignant avant de rentrer dans le métier. Nous avons ensuite abordé la question des difficultés que les enseignants peuvent rencontrer, que ce soit dans la préparation des séances ou dans la gestion de leurs classes pour revenir enfin avec eux sur qu'il leur restait de cette formation. Cet aspect nous permet donc d'étudier quelles sont les prises de conscience à propos de cette formation par les enseignants débutants.

Un autre aspect cible certains contenus spécifiques enseignés en classe de seconde (élèves âgés de 15-16 ans). Ce choix est motivé par le fait que beaucoup d'enseignants enseignent à ce niveau et qu'il n'y a pas de choix d'option dans cette année ; les programmes sont donc identiques dans toutes les classes (par la suite, différentes options sont possibles et les contenus à enseigner varient). Les groupes d'élèves sont aussi plus volumineux en seconde (entre 20 et 25 élèves par classe), ce qui peut compliquer la gestion des déroulements en classe. Nous ciblerons ici des questions portant sur la parité d'une fonction. Un troisième aspect concerne la gestion des classes et plus précisément les formes de travail ménagées pour les élèves, le fait de donner du travail à la maison, ... Le travail avec les collègues est aussi évoqué. Ces aspects donneront des indicateurs sur l'imbrication des composantes cognitive et médiative des enseignants.

L'entretien se termine par la question de savoir si les enseignants aiment leur métier.

Nous donnons à la section suivante les énoncés précis des questions posées aux enseignants et nous présentons quelques aspects frappants qui sont ressortis dans leurs propos et qui permettent d'inférer quelques premiers éléments de réponse à notre problématique.

IV. RÉSULTATS

Nous abordons tout d'abord les réponses aux questions suivantes :

- Question 1 : As-tu l'impression que la formation que tu as reçue t'a confronté(e) à ton futur de métier d'enseignant(e) avant de l'exercer sur le terrain ?
- Question 2 : Rencontres-tu des difficultés dans l'exercice de ton métier ?

Selon les cinq enseignants, la formation initiale a facilité leur entrée dans le métier. Les enseignants, à l'exception de P3, expliquent aussi ne pas rencontrer de difficulté bloquante dans l'exercice de leur métier, comme en témoignent les deux extraits suivants :

P1 Alors, du fait d'avoir un regard critique, je pense, sur les choses que j'utilise pour faire mes cours, que ce soit des supports d'autres enseignants ou bien des manuels, je pense que le fait d'avoir eu cette formation me permet d'avoir un regard plus critique et de me rendre compte si, oui ou non, ces exercices ou les supports que j'utilise sont bien en lien avec les programmes et travaillent bien toutes les adaptations qu'on peut faire avec les injonctions des programmes.

P5 Dans l'ensemble, non, ce n'est pas facile tous les jours, hormis certains aspects, mais alors là, je dirais plutôt des difficultés avec certains élèves qui peuvent poser problème en classe. Sinon, non, pas spécialement.

P3 semble en revanche rencontrer des difficultés en raison des nombreux élèves chez qui des troubles de l'apprentissage ont été identifiés :

Les difficultés en maths, ça va encore. Mais c'est plus les difficultés quand ils ont certaines dyslexies, dyscalculie, tout ça. Et je trouve que... Ce n'est pas représentatif du niveau des élèves. Parce que nous, on s'attend à ce que des élèves en quatrième [seconde] sachent faire quasiment l'entièreté du programme, ce qui n'est absolument pas le cas.

Vraiment, la réalité, c'est qu'ils ne sont pas très doués. Maintenant, peut-être que c'est aussi propre aux écoles que j'ai faites. Le niveau dans ces écoles-là est plus bas.

En ce qui concerne les contenus, nous avons posé les questions suivantes. Les énoncés évoqués à la question 6 sont donnés en annexe.

- Question 5 : Voici trois définitions du fait qu'une fonction f est paire :
 - Une fonction f est paire si les images de deux réels opposés et quelconques du domaine de définition de f sont égales.
 - Une fonction f est paire si $\forall x \in \text{dom } f, -x \in \text{dom } f \text{ et } f(-x) = f(x)$.
 - Une fonction f est paire si le graphe de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Laquelle de ces définitions est la plus proche de celle que tu donnes au cours ? Pourquoi fais-tu ce(s) choix de définition ?
- Question 6 : Les exercices suivants portent sur la parité d'une fonction. Y en a-t-il qui sont proches de ce que tu proposes à tes élèves ?

Pour la question 5, les enseignants démarrent plus volontiers avec les aspects graphiques, comme en c), avec lesquels les élèves sont selon eux plus à l'aise et formalisent ensuite pour arriver à quelque chose de proche de la définition b). Les extraits suivants vont dans ce sens :

P2 : Donc oui, je l'ai vue graphiquement et après, je l'ai écrite en maths en expliquant, enfin en la reformulant pour refaire le lien entre eux. En fait, ça veut dire la même chose, c'est juste écrit de façon mathématique... Je trouve que ça [la définition c)] parle plus aux élèves d'avoir un visuel. En fait, ils ont beaucoup de mal avec le langage mathématique.

Pour la question 6, les exercices visent à faire travailler aux élèves différents registres de représentation sémiotique (tableau, graphique, algébrique), mais aussi la manipulation du formalisme contenu dans les définitions, la production d'exemples et aussi des questions plus ouvertes comme l'énoncé g).

Tous les enseignants ont souligné la difficulté des élèves à manipuler les symboles mathématiques et les lettres qui apparaissent dans les expressions algébriques (comme les coefficients dans une expression du second degré par exemple). L'exercice g) ou un exercice analogue n'est proposé par aucun enseignant. Ce sont les exercices a), b) et c) qui sont proches de ce qu'ils proposent en classe.

Au niveau des contenus à enseigner, les enseignants sont également soumis à une contrainte institutionnelle forte : l'équipe des enseignants déjà en poste dans l'établissement scolaire utilise un polycopié qu'ils ont rédigé ensemble. Les élèves disposent de ce document et cela engendre aussi que tous les enseignants suivent le même ordre dans les chapitres à enseigner. L'enseignant débutant qui rejoint l'équipe « suit donc le mouvement » et va lui aussi utiliser ce polycopié. Toutefois les enseignants interrogés disent tous « refaire les choses à leur manière ». Ils vont par exemple donner aux élèves des reformulations supplémentaires à propos des définitions données dans le polycopié, comme l'enseignant suivant :

P4 Je varie mon vocabulaire et pas qu'un peu. Ça, oui. Et donc, varier le vocabulaire, varier la manière d'expliquer les choses. Parce qu'en général, il faut toujours bien réexpliquer deux ou trois fois de suite. Et donc, j'essaie que ce soit deux ou trois fois différent, justement.

Ils ajoutent également des liens entre les notions :

P5 Quand je leur pose la question, donc voilà ils arrivent à l'équation $y = 3x + 2$, je leur demande maintenant tu sais me dire si le point (1,2) appartient à la droite ? Voilà ils savent pas ce qu'il faut faire, donc j'attache beaucoup d'importance là-dessus mais bon voilà ça reste des petits points comme ça, il y en aura toujours qui finiront par étudier par cœur la technique sans essayer de comprendre d'où elle vient mais je passe quand même du temps là-dessus.

Les enseignants donnent aussi beaucoup d'importance aux exemples et ils en ajoutent également dans le polycopié utilisé :

P1 Je pense que souvent, moi, ce que j'ai modifié, c'est les exemples. Parce que souvent, dans les cours que j'avais, des fois, les exemples étaient déjà résolus ou partiellement résolus. Moi, je le faisais en entier avec eux pour vraiment qu'ils aient toute la démarche. Parfois, je rajoutais un contre-exemple qui n'était pas forcément fait ou une justification de certaines choses.

P4 Des exemples, soit pour avant même de commencer, soit pour vraiment démarrer une nouvelle matière... Des exemples après avoir vu certaines définitions, certaines propriétés, certains théorèmes. Mais oui, des exemples, il y en a autant avant la théorie qu'après la théorie.

À propos des déroulements en classe, nous abordons ici les questions suivantes :

- Question 7 : Fais-tu travailler tes élèves en petits groupes ?
- Question 8 : Est-ce que tu donnes du travail à la maison ?

Quatre enseignants sur cinq (sauf P3) font travailler les élèves en petits groupes :

P2 Donc je me dis que c'est plus facile de réfléchir à deux sur un truc qui est nouveau. Et en plus, je pense que ça motive un peu plus que d'être face à sa feuille. Et puis quand c'est pendant les séances d'exos, c'est parce que je trouve qu'ils se font un peu du tutorat ensemble. Ils se complètent, parfois ils s'expliquent les choses différemment que moi je peux l'expliquer, ça peut passer mieux. Donc il y a aussi un peu l'esprit de tutorat que j'aime bien entre élèves.

Tous les enseignants donnent également du travail à la maison régulièrement pour résoudre des exercices.

L'entretien s'est terminé avec les questions suivantes :

- Question 9 : Dans la formation que tu as reçue, on a souvent évoqué qu'un aspect important pour faire apprendre les élèves est le rapport entre le sens et la technique. Comment tu abordes cette question en tant qu'enseignante avec tes élèves ?
- Question 10 : Est-ce que tu aimes ton métier ? As-tu l'impression que la formation que tu as reçue y a contribué ?

La dialectique entre sens et technique reste une source de tensions chez les enseignants. Ils voudraient donner davantage de sens mais ils expliquent être souvent rattrapés par les aspects techniques et opératoires :

P1 Je pense qu'il y a quand même une grande partie qui reste calculatoire et plus technique. Je pense que c'est un peu inconscient qu'on fait ça mine de rien quand on a nos élèves devant nous. Mais après, au vu de comme j'expliquais tantôt, ce que j'essaie de faire comprendre à mes élèves, je pense que je mets quand même une certaine importance sur le sens aussi parce que justement tous ces liens qu'on peut faire je pense que ça met du sens pour moi, c'est ça mettre du sens c'est pouvoir mettre en lien les différentes choses et s'exprimer sur ce qu'on fait.

P3 Et ça, c'est plutôt de la technique. Mais le problème que moi, je rencontre, c'est que, j'allais dire, ils ne savent rien faire... donc, de mon point de vue, j'aimerais bien ne pas accorder trop d'importance... Mais en fait, ils ne sont pas capables de rentrer chez eux et de dire, je vais analyser moi-même le problème et puis après, je reviendrai avec des questions. Ils ne sont pas capables de faire ça.

P5... la technique, les aspects opératoires, les calculs, c'est bien, mais donner du sens aux notions, c'est bien aussi. Et ce n'est pas toujours évident de trouver un équilibre... Par exemple, si on revient sur les droites, je me rends compte souvent que les élèves, il y en a, ils finissent par comprendre la technique, comment passer d'une cartésienne à paramétrique. Et puis finalement, en fait, ils ne savent pas ce que c'est qu'une équation de droite. Ils font plein de calculs où ils arrivent à des équations de droites et ils ne savent pas ce que c'est. Pourtant, c'est toujours par là que je commence.

À la question 10, tous les enseignants disent aimer leur métier, ne pas vouloir en changer et estiment que la formation y a contribué :

P1 Et ce que j'aime bien, c'est de pouvoir transmettre quelque chose que je connais aux gens, d'un truc qui me passionne, et de pouvoir le transmettre. J'adore ce que je fais.

P3 Oui, mais maintenant, autant pour les maths que pour le côté social.

P2 J'adore travailler sur mes cours. J'adore être à l'école.

P2... ça m'a vraiment aidé à m'affirmer devant mes collègues parce que je me suis dit, moi aussi, j'ai mon petit bagage et je sais des choses et que peut-être qu'il y a des choses qui ont changé. Et si je ne suis pas d'accord, je ne suis pas d'accord.

V. BILAN ET PERSPECTIVES

De ces premiers résultats, il ressort que l'imbrication recherchée entre les composantes cognitive et médiative que nous essayons de développer dans la formation initiale semble perdurer lors de l'entrée dans le métier. Les enseignants déclarent effectivement être outillés pour organiser les contenus à enseigner (réflexion de type « relief sur les notions ») mais aussi pour enrichir ces contenus par l'ajout de reformulations, d'exemples, de liens et de choix de tâches, même si l'utilisation d'un polycopié partagé par l'équipe enseignante de l'établissement scolaire risque d'empêcher certaines marges de manœuvre. Sur le plan médiatif, les enseignants semblent également organiser en classe des modalités de travail telles que le travail en petits groupes dont nous savons qu'il peut participer à la conceptualisation des élèves (Robert, 2008). Les propos de ces enseignants semblent également montrer que leur confrontation aux déroulements en classe (non travaillés dans la formation) n'a pas érodé ce qui est fait dans la formation puisque les résultats témoignent bien du souci des enseignants de réfléchir aux contenus en incluant les déroulements.

Malgré les contraintes et les tensions évoquées par certains enseignants, ceux-ci semblent donc disposer d'outils contribuant à relier le savoir à enseigner à des activités propices à la conceptualisation, par exemple en proposant aux élèves des exercices qui les amènent à travailler dans différents registres de représentation sémiotique. Ces tensions, davantage mises en avant par les enseignants ayant un peu plus d'expérience, soulèvent la question de l'impact de la composante institutionnelle sur les pratiques de ces enseignants. Il est en effet possible que ceux-ci « dominant mieux le métier », les amenant ainsi à apprécier autrement certains aspects de leur métier tels que les difficultés des élèves. Il nous paraît aussi indispensable, dans la suite du travail, de questionner la composante personnelle des enseignants, même si nous l'avions prise au départ comme un paramètre. Dans la formation initiale, nous nous appuyons en effet sur les savoirs mathématiques des futurs enseignants pour développer des savoirs didactiques. Cependant, nous ne savons pas dans quelle mesure disposer de savoirs mathématiques solides serait un levier pour faire perdurer la disponibilité des savoirs didactiques acquis dans la formation. Ce travail montre donc également que certaines composantes qui semblent moins agir au moment de l'entrée dans le métier pourraient venir par la suite impacter les pratiques des enseignants.

Cette recherche, qui n'en est qu'à ses débuts, donne toutefois des premiers retours sur l'impact de cette formation et doit maintenant être complétée par des entretiens avec les autres enseignants qui en

ont bénéficié. Des observations dans les classes des enseignants interrogés sont également prévues pour analyser leurs pratiques effectives et ainsi étudier cette imbrication entre les composantes cognitives et médiatives des enseignants en traquant ce qui différencie les logiques d'action des enseignants, plus ou moins porteuses potentiellement d'apprentissages. Il s'agira aussi d'analyser la manière dont les accompagnements sont liés aux savoirs visés et la manière dont ces savoirs visés sont distillés en classe, voire d'apprécier les activités des élèves et les apprentissages réalisés.

RÉFÉRENCES

- Bridoux, S., Grenier-Boley, N., Hache, C. et Robert, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances, Analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 187-233.
- Grenier-Boley, N. et Robert, A. (2024). How can university mathematics overcome Klein's second discontinuity? Specific course design. *ZDM Mathematics Education*, 56(3).
- Gueudet, G., Bosch, M., Di Sessa, A., Kwon, O. N. et Verschaffel, L. (2016). *Transitions in Mathematics Education*. ICME 13 Topical Surveys; Springer Open.
https://www.researchgate.net/publication/303063180_Transitions_in_Mathematics_Education
- Horoks, J. et Robert, A. (2024). *Zooms sur la classe de mathématiques, (se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de pratiques*. Presses universitaires de Franche-Comté.
- Krauss, S., Blum, W., Brunner, M., Neubrand, M., Baumert, J., Kunter, M., Besser, M. et Elsner, J. (2013). Mathematics teachers' domain-specific professional knowledge: Conceptualization and test construction in COACTIV. Dans M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss et M. Neubrand (dir.), *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers. Results from the COACTIV Project* (vol. 8, p. 147-174). Springer.
- Robert, A. (2008). Laisser chercher les élèves ? Les faire travailler en petits groupes ? *L'ouvert*, (117), 31-46.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyses des Contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.
- Robert, A., Penninckx, J. et Lattuati, M. (dir.). (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques, (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos*. Presses universitaires de Franche-Comté.
- Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des Sciences des mathématiques et des Technologies*, 2(4), 505-528.
- Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning. Dans K. Leatham (dir.), *Vital directions for research in mathematics education* (p. 57-93). Springer.
- Vandebrouck, F. (dir.). (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octares.
- Wasserman, N., Weber, K., Fukawa-Connelly, T. et McGuffey, W. (2019) Designing advanced mathematics courses to influence secondary teaching: Fostering mathematics teachers' attention to scope?. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22(4), 379-406.

Winsløw, C. et Grønbæk, N. (2014). Klein's double discontinuity revisited: Contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 59-86.

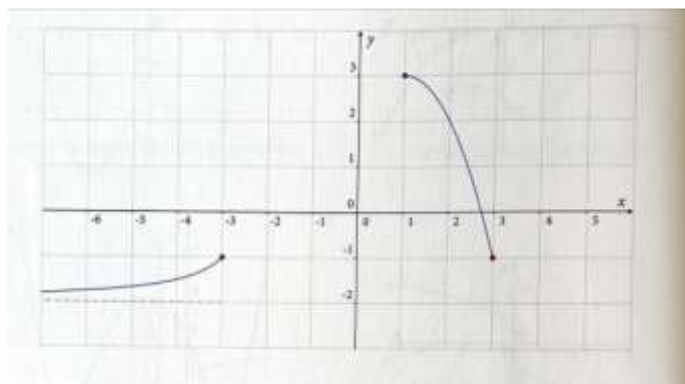
ANNEXES

Question 6 : liste d'exercices proposés aux enseignants lors de l'entretien

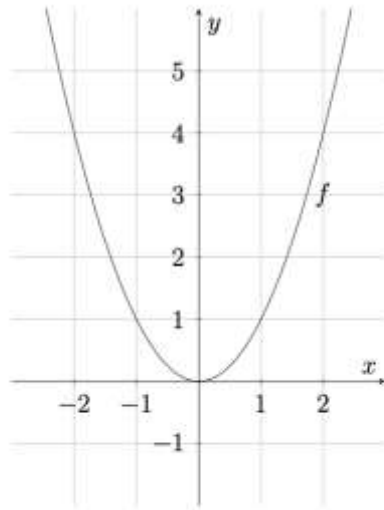
- a) Considérons une fonction f telle que $\text{dom } f = [-6, 6]$. Complète le tableau de variations suivant sachant que la fonction f est paire :

	-6	-1	0	1	6
f	-4	↗	0	↘	-1

- b) Complète la représentation graphique suivante pour qu'elle corresponde au graphe d'une fonction paire :



- c) Étudie la parité des fonctions suivantes :
- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - x^2$
 - g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{-7x}{3x-x^5}$
 - h est définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = x^4 - x^2$
- d) Montre que si f et g sont deux fonctions paires alors $f + g$ est encore une fonction paire.
- e) Peux-tu donner un exemple d'une fonction f qui n'est pas paire ?
- f) Considérons la fonction $f(x) = \left(x - \frac{1}{1000}\right)^2$. On a donné également ci-dessous la représentation graphique de cette fonction.



Un élève prétend que cette fonction est paire, car on voit sur le graphique qu'il y a une symétrie orthogonale d'axe Oy . Es-tu d'accord avec lui ? Oui-Non ? Pourquoi ?

g) Sous quelle(s) condition(s) sur a , b et c une fonction du second degré est-elle paire ?

ÉTUDE DES PROXIMITÉS DISCURSIVES POUR ENSEIGNER LES LIMITES DE FONCTIONS EN L1 : QUELLE VARIABILITÉ ENTRE LES COURS ET LES MANUELS ?

| GRENIER-BOLEY* NICOLAS ET BRIDOUX** STÉPHANIE

Résumé | Nous étudions ici l'enseignement des limites de fonctions en première année universitaire. Nous comparons ce qui peut se jouer en termes d'apprentissages des étudiants dans un cours magistral d'une part, et dans deux manuels d'autre part. Le relief de la notion nous permet de déterminer les occasions de proximités discursives dans le discours de l'enseignant et dans celui des manuels. Les résultats donnent à voir une grande variété de choix et des occasions de proximités de natures différentes.

Mots-clés : limites de fonctions, texte du savoir, apprentissages des étudiants, proximités discursives, relief sur les notions à enseigner

Abstract | We study the teaching of limits of functions in the first year of university. We compare what can be achieved in terms of student learning in a lecture on the one hand and in two textbooks on the other hand. The relief allows us to identify opportunities for discursive proximities in the discourse of the teacher and in that of the textbooks. The results show a variety of choices and opportunities for different kinds of proximities.

Keywords: Limits of functions, text of knowledge, student learning, discursive proximities, relief on the concepts to be taught

I. ÉLÉMENTS DE CONTEXTE

Dans cette communication, nous présentons une recherche en cours visant à étudier les pratiques enseignantes en première année d'université lors de l'introduction de la définition formelle de limite de fonction. Cette recherche s'inscrit dans un projet plus vaste d'étude des pratiques enseignantes à l'université dans le contexte des cours magistraux (Bridoux et al., 2023). Le choix de cibler la notion de limite de fonction tient d'une part au fait qu'elle a été beaucoup moins étudiée en didactique des mathématiques que celle de limite de suite (voir par exemple Oktaç et Vivier [2016] pour une synthèse), et d'autre part au fait qu'elle pourrait, comme les suites, être source de difficultés chez les étudiants. De plus, cette notion a été peu étudiée en portant une attention spécifique au discours de l'enseignant, ce qui est le cas ici.

Pour mieux apprécier ce qui peut se jouer dans un cours magistral sur les limites de fonctions, nous nous proposons ici de comparer le cours d'un enseignant en amphithéâtre en première année d'université avec le cours délivré dans deux manuels. Le discours de cet enseignant pendant le cours a déjà fait l'objet d'une étude (Bridoux & Grenier-Boley, 2024). Cette comparaison entre deux modes d'introduction différents (cours magistral et manuels) nous permet d'inférer des éléments sur la conceptualisation possible de la notion chez les étudiants. Elle nous amène également à apprécier différentes manières d'introduire la définition en repérant différents types de leviers qui sont utilisés pour introduire le formalisme de celle-ci.

* Univ Rouen Normandie, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, F-76000 Rouen – France – nicolas.grenier-boleyn@univ-rouen.fr

** Université de Mons – Belgique – stephanie.bridoux@umons.ac.be

Dans un premier temps, nous présenterons notre positionnement théorique et la problématique de recherche qui en découle. Nous présentons ensuite les résultats de cette comparaison à l'aune d'analyses des différentes spécificités de la notion étudiée. Nous terminons par une discussion et quelques éléments de perspectives.

II. APPUIS THÉORIQUES

Nous ancrons nos recherches en Théorie de l'Activité, ce qui nous amène à considérer les activités mathématiques des étudiants comme un indicateur de leurs apprentissages (Bridoux et al., 2016). Suivant Vygotsky, nous faisons l'hypothèse que les apprentissages des étudiants résultent pour partie des choix de l'enseignant en termes de scénarios ou de contenus d'enseignement et des déroulements en classe qu'il organise (modalités de travail, aides de l'enseignant,...). Dans ce contexte, une manière de faire progresser les connaissances des étudiants est de tenir un discours aussi proche que possible de ce qu'ils ont déjà fait, de ce qu'ils font et de leurs connaissances anciennes, ce qu'on opérationnalise ici au moyen de la notion de Zone Proximale de Développement (Vandebrouck, 2008). S'agissant de la notion de limite de fonction, qui a déjà été étudiée dans les classes de première et de terminale au lycée (élèves âgés de 15-17 ans), il s'agit pour nous d'apprécier dans quelle mesure les modes d'introduction choisis par l'enseignant et par les manuels sont proches ou non, et prennent appui ou non sur les connaissances anciennes des étudiants.

Les rapprochements que nous évoquons ici sont appelés « proximités discursives » (Robert & Vandebrouck, 2014). Nous reprenons ici telle quelle la présentation que nous en faisons dans un autre texte soumis dans ce même groupe (à propos de l'enseignement des équations différentielles ordinaires) :

Nous distinguons trois types de proximités (Bridoux et al., 2016) : les proximités ascendantes se situent entre ce que l'enseignant fait et l'introduction d'un nouvel objet (passage du contextualisé au décontextualisé), les proximités descendantes se situent entre ce qui a été exposé et des exemples ou des exercices (passage du décontextualisé au contextualisé). Enfin, les proximités horizontales n'amènent pas de changement entre le contextualisé et le décontextualisé. Elles consistent en des reformulations, des explications sur des liens entre les notions, des commentaires sur la structure du cours.

Pour étudier le discours de l'enseignant ou des manuels, nous prenons comme référence le « relief » de la notion de limite, qui consiste en un croisement d'études de natures épistémologique et didactique, curriculaire et cognitive (Bridoux et al., 2016). Ce relief nous permet de préciser les spécificités de la notion pour ensuite étudier la manière dont elles sont prises en compte ou non dans le cours ou dans les deux manuels.

Au regard de ces éléments, notre problématique peut se formuler de la manière suivante : quels éléments de relief sont pris en compte dans le cours et les deux manuels et comment les choix qui y sont faits permettent-ils de tenter différents types de proximités ?

III. RELIEF DE LA NOTION DE LIMITE DE FONCTION ET RÉSULTATS

Le cours magistral étudié est proposé par un enseignant au second semestre de la première année d'université à environ 200 étudiants d'une filière mathématique : lorsque nous évoquerons ce cours magistral dans la suite, nous nous appuierons implicitement sur Bridoux et Grenier-Boley (2024). Dans un souci de comparaison, il nous a semblé pertinent de choisir deux manuels d'époques et de traditions différentes : le manuel de Swokowski (1993) s'inscrit plutôt dans une tradition anglo-saxonne quand le manuel Tout-en-un (Ramis et al., 2014) est plutôt l'héritier d'une tradition francophone.

En France, la première rencontre avec la notion de limite de fonction s'effectue en classe de première (élèves de 15-16 ans). Celle-ci est introduite de manière intuitive avec des formulations telles que « $f(x)$ est proche de l lorsque x est proche de a ». En classe de terminale (élèves de 16-17 ans), une formulation en termes d'intervalles est proposée aux élèves. Cependant, les tâches proposées n'utilisent pas les deux types de formulations et sont souvent réduites à des aspects algébriques et opératoires avec de nombreux calculs de limites à réaliser.

Dans la suite de cette section, nous présentons les résultats de nos analyses en nous appuyant sur différents éléments de relief, que nous rappelons à l'occasion.

Des ingénieries didactiques ont été élaborées par des didacticiens pour introduire la notion de limite (Bloch, 2003 ; Lecorre, 2016) mais, à notre connaissance, elles ont été peu reprises par les enseignants. Celles-ci s'appuient souvent sur une articulation entre différents registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993) ou sur des « exemples emblématiques » propres à créer certains besoins chez l'étudiant, tels que la nécessité de construire une définition formelle de la notion. Dans le cours magistral, l'enseignant part d'une formulation géométrique en langue naturelle qui s'appuie sur un graphique :

On essaie de regarder un schéma pour approfondir cette notion. Donc x se rapproche de x_0 , le point M se rapproche du point M_0 , $f(x)$ est l'ordonnée de M se rapproche de l là, d'accord ?

Il prend ensuite l'exemple de la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $\frac{p}{q}$ est irréductible, pour montrer l'ambiguïté de la définition géométrique et faire sentir le besoin d'une définition formelle. En cela, il nous semble que des proximités horizontales entre le graphique et la définition géométrique sont tentées par l'enseignant, mais que l'exemple choisi ensuite n'est pas propice à permettre une proximité ascendante avec la définition ultérieure, en raison de sa complexité et du fait que les étudiants n'ont probablement pas rencontré ce type de fonction dans leurs études antérieures. Dans le manuel Tout-en-un, il n'y a pas de situation d'introduction mais la définition choisie pour la notion de limite de fonction s'appuie sur les suites et sur l'étude des limites de suites présentées dans un chapitre précédent (voir figure 1).

Définition 3. Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f définie au voisinage de a . On dit que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ au point a si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prenant ses valeurs dans $D_f \setminus \{a\}$ et de limite a , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ .

(Ramis et al., 2022, p. 622)

Figure 1 – Définition de limite de fonction

Dans le manuel de Swokowski, il y a d'abord un appui sur une notion intuitive de limite similaire à celle du cours magistral qui émerge cependant à partir d'un exemple davantage accessible aux étudiants (fonction fraction rationnelle polynomiale), plus proche des fonctions rencontrées au lycée. Après le traitement d'un certain nombre d'exemples qui s'appuient sur des calculs de limites et interprétations graphiques, la définition formelle de limite va se construire autour d'un exemple issu de la physique (voir annexe). Le vocabulaire issu de la physique permet d'introduire la notion de tolérance- ε pour y en l et celle de tolérance- δ pour x en a , et ainsi introduire les inégalités présentes dans la définition. Le manuel traduit le fait de « rester proche de » en termes de « contraindre la pression à rester proche de l » et amener ainsi l'idée d'intervalle. Selon nous, il y a ici des tentatives de proximités horizontales.

Une autre spécificité de la notion de limite de fonction est la complexité de sa structure logique, que ce soit la nature des quantificateurs, de leur ordre ou la présence d’une implication. La manipulation d’inégalités comprenant des valeurs absolues s’appuie en outre sur des connaissances sur les nombres réels. Dans le cours magistral, l’enseignant va construire cette définition pas à pas en mettant en parallèle les éléments de la définition intuitive en langage courant et les « blocs » correspondants dans la définition logique formelle (voir table 1 dans l’article) (voir table 1 dans Bridoux et Grenier-Boley, 2024), comme à la figure 2.

Ce qui est écrit au tableau	Ce qui est dit par l’enseignant
$ f(x) - l \varepsilon$	<i>Qu’est-ce que c’est que la distance de $f(x)$ à l ? [réponse d’un étudiant] Oui c’est la valeur absolue de $f(x) - l$ d’accord. Alors on veut que $f(x) - l$ soit aussi petit qu’on veut, $f(x)$ va se rapprocher autant qu’on veut de l, qu’est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire que valeur absolue de $f(x) - l$ est inférieur à epsilon, pour epsilon aussi petit qu’on veut, on est d’accord.</i>

Figure 2 – Construction de la définition (cours magistral)

Ce faisant, il tente aussi des proximités horizontales mettant en lien la notion de distance et des inégalités contenant des valeurs absolues. Dans le manuel Tout-en-un, la définition est donnée sans recourir à des exemples et un commentaire sur le quantificateur présent dans la définition est formulé (voir figure 3).

Il est bon d’insister sur la condition « *pour toute suite* » dans la définition de la limite. Bien évidemment, il ne suffit pas de vérifier que la limite existe pour une suite particulière.

(Ramis et al., 2022, p. 622)

Figure 3 – Commentaire sur le quantificateur présent dans la définition

Dans le manuel de Swokowski, le besoin de la définition est amené par une question qui va permettre une formalisation supplémentaire par rapport à la notion de tolérance présente dans la situation d’introduction (voir figure 4).

Examinons maintenant la question suivante.

Question : Étant donné un $\epsilon > 0$ quelconque, y a-t-il un $\delta > 0$ tel que
si x satisfait à la tolérance- δ en a , alors y satisfait à la tolérance- ϵ en L ?

Si la réponse à cette question est oui, nous écrivons

$$\lim_{x \rightarrow a} y = L.$$

Insistons : si $\lim_{x \rightarrow a} y = L$, quelque petit que soit le nombre ϵ , il y a toujours moyen de trouver un $\delta > 0$ tel que si x est compris dans l'intervalle $]a - \delta, a + \delta[$ sur le manomètre de pression interne (et $x \neq a$), alors y se trouvera dans l'intervalle $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ sur le manomètre de pression à l'étranglement.

(Swokowski, 1993, p. 52)

Figure 4 – Formalisation de la notion de limite

Après la définition, ce manuel propose une articulation entre la notion de tolérance formelle et son interprétation graphique formulée en langue naturelle, ce qui est pour nous aussi une tentative de proximité horizontale (voir figure 5).

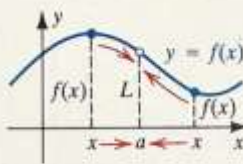
Tolérance	Interprétation graphique
$f(x)$ satisfait à une tolérance- ϵ en L	$P(x, f(x))$ se trouve entre les droites horizontales $y = L \pm \epsilon$
x satisfait à une tolérance- δ en a	x est dans l'intervalle $]a - \delta, a + \delta[$ sur l'axe des x et $x \neq a$

(Swokowski, 1993, p. 54)

Figure 5 – Notions de tolérance

Dans ce manuel, l'introduction globale de la définition s'appuie sur différentes formulations successives avec un vocabulaire qui évolue et ce processus est selon nous propice à une occasion de proximité ascendante.

L'introduction de la définition de limite de fonction est propice à la présence d'articulations entre certains de ses registres de représentation sémiotique. Ces articulations nous semblent de nature à favoriser la présence d'occasions de proximités horizontales pour traduire les liens entre deux registres. Dans le cours magistral, certains registres sont présents à différents moments de la construction de la définition. Par exemple, dans la figure 2, l'enseignant met en lien la notion de distance dans un registre géométrique et sa traduction avec une inégalité contenant une valeur absolue dans son registre algébrique. Pour nous, cet enseignant tente ainsi différentes proximités horizontales dont nous questionnons la portée, dans la mesure où certains de ces registres sont cités oralement sans être écrits d'une part, et où ces connaissances sont très peu travaillées au lycée d'autre part. Dans le manuel Tout-en-un, la notion de limite de fonction et les concepts associés sont présentés dans le registre algébrique et dans celui de la langue naturelle, sans que ceux-ci soient articulés au moyen de proximités horizontales. De plus, il y a absence du registre graphique, ce qui minore la présence de proximités horizontales. Comme nous l'avons déjà évoqué, le manuel de Swokowski propose lors de la construction de la définition de limite de fonction une articulation plus forte entre différents registres au moyen de proximités horizontales qui prennent la forme de reformulations (voir par exemple la notion de tolérance dans les registres de la langue naturelle et graphique dans la figure 5). Dans ce manuel, certaines proximités horizontales liées à des articulations entre registres nous semblent être de meilleure qualité dans la mesure où ces articulations sont plus étroites et davantage associées selon nous aux connaissances anciennes des étudiants (voir par exemple figure 6).

Limite d'une fonction (2.1)	NOTATION	SIGNIFICATION INTUITIVE	ILLUSTRATION GRAPHIQUE
	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	Nous pouvons rendre $f(x)$ arbitrairement proche de L en choisissant x suffisamment proche de a et $x \neq a$.	

(Swokowski, 1993, p. 46)

Figure 6 – Articulation entre différents registres

Dans notre travail antérieur sur le cours magistral (Bridoux et Grenier-Boley, 2024), nous avons anticipé dans le relief de la notion de limite la possibilité de trouver après la définition des exemples propices à des proximités descendantes. Le cours magistral dont il est question ici n'en contient pas.

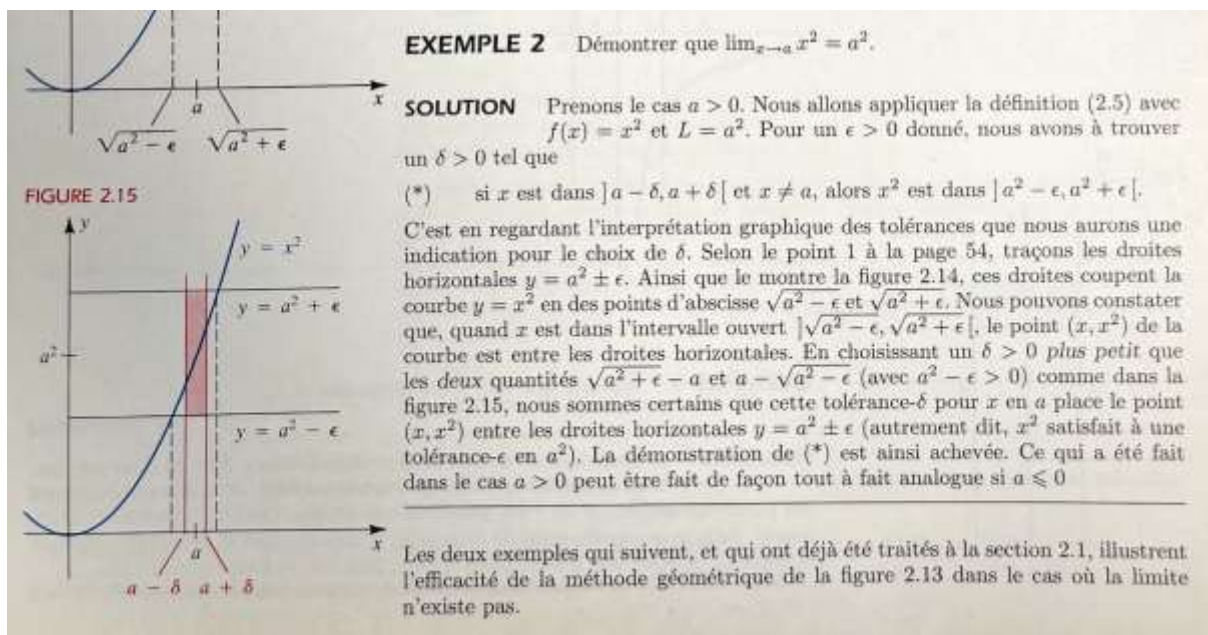
Dans le manuel Tout-en-un, des calculs de limites sont proposés après la définition qui témoignent de la présence d'une proximité descendante pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un certain point. Pour ce faire, le manuel propose un commentaire méthodologique sur la négation de la définition, qu'il met ensuite en œuvre dans l'exemple proposé à la figure 7.

3. Partant de la formule $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, on définit $D_f := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f : x \in D_f \mapsto \sin \frac{1}{x}$. On considère les deux suites $(x_n := \frac{1}{(n+1)\pi})$ et $(y_n := \frac{2}{\pi+4n\pi})$ de D_f . Elles tendent vers 0 et l'on a $f(x_n) = \sin(n+1)\pi = 0$ et $f(y_n) = \sin(\pi/2 + 2n\pi) = 1$, donc la suite $(f(x_n))$ est constante et égale à 0 et la suite $(f(y_n))$ est constante et égale à 1. Par suite f n'a pas de limite en 0. À titre d'exercice le lecteur pourra vérifier que, pour tout $u \in [-1, 1]$, il existe une suite (z_n) de D_f telle que la suite $(f(z_n))$ soit constante et égale à u et il essaiera de dessiner le graphe de f .

(Ramis et al., 2022, p. 623)

Figure 7 – Illustration de la proximité descendante

Dans le manuel de Swokowski, la définition est suivie de quatre exemples dans lesquels les fonctions traitées sont proches de celles travaillées par les étudiants au lycée. Ces exemples sont assortis de commentaires qui montrent différents aspects de l'utilisation de la définition, et constituent donc des tentatives de proximités descendantes (voir figure 8). Le raisonnement est également accompagné d'un graphique qui permet de visualiser certaines manipulations algébriques que requiert la définition.



(Swokowski, 1993, p. 55)

Figure 8 – Traitement d'un exemple

IV. DISCUSSION

Ce travail montre d'abord une grande variété de choix dans les modes d'introduction de la définition de la notion de limite de fonction en termes de registres, de la prise en compte de la structure logique de la définition et de la présence d'exemples. Nous avons repéré dans les trois types de supports les

registres que nous avons identifiés dans nos éléments de relief. La qualité des liens entre ces différents registres varie par contre d'un support à l'autre, empêchant ainsi parfois des tentatives de proximités horizontales (cours magistral, Tout-en-un) ou les favorisant lorsque ceux-ci sont accompagnés de commentaires mettant en jeu des connaissances proches de celles étudiées au lycée (Swokowski). Pour la structure logique de la définition, le manuel de Swokowski nous semble être le seul qui l'explicite à travers de commentaires à visée méthodologique. Sur la présence d'exemples, les deux manuels s'appuient sur des connaissances anciennes différentes. Dans le manuel Tout-en-un, la définition de limite de fonction en termes de suites amène à mobiliser des connaissances anciennes liées aux propriétés des suites, ce qui permet de tenter des proximités descendantes dont il est difficile de se prononcer sur la qualité car il s'agit de connaissances en cours d'acquisition. Le manuel de Swokowski porte une attention sur la nature des fonctions présentes dans les exemples, dans la mesure où celles-ci sont proches de fonctions étudiées au lycée. Les proximités descendantes qui sont tentées à cet égard offrent à l'étudiant des techniques algébriques et graphiques. Elles permettent selon nous de passer des conceptions dynamiques développées au lycée, où la notion de limite est associée à l'idée de « s'approcher de », à des conceptions statiques, où la notion de limite est associée à l'idée de « être aussi proche que l'on veut de » (Mamona-Downs, 2001).

Nous envisageons maintenant de compléter ce travail par d'autres observations in situ et par l'analyse d'autres manuels ou cours magistraux, pour ainsi affiner ces premiers résultats à différents égards.

RÉFÉRENCES

- Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu : What forms of knowledge enable students to conjecture and prove. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 3-28.
- Bridoux, S. et Grenier-Boley, N. (2024). What teaching practices should be used to introduce the limits of functions in the first year of university? A case study. Dans *Proceedings of the Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*, juin 2024, Barcelone, Espagne (p. 791-800). <https://hal.science/hal-04937710v1>
- Bridoux, S., Grenier-Boley, N. et Leininger-Frézal, C. (dir.). (2023). *Les recherches en pédagogie universitaire, vers une approche disciplinairement située*. ISTE.
- Bridoux, S., Grenier-Boley, N., Hache, C. et Robert, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances. Analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 187-233.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Lecorre, T. (2016). Rationality and concept of limit. Dans *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM2016)*, 31 mars au 2 avril 2016, Université de Montpellier, France (p. 83-92). Université de Montpellier et INDRUM. <http://erme.site/wp-content/uploads/2021/06/indrum2016proceedings.pdf>
- Oktaç, A. et Vivier, L. (2016). Conversion, change, transition... in research about analysis. Dans B. Hodgson, A. Kuzniak et J.-B. Lagrange (dir.), *The didactics of mathematics: Approaches and issues* (p. 87-121). Springer.
- Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288.

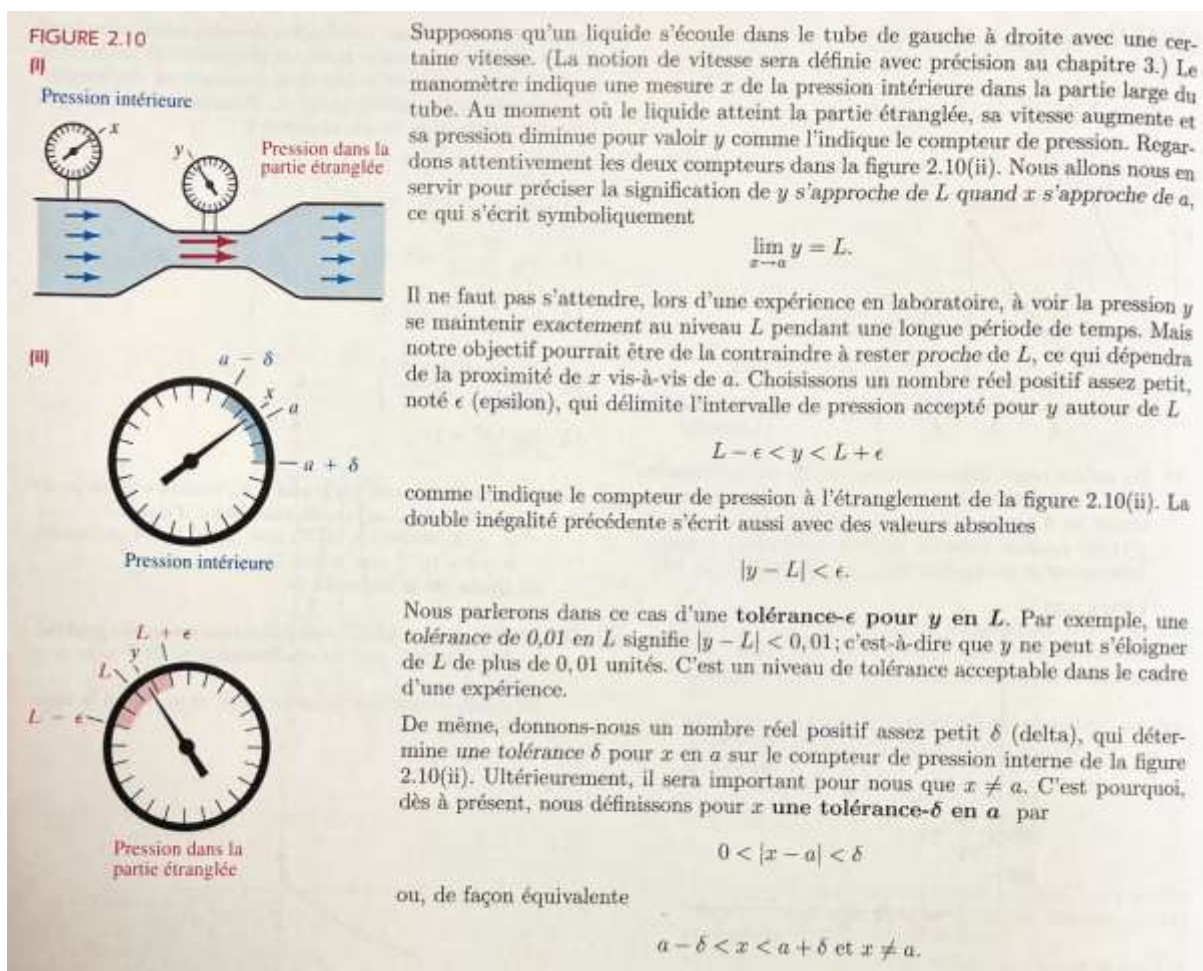
Ramis, J.-P., Warusfel, A., Buff, X., Garnier, J., Halberstadt, E., Moulin, F., Ramis, M. et Sauloy, J. (2022). *Mathématiques. Tout-en-un pour la Licence 1* (4^e éd.). Dunod.

Robert, A. et Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2-3), 239-285.

Swokowski, E. W. (1993). *Analyse* (5^e éd., M. Citta, trad.). De Boeck Université.

Vandebrouck, F. (dir.). (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octares.

ANNEXE : SITUATION D'INTRODUCTION PROPOSÉE DANS LE MANUEL DE SWOKOWSKI (1993)



VITESSE EN CALCUL ET EN MÉCANIQUE, EST-CE VRAIMENT LA MÊME CHOSE ? UNE ÉTUDE DE PRAXÉOLOGIES DANS LES DEUX DISCIPLINES

| HITIER* MATHILDE ET GONZÁLEZ-MARTÍN** ALEJANDRO

Résumé | La vitesse est une notion commune aux cours de mécanique et de calcul (comme dérivée). En nous appuyant sur la Théorie anthropologique du didactique (TAD), nous nous sommes alors intéressés aux pratiques autour de la dérivée en cinématique dans ces cours au postsecondaire. Une analyse de manuels et d'entretiens avec des enseignants fait ressortir d'importantes différences entre les deux disciplines, ce qui, selon nos analyses, risque d'impacter la capacité des étudiants à faire des liens entre ces disciplines.

Mots-clés : vitesse, dérivée, mathématiques et autres disciplines, Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), enseignement collégial

Abstract | Velocity is a notion present in both mechanics and calculus courses (as derivative). Using the Anthropological theory of the didactic (ATD), we studied practices in the two courses relating to the derivative in a kinematic context at college level. Our analysis of textbooks and interviews with teachers reveals major differences between the two disciplines. According to our analysis, these differences may have an impact on students' ability to make links between these disciplines.

Keywords: Velocity, derivative, mathematics and other disciplines, Anthropological Theory of the Didactic (ATD), college education

I. INTRODUCTION

La physique est reconnue comme le domaine scientifique le plus étroitement lié aux mathématiques (Liu, 2022). En particulier, la notion de dérivée, une des notions clés du cours de calcul, est née de considérations géométriques (pente), mais aussi physiques (p. ex., vitesse). Elle se retrouve alors au cœur de l'étude du mouvement (cinématique) en mécanique. Pour les étudiants en sciences au postsecondaire, il est assez courant de suivre un cours de calcul et un cours de mécanique la même année, voire le même semestre. Les étudiants sont alors confrontés à l'utilisation de la dérivée dans deux contextes différents. Qui plus est, des recherches récentes soulignent un rôle de « filtre » des cours de calcul dans les études en sciences pouvant expliquer des taux élevés d'abandon dans ces programmes (p. ex., Biza et al., 2022).

De nombreuses recherches en didactique des mathématiques identifient la dérivée comme une notion difficile à saisir pour les étudiants (p. ex., Thompson et Harel, 2021). Cette notion est présente dans plusieurs disciplines scientifiques et, en particulier, « les mathématiques pour les non-spécialistes des mathématiques [...] constituent un domaine de recherche très dynamique » (Biza et al., 2023, p. 2247)¹. Cependant, nous avons identifié des points de vue contradictoires dans la littérature concernant le rôle des contextes physiques dans l'apprentissage de la dérivée : alors que certains chercheurs considèrent qu'un contexte physique peut soutenir l'apprentissage, d'autres relèvent des difficultés liées aux contextes appliqués, en soulignant les conceptions erronées existantes sur la vitesse et l'accélération en cinématique (Hitier et González-Martín, 2022a).

* Université de Montréal – Canada – mathilde.hitier@umontreal.ca

** Université de Montréal – Canada – a.gonzalez-martin@umontreal.ca

¹ Toutes les citations en français à partir d'une source en langue tierce sont des traductions libres de notre part.

Les considérations qui précèdent suggèrent la nécessité de mener davantage de recherches « sur les relations entre le calcul et ces disciplines clientes [...], en prêtant attention aux pratiques de ces disciplines » (Biza et al., 2022, p. 400). Par conséquent, notre programme de recherche vise à étudier les pratiques dans les cours de calcul et de mécanique qui explorent la notion de dérivée dans la cinématique unidimensionnelle. En particulier, nous cherchons à mettre en évidence les cohérences et les incohérences entre les pratiques des deux disciplines, par exemple autour de la notion centrale de vitesse.

II. CADRE THÉORIQUE

De par son approche institutionnelle où les cours de calcul et de mécanique peuvent être considérés comme des institutions distinctes, la théorie anthropologique du didactique (TAD - p. ex., Chevallard, 2002) fournit des outils utiles pour étudier les pratiques dans chacun de ces cours. L'un de ces outils est la notion de praxéologie, qui est constituée de deux blocs : un bloc pratique (*praxis*) et un bloc théorique (*logos*). Le premier se compose d'un type de tâche, T , et une technique, τ , pour accomplir cette tâche et le deuxième comprend la justification, ou technologie, θ , elle-même soutenue par une théorie plus large, Θ . Ainsi, le bloc *logos* justifie et explique le bloc *praxis*. Plusieurs praxéologies partageant une même technologie peuvent être groupées en une organisation mathématique locale (OML) et plusieurs OML autour d'une même théorie forment une organisation mathématique régionale (OMR). Chevallard (2002) précise que « tous les [...] éléments constitutifs des praxéologies [...] migrent [...] par *transposition* d'institution à institution » (p. 5, italiques dans le texte), cette transposition pouvant affecter chacun de ces éléments. Ainsi, les praxéologies peuvent différer d'une institution à une autre ce qui amène notre question de recherche : Comment les effets transpositifs s'expriment-ils dans les praxéologies autour de la notion de vitesse en cinématique dans le cours de mécanique et le cours de calcul ?

III. MÉTHODOLOGIE

Cet article fait partie d'un projet de recherche plus large (voir Hitier, 2024) mené dans un grand Collège d'enseignement général et professionnel (Cégep). Au Québec, les étudiants doivent suivre un programme préuniversitaire de deux ans au niveau collégial avant de pouvoir entrer à l'université. Dans ce Cégep les étudiants en sciences suivent généralement un cours de calcul différentiel (Cal I)² et un cours de mécanique lors de leur premier semestre d'études collégiales.

Notre projet de recherche est structuré en trois phases : une analyse praxéologique de manuels de calcul et de mécanique (voir Figure 1), sélectionnés de façon à être relativement représentatifs des manuels utilisés généralement dans la province, mais aussi en Amérique du Nord en général, tout en équilibrant le nombre de manuels en anglais et en français (voir Hitier, 2024 ; Hitier et González-Martín, 2022a) ; des entrevues avec des enseignants de calcul et de mécanique (voir Figure 2) et l'observation d'un cours de calcul et d'un cours de mécanique ; un questionnaire et des entrevues basées sur la résolution de tâches avec des étudiants. Dans cet article, nous présentons des résultats basés sur notre analyse de manuels et nos entretiens avec les enseignants.

Dans les manuels de calcul, nous nous sommes intéressés aux tâches en lien avec la cinématique (position, vitesse et accélération) se trouvant dans les premières sections sur la dérivée (introduction et calcul). Nous nous sommes donc arrêtés juste avant les sections sur son application (optimisation, taux

² Ce cours inclut les notions de limite (définition « intuitive » sans « ε - δ »), continuité et dérivée ainsi que leurs applications à l'étude de courbes, problèmes d'optimisation et taux de variation reliés (voir Hitier, 2024).

reliés, tracé de courbes, règle de l'Hôpital, etc.). Dans les manuels de mécanique, nous nous sommes donc concentrés sur le chapitre concernant la cinématique à une dimension qui introduit les notions de vitesse et d'accélération instantanées et qui fait le pendant du contenu analysé en calcul qui ne traite que de fonctions réelles à une variable. Les chapitres parlant de mouvement circulaire ou de mouvement en deux dimensions ou plus n'ont donc pas été analysés. Dans tous les manuels, nous avons analysé les exemples résolus dans la partie théorique et les exercices proposés aux étudiants en identifiant le bloc pratique (tâches et techniques), ainsi que le bloc théorique (explications présentes ou non dans le manuel). Chaque (sous-)question était considérée comme une tâche ou combinaison de tâches. Si une même sous question demandait de réaliser des activités différentes, chaque activité était considérée comme une tâche.

Manuels de calcul			Manuels de mécanique		
CP	Charron and Parent (2014)	Fr.	Ba	Benson et al. (2015)	Fr. ^a
HA	Hamel and Amyotte (2018)	Fr.	Kt	Knight (2017)	Angl.
HH	Hughes-Hallett (2013)	Angl.	LP	Lafrance and Parent (2014)	Fr.
StEC	Stewart (2013)	Angl.	Sa	Séguin et al. (2010)	Fr.
StC	Stewart (2016) ^b	Angl.	SJ	Serway and Jewett Jr. (2014)	Angl.

^a Traduction française d'un manuel anglophone.

^b Nous avons considéré deux éditions de Stewart puisqu'elles présentent des différences importantes dans les chapitres analysés.

Figure 1 – Manuels analysés, voir Hitier (2024) ou Hitier et González-Martín (2022a) pour les références complètes

Les enseignants participants ont été sélectionnés sur une base volontaire parmi les enseignants de calcul et de mécanique du Cégep de notre étude. Nous avons conduit des entrevues semi-dirigées vers la fin du semestre d'automne 2020 avec EC1–EC4 et EM1–EM3 et vers la fin du trimestre d'hiver 2021 avec EC5 et EM4 dont nous avons aussi observé les cours.

Enseignants de calcul		Enseignants de mécanique	
EC1	Environ 15 ans d'expérience	EM1	Entre 10 et 15 ans d'expérience
EC2	Environ 15 ans d'expérience	EM2	Environ 15 ans d'expérience
EC3	Environ 20 ans d'expérience	EM3	Environ 15 ans d'expérience
EC4	Entre 5 et 10 ans d'expérience	EM4	Environ 20 ans d'expérience
EC5	Environ 5 ans d'expérience		

Figure 2 – Enseignants et leur expérience d'enseignement au niveau collégial au moment de l'étude

IV. LA VITESSE DANS LES MANUELS DE CALCUL ET DE MÉCANIQUE

1. Analyse praxéologique des manuels de calcul

Nous avons analysé un total de 607 tâches réparties en 381 questions et sous-questions d'exemples et exercices. L'ensemble des tâches analysées pour chaque discipline constitue une OMR en lien avec la cinématique en une dimension. Dans cet article, nous nous concentrons sur l'OML autour de la vitesse (dérivée de la position), OML_v (voir Figure 5 en annexe). Cette OML, qui regroupe 42,2 % des tâches analysées dans les manuels de calcul, est prédominante par rapport aux OML autour de l'accélération (en moyenne 16,7 % des tâches) et de la secousse (en moyenne 0,1 % des tâches analysées). Nous retrouvons aussi dans trois manuels (CP, HA et HH), des tâches (en moyenne 1,4 % des tâches analysées) faisant intervenir la dérivée, mais n'appartenant pas aux OMLs précédentes (p. ex., déterminer la dérivée de la vitesse). Parmi les tâches d' OML_v , certaines appartiennent aussi à l'OML autour de l'accélération (en moyenne 8,4 % des tâches analysées, soit près de 20 % des tâches d' OML_v), par exemple des tâches demandant de déterminer si un objet est en train d'accélérer ou décélérer. Cependant aucune de ces tâches n'est présente dans tous les manuels.

Si nous nous concentrons maintenant sur OML_v, nous constatons qu'en moyenne³ 34,1 % des tâches de cette OML font appel à la définition de la vitesse comme taux de variation, 30,5 % s'appuient sur la définition de la vitesse comme dérivée de la position en fonction du temps (essentiellement par l'utilisation de techniques de différentiation), 25,5 % sur la définition de la vitesse comme pente du graphique de la position en fonction du temps, et 14,4 % sur la vitesse comme limite de vitesses moyennes. Cependant, la majorité des tâches de cette OML (64,8 % en moyenne) ne vont pas au-delà des définitions données dans la partie théorique des manuels, c'est-à-dire qu'elles sont basées ou bien uniquement sur l'utilisation de formules (42,2 % des tâches en moyenne), que ce soient les règles de dérivation ou la définition comme limite, ou bien sur la lecture de graphiques (9,0 % des tâches en moyenne). Pour ce qui est des autres tâches dont la technique est justifiée par la définition de la vitesse comme taux de variation, nous constatons que la technologie présentée dans les manuels est le plus souvent déficiente. Par exemple, dans les tâches demandant de déterminer la hauteur maximale d'un corps en chute libre, il faut interpréter que la hauteur maximale est atteinte lorsque la vitesse est nulle. Or, à l'exception de HA, les manuels utilisent ce fait sans autre forme d'explication.

En somme, la vitesse occupe une place importante dans l'application de la dérivée en contexte cinématique dans les manuels de calcul, cependant, la majorité des tâches se résume à une application de définition et de formules. De plus, les tâches permettant d'aller plus loin, en particulier celles basées sur l'aspect covariationnel de la dérivée, par leurs explications limitées, ne s'attachent généralement pas à développer un tel raisonnement.

2. Analyse praxéologique des manuels de mécanique

Comme dans les manuels de calcul, la vitesse instantanée est définie dans les manuels de mécanique à la fois comme limite de vitesses moyennes, dérivée de la position en fonction du temps et pente du graphique position-temps. Cependant, alors qu'en calcul, la vitesse est l'un des aspects de la dérivée (au même titre que la pente de la droite tangente), les manuels de mécanique définissent d'abord la vitesse graphiquement et comme limite de vitesses moyennes avant de mentionner qu'en mathématiques, il s'agit d'une dérivée. De plus, en calcul, les définitions de la vitesse comme limite considèrent toujours des vitesses moyennes exprimées sur un intervalle dont l'une des extrémités est l'instant auquel nous cherchons à connaître la vitesse (p. ex., Figure 3), alors que, dans les manuels de mécanique, ces vitesses moyennes semblent plutôt exprimées sur un intervalle « centré au point d'intérêt » (KT, p. 37) ou au moins, autour de cet instant (p. ex., Sa). Ceci constitue une première différence notable entre calcul et mécanique.

Définition 3.8

Soit x , la position d'une particule à l'instant t . La vitesse instantanée de cette particule au temps $t = a$, notée $v_{t=a}$, est donnée par

$$v_{t=a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \text{ lorsque la limite existe, où } \Delta x = x(a + \Delta t) - x(a).$$

Figure 3 – Définition de la vitesse dans CP (p. 146)

Nous avons analysé 1572 tâches réparties en 1248 questions et sous-questions d'exemples et exercices dans les manuels de mécanique. Contrairement au calcul, l'OML autour de l'accélération (en moyenne 59,6 % des tâches) est presque aussi importante qu'OML_v (en moyenne 60,7 % des tâches, voir Figure 6 en annexe), alors que l'OML autour de la secousse reste marginale (en moyenne 0,2 %

³ Certaines tâches s'appuyant sur plus d'un élément de technologie, la somme des pourcentages qui suivent dépasse 100 %.

des tâches). Nous notons aussi une plus grande proportion de tâches appartenant à la fois à l'OML autour de la vitesse et de l'accélération (67,3 % des tâches d'OML_v). Pour une grande partie de ces tâches (en moyenne 53,7 % des tâches d'OML_v), cela est dû au fait que leur technologie repose (au moins en partie) sur l'utilisation des équations du mouvement uniformément accéléré (MUA) qui sont obtenues à partir de l'accélération constante en se basant sur le fait que l'accélération est la dérivée de la vitesse, elle-même dérivée de la position. Nous constatons aussi qu'en moyenne⁴ 25,1 % des tâches d'OML_v font appel à la définition de la vitesse comme taux de variation, 17,2 % sur la définition de la vitesse comme pente du graphique de la position en fonction du temps, 14,4 % des tâches de cette OML s'appuient sur la définition de la vitesse comme dérivée de la position en fonction du temps (en moyenne 6,9 % en utilisant la dérivation et 7,6 % en utilisant l'intégration), et 0,4 % sur la vitesse comme limite de vitesses moyennes. Ainsi, l'utilisation des formules de dérivation ou de la définition à l'aide d'une limite est beaucoup plus présente en calcul qu'en mécanique où domine l'utilisation des équations du MUA. Ceci constitue déjà une différence importante entre les praxéologies autour de la vitesse en calcul et en mécanique. Nous constatons cependant qu'en mécanique, tout comme en calcul, peu de tâches demandent aux étudiants d'aller au-delà des formules en utilisant un raisonnement faisant appel à la covariation (25,1 % des tâches en moyenne). De plus la technologie y est souvent déficiente, à l'exception cependant des tâches utilisant un diagramme du mouvement. Comme illustré à la Figure 4, de tels diagrammes représentent la position d'un objet à intervalles de temps égaux, ce qui permet de tracer des vecteurs proportionnels à la vitesse moyenne sur un tel intervalle de temps et à l'accélération moyenne sur deux intervalles de temps successifs.

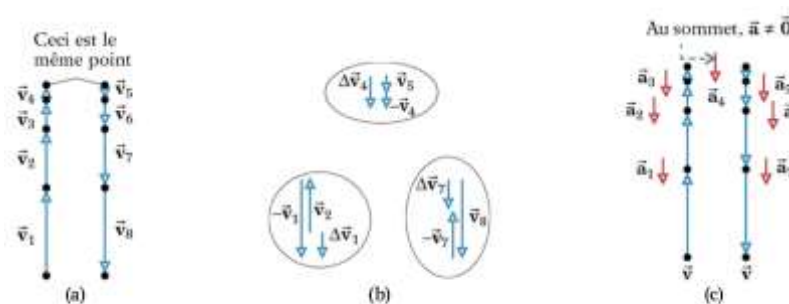


FIGURE 1.19

Le diagramme complet du mouvement d'une balle frappée vers le haut. (a) Les vitesses. (b) Le calcul de l'accélération. (c) Le diagramme complet.

Figure 4 – Exemple de diagramme complet du mouvement dans LP (p. 16).

Ainsi, nous avons pu identifier un petit noyau (5,2 % des tâches analysées en mécanique) de praxéologies autour de la vitesse reposant sur l'application des formules de dérivation et la définition comme limite, et qui sont communes au calcul et à la mécanique. Nous avons aussi pu constater que le contexte graphique occupait une place plus importante en mécanique qu'en calcul. Cependant, ici encore, la majorité des tâches reposent sur l'application de formules (essentiellement les équations de la cinématique), l'aspect covariationnel disparaissant rapidement après leur introduction.

⁴ Certaines tâches s'appuyant sur plus d'un élément de technologie, la somme du pourcentage précédent et de ceux qui suivent dépasse 100 %.

V. LA VITESSE DANS LES CLASSES DE CALCUL ET DE MÉCANIQUE

1. *La vitesse dans les cours de calcul*

Le manuel, StEC, est un point de référence pour les enseignants de calcul. Il est utilisé pour préparer la partie théorique (par exemple, EC5 nous dit qu'en préparant ses cours, il « le feuillette [pour se] rappelle[r] comment StEC présente [les choses et] environ 75 % du temps [il en] suit l'essentiel »), les exemples (par exemple, EC4 suit « surtout [...] les exemples qu'ils ont vus dans le manuel ») et les exercices (par exemple, EC3 « utilise [StEC] comme une source [pour les] tests, surtout comme source de problèmes »). Nous retrouvons ainsi dans le discours de nos participants « l'approche standard » (EC2) observée dans les manuels pour introduire la dérivée et qui consiste à s'intéresser au « problème de la tangente » et au « problème de la vitesse » pour constater que cela mène à une expression similaire : une limite de quotient des différences. Nous retrouvons aussi dans leur discours le constat fait lors de notre analyse de manuel que « la plupart [des] problèmes donnés aux étudiants sont vraiment axés sur [...] les aspects mécaniques d'être capable de résoudre les questions » (EC1). Ainsi, les pratiques autour de la vitesse observée dans les manuels semblent être un bon indicateur de ce qui se fait dans les cours de calcul.

2. *La vitesse dans les cours de mécanique*

Comme en calcul, les pratiques dans les cours de mécanique semblent elles aussi cohérentes avec ce qui ressort de notre analyse des manuels de mécanique. Ceci est particulièrement vrai pour EM1, EM2 et EM3, qui suivent une pédagogie plutôt basée sur l'apprentissage actif et la classe inversée, puisque, dans ce cas, il est souvent demandé aux étudiants de lire une partie du manuel avant chaque cours. Ainsi, pour EM1 l'«enseignant, c'est le manuel et [elle-même, EM1, est] l'auxiliaire d'enseignement». Elle précise aussi que les problèmes de pratique à la maison « sont [pour beaucoup] les mêmes que ceux du livre ».

Dans notre analyse de manuels, nous avons relevé une différence concernant l'intervalle sur lequel sont exprimées les vitesses moyennes dans le processus de la limite menant à la vitesse instantanée. Nos entrevues avec les enseignants nous ont permis de constater que dans les cours de mécanique, où bien cet intervalle de temps n'est pas explicitement spécifié (par exemple EM1 dit « ne [...] pas [être] vraiment certaine d'y avoir réfléchi »), ou bien il est centré autour de l'instant auquel la vitesse instantanée est recherchée. EM2 propose plusieurs raisons à cela, l'une étant la cohérence avec les mesures expérimentales :

Parce que c'est aussi comme ça que nous analysons certaines des données dans les labos [...], où nous avons de fait... le chronomètre à étincelles traçant les points de la rondelle à mesure qu'elle se déplace sur la table. En fait, [...] nous demandons la moyenne sur cet intervalle et nous supposons que c'est le milieu. Donc... lorsque vous tracez la vitesse moyenne, tracez-la au milieu de l'intervalle de temps.

Une autre raison avancée est mathématique, basée sur le théorème des accroissements finis, qui dit « qu'il y a un point [dans l'intervalle] où [la pente de] la tangente correspond à [la pente de] la sécante » (EM2), c'est-à-dire qu'il garantit l'existence d'un instant dans l'intervalle de temps où la vitesse instantanée sera exactement la vitesse moyenne sur l'intervalle. Or, dans les « modèles » (EM1) considérés dans le cours de mécanique, l'accélération est constante et le graphique de la position en fonction du temps est donc une parabole, cas particulier où cet instant se trouve exactement au milieu de l'intervalle.

Nos entretiens avec les enseignants de mécanique nous permettent aussi de mettre en lumière deux points de rupture qui n'étaient pas ressortis aussi clairement de nos analyses de manuels. D'une part, le fait qu'en mécanique, la vitesse n'est pas seulement obtenue comme dérivée de la position, mais aussi comme primitive de l'accélération. D'autre part, le fait que « la vitesse est un vecteur [avec] une magnitude et une direction » (EM3). Il s'agit d'une rupture importante avec le cours de calcul, ce que souligne EM2 :

On parle toujours de mouvements unidimensionnels, mais [...] immédiatement, on parle de vecteurs [...] on dérive des vecteurs [...] des vecteurs qui sont des fonctions du temps [...] donc [...] dans un certain sens, [les étudiants] n'obtiennent jamais cette base à moins qu'ils ne prennent Cal III [le cours optionnel de calcul multivariable] et même alors [...] c'est au quatrième semestre. Nous sommes au premier semestre, donc [...] nous sommes foutus !

Les enseignants mettent alors l'accent sur l'aspect graphique. En particulier, EM2 utilise les diagrammes de mouvement comme une façon de contourner le processus de la limite en travaillant plutôt de façon discrète :

Cette notion de ce qu'on appelle les diagrammes de mouvement, où vous prenez un mouvement continu et vous le divisez en morceaux discrets [...] Et en le divisant en morceaux discrets, vous n'avez pas à vous soucier de [...] « voici une fonction continue, je dois parler de ce taux de variation, je dois introduire des limites bla bla bla », et tout ça. Alors, on peut, en quelque sorte, vous savez, esquiver la balle. C'est comme : « Je vais vous enseigner les dérivées, mais pas vraiment ! Voici un peu de maths discrètes, ouais ! » D'accord, nous dessinons nos points [...], même si c'est fourbe dans le sens où nous ne leur apprenons pas à penser à la vitesse correctement...

Nous voyons se dessiner ici une approche discrète de la dérivée qui est en fort contraste avec l'approche continue du cours de calcul. Nous pensons que cela pourrait être lié au fait que la mécanique est une science expérimentale qui s'appuie sur des données ponctuelles (par exemple celles obtenues avec un chronomètre à étincelles permettant d'obtenir un diagramme du mouvement), ce qui peut donner du sens à cette approche discrète.

VI. DISCUSSION ET CONCLUSION

Notre étude des praxéologies autour de la notion de vitesse dans les cours de mécanique nous a permis d'identifier des éléments théoriques communs entre ces deux cours. Cependant, au-delà de ces éléments, nous notons, d'une part, une notion de vitesse plus riche en mécanique, avec son aspect vectoriel, et d'autre part, la possibilité d'une approche discrète qui peut sembler en contradiction avec l'aspect covariationnel sur lequel repose la notion de dérivée.

Notre analyse de manuels révèle clairement les différences dans les praxéologies autour de la vitesse comme dérivée en contexte cinématique. En calcul, la définition comme limite et l'utilisation de formules de dérivation sont omniprésentes ; de façon paradoxale, les tâches proposées se centrent de façon importante sur ces deux éléments et l'utilisation d'un raisonnement covariationnel et des notions de cinématique est relativement absente. Ceci s'aligne avec les observations faites par rapport aux cours de mathématiques pour d'autres disciplines, qui adoptent des approches « très mathématiques » (p. ex., Biza et al., 2022). En mécanique, nos analyses révèlent également une situation paradoxale : grand nombre de tâches se basent sur l'utilisation de formules déjà prêtes et alors le développement d'un raisonnement cinématique est négligé ; qui plus est, l'utilisation de praxéologies propres aux cours de calcul est très marginale. Par ailleurs, les données provenant des enseignants apportent plusieurs autres informations importantes, indiquant une conception de la vitesse en mécanique qui est plus riche que celle utilisée en calcul. Ainsi, confrontés à des praxéologies très différentes entre les deux cours, il serait logique de se demander quels sont les impacts pour les étudiants et leur compréhension de la vitesse et de la dérivée. Nos résultats indiquent que les étudiants compartimentalisent les praxéologies et qu'ils

s'adaptent aux pratiques à l'intérieur de chacun des cours (p. ex., Hitier et González-Martín, 2022b, 2023).

Nous attribuons certains effets transpositifs que nous avons identifiés au fait que les deux disciplines ont des approches épistémologiques différentes : alors que le calcul étudie des fonctions, la mécanique est une science expérimentale qui s'appuie sur des données ponctuelles. Nous pensons alors qu'une collaboration accrue entre les professionnels de l'enseignement des mathématiques et des sciences (enseignants comme chercheurs) pourrait aider au rapprochement des disciplines et mitiger l'impact des effets transpositifs observés sur les étudiants. Finalement, les résultats présentés dans cet article ne concernent que l'un des aspects de la dérivée dans d'autres disciplines, soit la vitesse en contexte cinématique. Il serait alors intéressant d'étudier les effets transpositifs autour d'autres aspects de la dérivée ou d'autres notions centrales du calcul, comme l'intégrale et leur impact sur l'apprentissage de ces notions par les étudiants.

RÉFÉRENCES

- Biza, I., González-Martín, A. S. et Pinto, A. (2022). 'Scaffolding' or 'Filtering': A review of studies on the diverse roles of calculus courses for students, professionals and teachers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 8(2), 389-418.
- Biza, I., Viirman, O., Bašić, M., Florensa, I., Gueudet, G., Hitier, M., Kontorovich, I., Thoma, A. et Wawro, M. (2023). An introduction to TWG14: University mathematics education. Dans P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztanyi et E. Kónya (dir.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of European Research Society in Mathematics Education, Budapest (CERME13)* (p. 2243-2250). Alfréd Rényi Institute of Mathematics et ERME.
- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir.), *Actes de la 11^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3-22). La Pensée Sauvage.
- Hitier, M. (2024). *Apprentissage de la dérivée au postsecondaire : analyse des pratiques entre les cours de calcul et de mécanique, et identification de ruptures et continuités*. [Thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus. <https://umontreal.scholaris.ca/items/a5fc1f96-0840-4991-afe0-cecae8ae3252>
- Hitier, M. et González-Martín, A. S. (2022a). Derivatives and the study of motion at the intersection of calculus and mechanics: a praxeological analysis of practices at the college level. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 8(2), 293-317.
- Hitier, M. et González-Martín, A. S. (2022b). "It all depends on the sign of the derivative" : A praxeological analysis of the use of the derivative in similar tasks in mathematics and mechanics. Dans J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi et F. Ferretti (dir.), *Proceedings of the Twelfth Congress of European Research Society in Mathematics Education (CERME12), 2-7 février 2022, Bozen-Bolzano, Italie* (p. 2421-2428). University of Bozen-Bolzano et ERME. <http://erme.site/wp-content/uploads/2023/02/indexPROCEEDINGS.pdf>
- Hitier, M. et González-Martín, A. S. (2023). "Like finding the acceleration": A praxeological analysis of a calculus/mechanics task with and without its physics context. Dans P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztanyi et E. Kónya (dir.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of European Research Society in Mathematics Education (CERME13), 10-14 juillet 2023, Budapest, Hongrie* (p. 2379-2390). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. http://erme.site/wp-content/uploads/2024/01/CERME13_proceedings_frontmatter-1.pdf

- Liu, P.-H. (2022). A structuralist view for interpreting the role of mathematics in physics. *ZDM – Mathematics Education*, 54(7), 1657–1670.
- Thompson, P. W. et Harel, G. (2021). Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. *ZDM – Mathematics Education*, 53(3), 507–519.

ANNEXES

Dans ces tableaux, nous distinguons les technologies purement mathématiques (« Maths pures ») des technologies en lien avec le contexte cinématique (« Cinématique »), indépendamment de l'institution à laquelle appartient le manuel (calcul ou mécanique) où elles apparaissent. Les crochets indiquent des éléments présents seulement dans certaines praxéologies en raison des groupements effectués. Nous avons aussi mis en italique des éléments de technologie qui ne sont pas nécessairement explicites dans les manuels.

Type de tâches					
Total	42,2%	Technique	Technologie		
			Maths pures	Cinématique	
	7,3%	Déterminer la vitesse (à un instant quelconque ou la fonction vitesse).			
6,3%	CP 5 (4,9%) HA 5 (5,3%) HH 5 (4,1%) SC 16 (8,7%) SE 9 (8,5%)	Par dérivation, déterminer la dérivée par rapport au temps de la fonction position.	Règles de dérivation.	Vitesse comme dérivée de la position par rapport au temps.	
1,0%	CP 1 (1,0%) HH 1 (0,8%) SC 2 (1,1%) SE 2 (1,9%)	Utiliser la définition formelle de la dérivée pour la fonction position à un temps quelconque.	Algèbre des limites.	Vitesse comme limite de vitesses moyennes.	
	7,4%	Déterminer (ou estimer) la valeur de la vitesse d'un corps.			
2,2%	CP 3 (2,9%) HA 1 (1,1%) HH 1 (0,8%) SC 6 (3,3%) SE 3 (2,8%)	Calculer la limite de vitesses moyennes.	Algèbre des limites.	Vitesse comme limite de vitesses moyennes.	
1,8%	HA 2 (2,1%) HH 1 (0,8%) SC 4 (2,2%) SE 4 (3,8%)	Dériver la fonction position par rapport au temps et évaluer.	Règles de dérivation. Évaluation de fonction.	Vitesse comme dérivée de la position par rapport au temps.	
0,9%	CP 3 (2,9%) HH 1 (0,8%) SE 1 (0,9%)	Calculer, estimer ou lire la pente de la droite tangente au graphique de la fonction position ou du segment de droite si le graphique est linéaire à ce point.	[Formule de la pente.] Dérivée comme pente (de la tangente). [Formule de la pente.]	Vitesse comme pente de (la tangente) au graphique de la position. Vitesse comme dérivée de la position par rapport au temps.	
2,5%	CP 1 (1,0%) HA 1 (1,1%) HH 7 (5,8%) SC 3 (1,6%) SE 3 (2,8%)	Autres techniques	Technologies diverses.		
	3,7%	Déterminer le(s) intervalle(s) de temps où un corps avance dans une certaine direction.			
	HA 7 (7,4%) HH 1 (0,8%) SC 10 (5,4%) SE 5 (4,7%)	Interpréter le signe de la vitesse comme indiquant la direction du mouvement. Déterminer les intervalles de temps où la vitesse a le signe requis (techniques variées)	[Algèbre.] [Lecture de graphiques.] [Propriété des fonctions continues.]	Vitesse comme taux de variation de la position. Le signe de la vitesse détermine la direction du mouvement. [Vitesse comme dérivée de la position.] [Vitesse comme pente du graphique de la position.]	
	1,8%	Déterminer le(s) instants/l'intervalle de temps où un corps est au repos/ne bouge plus.			
1,7%	CP 1 (1,0%) HA 2 (2,1%) SC 5 (2,7%) SE 3 (2,8%)	Interpréter le fait que le corps est immobile comme ayant une vitesse nulle. Trouver les zéros de la vitesse. [Rejeter les solutions négatives]	Résolution d'équations.	Vitesse comme taux de variation de la position. Un corps est au repos quand sa position ne varie plus, c.-à-d. quand sa vitesse est nulle. Le temps n'est pas négatif.	
0,1%	SC 1 (0,5%)	Interpréter le fait que le corps est immobile comme ayant une vitesse nulle. Identifier sur l'axe des abscisses les intervalles de temps où la pente est nulle.	Lecture de graphiques. Un segment de droite horizontal a une pente nulle		
	1,3%	Déterminer la hauteur maximale d'un corps en chute libre.			
	CP 2 (2,0%) HA 2 (2,1%) HH 1 (0,8%) SC 1 (0,5%) SE 1 (0,9%)	Interpréter quand le corps se trouve à hauteur maximale, c.-à-d. quand sa vitesse est nulle. Déterminer l'instant où la vitesse est nulle (techniques variées).	Interprétation des zéros de la dérivée comme extrema (test de la dérivée première). [Résolution d'équations.] [Propriétés de la parabole.] [Évaluation de fonctions.]	Vitesse comme taux de variation de la position. La vitesse à hauteur maximale est nulle.	
	8,4%	Tâches communes avec l'OM locale autour de l'accélération [et de la secousse].			
	CP 2 (2,0%) HA 11 (11,7%) HH 10 (8,3%) SC 25 (13,6%) SE 7 (4,7%)	Techniques variées	Technologies diverses.		
	12,3%	Autres types de tâche.			
	CP 15 (14,7%) HA 13 (13,8%) HH 24 (19,8%) SC 10 (5,4%) SE 8 (7,5%)	Techniques variées	Technologies diverses.		

Figure 5 – OM locale autour de la vitesse instantanée dans les manuels de calcul

Type de tâche	Technique	Technologie	
Total	60,6%	Maths pures	Cinématique
7,5%	Déterminer la valeur de la vitesse d'un corps en mouvement.		
4,6%	Ba 11 (3,1%) Kt 6 (3,6%) LP 10 (7,1%) Sa 28 (5,3%) SJ 13 (3,9%)	Appliquer la stratégie de résolution de problèmes pour un MUA.	Algèbre (résolution d'équation(s)). Équations du MUA.
1,3%	Ba 6 (2,3%) Kt 1 (0,4%) Sa 6 (1,5%) SJ 7 (2,1%)	(Tracer le graphique position-temps.) Calculer ou estimer la pente de la droite tangente au graphique de la fonction position ou du segment de droite si le graphique est linéaire à ce point.	[Formule de la pente.] Dérivée comme pente (de la tangente). [Formule de la pente.] Vitesse comme pente de (la tangente) au graphique position-temps. Vitesse comme dérivée de la position par rapport au temps.
1,1%	Ba 5 (1,4%) Kt 2 (0,9%) LP 3 (2,1%) Sa 2 (0,4%) SJ 3 (0,9%)	Dériver la fonction position par rapport au temps et évaluer.	Règles de dérivation. Évaluation de fonction. Vitesse comme dérivée de la position par rapport au temps.
0,4%	Ba 1 (0,3%) LP 1 (0,7%) Sa 4 (0,8%) SJ 1 (0,3%)	Autres techniques	Technologies diverses.
6,3%	Déterminer la valeur de la position (ou déplacement) d'un corps en mouvement.		
4,4%	Ba 21 (6,0%) Kt 6 (2,7%) LP 6 (4,3%) Sa 24 (4,6%) SJ 15 (4,5%)	Appliquer la stratégie de résolution de problèmes pour un MUA. [Autres techniques complémentaires, p. ex., soustraire les positions pour obtenir le déplacement.]	Algèbre (substitution et résolution d'équation(s)). Équations du MUA. [L'accélération due à la gravité est $-g$.] [La vitesse au repos ou à une position extrême est nulle.] [A vitesse constante, l'accélération est nulle.] [Expression de la vitesse constante.] [Expression du déplacement.]
1,9%	Ba 1 (0,3%) Kt 10 (4,5%) LP 4 (2,9%) Sa 6 (1,1%) SJ 2 (0,6%)	Autres techniques	Technologies diverses.
3,3%	Déterminer l'instant correspondant à une position donnée.		
3,3%	Ba 14 (4,0%) Kt 6 (1,8%) LP 7 (5,0%) Sa 14 (2,7%) SJ 7 (2,1%)	Appliquer la stratégie de résolution de problèmes pour un MUA.	Algèbre (substitution et résolution d'équation(s)). [Propriétés de la parabole (symétrie).] Équations du MUA. [La vitesse au repos ou à une position extrême est nulle.] [Le signe de la vitesse dépend de la direction du mouvement.] [Par symétrie, en chute libre, le temps mis pour revenir à la position initiale est le double du temps mis pour atteindre la hauteur maximale.] [Technologie en lien avec le contexte physique.]
0,1%	SJ 1 (0,3%)	Appliquer la stratégie de résolution de problèmes pour un MUA, la vitesse entre les deux paliers étant obtenue par dérivation.	Techniques de dérivation. Algèbre. Équations du MUA. Vitesse comme dérivée de la position. Sauf un temps positif fait du sens physiquement. L'accélération due à la gravité est $-g$.
2,9%	Déterminer la distance parcourue.		
2,8%	Ba 12 (3,4%) Kt 7 (3,1%) LP 6 (4,3%) Sa 3 (0,6%) SJ 8 (2,4%)	Appliquer la stratégie de résolution de problèmes pour un MUA. [Autres compléments de technique.]	Algèbre (substitution et résolution d'équation(s)). Équations du MUA. [L'accélération due à la gravité est $-g$.] [La vitesse au repos ou à une position extrême est nulle.] [Une vitesse constante correspond à une accélération nulle.] [Expression de la vitesse constante.] [Expression du déplacement.]
0,0%	Ba 1 (0,3%) SJ 2 (0,8%)	Autres techniques	Technologies diverses.
2,5%	Déterminer l'instant où deux corps en mouvement ont la même position.		
	Ba 15 (4,3%) Kt 2 (0,9%) LP 4 (2,9%) Sa 9 (1,7%) SJ 9 (2,7%)	Appliquer la stratégie de résolution de problèmes pour un MUA.	Algèbre (substitution et résolution d'équation(s)). Équations du MUA. [La vitesse au repos ou à une position extrême est nulle.] [Une accélération est égale à l'accélération moyenne sur les intervalles où elle est constante.] [Expression de l'accélération moyenne.] [Le signe de la vitesse détermine la direction du mouvement.] [Technologie en lien avec le contexte physique.]
2,2%	Déterminer l'accélération (constante ou instantanée).		
1,9%	Ba 7 (2,0%) Kt 6 (2,7%) LP 2 (2,4%) Sa 6 (1,1%) SJ 8 (2,4%)	Appliquer la stratégie de résolution de problèmes pour un MUA.	Algèbre (substitution et résolution d'équation(s)). Équations du MUA. [La vitesse au repos est nulle.] [Une vitesse constante correspond à une accélération nulle.] [Le signe de la vitesse dépend de la direction du mouvement.] [Technologie en lien avec le contexte physique.]
0,2%	Kt 2 (0,9%) SJ 1 (0,3%)	Autres techniques	Technologies diverses.
2,2%	Déterminer la hauteur maximale d'un corps en chute libre ou sur un plan incliné sans frottement.		
2,1%	Ba 10 (2,9%) Kt 5 (2,2%) LP 4 (2,9%) Sa 6 (1,1%) SJ 4 (1,2%)	Interpréter quand le corps se trouve à hauteur maximale, c.-à-d. quand sa vitesse est nulle. Déterminer l'instant où la vitesse est nulle (techniques variées).	Interprétation des zéros de la dérivée comme extrema (test de la dérivée première). [Pré-calcul] Équations du MUA. Vitesse comme taux de variation de la position. La vitesse à hauteur maximale est nulle. [Le signe de la vitesse dépend de la direction du mouvement.] [Par symétrie, le temps mis par un corps en chute libre pour revenir à sa position initiale est le double du temps mis pour atteindre sa hauteur maximale.] [Technologie en lien avec le contexte physique.]
0,1%	Ba 1 (0,3%) Sa 1 (0,2%)	Autres techniques	Technologies diverses.
33,6%	Autres types de tâche.		
	Ba 112 (32,0%) Kt 85 (37,9%) LP 38 (27,9%) Sa 218 (41,5%) SJ 100 (30,0%)	Techniques variées	Technologies diverses.

Figure 6 – OM locale autour de la vitesse instantanée dans les manuels de mécanique

ANALYSE DES CONTENUS LIÉS AU CONCEPT D'INTÉGRALE ENSEIGNÉS AU COURS DE CALCUL QUI SONT MOBILISÉS DANS LES PRATIQUES PROFESSIONNELLES DES INGÉNIEURS ÉLECTRICIENS

| KOUASSI* KOUADIO DENIS

Résumé | Le calcul enseigné pendant la formation des ingénieurs ne semble pas pertinent pour les besoins en mathématiques des ingénieurs. Peu d'études portent sur les contenus liés au concept d'intégrale enseignés au postsecondaire, qui sont réellement mobilisés en ingénierie. C'est cet aspect que nous allons davantage creuser, en nous focalisant sur l'ingénierie électrique.

Mots-clés : Cours de calcul, enseignement du concept d'intégrale, pratiques professionnelles des ingénieurs, ingénierie électrique, Théorie Anthropologique du Didactique

Abstract | Calculus taught during engineering training does not seem relevant to the mathematics needs of engineers. Few studies focus on the contents linked to the integral concept taught in postsecondary education, which are actually used in engineering. This is the aspect that we will explore further, focusing on electrical engineering.

Keywords : Calculus courses, teaching the concept of integral, professional engineering practices, electrical engineering, Anthropological Theory of Didactics

I. PROBLÉMATIQUE

1. *Pertinence sociale*

Plusieurs études ont montré que le concept d'intégrale est très important dans les programmes d'ingénierie. Il est utilisé, aussi bien dans le cadre de certains cours professionnels que dans les pratiques de certains ingénieurs sur leur lieu de travail. Par exemple, le concept d'intégrale est mobilisé dans le cours de résistance des matériaux en ingénierie civile (González-Martín et Hernandes-Gomes, 2017). Selon les mêmes auteurs, le concept d'intégrale est utilisé en ingénierie civile et en ingénierie mécanique dans la conception des poutres.

2. *Pertinence scientifique*

Les chercheurs en didactique des mathématiques en ingénierie ont constaté des difficultés de compréhension des interprétations du concept d'intégrale définie par les étudiants. Le concept d'intégrale définie a trois principales interprétations, à savoir une aire sous une courbe, une anti-dérivée et une addition de pièces (Adding up pieces - AUP - Jones, 2013). L'interprétation de l'intégrale comme une aire sous une courbe est très importante, car elle va au-delà du contexte des mathématiques. Par exemple, entre autres, elle est utilisée pour le calcul de la distance totale parcourue, sachant la fonction de la vitesse. L'interprétation de l'intégrale comme une anti-dérivée permet aux étudiants d'être prêts à passer à l'apprentissage du théorème fondamental du calcul et au développement des techniques de calcul des anti-dérivées (Stevens et Jones, 2023). Ces dernières années, plusieurs chercheurs se sont penchés sur l'interprétation de l'intégrale comme une addition de pièces. Oehrtman et Simmons (2023) définissent l'AUP comme une somme de quantités, et ils suggèrent que les étudiants utilisent la définition quantitative de l'AUP dans leur raisonnement, car cela favorise le développement de la

* Université de Montréal – Canada – kouassikdenis@yahoo.fr

capacité de modélisation avec l'intégrale définie dans différents contextes. Or, certains étudiants interprètent l'intégrale définie uniquement comme une aire sous une courbe. Ils rencontrent des difficultés dans l'interprétation quantitative de l'intégrale. Par exemple, des étudiants pourraient traiter dx comme une quantité infinitésimale de la quantité représentée par l'axe des x (Jones, 2015). Cela pourrait entraîner des difficultés dans la compréhension du produit infinitésimal $f(x) dx$ dans lequel dx est utilisé. Dès lors, les étudiants trouvent que le cours sur l'intégrale n'est pas pertinent pour leur formation en ingénierie et leur future carrière d'ingénieur. Parfois, des contenus sur l'intégrale, non appris au cours de calcul, sont introduits à des cours d'ingénierie. C'est le cas du peigne de Dirac qui est mobilisé en ingénierie électrique, alors qu'il n'a pas été enseigné au cours de calcul (Hochmuth et Peters, 2020). Cela traduit une déconnexion entre les contenus sur l'intégrale enseignés et ceux qui sont mobilisés sur le lieu de travail des ingénieurs. Ces problèmes provoquent la réduction de la mobilisation et de l'intérêt des étudiants pour le cours sur l'intégrale. Il s'en suit une hausse du taux d'échec au cours de calcul, où l'intégrale est enseignée, et l'abandon des programmes d'ingénierie.

3. Lacune constatée dans la recherche et nouvel angle de recherche

Peu d'études portent sur l'écart entre les contenus liés au concept d'intégrale réellement mobilisés dans les pratiques professionnelles des ingénieurs sur leur lieu de travail et ceux enseignés au cours de calcul. La lacune perçue dans la littérature pourrait être comblée sous l'angle du problème de la deuxième discontinuité de Klein (2004). La deuxième discontinuité de Klein concerne les difficultés rencontrées par les étudiants qui retournent enseigner les mathématiques au secondaire. Ces difficultés apparaissent dans le transfert des connaissances acquises à l'université vers des connaissances pertinentes pour un enseignant. En effet, les enseignants percevaient un écart entre les contenus mathématiques appris pendant leurs formations initiales à l'université et les contenus mathématiques qu'ils doivent mobiliser pour leur enseignement au secondaire. La deuxième discontinuité de Klein semble apparaître lorsque les futurs ingénieurs en électricité deviennent des ingénieurs, et ils doivent mobiliser les contenus liés au concept d'intégrale dans leurs pratiques professionnelles. Cela nous conduit à la question de recherche suivante : quels sont les contenus liés au concept d'intégrale, enseignés dans le cours de calcul au postsecondaire, qui sont réellement mobilisés dans les pratiques professionnelles des ingénieurs électriciens, et comment sont-ils mobilisés ?

II. CADRE THÉORIQUE

Nous nous appuyerons sur la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD-Chevallard, 1999), comme cadre théorique. L'approche anthropologique permet d'aborder la didactique des mathématiques dans le contexte d'autres disciplines, telles que l'ingénierie, entre autres. La notion d'institution nous permettra d'envisager séparément les cours de calcul et le lieu de travail des ingénieurs électriciens. Cela permettra de mieux appréhender les contenus liés au concept d'intégrale mobilisés dans le contexte de chacune de ces institutions. La notion de praxéologies nous permettra d'organiser les contenus liés au concept d'intégrale selon le même modèle de quadruplet $[T/\tau/\theta/\Theta]$, dans les deux institutions. Cela facilitera la comparaison des contenus dans les deux institutions. La notion d'organisation didactique (OD) nous permettra, à partir des moments didactiques, d'observer comment les contenus associés au concept d'intégrale sont mobilisés dans chaque institution.

III. MÉTHODOLOGIE

Nous mènerons une recherche qualitative qui nous permettra de répondre aux questions sur la manière dont les contenus liés au concept d'intégrale sont mobilisés. L'étude du cas de la deuxième discontinuité de Klein en ingénierie électrique est notre cadre méthodologique. Notre posture sera

interprétative, car elle nous permettra de rapporter les significations que les participants à notre recherche donneront à leurs pratiques. Nous analyserons les documents de cours et de travaux dirigés des enseignants de calcul, des documents de travail des ingénieurs électriciens et les verbatims d'entretiens pour construire les praxéologies et les OD dans les différentes institutions. Les résultats des analyses nous fourniront les contenus liés au concept d'intégrale enseignés au cours de calcul qui sont réellement mobilisés dans les pratiques professionnelles des ingénieurs électriciens.

RÉFÉRENCES

- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue)*, 19(2), 221-265. <https://revue-rdm.com/1999/1-analyse-des-pratiques/>
- González-Martín, A. S. et Hernandez-Gomes, G. (2017). How are calculus notions used in engineering? An example with integrals and bending moments. Dans T. Dooley et G. Gueudet (dir.), *Proceedings of the tenth congress of the european society for research in mathematics education (CERME10), 1-5 février 2017, Dublin, Irlande* (p. 2073-2080). DCU Institute of Education et ERME. <https://hal.science/hal-01941357/>
- Hochmuth, R. et Peters, J. (2020). About the “Mixture” of discourses in the use of mathematics in signal theory [À propos du « mélange » de discours dans l'utilisation des mathématiques en théorie du signal]. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 22(4), 454-471.
- Jones, S. R. (2013). Understanding the integral: Students' symbolic forms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 122-141.
- Jones, S. R. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *The Journal of Mathematical Behavior*, 38, 9-28.
- Klein, F. (2004). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis* (vol. 1). Courier Corporation.
- Oehrtman, M. et Simmons, C. (2023). Emergent quantitative models for definite integrals. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 9(4), 1-26. <https://doi.org/10.1007/s40753-022-00209-5>
- Stevens, B. N. et Jones, S. R. (2023). Learning integrals based on adding up pieces across a unit on integration. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 9(1), 118-148.

LES USAGES DU REGISTRE GRAPHIQUE PAR LES ÉTUDIANTS FUTURS ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES : UN CHEMIN À TRACER

| TRAIN* GRÉGORY ET COULANGE** LALINA

Résumé | À partir d'une expérimentation menée auprès d'étudiants de première année de master se destinant au métier d'enseignant, nous interrogeons leurs pratiques d'utilisation du registre graphique des fonctions afin de mieux cerner leur rapport à ce registre et de mieux comprendre les difficultés associées.

Mots-clés : fonctions au lycée et à l'université, registres de représentation, points de vue global/ponctuel/local.

Abstract | Based on an experiment conducted with first-year master's students preparing for a teaching career, we examine their practices in using the graphical representation of functions in order to better delineate their relationship with it and to gain a deeper understanding of the associated difficulties.

Keywords: Functions in high school and university, registers of representation, global/pointwise/local perspectives.

I. PROBLÉMATIQUE ET CADRAGE DE L'ÉTUDE

Nous nous intéressons à l'enseignement et à l'apprentissage des fonctions dans un contexte spécifique, celui d'étudiants en mathématiques se préparant à exercer le métier d'enseignant au secondaire. Ancrée dans les enjeux de la seconde discontinuité de Klein (Grenier-Boley, 2024), notre recherche vise à approfondir la compréhension des difficultés rencontrées par ces futurs enseignants dans ce domaine d'étude, en s'intéressant tout particulièrement aux usages du registre graphique des fonctions et les pratiques qui y sont associées.

L'enseignement et l'apprentissage des fonctions ont fait l'objet de nombreuses recherches régulièrement renouvelées depuis plusieurs décennies (Dubinsky et Harel, 1992 ; Tall 1996 ; Kieran, 2007 ; etc.). À l'Université, l'étude des fonctions gagne en complexité avec l'introduction de l'analyse, marquant le passage d'un point de vue ponctuel/global des fonctions à une articulation et une mise en dialogue avec un point de vue local¹ (Vandebrouck, 2011 ; Rogalski, 2008). Cette diversité de points de vue doit par ailleurs être mise en relation avec celle des différents registres de représentations des fonctions (Duval, 1993).

Concernant plus particulièrement les usages du registre graphique et/ou leurs mises en lien avec le registre des écritures algébriques des fonctions, plusieurs études font le constat de difficultés d'étudiants. Ces difficultés concernent notamment la mise en lien entre la représentation graphique d'une fonction et celle de sa dérivée première et/ou seconde. (Nemirovsky et Rubin, 1992 ; Aspinwall et al., 1997 ; Baker et al. 2000) ou encore de certaines de ses propriétés, telles que la périodicité (Thompson, 1995). La prédominance du point de vue ponctuel sur le registre graphique fait obstacle à la prise en compte des covariations entre variable indépendante et variable image en jeu dans ce registre (Thompson, 1995). Une telle prise en compte est par ailleurs jugée essentielle (Sierpiska, 1988)

* Université de Bordeaux — France — gregory.train@u-bordeaux.fr

** Université de Bordeaux — France — lalina.coulangue@u-bordeaux.fr

¹ Ces points de vue renvoient aux différentes propriétés des fonctions : ponctuelles en un point d'abscisse x_0 , dépendantes uniquement de la valeur de la fonction en ce point ; globales, valables sur des intervalles et locales, dépendantes des valeurs de la fonction au voisinage d'un point.

pour faciliter des tâches de conversion (Duval, 1993) entre le registre graphique et celui des écritures algébriques des fonctions. Les étudiants rencontrent également des difficultés à faire preuve de flexibilité dans le choix du registre de représentation le plus adapté à une tâche donnée (Maschietto, 2001 ; Vandebrouck, 2011). Ce manque de flexibilité et d'autonomie est d'autant plus marqué quand il s'agit de conduire des raisonnements locaux, *ie* portant sur des propriétés locales des fonctions (Maschietto, 2001 ; Praslon, 2000).

Du côté des pratiques enseignantes au lycée, Bloch (2003) révèle l'existence de malentendus quant aux usages du graphique par les enseignants, soulignant un décalage entre ce que le professeur estime que l'élève doit « voir » dans le graphique et ce que celui-ci perçoit réellement. Plus largement, Biza et al. (2009) observent une grande variabilité dans le rôle et la place accordés aux graphiques dans les pratiques enseignantes du secondaire, avec des attentes parfois très différenciées en termes de contrat didactique associé (Brousseau, 1984).

Nous présentons les résultats d'une expérimentation² menée auprès d'étudiants en première année de Master se destinant au métier d'enseignants de mathématiques. A partir de l'examen de tâches de détermination de fonctions dans le registre graphique, cette étude vise à mieux cerner le rapport de ces étudiants à ce registre et à mieux comprendre les difficultés qui y sont associées.

II. MÉTHODOLOGIE DE L'ÉTUDE

Selon Duval (1993), la coordination entre registres sémiotiques constitue une activité cognitive essentielle aux apprentissages conceptuels. La correspondance de deux représentations appartenant à des registres différents prend appui sur l'association des *unités signifiantes* élémentaires constitutives de chacun des deux registres, l'étude de cette mise en correspondance permettant d'évaluer la congruence entre ces registres³ : par exemple, « l'ensemble des points qui ont une abscisse positive » et sa conversion « $x > 0$ » nécessite de combiner deux unités signifiantes « > 0 » pour pallier l'absence, dans l'écriture algébrique, d'une unité signifiante correspondante à « positif ». Duval (1993) souligne par ailleurs que la bidimensionnalité du registre graphique requiert d'identifier des unités signifiantes au-delà du tracé lui-même, en tenant compte de ses relations avec les autres éléments du graphe⁴.

Nous mettons à l'étude dans ce texte des tâches de détermination de fonctions dans le registre graphique, impliquant le traitement et la conversion de représentations entre ce registre et celui des expressions algébriques et intégrant la prise en compte de propriétés locales des fonctions (Vandebrouck, 2011). Notre objectif est de documenter les phénomènes liés à l'articulation des différents points de vue sur les fonctions au sein de l'un et l'autre de ces registres en lien avec la discrimination d'unités signifiantes associées. Les analyses conduites dans la section suivante se centrent sur le repérage et à la discrimination des unités signifiantes mobilisées dans les activités de traitement et de conversion entre registres. En particulier, nous cherchons à examiner dans quelle mesure le registre graphique est susceptible de « supporter » une perspective locale. Nous prenons ainsi

² Cette expérimentation s'inscrit dans le projet STEP (Soutien à la Transformation et l'Expérimentation Pédagogique) de l'Université de Bordeaux. Nous remercions vivement Marie-Line Chabanol, Vincent Bruneau, Sylvain Golénia et Laurent Herr, enseignants-chercheurs à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux (IMB), pour leur précieuse contribution et la qualité des échanges qui ont enrichi la conception de cette expérimentation.

³ Duval (1995) identifie trois critères de congruence : la possibilité d'une *correspondance « sémantique »* des unités signifiantes, l'*univocité « sémantique » terminale* et l'ordre possible d'appréhension de ces unités dans les deux registres.

⁴ Par exemple, pour une fonction affine, l'angle entre le tracé et l'axe horizontal est constitutif d'une unité signifiante. Plus largement, dans le cas simple de la représentation de droites dans un graphe cartésien, Duval (1988) identifie jusqu'à huit valeurs à discriminer relevant de trois unités signifiantes distinctes.

en compte dans nos analyses⁵ qu'une même unité signifiante, propre à un registre donné, peut être appréhendée sous différents points de vue — ponctuel, global, local : typiquement, une valeur positive de la dérivée d'une fonction en un point contribue à caractériser la courbe représentative de cette fonction au voisinage de ce point. De manière similaire, un point de vue local posé sur une fonction dans un registre donné peut donner lieu au repérage de différentes unités signifiantes ; typiquement, le comportement d'une fonction à l'infini peut être diversement caractérisé du point de vue des unités signifiantes : une courbe qui monte, plus ou moins rapidement, en oscillant, etc.

Nous avons mené une expérimentation sur deux années (2023 et 2024) auprès de 31 étudiants en première année de Master MEEF (majoritairement issus d'une Licence de Mathématiques). Cette expérimentation s'est déroulée en deux phases : un questionnaire de 10 tâches⁶, incluant des activités de conversion entre registres symbolique et graphique. L'analyse de ces productions a conduit à la sélection de certaines tâches pour la seconde phase, choix fondé non pas que sur des taux de réussite mesurés (par exemple, la tâche n° 1 largement réussie a fait l'objet d'un épisode correctif) mais surtout sur des hypothèses concernant la mobilisation du registre graphique dans la résolution des tâches à l'étude, l'identification d'unités signifiantes et/ou leur nature en tant qu'entités « médiatrices » dans les activités de conversion entre registres. La seconde phase a ainsi consisté en l'organisation d'épisodes correctifs ciblés, au cours desquels un étudiant volontaire présentait la correction d'une tâche devant le groupe, l'enseignant modérant les échanges sans par ailleurs s'interdire d'y participer. De telles modalités visaient en particulier à mettre en discussion les usages possibles du registre graphique dans la résolution des tâches et l'hypothèse que de tels échanges pourraient participer à la renégociation et l'enrichissement de tels usages⁷.

III. ANALYSE DES RÉSULTATS

1. Étude de la tâche n° 1

Tâche n° 1 : Vrai ou Faux ? Justifier On suppose f définie et dérivable au voisinage de $+\infty$. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$

Figure 1 – Énoncé de la première tâche

Cette première tâche propose d'évaluer la véracité d'une proposition universellement quantifiée (implicitement) mettant en lien la limite d'une fonction et celle de sa dérivée. Il s'agit de nier une telle proposition en fournissant un contre-exemple. Cette tâche, relativement simple pour des étudiants de ce niveau, est largement réussie (97 % de réussite). L'examen des réponses montre qu'elles sont exclusivement formulées dans le registre des écritures algébriques, confirmant la prédominance de ce registre à l'université. De plus, ces réponses apparaissent peu variées (Figure 2).

⁵ Ceci nous conduit par ailleurs, à considérer, au-delà du seul registre des écritures algébriques des fonctions envisagé par Duval (1993), de nouveaux signes associés aux propriétés locales des fonctions (typiquement, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$; $\int_a^x f$; f' , etc.), ce que d'aucuns dénomment parfois registre *symbolique* des fonctions.

⁶ L'une des tâches est extraite d'une brochure IREM (IREM 2015).

⁷ Cette séance de formation s'inscrit par ailleurs dans un module plus large de formation sur l'enseignement et l'apprentissage des fonctions au secondaire dont l'un des objectifs affichés est de participer à faire évoluer le rapport d'étudiants se destinant à l'enseignement au registre graphique.

Type de contre-exemple	$f : x \rightarrow x$	$f : x \rightarrow ax$ $a \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$f : x \rightarrow ax + b$ $a \in \mathbb{N}^*; b \in \mathbb{N}^*$	$f : x \rightarrow \ln x$
%	39 %	39 %	6 %	16 %

Figure 2 – Variété des réponses proposées

Cette faible diversité nous semble renvoyer à une stratégie de résolution dominante chez les étudiants. Une telle stratégie, confinée au registre des expressions algébriques, consiste en un examen assez systématique d'un ensemble de fonctions « connues », mais en l'absence d'une forme de contrôle sur la conduite et l'organisation de l'examen, à l'instar des propos recueillis dans une copie d'étudiant⁸ : « J'ai essayé avec des fonctions plus simples, comme $f(x) = x$. ».

Cette première tâche, issue d'une série de tâches similaires destinées aux élèves de lycée, est présentée dans une brochure de l'IREM (IREM, 2015) consacrée à l'enseignement des fonctions et conçue pour les enseignants de lycée. Les deux fonctions $x \rightarrow \sqrt{x}$ et $x \rightarrow x + \sin x$ y sont notamment proposées comme solutions possibles (formulées dans le registre des écritures algébriques). Lors de l'épisode correctif, nous avons souhaité interroger les étudiants sur les liens potentiels entre les deux graphiques suivants (Figure 3) et la tâche proposée. En particulier, le second graphique est précisément celui de la fonction $x \rightarrow x + \sin x$, donnée en exemple dans la brochure. L'objectif était d'examiner dans quelle mesure ces fonctions pouvaient ou non être identifiées comme des contre-exemples potentiels au regard de leurs représentations respectives dans le registre graphique.

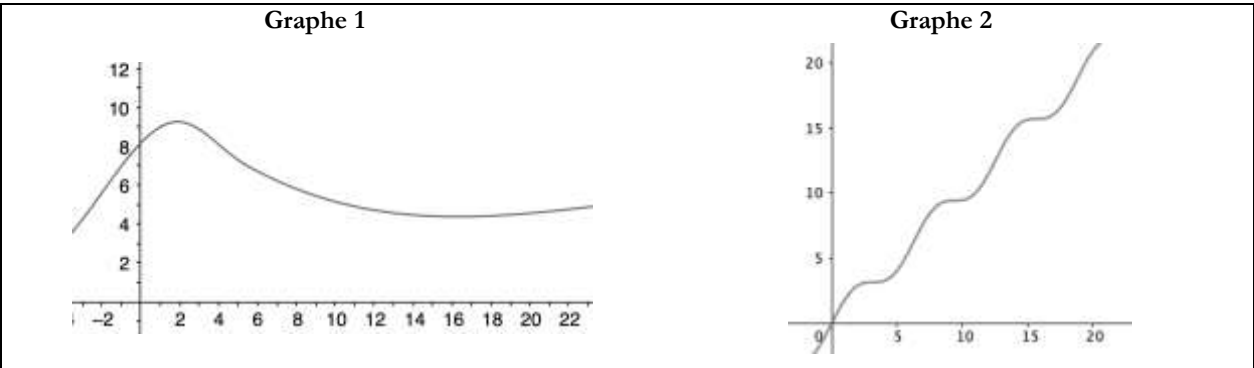


Figure 3 – Les deux représentations graphiques mises à l'étude

Est en jeu ici l'identification de différentes unités signifiantes concernant l'allure des courbes au voisinage de l'infini (Figure 4) et leurs mises en lien avec des propriétés locales des fonctions proposées.

Registre graphique	Registre symbolique
Description verbale d'unités signifiantes visuelles	Unités signifiantes symboliques
La courbe monte	$\lim_{+\infty} f = +\infty$
La montée de la courbe est régulière	$\lim_{+\infty} f' = a$ avec $a \in \mathbb{R}$
La courbe oscille en montant	$\lim_{+\infty} f'$ n'existe pas

Figure 4 – Les unités figurales signifiantes en jeu dans la tâche d'identification des contre-exemples

⁸ Autrement dit, la question ne réside pas tant dans la disponibilité d'un répertoire de fonctions de référence chez les étudiants que dans les mécanismes mobilisés pour exploiter ce répertoire lors de la production du contre-exemple.

Invariablement au cours des deux années d'expérimentation, les étudiants se sont d'abord trouvés déconcertés par cette demande, leurs réactions se concentrant essentiellement sur la pertinence de la question posée.

- [Ens] : Que pourriez-vous dire de ces deux graphiques par rapport à la tâche n° 1 que vous aviez à traiter ?
- [Etudiant n° 1] : Un graphique, ça ne prouve rien.
- [Etudiant n° 2] : En plus, on ne sait pas ce qui se passe à l'infini.

Une majorité d'étudiants tend ainsi à remettre en cause la légitimité du recours au registre graphique dans leurs raisonnements, fermant ainsi la porte à toute réflexion sur les possibilités d'usages de ce registre. Pour autant, la « levée » explicite de cette restriction (sans rentrer en contradiction avec le contrat de preuve algébrique) lors de la suite de l'épisode correctif amène rapidement les étudiants à identifier les deux graphes comme de possibles contre-exemples, impliquant notamment le repérage d'unités figurales signifiantes relatives à l'allure des deux courbes au voisinage de l'infini.

Cet épisode permet deux constats. D'une part, la « renégociation locale⁹ » menée auprès des étudiants sur le registre graphique a mis en évidence que ce dernier pouvait utilement soutenir un point de vue local des fonctions, à travers l'identification d'unités signifiantes et informatives du point de vue de leurs propriétés. D'autre part, il apparaît que les tâches du type de la tâche n° 1 peuvent être abordées en recourant à des stratégies de résolution parfois peu élaborés et interne au seul registre algébrique. Or, le repérage d'unités signifiantes au sein du registre graphique peut, selon nous, enrichir de manière significative la recherche de contre-exemples, fussent-ils algébriques. De ce point de vue, le recours au registre graphique présente un intérêt réel dans la construction du contre-exemple $x \rightarrow x + \sin x$, cité dans la brochure IREM (IREM, p.59) mentionnée plus haut, quand cette dernière semble minimiser l'intérêt d'une telle démarche : « les recherches de contre-exemples graphiques risquent de ne pas être très convaincantes »

2. Étude de la tâche n° 2

Tâche n° 2 : On considère les deux fonctions suivantes f et g définies par $f(x) = \sin(3x + 5)$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Tracer à main levée la représentation graphique de la fonction fg

Figure 5 – Énoncé de la seconde tâche

Cette seconde tâche, qui consiste à produire l'allure du graphe du produit de deux fonctions connaissant l'expression algébrique de chacun des facteurs, mobilise potentiellement deux types d'activités : une conversion des expressions algébriques des deux fonctions vers le registre graphique, une activité de traitement dans ce même registre. Cette tâche est particulièrement peu réussie avec seulement 13 % de propositions exactes. Nous résumons¹⁰ dans le tableau suivant (Figure 6) les différentes prises en compte d'unités figurales signifiantes réalisées dans la construction de l'allure du graphe de fg .

⁹ Renégociation portant y compris sur des usages possibles ici de ce registre pour « interroger » des comportements de fonctions à l'infini.

¹⁰ Nous proposons en annexe quelques productions d'étudiants associées.

Registre graphique	Registre symbolique	Pourcentage d'identification
Description verbale d'unités signifiantes visuelles	Unités signifiantes symboliques	
La courbe proche de l'axe des abscisses à l'infini	$\lim_{\pm\infty} fg = 0$	96%
La courbe touche l'axe des abscisses	Les racines de fg	80%
La courbe traverse l'axe des abscisses	Signe de fg	70%
L'axe des ordonnées n'est pas axe de symétrie de la courbe	La non parité de fg	57%
La courbe « comprise » entre les courbes des fonctions g et $-g$	si $ f(x) \leq 1$ alors $ f(x)g(x) \leq g(x)$	23%
La courbe qui descend et proche de l'axe des ordonnées	$\lim_{0^+} fg = -\infty$	19%
Les points de contact entre la courbe de fg et celle de g et $-g$	Les racines de $g(x) = f(x)g(x)$ (les extremums de f) (les racines de f')	15%

Figure 6 – Les unités figurales signifiantes mobilisées dans la construction de l'allure du graphe de fg

Notons d'abord que la statistique ci-dessus exclut 16 % des copies d'étudiants qui se limitent à un traitement algébrique (étude de la fonction et calcul de la dérivée) sans aboutir ni produire de graphe. Les résultats obtenus permettent de faire différents constats. Les unités figurales majoritairement identifiées, au sein du registre symbolique (et correctement converties dans le registre graphique) sont celles classiquement identifiées dans une étude de fonction (calcul des limites, zéros de la fonction, etc.). Si ces dernières participent à alimenter une première allure du graphe, les autres unités figurales sont inégalement investies. Parmi les moins investies, figurent les unités figurales nécessitant un traitement au sein du registre symbolique pour être converties en unités figurales signifiantes dans le registre graphique. Ainsi, moins d'un quart¹¹ des étudiants identifient la région du plan cartésien dans laquelle se situe le graphe. Ils sont encore moins nombreux à identifier les points de contact entre la courbe de fg et celle de g (et ceci même lorsque la courbe de g est explicitement tracée). Un autre phénomène en jeu est celui d'unités figurales graphiques erronées (une courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, une courbe qui monte en s'approchant de l'axe des ordonnées pour des valeurs positives proches de zéro¹²) sans être mises en correspondance avec les unités figurales associées du registre symbolique. En particulier, si des moyens de contrôle simples peuvent être utilisés (évaluation ponctuelle de la fonction fg en une valeur proche de zéro, en une valeur et son opposé, etc.), ces derniers ne semblent pas mobilisés.

De façon plus générale, une telle tâche a révélé des étudiants relativement démunis. Toutefois, son étude en formation leur a permis de s'engager dans un exercice de mise en correspondance d'unités signifiantes — autres que celles héritées classiquement de l'étude d'une fonction — dans les registres graphique et symbolique. Cette mise en correspondance d'unités signifiantes, conjuguant aspects ponctuels, globaux et locaux des fonctions, a permis d'informer l'allure de la courbe, que cela concerne son allure globale, des valeurs ponctuelles ou encore son comportement local dans des voisinages.

¹¹ Parmi ceux qui ont proposé un tracé de l'allure du graphe

¹² Cette erreur va d'ailleurs souvent de pair avec l'erreur sur la parité supposée de fg

3. Étude de la tâche n° 3

Tâche n° 3 : Ci-dessous est donnée la courbe représentative d'une fonction f . Tracez à main levée la courbe représentative de la fonction qui à x associe $\int_{-2}^x f(t)dt$

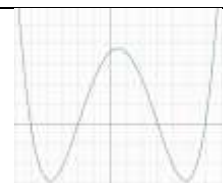


Figure 7 – Énoncé de la troisième tâche

Dans cette troisième tâche, il s'agit, à partir d'une fonction f donnée dans le registre graphique, de déterminer l'allure du graphe de la fonction $F : x \rightarrow \int_{-2}^x f(t)dt$. En particulier, la fonction f est choisie de telle manière à privilégier l'émergence de stratégies relevant de la seule activité de traitement au sein du registre graphique. À l'instar de la tâche n° 2, celle-ci a été mal réussie. Ici, nous commençons par analyser des extraits de transcriptions des épisodes correctifs, en revenant en fin de section sur quelques résultats plus quantitatifs.

Dans cet épisode correctif, un étudiant expose au tableau devant la classe la manière dont il a procédé pour construire mais surtout préciser l'allure du graphe de F .

Échange n° 9 — (2'37"40)

[Étudiant 1] : Du coup, là on peut déjà remarquer des points particuliers. Tous les points d'inflexion, tous les points où la courbe va changer de croissance. Et après on peut aussi rajouter un nombre de tangentes suffisantes pour avoir une représentation de la courbe qui ne soit pas trop mal.



La stratégie qu'il détaille dans un premier temps est accompagné du placement de différents points remarquables et du tracé des tangentes nécessaires à la construction du graphe de F . Cette approche, qui repose sur le traitement d'une unité figurale prise au sein du registre graphique (la valeur prise par f en un point) et son interprétation au sein de ce même registre sur le comportement local du graphe de F au voisinage de ce point (la pente de la tangente au graphe de F en ce point), dans une construction de « proche en proche », rencontre aisément l'accord des autres étudiants. Mais dans un second temps, ce même étudiant s'engage dans une explication différente. Il procède à la construction progressive de la courbe de F , tout en pointant sur le graphe de f affiché au tableau, les variations de l'aire « accumulée » sous la courbe. Cette nouvelle stratégie, nettement éloignée de la première, semble ne pas trouver instantanément l'adhésion du reste de la promotion.

(Échange n° 56 – 16'23"11) :

- [Étudiant 1] : En moins 2, du coup, on est à 0 et on n'avance pas, donc on reste à 0. Et plus on avance dans la courbe, et donc il faut que vous voyiez que, à partir de moins 2, on augmente, donc l'aire augmente. Donc à partir de moins 2 ici, on a une aire sous la courbe qui devient positive. On sait que notre fonction est croissante. En plus de ça, elle croît de plus en plus jusqu'à un point ici, un point d'inflexion. Après, elle va croître toujours, mais de moins en moins. On a bien un point d'inflexion un petit peu après, par-là quoi.
- [Étudiant 2] : Je comprends que c'est avec les aires mais je n'ai pas encore tout compris.

Ce qui semble faire difficulté ici est le changement du système d'unités figurales dans la procédure de construction du graphe : un traitement de l'unité figurale correspondante à l'accumulation de l'aire sous

la courbe de f dans sa mise en lien avec l'évaluation ponctuelle de F au sein du registre graphique. Ce procédé de construction de « proche en proche », reposant sur la mise en système de ces unités figurales, permet par ailleurs de faire émerger d'autres unités significantes. En particulier, dans l'extrait ci-dessous, le positionnement relatif des extremums locaux de F devient nouvelle unité figurale significative dans la construction du graphe :

- [Étudiant] : Et du coup, ici, on sait que l'extrémum, il est supérieur à zéro, parce que l'aire qu'on a ici est plus grande que l'aire qu'il y a là. Donc de la même manière, on sait que le point est plus haut, que le cumul des deux aires va rester positif.

Ce même système d'unités significantes prenant en compte le caractère algébrique de l'aire sous la courbe permet d'étendre la construction du graphe à l'intervalle $] -\infty ; -2]$.

- [Étudiant] : Et il y a une autre subtilité après, c'est quand on est derrière moins deux. Là du coup, effectivement l'aire est négative, mais comme on part d'une borne qui est à moins 2, l'aire de moins deux à moins quatre, c'est moins l'aire de moins quatre à moins deux donc l'aire est positive, vu qu'ici elle est en dessous. C'est pour ça qu'ici on remonte.

Cet épisode illustre une interprétation du théorème fondamental de l'analyse en termes d'unités figurales significantes au sein du registre graphique. Un tel usage semble faire difficulté à bon nombre d'étudiants, ceci dans la mesure où dans 16 % des copies, la réponse évoque une aire sous la courbe sans lien avec la notion de fonction ou encore que dans plus de 30 % des réponses, la courbe n'est tracée que sur l'intervalle $[-2 ; +\infty[$.

IV. CONCLUSION

Nos expérimentations mettent en lumière la persistance de difficultés chez les étudiants à considérer le registre graphique comme support d'une analyse locale des fonctions. Ces difficultés se traduisent tant par la complexité des mises en correspondance entre unités significantes issues de différents registres que par une rigidité dans l'adoption de points de vue flexibles (local, global, ponctuel) sur ce registre.

L'étude de ces tâches en formation a permis une première sensibilisation à ce jeu d'identification d'unités significantes et contribue ainsi à redonner une place à un registre graphique quasi-oublié à l'Université¹³. Par ailleurs, parce que ces tâches mobilisent majoritairement des connaissances acquises au secondaire, elles offrent aux futurs enseignants l'opportunité d'illustrer des usages inédits du registre graphique — comme le suggère la tâche n° 1 — et d'ouvrir la voie à de nouvelles explorations¹⁴, telles que celles proposées par les tâches n° 2 et n° 3, pour organiser les nécessités d'un jeu d'identification d'unités entre registres.

En ce sens, cette expérimentation constitue une première pierre dans la formation des enseignants, posant les jalons pour que ces pratiques puissent irriguer dans le secondaire, même si le chemin à parcourir reste, sans nul doute, encore long.

¹³ Dans une étude déjà ancienne, Vandebrouck (2011) faisait le constat de la quasi-disparition du registre graphique à l'Université. Les résultats de notre étude semblent montrer que la situation actuelle n'a pas tout à fait évolué...

¹⁴ Nous utilisons le terme « explorations » dans la mesure où Vandebrouck (2011) souligne que l'usage majoritaire au lycée du registre graphique est avant tout illustratif, convoqué très largement en fin de l'étude d'une fonction conduite algébriquement.

RÉFÉRENCES

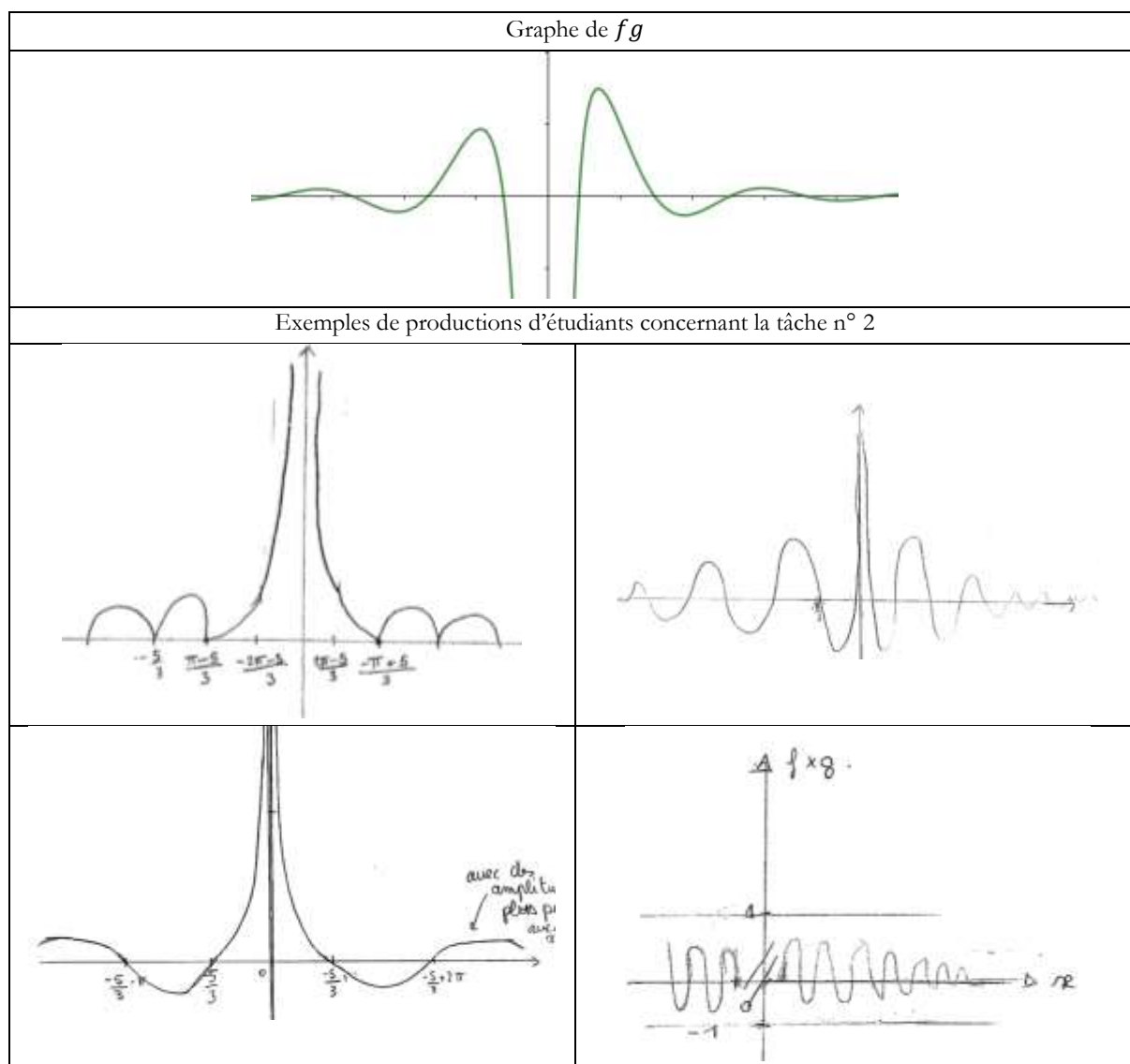
- Aspinwall, L., Shaw, K. L. et Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 301–317. <https://doi.org/10.1023/a:1002976729261>
- Baker, B., Cooley, L. et Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 557–578. <https://doi.org/10.2307/749887>
- Biza, I., Nardi, E. et Zachariades, T. (2009). Teacher beliefs and the didactic contract on visualisation. *For the Learning of Mathematics*, 29(3), 31–36.
- Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics* 52(1), 3–28. <https://doi.org/10.1023/a:1023696731950>
- Brousseau, G. (1994). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. Dans H. G. Steiner (dir.), *Theory of mathematics education* (p. 110-119).
- Dubinsky, E. et Harel, G. (1992). *The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes n°25). Mathematical Association of America.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.
- Grenier-Boley, N. (2024). *Comment choisir des contenus mathématiques pertinents pour comprendre et surmonter la seconde discontinuité de Klein avec les futurs enseignants ? Le cas du produit scalaire*. <https://hal.science/hal-04606178v1>
- IREM. (2015). *Autour de la notion de dérivée en classe de première scientifique*. IREM de Paris.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels : Building meaning for symbols and their manipulation. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 707-762). Information Age.
- Maschietto, M. (2001). Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(1.2), 123-156. <https://revue-rdm.com/2001/fonctionnalites-des/>
- Nemirovsky, R. et Rubin, A. (1992). *Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative* (TERC working paper 2-92). TERC Communications.
- Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-01253828v1/document>
- Rogalski, M. (2008). Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. Dans L. Viennot (dir.), *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (p. 61-87). Presses universitaires de France.
- Sierpinska, A. (1988). Epistemological remarks on functions. Dans S. J. Cho (dir.), *Proceeding of the 12th international conference for the psychology of mathematics education (PME12)*, Hongrie (p. 568-575).
- Tall, D. (1996). Functions and calculus. Dans A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick et C. Laborde (dir.), *International handbook of mathematics education* (p. 289-325). Kluwer Academic Publishers.

Thompson, P. W. (1995). Students, functions, and the undergraduate curriculum. Dans E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld et J. Kaput (dir.), *Research in collegiate mathematics education I* (p. 21–44). American Mathematical Society.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 149–185.

ANNEXE

GRAPHE DE $f \circ g$ ET EXEMPLES DE PRODUCTIONS D'ÉTUDIANTS CONCERNANT LA TÂCHE N° 2



DIFFICULTÉS ET CONCEPTIONS SUR LA PREUVE D'ÉTUDIANT.E.S DU SUPÉRIEUR : FILIÈRES GÉNÉRALES ET PROFESSIONNELLES, FORMATION DES ENSEIGNANT.E.S

| OUVRIER-BUFFET* CÉCILE ET DE VLEESCHOUWER** MARTINE

Résumé | L'enseignement et l'apprentissage de la preuve en mathématiques est un défi majeur pour la didactique, en particulier dans l'enseignement supérieur, où un manque d'études à grande échelle sur les conceptions des étudiant.e.s et évolutions dans leur rapport à la preuve est notable. Un questionnaire a été conçu pour évaluer ces conceptions. Des premières données collectées auprès d'étudiant.e.s en Belgique et de futur.e.s enseignant.e.s en France montrent une hétérogénéité significative dans leurs conceptions et compétences liées à la preuve.

Mots-clés : preuve, conceptions, questionnaire, étudiants d'université, enseignants

Abstract | The teaching and learning of proof in mathematics poses significant challenges in didactics, particularly in higher education, where large-scale studies on students' conceptions and their evolving relationship with proof remain scarce. To address this gap, a questionnaire was developed to explore these conceptions. Initial data collected from students in Belgium and prospective teachers in France reveal notable heterogeneity in their conceptions and skills related to proof.

Keywords: Proof, conceptions, questionnaire, undergraduate students, teachers

I. INTRODUCTION

Depuis plusieurs décennies, la recherche en didactique des mathématiques, au niveau international, a montré que l'apprentissage de la preuve en mathématiques demeure complexe, en particulier pour les étudiant.e.s, lors de la transition vers l'enseignement supérieur (p. ex., Alcock et Simpson, 2004 ; Gueudet, 2008 ; Gueudet et Vandebrouck, 2022 ; Selden et al., 2010). Au vu des premiers éléments ressortant d'un état de l'art sur la question (Ouvrier-Bufferet, 2023), nous pointons un double manque : il n'existe, à l'heure actuelle, ni étude à large échelle des conceptions des étudiant.e.s sur la preuve ni de l'évolution du rapport à la preuve des étudiant.e.s au fil de l'université. Par ailleurs, la double transition de Klein (p. ex., Klein 1932/2016) est une dimension à prendre en compte pour les étudiant.e.s se destinant au métier d'enseignant car elle éclaire une double difficulté : celle de passer du secondaire au supérieur (transition épistémologique), tout en entrant progressivement dans leur rôle d'enseignant.e.s (transition professionnelle). Rappelons la complexité de l'acculturation aux pratiques universitaires en termes d'activité mathématique pour les étudiant.e.s, et soulignons que, suivant les filières du supérieur, elle se problématise de différentes manières. L'étude proposée ici s'intéresse donc aux conceptions d'étudiant.e.s d'université, notamment dans leur rapport à la preuve et à ses fonctions dans l'activité mathématique, et s'appuie sur un questionnaire conçu pour identifier ces conceptions et analyser les obstacles rencontrés. De plus, la perspective comparatiste francophone (France, Belgique, Suisse) que nous envisageons permettra d'examiner comment ces transitions, épistémologique et professionnelle, s'opèrent dans différents contextes éducatifs.

* Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris-Est Créteil – France – cecile.ouvrier-bufferet@u-pec.fr

** Laboratoire de Didactique André Revuz, IRDENa, Université de Namur – Belgique – martine.devleeschouwer@unamur.be

II. DES DIFFICULTÉS PERSISTANTES DANS L'APPRENTISSAGE DE LA PREUVE

Différentes synthèses (par exemple celles citées dans Gueudet et Vandebrouck, 2022 ; Selden et Selden, 2012 ; Stylianides, 2016) convergent sur les difficultés constatées des étudiant.e.s : des connaissances insuffisantes des concepts et théorèmes, une conceptualisation et une formalisation lacunaires, des manques de méta-connaissance sur la preuve, des difficultés dans l'articulation entre les dimensions sémantique, syntaxique et pragmatique, et, enfin, des obstacles lors de la rédaction de preuves. A la transition secondaire-supérieur, le changement de contrat didactique (Brousseau, 1998) et de rapport aux objets et processus liés à l'activité mathématique s'accompagne d'une acculturation aux pratiques mathématiques universitaires, beaucoup plus formelles. Les rapports à la preuve des enseignant.e.s universitaires, souvent mathématicien.ne.s, influencent nécessairement ces pratiques (p. ex., Dawkins et Weber, 2017). Si l'on s'intéresse aux futur.e.s enseignant.e.s, nous constatons une persistance de ces difficultés : Stylianides (2016) met en avant que la preuve occupe une place trop marginale dans les programmes scolaires, et que la formation des enseignant.e.s est souvent insuffisante, voire inadéquate, à tous les niveaux. Le rapport à la preuve peut donc être marqué par des lacunes épistémologiques chez les enseignant.e.s (p. ex., Lin et al., 2009).

III. QUESTIONNEMENTS ET MÉTHODE

Notre questionnaire est donc double et a une vocation diagnostique d'une part et comparatiste d'autre part : Quelles sont les conceptions et difficultés d'étudiant.e.s d'université sur la preuve en mathématiques ? Comment évoluent-elles au fil des années universitaires, dans les pays francophones ? Pour aborder cette problématique, nous choisissons de concevoir et éprouver la portée de l'utilisation d'un questionnaire, pouvant être administré à différents niveaux de l'université, dans plusieurs pays. L'enjeu didactique réside à la fois dans le choix de contenus mathématiques adaptés (n'apportant pas un obstacle notionnel supplémentaire) et dans le choix de critères d'analyse fondés sur certains cadres spécifiques de la littérature en didactique de la preuve permettant un passage à l'échelle (d'analyses qualitatives aux analyses quantitatives).

Ainsi, le questionnaire a été conçu en s'appuyant sur des travaux antérieurs à large échelle portant sur les conceptions des étudiant.e.s au sujet de la preuve (Healy et Hoyles, 1998 ; Stylianou et al., 2015). Il est structuré en cinq parties et est disponible en ligne (<https://hal.science/hal-03987587>) : la première partie cherche à évaluer les compétences des étudiant.e.s à vérifier les hypothèses d'un théorème donné et à spécifier les instances de ce théorème. La deuxième partie évalue les compétences en termes de rédaction de preuves supposées « simples » (tant au niveau formel que conceptuel). La troisième partie permet d'appréhender les conceptions des étudiant.e.s lorsqu'ils évaluent des preuves données, à la fois dans des domaines mathématiques familiers et non familiers pour eux/elles. La quatrième partie explore la façon globale dont les étudiant.e.s perçoivent les preuves. Et la dernière partie recueille des informations sur les répondant.e.s. L'objectif principal du questionnaire est de saisir la diversité des conceptions des étudiant.e.s quant à la preuve en tant qu'objet mathématique, ainsi que leurs compétences à rédiger et évaluer des preuves dites simples (Ouvrier-Buffer, 2023). Ce questionnaire est destiné à être déployé dans plusieurs pays francophones (France, Belgique, Suisse) pour établir une comparaison des conceptions et des difficultés des étudiant.e.s de différentes filières et des futurs enseignant.e.s. Soulignons que les contenus mathématiques et types de preuves demandés ou donnés dans le questionnaire sont choisis de telle façon à ne pas être problématiques au niveau conceptuel, et ce, quel que soit le pays. Cette approche comparative vise à identifier les spécificités culturelles et institutionnelles qui peuvent influencer le rapport à la preuve, en particulier dans un contexte de double transition, épistémologique et professionnelle.

IV. PREMIERS RECUEILS DE DONNÉES

Des premières données ont été collectées auprès d'étudiant.e.s inscrits en première année d'université en mathématique ou en physique à l'université de Namur (Belgique) (De Vleeschouwer et Ouvrier-Buffer, 2024), en février 2023 et février 2024, et auprès de futur.e.s enseignant.e.s de mathématiques du secondaire, inscrit.e.s dans des cursus de formation en mathématiques à l'université en 2022 et 2023. Pour chaque groupe, la durée de passation a varié entre une heure et demie et deux heures. Nous avons obtenu entre 20 et 40 questionnaires renseignés (mais tous ne sont pas complets), ce qui permet des analyses qualitatives. Un recueil de données, à large échelle, en formation des enseignant.e.s à l'entrée de la formation est à venir en Suisse fin 2024 : il s'agit ainsi d'obtenir des données auprès d'un autre public, pays, niveau mais aussi de tester le questionnaire et les méthodes d'analyses des données, en mettant à l'épreuve les critères d'analyse et leur pertinence à plus grande échelle.

V. PISTES RETENUES POUR L'ANALYSE DES DONNÉES

Une première analyse des réponses est basée sur des critères éprouvés dans des études précédentes, notamment les typologies de Balacheff (1988), complétées par les critères mobilisés par Healy et Hoyles (1998) et Stylianou et al. (2015). Tout élément complémentaire permettant de classer les preuves produites par les étudiant.e.s est encore à l'étude au niveau qualitatif et rejoint les cadres théoriques et propositions de Sisco et Ouvrier-Buffer (EMF 2025, communication proposée dans le même GT).

VI. PREMIERS CONSTATS

Les résultats attendus de cette analyse devraient confirmer les difficultés récurrentes observées dans la littérature. De plus, il est raisonnable d'envisager le fait que certains étudiant.e.s attribuent à la preuve une fonction uniquement utilitaire, en la concevant comme une simple validation d'énoncés successifs, voire même un format de discours à reproduire, plutôt que comme un processus mathématique à part entière (p. ex., Selden et al., 2010 ; Stylianou et al., 2015). Les résultats pourraient potentiellement révéler des différences significatives entre les contextes éducatifs francophones, avec des conceptions et des pratiques distinctes en fonction des pays. Une précaution est prise sur le recueil de données concernant la caractérisation des filières dont sont issu.e.s les étudiant.e.s, les contenus des enseignements sur la preuve précédant le questionnaire, les spécialités d'enseignement et de recherche des enseignant.e.s dispensant ces enseignements.

À ce stade, au sein d'un même niveau, année et filière universitaire, les réponses obtenues révèlent une hétérogénéité importante dans les conceptions des étudiant.e.s, avec une diversité tout aussi importante dans la rédaction de preuves, ce qui reflète des conceptions distinctes de l'activité mathématique reproduite par des étudiant.e.s et annonce déjà l'enjeu de parvenir à rendre compte de cette hétérogénéité lors du passage à l'échelle, sans perdre l'apport des analyses qualitatives que nous conduisons actuellement.

Le poster présentera l'état de cette recherche en cours : cadres et méthodes, justifications des choix des énoncés du questionnaire, argumentation des choix opérés quant aux critères d'analyse et résultats obtenus sur deux populations en Belgique (étudiant.e.s en mathématiques et physique) et en France (formation de niveau master de futur.e.s enseignant.e.s). Cette première étape dans la production de résultats sur les conceptions et difficultés d'étudiant.e.s sur la preuve en mathématiques nous permettra ainsi, en éprouvant le questionnaire et la grille d'analyse, d'envisager ensuite un suivi de cohorte au fil du cursus universitaire, et d'approfondir, dans le cadre de la formation des enseignant.e.s, la double transition de Klein.

RÉFÉRENCES

- Alcock, L. et Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 1-32.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. Dans D. Pimm (dir.), *Mathematics, teachers and children* (p. 216-235). Hodder & Stoughton.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.
- Dawkins, P. C. et Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 123-142.
- De Vleeschouwer, M. et Ouvrier-Buffer, C. (2024). Some undergraduate students' conceptions of proof. Dans *Proceedings of the fifth conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM2024)*.
- Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 237-254.
- Gueudet, G. et Vandebrouck, F. (2022). Transition secondaire-supérieur : ce que nous apprend la recherche en didactique des mathématiques. *EpiDEMES*, 1. <https://doi.org/10.46298/epidemes-7486>
- Healy, L. et Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics*. Institute of Education, University of London.
- Klein, F. (2016). *Elementary mathematics from a higher standpoint. Volume I: Arithmetic, algebra, analysis*. Springer. (Ouvrage original publié en 1932)
- Lin, F.-L., Hsieh, F.-J., Hanna, G. et De Villiers, M. (dir.). (2009). *Proceedings of the ICMI study 19th conference: Proof and proving in mathematics education, Taipei, Taiwan*. The Department of Mathematics: National Taiwan University.
- Ouvrier-Buffer, C. (2023). Exploring students' conceptions of proof in high-school and university: A proposal for collaborations in Europe. Dans P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi et E. Kónya (dir.), *Proceedings of the thirteenth congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (p. 240-247). Alfréd Rényi Institute of Mathematics et ERME. <https://hal.science/hal-04410988v1>
- Selden, A. et Selden, J. (2012). Proof and proving at tertiary level. Dans G. Hanna et M. de Villiers (dir.), *Proof and proving in mathematics education* (p. 391-420). Springer.
- Selden, A., McKee, K. et Selden, J. (2010). Affect, behavioral schemas, and the proving process. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 199-215.
- Sisco, C. et Ouvrier-Buffer, C. (2025, 26-30 mai). *La preuve en mathématiques : difficultés d'étudiants et apports potentiels des assistants de preuve* [Communication]. Colloque Espace Mathématique Francophone (EMF2025), Montréal, Canada.
- Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L. et Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 91-134.

LA PREUVE EN MATHÉMATIQUES : DIFFICULTÉS D'ÉTUDIANTS ET APPORTS POTENTIELS DES ASSISTANTS DE PREUVE

| SISCO* CLARA ET OUVRIER-BUFFET** CÉCILE

Résumé | La rupture entre le secondaire et le supérieur est notamment marquée par un changement d'exigences et de rapport aux objets et processus de preuve, plus complexes et plus formels. Les recherches internationales sur les technologies dans les apprentissages en mathématiques en appellent à une analyse des usages et apports des assistants de preuve dans l'apprentissage de la preuve. Nous présentons les premiers résultats d'une étude exploratoire sur les conceptions sur la preuve de 153 étudiants de première année d'université, et leur évolution après 10h de séances mobilisant des assistants de preuve.

Mots-clés : preuve, démonstrations, difficultés, étudiants, assistants de preuve

Abstract | The transition between secondary and tertiary education is characterized, in particular, by different requirements and a change in the relationship to concepts and proving processes, which are more complex and more formal. International research on technology in mathematics education calls for an analysis of the uses and the potentialities of proof assistants to proof learning. We present the first results of an exploratory study in which the proof's conceptions of 153 first-year university students and their evolution after 10 hours of sessions with proof assistants.

Keywords: Proving processes, proof, difficulties, undergraduate students, proof assistants / theorem provers

I. MOTIVATIONS DE LA RECHERCHE ET CONTEXTE

La preuve, constitutive de l'activité mathématique, est une composante caractéristique de son épistémologie. Fondamentale à tous les niveaux de la scolarité et de la formation, elle contribue de manière significative aux processus d'apprentissage des connaissances mathématiques (p. ex., Hanna et De Villiers, 2012). Les enquêtes internationales à grande échelle (p. ex., TIMSS) montrent qu'elle occupe une place trop marginale dans l'enseignement, avec une formation des enseignant·es insuffisante voire inadéquate (p. ex., Stylianides, 2016). La rupture entre le secondaire et le supérieur, constatée par les didacticien·es à l'échelle internationale (p. ex. Battie, 2009 ; Gueudet, 2008 ; Selden et al., 2010), complexifie encore les problématiques liées à l'enseignement de la preuve. Cette transition est marquée par un changement d'exigences et de rapport aux objets et processus de preuve, plus complexes et plus formels, qui nécessite une acculturation aux pratiques des mathématicien·nes (Dawkins et Weber, 2017 ; Selden, 2012). Les étudiant·es eux-mêmes se sentent en grande difficulté avec la logique et le formalisme requis pour concevoir des preuves et écrire des démonstrations (Gueudet et Vandebrouck, 2022 ; Selden, 2012 ; Selden et Selden, 2003). Par ailleurs, la nécessité de développer de nouvelles approches de l'enseignement de la preuve prenant en compte les assistants de preuve (notés dorénavant AP) est clairement démontrée et affirmée par Hanna et Knipping (2020), avec des premières analyses *a priori* (p. ex., Bartzia et al., 2022) et expérimentations prometteuses (p. ex., Kerjean et al., 2022).

Cette recherche est réalisée dans le cadre du projet « les Assistants de Preuve Pour les Apprentissages Mathématiques » (APPAM) dont la visée est d'expérimenter et d'évaluer quels peuvent

* Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Cité – France – clara.sisco@etu.u-paris.fr

** Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris-Est Créteil – France – cecile.ouvrier-buffet@u-pec.fr

être les apports des AP au début de l'enseignement supérieur. Un préalable est d'identifier et caractériser les difficultés du public visé, à savoir des étudiant·es de première année d'université, de telle façon à avoir un référent permettant d'analyser les apports d'AP dans l'apprentissage de la preuve, et ce, à large échelle. C'est l'un des objectifs de notre prochaine expérimentation prévue au printemps 2025.

Nous présentons ici les premiers résultats d'une étude exploratoire qui a été menée pour construire et éprouver les outils théoriques et méthodologiques afin de caractériser des preuves papier-crayon d'étudiant·es.

Les questions qui guident notre recherche doctorale sont les suivantes : Comment décrire et analyser une preuve rédigée par des étudiant·es de manière systématique pour conduire une étude à grande échelle ? Est-il possible d'appréhender, dans un test écrit, une évolution significative du rapport des étudiant·es à la preuve avant/après des séances mobilisant des AP ?

Nous allons, dans une première partie, résumer les principales difficultés connues dans la littérature d'étudiant·es à l'université lorsqu'ils produisent des preuves. Cela nous permettra, dans une deuxième partie, de justifier nos choix pour concevoir des tests préliminaires de diagnostic et de préciser les fondements théoriques que nous avons retenus pour construire ces tests et analyser les données. Les premiers résultats de cette expérimentation seront présentés dans une troisième partie. Nous concluons sur les éléments nous permettant d'assurer la robustesse de notre grille d'analyse et formulerons trois hypothèses à mettre à l'épreuve quant à l'impact des AP sur l'écriture de preuve courte. Nous ouvrirons ainsi des perspectives sur notre mise en œuvre expérimentale prévue au printemps 2025.

Dans cet article, nous prenons le mot « preuve » dans une acception didactique large, englobant tout processus de preuve et la rédaction de démonstrations.

II. PRINCIPALES DIFFICULTÉS D'ÉTUDIANT·E·S RELATIVES À L'ÉCRITURE DE PREUVE

Comme mentionné plus haut, la rupture entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur est soulignée au niveau international par de nombreux chercheur·euses en didactique des mathématiques (p. ex., Gueudet, 2008 ; Selden et al., 2010). Dans cette transition, il y a un changement dans le contrat didactique, mais aussi dans le rapport aux concepts mathématiques et aux preuves qui nécessite une vision plus complexe et formelle des objets et des processus de preuve avec une forme d'acculturation aux pratiques des mathématicien·nes (p. ex., Dawkins et Weber, 2017 ; Selden, 2012). Les étudiant·es ont le sentiment d'être en difficulté, notamment en ce qui concerne les « modes de pensée pour les mathématiques » (Di Martino et Gregorio, 2019), ainsi que la logique et le formalisme requis dans les processus de preuve et de rédaction de preuves (p. ex., Selden, 2012 ; Selden et Selden, 2003). Ainsi, iels ne sont pas « prêt·es » aux attentes en termes de symbolisme à l'entrée de l'université.

Par ailleurs, au niveau international, les synthèses (celles citées par exemple par Stylianides, 2016 ; Selden, 2012 ; Gueudet et Vandebrouck, 2022) convergent sur les difficultés des élèves et leurs causes : une connaissance insuffisante des concepts mathématiques, des notions abstraites soulevant des difficultés de conceptualisation, des attentes renvoyant aux pratiques expertes des mathématicien·nes, un manque de méta-connaissances sur la preuve, une différence de « culture » institutionnelle entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, un manque d'articulation entre les approches

sémantique, syntaxique et pragmatique (Deloustal et al., 2020) et, enfin, des difficultés à rédiger une preuve. Toujours d'après ces travaux, les étudiant·es de début d'université utilisent des raisonnements inappropriés, souvent basés sur la logique du quotidien (p. ex., Selden et Selden, 2003 ; Selden et al., 2010 ; Selden, 2012). Par ailleurs, on ne sait pas vraiment comment les élèves valident leurs preuves, tant lorsqu'ils les construisent que lorsqu'ils les lisent, à l'exception des résultats qualitatifs des travaux de Weber (2001). Il existe d'autres facteurs, tel que « le manque de cohérence des efforts de réforme » (voir la discussion pertinente, toujours d'actualité, de Harel et Fuller [2009]).

Prenant en compte l'ensemble de ces difficultés, nous faisons le choix, pour étudier les conceptions sur la preuve d'étudiant·es de première année d'université, avant et après apprentissage avec des AP, de prendre appui sur des contenus mathématiques :

- *a priori* non problématiques pour les étudiant·es ;
- permettant la rédaction de preuves « simples », c'est-à-dire possibles dans différents registres de représentation et non complexes en termes de formalisme mathématique.

III. CONCEPTION DE DEUX TESTS : CHOIX ET MÉTHODE

1. Contexte de l'expérimentation

Notre mise en œuvre expérimentale s'appuie sur l'UE de Fondement du Calcul et du Raisonnement en première année de licence mathématique - informatique à l'Université de Strasbourg suivie par 153 étudiant·es réparties en 6 groupes. À la suite de 24 heures de cours intégré réparties sur 7 semaines, un premier test a été réalisé, puis les 6 groupes ont réalisé 10 heures de TP étalées sur 3 mois, 3 groupes ont utilisé l'AP D $\exists\forall$ duction (point and click, développé par F. Le Roux), 3 groupes Verbose L $\exists\forall$ n (textuel, développé par P. Massot). Nous n'avons pas participé au niveau didactique à la conception des TP. Un second test a été réalisé à la suite de ces TP par 47 des 141 étudiant·es présentes au premier test.

Les TP avaient pour objectif de travailler quelques notions mathématiques au programme de la première année de licence et de découvrir et manipuler les environnements des deux AP cités plus haut. Ainsi, ont été mobilisés : des notions de théories des ensembles pour les TP d'introduction, puis les bornes supérieure et inférieure, la notion de limite sur les réels et finalement, les applications, l'injectivité, la surjectivité et les ensembles image directe et image indirecte.

2. Présentation des tests

Les énoncés des tests que nous avons conçus sont composés de trois exercices. L'exercice 1, porte sur la somme et le produit de deux nombres impairs. Dans l'exercice 2, il s'agit de formaliser un énoncé écrit en langue naturelle sans le démontrer, et l'exercice 3 propose une question ouverte sur ce que les étudiant·es utilisent lorsqu'ils écrivent des preuves. Les énoncés choisis sont pertinents à la transition secondaire – supérieur et ont déjà été utilisés dans deux études internationales à grande échelle (Healy et Hoyles, 1998 ; Stylianou et al., 2015).

Au Royaume-Uni (Healy et Hoyles, 1998), il a été demandé à des élèves de 14/15 ans de choisir la preuve la plus proche de celle qu'ils auraient écrite, parmi cinq preuves, s'ils avaient dû prouver l'énoncé « *When you add any 2 even numbers, your answer is always even* ». Cette partie est suivie d'une série de questions sur les preuves proposées. Il s'agit ensuite d'écrire la preuve de l'énoncé « *When you add any 2 odd numbers, your answer is always even* ».

Aux États-Unis (Stylianou et al., 2015), il n'a pas été demandé aux étudiant·es de première année d'université d'écrire la preuve, mais de choisir, parmi quatre preuves (énoncés identiques à Healy et Hoyles), la plus proche de celle qu'ils auraient écrite, de celle qu'ils identifient comme la plus rigoureuse d'un point de vue mathématique, et de celle qu'ils auraient choisie pour expliquer le problème à un de leur pair.

Exercice 1 : Démontrer l'énoncé suivant :
"La somme de deux entiers impairs est paire".

Exercice 2 : Formaliser en langage mathématique, de manière la plus rigoureuse possible, l'énoncé suivant :
"Le produit de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 6".

Exercice 3 : Qu'utilisez-vous quand vous faites une démonstration (votre "boîte à outils") ? Vous pouvez répondre par une liste de mots, donner des exemples, etc.

Figure 1 – Test 1 (avant enseignement avec AP)

Exercice 1 : Démontrer l'énoncé suivant :
"Le produit de deux entiers impairs est impair".

Exercice 2 : Formaliser en langage mathématique, de manière la plus rigoureuse possible, l'énoncé suivant :
"Le nombre qui précède le carré d'un nombre impair est divisible par 8".

Exercice 3 : Qu'utilisez-vous quand vous faites une démonstration (votre "boîte à outils") ? Vous pouvez répondre par une liste de mots, donner des exemples, etc.

Figure 2 – Test 2 (après enseignement avec AP)

3. *Justifications et cohérence des tests*

Pour réaliser les deux tests, au regard de la littérature présentée dans la section précédente, de nos questions de recherche, et des contraintes matérielles imposées par l'organisation des cours et TD à l'université, nous avons fait les choix suivants :

- des énoncés utilisables à la transition secondaire-supérieur, courts, en langue naturelle, avec des contenus mathématiques a priori non problématiques pour les étudiant·es car anciens et supposés stabilisés ;
- des notions mathématiques non mobilisées pendant les TP et actuellement non disponibles dans les AP ;
- de récupérer des productions d'étudiant·es qui puissent nous permettre d'observer la rédaction d'une preuve simple (exercice 1), la formalisation d'un énoncé donné en langue naturelle (exercice 2) et quelques éléments de discours des étudiant·es sur leurs propres pratiques de la preuve en mathématiques (exercice 3) ;
- une durée courte (car l'expérimentation s'est déroulée sur le temps de classe).

Pour finir, il fallait que ces tests soient pertinents dans une optique de comparaison des effets éventuels des AP. Dans ce cadre, pour une étude exploratoire, nous ne recherchions pas dans la rédaction de preuve demandée aux étudiant·es un enjeu de vérité ou la construction d'un nouveau concept, c'est pourquoi nous nous sommes limités à la rédaction d'une preuve simple et à la formalisation d'énoncés mathématiques. Ainsi, les énoncés retenus nous permettent :

- de s'affranchir au maximum d'obstacles liés aux contenus notionnels (exercice 1) : pour analyser comment les étudiant·es formalisent et organisent une preuve simple, nous faisons

l'hypothèse que les propriétés liées à la parité placent les étudiant·es dans un environnement favorable pour qu'ils se concentrent sur la rédaction de la preuve ;

- différentes formalisations possibles (exercice 1 et 2) : les énoncés sont proposés en langue naturelle et permettent différentes formalisations, dans le domaine algébrique. Ce domaine est dans le prolongement des types d'écritures utilisés dans les AP sans que, ni les contenus mathématiques, ni le type de formalisation n'aient été traités en TP.

IV. FONDEMENTS ET MÉTHODES DES ANALYSES DES DONNÉES

1. *Fondements théoriques de la grille d'analyse*

La grille d'analyse présentée ici cherche à répondre à deux contraintes :

- être généralisable : elle se veut indépendante des contenus mathématiques et du niveau scolaire de passation ;
- être pertinente pour mesurer d'éventuels impacts de l'utilisation d'AP sur le rapport des étudiant·es à la preuve.

Nous avons commencé par mobiliser la typologie proposée par Balacheff (1987) et les registres de représentation (Duval, 1993). Une analyse préalable nous a permis de montrer la nécessité de faire une analyse en trois sections :

- l'introduction des objets mathématiques et les indicateurs de quantification ;
- la mobilisation de propriétés mathématiques sur les objets ;
- la formulation d'arguments et la conclusion.

L'enjeu de la première section est de regarder les objets introduits par les étudiants d'une part, et la quantification d'autre part. Cette approche fait écho au « contexte » de la preuve que l'on trouve systématiquement dans les AP qui permet de suivre l'évolution des objets et les propriétés disponibles (Kerjean et al., 2022). Concernant la quantification, nous avons décrit les mots qui accompagnent les objets introduits sans toujours chercher à caractériser si elle était universelle ou existentielle. En effet, l'utilisation de certaines expressions ne permet pas toujours d'interpréter si l'étudiant a mobilisé une quantification existentielle ou universelle. L'expression « avec » en est un bon exemple (Hache, 2015) : on la retrouve, par exemple, dans la phrase « tout entier impair s'écrit de la forme $2k+1$, avec $k \in \mathbb{Z}$ ».

La deuxième section nous permet de mettre en évidence les propriétés mathématiques disponibles et/ou mobilisables des étudiants.

Concernant la troisième section, nous avons utilisé le modèle de Toulmin (p. ex., Pedemonte, 2002) en utilisant les indicateurs « permis d'inférer » et « énoncé conclusion ». Nous avons codé si des arguments étaient présents dans la preuve, et si oui, lesquels. Puis, nous avons distingué l'énoncé conclusion, atteignable d'un point de vue mathématique au vue des objets introduits, de l'énoncé conclusion écrit par les étudiant·es.

2. *Premiers résultats du pré-test*

Les 130 productions complètes récupérées au premier test montrent les éléments suivants. Une large majorité (70 %) sont à la fois :

- de l'ordre de l'expérience mentale ;

- écrites dans un registre algébrique mixte (modélisation algébrique avec présence de langue naturelle) ;
- utilisant un raisonnement déductif ;
- mobilisant ce que nous appellerons la « division euclidienne formelle » pour caractériser les entiers impairs. C'est-à-dire l'ensemble des constructions d'entiers impairs mobilisant l'écriture « $2k+1$ ».

Ainsi, en prenant en compte la grille d'analyse précédente, les éléments qui nous permettent de discriminer les productions entre elles sont les modalités d'introduction et de quantification des objets, les permis d'inférer et les énoncés conclusions.

Soit n et p 2 entiers impairs s'écrivant sous la forme de $2k+1$
 $n+p = 2k+1 + (2k+1)$
 $= 4k+2$
 $= 2(2k+1)$
 Posons $K = 2k+1$
 un entier d'où $n+p = 2K$
 Sachant que un entier pair s'écrit $2k$ on peut en conclure que la somme de 2 entiers impairs est paire.

Figure 1 – Non-distinction des entiers dans l'énoncé « somme de deux entiers impairs »

Nous souhaitons attirer l'attention sur une erreur observée dans 29 % des 130 productions : démontrer l'énoncé « la somme d'un entier avec lui-même est paire » et non « la somme de deux entiers impairs est paire ». Elle est dans la majorité des cas causée par la non-distinction entre k et k' dans la caractérisation des entiers impairs par la division euclidienne formelle comme dans l'extrait ci-dessous.

Par ailleurs, dans leur étude, Healy et Hoyles (s. d.) observent que 22 % des élèves sont capables de produire une « preuve complète ». Considérant nos données et les critères suivants, nous observons 18,3 % de « preuve complète » dans nos productions :

- selon la connaissance mobilisée, la présence de l'argument « un facteur de 2 est pair » ou des propriétés sur la somme des congruences ;
- les objets introduits rendent atteignable la preuve de l'énoncé « la somme de deux entiers impairs est paire » ;
- le calcul sur la somme est abouti ;
- présence de la quantification universelle.

3. Premiers résultats de comparaison pré/post

On observe dans le post-test une baisse de la présence des énoncés conclusions (de 85,1 % dans le pré-test à 74,5 % dans le post-test). Cette baisse n'est pas corrélée à une plus grande difficulté des étudiant-es à finaliser le calcul du produit par rapport à celui de la somme. Nous pouvons formuler l'hypothèse : « l'utilisation d'AP peut causer la disparition des énoncés conclusion dans les preuves

rédigées par les étudiant·es et, plus généralement, de l'explicitation de la démarche en langue naturelle ». En effet, dans les deux AP l'acte de conclure est pris en charge par la machine.

Tableau 1 – Marqueurs de la quantification universelle sur les 47 couples pré/post complets

	Pré-test	Post-test
Aucun	17,8 %	6,4 %
Avec le symbole « $\forall$ »	2,2 %	12,8 %
Avec l'expression « Soit »	42,2 %	72,3 %
Avec la langue naturelle autre que « Soit » (avec, on pose, prenons, etc.)	26,7 %	6,4 %
Domaine de définition uniquement	11,1 %	2,1 %

Le tableau 1 montre une normalisation du bloc d'introduction des objets après les TP avec AP. Cette normalisation s'observe notamment dans la quantification, on a une augmentation de l'utilisation du symbole « $\forall$ » et environ deux fois moins de productions où il n'y a aucune quantification. Nous attirons l'attention sur l'abandon de la catégorie « langue naturelle autre que “Soit” » au profit d'un usage plus important de l'expression « Soit » et du symbole « $\forall$ ». Les figures 2a, 2b et 3a, 3b illustrent ce phénomène :

On sait que $a = 2k+1$ $b = 2k'+1$ $k, k' \in \mathbb{Z}$
sont des entiers impaire
 $a+b = 2k+1 + 2k'+1$
 $= 2(k+k'+1)$
La somme de a et b est divisible par deux donc
elle est paire

Figure 2a – Pré-test production 34

Soit $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $\exists q, q' \in \mathbb{Z}$ $n = 2q+1$ $m = 2q'+1$
 $n \times m = (2q+1)(2q'+1)$
 $= 4q'q + 2q + 2q' + 1$
 $= 2(2q'q + q + q') + 1$
On note $k = 2q'q + q + q'$
donc $n \times m = 2k + 1$
Donc $n \times m$ est impair

Figure 2b – Post-test production 34

Lemme : un nombre est pair si le reste de la division euclidienne vaut 0.
 Ainsi, un nombre peut être vu comme un sac dans le nombre est représenté avec le nombre de pions.
 Exemple :
 2 (●) 5 (●●●) 8 (●●●●) ...
 Or, on remarque que si on compte 2 pions par 2 pions alors le sac sera vide et dans le ... donc il y a un nombre de pions $\cdot 2$. En mathématique, on veut de faire un ...
 → Si le reste vaut 0, le nombre est pair.
 → Si le reste vaut 1, le nombre est impair.
 Donc, si on prend 2 nombres pairs, on a ...
 alors dans ce nouveau sac il y avait 2 pions et on ...
 la dit "en fait" avec cela il y avait 2 pions dans le sac et ...
 langage mathématique, de manière la plus rigoureuse possible, l'énoncé suivant : "La somme de deux entiers pairs est toujours un multiple de 2".

Figure 3a – Pré-test production 55

Soit a et b deux entiers impairs tel que
 $\exists k, l, a = 2k + 1, b = 2l + 1$
 Ainsi
 $(2k + 1) \cdot (2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1$
 $= 2(2kl + k + l) + 1$
 $= 2n + 1$ avec $n = 2kl + k + l$

Figure 3b – Post-test production 55

La figure 4 montre une persistance de l'erreur prédominante évoquée plus haut. Elle illustre aussi l'évolution du registre de représentation : une forte prédominance de la langue naturelle reste, mais le marqueur langagier devient « Soit ».

Nous savons qu'un entier impair s'écrit $2k + 1$.
 $2k + 1 + 2k + 1 = 4k + 2$, et $4k + 2$ est divisible par 2. La somme de deux entiers impairs est donc paire.

Figure 4a – Pré-test production 138

Soit $m, k \in \mathbb{N}$,
 $m = 2k + 1$ un entier impair.
 $(2k + 1)(2k + 1) = 2k \times 2k + 2k + 2k + 1$
 $= 4k^2 + 4k + 1$
 $= 2(2k^2 + 2k) + 1$ de la forme $2k + 1$
 Donc le produit de deux entiers impairs est impair.

Figure 4b – Post-test production 138

Nous observons aussi une structuration spatiale de l'écrit qui évolue : le retour à la ligne et une indentation. Nous pouvons ici formuler deux hypothèses : « les AP permettent une évolution de la formalisation des énoncés en langue naturelle » et « cette évolution n'est pas corrélée à une meilleure compréhension des concepts mathématiques en jeu ».

V. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous cherchions dans cet article à proposer des premiers éléments de réponses aux questions : Comment décrire et analyser une preuve rédigée par des étudiant·es de manière systématique pour

conduire une étude à grande échelle ? Est-il possible d'appréhender, dans un test écrit, une évolution significative du rapport des étudiant·es à la preuve avant/après des séances mobilisant des AP ?

Les premiers résultats de notre étude montrent que les trois sections proposées pour la grille d'analyse sont opérationnelles et permettent de discriminer les productions écrites des étudiant·es. Cela nous permet de mettre en évidence qu'une seule erreur conceptuelle est identifiée dans les productions : celle de la figure 4 dont l'origine réside, soit dans la maîtrise du formalisme et de la quantification, soit dans la compréhension de la propriété à démontrer. De plus, nous notons une grande diversité dans l'utilisation des registres de représentation dans le pré-test qui se lisse dans le post-test. Nous avons formulé trois hypothèses qui restent à mettre à l'épreuve :

- i. L'utilisation d'AP peut causer la disparition des énoncés conclusion dans les preuves rédigées par els étudiant·es et plus généralement de l'explicitation de la démarche en langue naturelle.
- ii. Les AP permettent une évolution de la formalisation des énoncés en langue naturelle.
- iii. Cette évolution n'est pas corrélée à une meilleure compréhension des concepts mathématiques en jeu.

Bien que nous ayons observé une évolution de la rédaction de preuve entre le pré-test et le post-test, nous ne pouvons que formuler des hypothèses quant à l'impact des TP mobilisant des AP sur les écrits des étudiants. Seuls des entretiens pourraient nous renseigner sur la portée sémantique des symboles que les étudiant·es utilisent souvent par mimétisme (Gueudet et Vandebrouck, 2022) et, plus généralement, sur les choix qu'ils font face à une rédaction de preuve, notamment en termes d'introduction des objets, de choix de formalisme et de structuration de l'écrit. Il serait alors approprié de proposer des entretiens d'explicitation à des binômes d'étudiants en parallèle d'un apprentissage avec des AP qui serait intégrer au protocole expérimental.

RÉFÉRENCES

- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176. <https://doi.org/10.1007/BF00314724>
- Bartzia, E., Meyer, A. et Narboux, J. (2022). Proof assistants for undergraduate mathematics and computer science education: elements of a priori analysis. Dans R. Hochmuth (dir.), *INDRUM 2022 Proceedings, Leibniz University Hannover, Germany* (p. 253-262).
- Battie, V. (2009). Proving in number theory at the transition from the secondary level to the tertiary level: Between organizing and operative dimensions. Dans F. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna et M. De Villiers (dir.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (p. 71-76). National Taiwan Normal University Taipei Taiwan.
- Dawkins, P. C. et Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 123–142. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9740-5>
- Deloustal-Jorrand, V., Gandit, M., Mesnil, Z. et Da Ronch, M. (2020). Utilisation de l'articulation entre les points de vue syntaxique et sémantique dans l'analyse d'un cours sur le raisonnement. Dans T. Hausberger, M. Bosch et F. Chellougui (dir.), *INDRUM 2020 Proceedings, University of Carthage, Tunisia* (p. 378-387).
- Gregorio, F., Di Martino, P. et Iannone, P. (2019). The secondary-tertiary transition in mathematics successful students in crisis. *EMS Newsletter*, 113, 45-47. <https://www.doi.org/10.4171/NEWS/113/10>

- Duval, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.
- Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 237-254. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9100-6>
- Gueudet, G. et Vandebrouck, F. (2022). Transition secondaire-supérieur : ce que nous apprend la recherche en didactique des mathématiques. *EpiDEMES*, 1. <https://doi.org/10.46298/epidemes-7486>
- Hache, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec ». *Petit x*, 97, 27-43.
- Hanna, G. et Knipping, C. (2020). Proof in mathematics education, 1980-2020: An overview. *Journal of Educational Research in Mathematics*, (Special Issue), 1-13.
- Hanna, G. et De Villiers, M. (dir.). (2012). *Proof and proving in mathematics education*. Springer.
- Harel, G. et Fuller, E. (2009). Current contributions toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. Dans D. A. Stylianou, M. L. Blanton et E. J. Knuth (dir.), *Teaching and learning proof across the grades – A K-16 perspective*. Routledge.
- Healy, L. et Hoyles, C. (s. d.). *Technical report on the Nationwide Survey*.
- Healy, L. et Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics*. Institute of Education, University of London.
- Kerjean, M., Le Roux, F., Massot, P., Mesnil, Z., Modeste, S., Narboux, J. et Rousselin, P. (2022). Utilisation des assistants de preuves pour l'enseignement en L1. *La Gazette de la société mathématique de France*, 174, 35-55.
- Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l'apprentissage des mathématiques* [Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier].
- Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. Dans G. Hanna et M. De Villiers (dir.), *Proof and proving in mathematics education* (p. 391-420). Springer.
- Selden, A., McKee, K. et Selden, J. (2010). Affect, behavioral schemas, and the proving process. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 199–215. <https://doi.org/10.1080/00207390903388656>
- Selden, A. et Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Mathematics Education Research*, 34, 4-36.
- Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L. et Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1, 91-134. <https://doi.org/10.1007/s40753-015-0003-0>
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101-119. <https://doi.org/10.1023/A:1015535614355>

**GT7 | LES RESSOURCES
POUR DE NOUVEAUX
DÉFIS**

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL 7

LES RESSOURCES POUR DE NOUVEAUX DÉFIS

| FREIMAN* VIKTOR, WOZNIAK** FLORIANE, SOKHNA MOUSTAPHA*** ET SAWADOGO****

TIMBILA

I. LES RESSOURCES : NOUVEAUX CONTEXTES, NOUVEAUX ENJEUX ET NOUVEAUX DÉFIS

1. Évolution de la thématique au fil des ans

Les problématiques liées aux ressources en enseignement et apprentissage de mathématiques ont été mises en évidence lors du colloque de 2012. En effet, le bilan du GT6 (Ressources et développement professionnel des enseignants, Hitt et coll., 2012) souligne le rôle de technologies dont l'usage « accroît au fil des ans, tant en pratique enseignante que dans les travaux de recherche faisant partie de tout un éventail de ressources de types très différents, comme des logiciels éducatifs, des calculatrices, des activités en ligne pour la classe, mais également des instruments géométriques plus traditionnels, des manuels, etc. ». Le travail de ce groupe a permis, entre autres, d'approfondir les réflexions sur les ressources en relation avec le développement professionnel des enseignants.

En 2015, une table ronde intitulée *Dimensions culturelles dans la conception, la diffusion et les usages des ressources dans l'espace mathématique francophone*, animée par Maha Abboud - Blanchard, France Caron, Jean-Luc Dorier et Moustapha Sokhna a élargi la discussion autour de la problématique de la conception, la diffusion et les usages des ressources. Un sondage a été mené auprès d'enseignants de la francophonie afin de dresser un état des lieux sur les ressources existantes et leur intégration dans les pratiques enseignantes. Si le manuel est la ressource la plus utilisée (93 % de réponses positives au Vietnam et moins de 63 % au Québec), les répondants mentionnent aussi, entre autres, les cahiers (polycopies) et les sites web. D'autres éléments ressortent comme le rôle important des programmes dans le choix de ressources ou le partage de ressources entre les enseignants semble être un élément important. Cependant, on note une grande disparité d'usage entre les pays et les systèmes éducatifs.

Ces aspects ont été au centre de discussions lors du colloque en 2018 dont la thématique était *Conception, diffusion et usage des ressources*. En poursuivant les échanges et les réflexions, sur la façon dont la conception, la diffusion et l'usage d'une ressource peuvent contribuer au développement des praxéologies des enseignants et des apprenants voire des formateurs, le GT6 a élargi la définition de la ressource, comme « tout ce qui permet à un sujet ou une institution de nourrir son action, de se ressource » (Wozniak et coll., 2018). Selon le bilan de ce GT, les instructions institutionnelles, manuels, documents pédagogiques, sites Internet, logiciels, vidéos, jeux, calculatrice, objets, idées, concepts, notions, expériences, discussions peuvent être des ressources. Textuelle, matérielle ou non matérielle,

* Co-responsable du groupe de travail 7 – Université de Moncton – Canada – viktor.freiman@umoncton.ca

** Co-responsable du groupe de travail 7 – Université de Montpellier, LIRDEF – France – floriane.wozniak@umontpellier.fr

*** Co-responsable du groupe de travail 7 – Université Cheik Anta DIOP – Sénégal – moustapha.sokhna@ucad.edu.sn

**** Correspondant CS – Burkina Faso – sawtimbs@gmail.com

une ressource devient ainsi une composante du milieu d'une situation visant à répondre à une question ou un besoin. Ainsi, le travail produit en utilisant un système de ressources, peut-il devenir lui-même une ressource, dès lors qu'il y a une intention d'en faire un tel usage (Wozniak et coll. 2018).

Une variété de contextes et de types de ressources présentées, ainsi que de leurs usages, a visiblement mené à la pluralité des approches théoriques et méthodologiques vue comme richesse en ouvrant la porte à de nouveaux questionnements (ex., écologie de ressources et 'agentivité didactique'). Le bilan du GT a suggéré comme nouvelle avancée de tenir compte de l'évolution des curriculums qui introduisent la démarche d'investigation, l'interdisciplinarité ou la modélisation afin de (re)considérer comment un élève peut mobiliser ou concevoir des ressources sans se limiter à celles délivrées par l'enseignant ou le manuel scolaire et ceci à tous les niveaux d'enseignement primaire, secondaire ou universitaire (Wozniak et coll., 2018).

La pandémie a considérablement affecté la participation au GT7 (Sawadago, Hayfa et El Idrissi, co-responsables), en apportant, notamment, un éclairage sur les défis de la 'transformation' de ressources autrement utilisées en présentiel vers un environnement à distance (El Idrissi, 2022).

2. *Nouveaux contextes et nouvelles questions qui émergent*

Dans leur appel à communication pour le colloque de 2025, les co-responsables du GT7 ont proposé d'aborder la question de l'adéquation entre les ressources et les (nouveaux) besoins des enseignants pour accomplir leur mission. Par besoins, l'on examine ce qui est nécessaire, utile, voire indispensable à l'accomplissement d'une tâche. Ces besoins peuvent être réels ou supposés, identifiés ou non par les enseignants. C'est donc le contenu et la nature même des ressources que l'on cherchait à aborder.

Ainsi, les questions suivantes ont été posées : Les ressources à disposition des enseignants sont-elles suffisantes pour répondre à ces besoins ? Quelle(s) ressource(s) pour relever les (nouveaux) défis qui se posent aux enseignants ? Comment les ressources prennent-elles en charge les besoins des enseignants ? Au-delà de la scénarisation de situation d'enseignement-apprentissage, de quels types de ressources les enseignants ont-ils besoin ?

II. UNE SYNTHÈSE DES ÉCHANGES

Une taille relativement petite du Groupe (7 communications et 1 affiche) a permis une étude plus approfondie des différentes recherches présentées par les participants. La plupart des contributions ont discuté des ressources qui concernent l'enseignement au primaire et au début du secondaire. Différents savoirs ont été abordés : l'arithmétique & la manipulation; les connaissances spatiales; la course fractionnée & proportionnalité; estimation computationnelle; numératie & données massives; codage informatique & animation de maquette. Les membres du Groupe ont identifié trois axes principaux permettant de regrouper les présentations : (1) les ressources pour définir et enseigner ; (2) l'usage de ressources dans divers contextes ; (3) le contenu des ressources et les conditions de leur appropriation par les personnes enseignantes.

1. *Thème 1. Ressources pour définir et enseigner (l'estimation computationnelle, l'arithmétique)*

Rioux et Benrherbal se sont penchées sur la problématique d'enseignement de l'estimation computationnelle et notamment sur la question « Quelles stratégies privilégie-t-on? » Les autrices ont ainsi présenté une analyse de ressources didactiques destinées à l'enseignement des mathématiques au Québec en fin du primaire (11-12 ans).

Agbatchi et coll. examinent, à partir d'une analyse de documents institutionnels et des écrits scientifiques, les conditions et contraintes d'utilisation du matériel de manipulation afin de mieux outiller les enseignants du primaire.

2. *Thème 2. Usage de ressources dans divers contextes*

Ont ainsi été questionnés une grille d'observation comme ressource pour développer les compétences professionnelles, les ressources liées aux données comme support au développement de la numératie comme nouveau paradigme, la numératie, les ressources qui entrent dans l'activité de débogage et enfin, les mathématiques comme ressource.

Sawadogo analyse l'utilisation d'une grille d'observation de leçon dans la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques du secondaire. La pertinence de la grille est ainsi au centre de son questionnement. Un questionnaire en ligne a été envoyé à des enseignants de mathématiques. Des entretiens ont été réalisés avec les encadreurs pédagogiques chargés du suivi-conseils et de la formation initiale des enseignants sur le plan pédagogique et didactique de l'enseignement secondaire.

Freiman et coll. ont organisé des ateliers de formation avec les enseignantes francophones du Nouveau-Brunswick de niveaux 6 – 9 (12-15 ans) pour explorer les ressources de big data afin d'examiner leur potentiel pour enrichir les apprentissages des élèves en mathématiques (numératie), en lien avec les objectifs de développement durable de manière inter- et transdisciplinaire.

Kamba et Freiman ont étudié comment une classe de 4^e année du primaire (9-10 ans) travaillait sur un projet interdisciplinaire de type *makerspace* (Freiman, 2020). L'enseignante, partant du programme de science (exploration du monde animal) a engagé les élèves dans les recherches des informations sur un animal choisi (souvent en danger ou en voie de disparition) et en présentant les résultats de leurs recherches au public (les écoliers et leurs parents). Entre autres, leur tâche plus spécifique consistait en la création, en équipe de 3-4 élèves, d'une maquette d'animal en y intégrant un *micro:bit* (carte microcontrôleur programmable) ayant des capteurs et actionneurs intégrés (<https://microbit.org/fr/>). Les auteurs se sont concentrés sur le débogage et le rôle qu'y jouent les mathématiques comme savoirs mobilisés par les élèves dans un contexte de codage informatique et résolution de problèmes liés aux maquettes physiques et les appareils physiques d'informatique.

3. *Thème 3. Contenu de ressource et conditions d'appropriation par les personnes enseignantes*

Différents aspects ont été abordés comme 1) la dimension itérative dans le processus de conception et de développement d'une ressource coconstruite par des personnes enseignantes et des chercheurs afin d'obtenir une ressource « saturée » qui n'évolue plus dans le processus itératif d'expérimentations et adaptations successives ; 2) la recherche des déterminants didactiques qui assurent qu'une ressource soit « robuste » en produisant effectivement les effets attendus ; 3) la mise à disposition des ressources via un site internet avec une variété de médias (vidéos, textes).

Forest et coll. ont accompagné des enseignants du primaire dans un processus itératif (*Design-Based Research*) de la mise en place d'une ressource didactique sous forme de banque d'activités visant le développement du raisonnement spatial. Leur recherche apporte un premier éclairage sur (1) la transformation de la ressource proposée initialement par l'équipe de chercheurs lors d'un processus itératif de sa mise en pratique et (2) les préoccupations des enseignantes, de la conseillère pédagogique (CP) et de chercheurs auxquelles chaque modification semble répondre.

En posant la question générale de la façon dont les ressources peuvent prendre en charge les besoins praxéologiques du professeur, **Wozniak** examine (1) le travail épistémologique du professeur

et ses besoins praxéologiques, (2) le dispositif qui révèle les déterminants didactiques d'une situation (didactique) et (3) les choix opérés pour concevoir une ressource qui intègre les besoins praxéologiques identifiés pour enseigner les connaissances spatiales liées au repérage dans un micro-espace aux deux premières années de l'école élémentaire (enfants de 6 à 8 ans).

Georget et Delattre présentent l'expérimentation d'une ressource interdisciplinaire associant mathématiques et éducation physique et sportive (EPS) traitant de proportionnalité et de vitesse moyenne dans un contexte de course fractionnée avec des élèves de cycle 3 (8-11 ans). Ainsi, un dispositif développé dans une perspective d'éducation inclusive permet la construction par les élèves de projets d'entraînement individualisés en lien avec la construction et la manipulation de concepts liés à la proportionnalité et à la vitesse moyenne.

III. CONCLUSION : QUELQUES CONSTATS ET MISE EN PERSPECTIVE

Comme **points de convergence**, en continuité avec l'évolution de la thématique à travers les colloques EMF, le Groupe a identifié les enjeux de conception, diffusion et usage de ressources pour répondre aux besoins des personnes enseignantes qui méritent d'être examinés en continuité dans les rencontres futures (soit dans le cadre de la même thématique ou d'autres), et plus particulièrement :

1) Les conditions d'appropriation d'une ressource et les points de vigilance pour y parvenir :

- - l'acceptabilité d'une ressource : quelles valeurs les personnes enseignantes vont donner à la ressource ? ;
- - l'utilisabilité : prendre en compte l'expertise des personnes enseignantes ;
- - l'adaptabilité de la ressource qui ne doit pas être trop dissonante avec les pratiques et les attentes des professeurs ;
- - l'instrumentalisation des ressources et l'instrumentation des pratiques.

2) **L'étude de la façon dont les ressources viennent appuyer les personnes enseignantes dans la mise en œuvre** des séances ou séquences (dévolution, institutionnalisation, évaluation, moments de l'étude) notamment en multipliant les entrées dans la ressource : entrée théorique, entrée pratique, entrée par l'activité des personnes enseignantes ou l'activité des élèves.

3) **Le rôle des mathématiques comme ressource pour soutenir l'activité de l'élève dans les projets interdisciplinaires en lien avec le contexte du monde réel :**

- En s'ouvrant davantage à l'interdisciplinarité dans un contexte de vie de tous les jours, l'enseignement de mathématiques peut bénéficier de son rôle clé comme ressource qui permet, à la fois, accroître la compréhension de phénomènes du monde réel chez l'élève et de sens qu'il donne aux concepts mathématiques en jeu (via modélisation, visualisation, questionnement, expérimentation, création techno-numérique, etc.)

RÉFÉRENCES

Abboud-Blanchard, M., Caron, F., Dorier, J.-L. et Sokhna, M. (2015). *Mentions culturelles dans la conception, la diffusion et les usages des ressources dans l'Espace Mathématique Francophone*. [Table ronde EMF2015]. Université d'Alger.

- El Idrissi, A., Rouan, O. et Ait Ounejjar, L. (2022). La formation continue à distance des enseignants de mathématiques au primaire. Dans *Actes du Colloque EMF2022* (p. 552-565). Université de Sherbrooke.
- Freiman, V. (2020). Issues of teaching in a new technology-rich environment: Investigating the case of New Brunswick (Canada) school makerspaces. Dans *STEM teachers and teaching in the digital era: Professional expectations and advancement in the 21 st century schools* (p. 273-292). Springer International Publishing.
- Hitt, F., Maschietto, M., Trgalová, J. et Sokhna, M. (2012). Ressources et développement professionnel des enseignants [Compte-rendu du Groupe de Travail n° 6]. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMF 2012, 3-7 février 2012, Genève* (p. 772–782). <https://www.emf.unige.ch/index.php/actes-emf-2012/groupe-de-travail-6/>
- Wozniak, F., Freiman, V., Hayfa, N. et Sawadogo, T. (2018). Bilan du groupe de travail n 6 : conception, diffusion et usage des ressources. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMF2018 « Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines », 22-26 octobre 2018, Gennevilliers, Paris* (p. 631-637). IREM de Paris.

L'ENSEIGNEMENT DE L'ESTIMATION COMPUTATIONNELLE AU QUÉBEC : LA QUESTION DES RESSOURCES DIDACTIQUES

| RIOUX* MIRANDA ET BENRHERBAL** ABDERRAHMANE

Résumé | Dans cet article, nous rapportons une étude exploratoire qui s'intéressait à l'enseignement de l'estimation computationnelle dans trois ressources didactiques québécoises destinées à l'enseignement des mathématiques au troisième cycle du primaire. Nos résultats indiquent que l'arrondissement est la seule stratégie d'estimation présentée aux élèves et qu'il règne, dans les ressources didactiques analysées, une certaine confusion entre estimation, approximation, arrondissement et calcul mental.

Mots-clés : Estimation computationnelle, Enseignement, Ressources didactiques, Stratégies, Arrondissement

Abstract | In this article, we report an exploratory study which focused on the teaching of computational estimation in three Quebec educational resources intended for the teaching of mathematics in the third cycle of primary school. Our results indicate that rounding is the only estimation strategy presented to students and that there is, in the educational resources analyzed, a certain confusion between estimation, approximation, rounding and mental calculation.

Keywords: Computational estimation, Teaching, Educational resources, Strategies, Rounding

I. INTRODUCTION

Imaginons qu'une personne souhaite acheter, dans un marché d'alimentation, deux items non taxables se vendant respectivement 4,60 \$ et 5,20 \$. Au moment de payer, cette personne tend un billet de 20 \$ à la caissière, qui lui remet un billet de 5 dollars, deux pièces de 25 cents ainsi qu'une pièce de 10 cents, pour un total de 5,60 \$. N'ayant pas consulté son reçu de caisse, cette personne sort du marché sans se rendre compte qu'un des items a été facturé en double. Les choses se seraient passées autrement si la personne avait estimé le prix total de ses achats. En effet, cette personne aurait éprouvé un certain malaise en recevant son change, aurait examiné son reçu et signalé l'erreur à la caissière. Cette situation illustre l'utilité de l'estimation dans la vie quotidienne. En fait, l'estimation computationnelle requiert moins de temps et de ressources attentionnelles qu'un calcul exact (Ganor-Stern, 2018). Cela signifie qu'il est plus facile d'estimer que de faire un calcul exact quand le temps presse et que le degré d'attention requis est moins important, notamment en raison des manipulations qui simplifient les nombres ou les opérations concernées. L'estimation computationnelle est également fort utile quand « [...] une réponse approximative fournit un degré de précision contextuellement approprié » (trad. libre de Lemaire et al., 2000, p. 141). C'est le cas dans la situation que nous venons de décrire. Par ailleurs, l'estimation permet de développer une certaine flexibilité en calcul (Star et al., 2009) et pour citer Proulx, elle peut même être « [...] une activité tout simplement intéressante, excitante et stimulante, pour jouer avec les nombres » (Proulx, 2021, p. 21). Pour toutes ces raisons, il semble pertinent d'enseigner l'estimation computationnelle aux élèves et d'outiller les personnes qui ont à l'enseigner.

Dans ce texte, nous rapportons une étude qui s'intéressait à l'enseignement de l'estimation computationnelle au Québec. Nous commençons par exposer la problématique, laquelle fait état de notre ignorance à l'égard du traitement réservé à l'estimation computationnelle dans les ressources

* Université du Québec à Rimouski – Canada – miranda_rioux@uqar.ca

** Université Mohammed VI Polytechnique – Maroc – abderrahmane.benrherbal@um6p.ma

didactiques québécoises. Nous poursuivons en ancrant notre réflexion dans un cadre conceptuel. Ce dernier permet notamment de cerner ce que nous entendons par ressource didactique, situation d'enseignement et estimation computationnelle, et met en relief différentes stratégies qui permettent d'estimer le résultat d'une opération. Après avoir formulé nos objectifs de recherche, nous présentons quelques indications relatives à la méthodologie suivie. Nous y décrivons comment nous avons repéré et analysé les situations d'enseignement de l'estimation computationnelle présentes dans trois ressources didactiques dédiées à l'enseignement des mathématiques au troisième cycle du primaire (élèves âgés de 10 à 12 ans). Enfin, avant de conclure, nous présentons et discutons certains résultats issus de nos analyses. Nous soulignons notamment que l'arrondissement est la seule stratégie d'estimation présentée aux élèves et qu'il règne, dans les ressources didactiques analysées, une certaine confusion entre estimation, approximation, arrondissement et calcul mental.

II. PROBLÉMATIQUE

Au Québec, les élèves doivent être en mesure, à la fin du primaire, d'estimer le résultat des quatre opérations sur les nombres naturels et sur les nombres décimaux (MELS, 2009). Cet apprentissage est fort utile, d'une part pour les raisons relevées en introduction et d'autre part parce qu'il permet aux élèves d'évaluer, *a priori*, la magnitude du résultat d'une opération puis d'examiner, *a posteriori*, la plausibilité du résultat découlant de l'application d'un processus de calcul. Andrews et ses collaborateurs (2022) ont toutefois constaté qu'au Royaume-Uni, les curriculums mettent l'accent sur cette dernière utilité et omettent de mentionner l'utilité de l'estimation computationnelle dans les circonstances où les ressources en temps et en attention sont limitées. Nous sommes donc curieux de voir comment on légitime, au Québec, le recours à cette forme d'estimation.

Si les stratégies d'estimation des élèves semblent bien documentées (Reys et al., 1982 ; Lemonidis et Likidis, 2019), on en connaît très peu sur l'enseignement de l'estimation et à notre connaissance, exception faite des travaux de Bednarz et Proulx (2024), aucune étude n'a été menée, au Québec, pour explorer l'enseignement de ce processus. Comment l'estimation computationnelle est-elle enseignée ? Comment légitime-t-on le recours à cette forme d'estimation ? Quelles situations sont utilisées pour travailler ce processus ? Quelles stratégies privilégie-t-on ? Andrews et ses collaborateurs (2021) signalent que des analyses récentes de documents curriculaires mathématiques européens ont révélé que « [...] la seule stratégie d'estimation mentionnée était l'arrondissement, qui devait être un résultat d'apprentissage en soi et non un support à l'estimation (Andrews et al., 2021; Sunde et al., 2021) » (trad. libre de Andrews et al., 2021, p. 10). Feron-nous les mêmes constats en analysant les ressources didactiques destinées à l'enseignement des mathématiques au Québec ?

III. CADRE CONCEPTUEL

Dans ce cadre conceptuel, nous précisons ce que nous entendons par ressources didactiques et par situations d'enseignement. Nous définissons ensuite l'estimation computationnelle et déclinons quelles sont les principales stratégies de cette forme d'estimation.

1. *Les ressources didactiques et les situations d'enseignement*

De façon générique, les ressources didactiques renvoient aux ressources sur lesquelles peuvent s'appuyer les personnes enseignantes pour alimenter les réflexions menées ou les actions posées dans le contexte de leur pratique professionnelle. Ces ressources peuvent être de différentes natures, mais dans le cadre de ce texte, nous référons plus précisément aux manuels destinés à l'enseignement des mathématiques et aux guides pédagogiques qui les accompagnent. Enfin, en ce qui a trait aux situations

d'enseignement, ces dernières réfèrent aux différentes activités proposées aux élèves dans les ressources didactiques. Il peut s'agir d'une capsule informative, d'une situation-problème, d'une tâche décontextualisée, d'un exercice ou de toute autre activité figurant dans ces ressources et étant destinée à enseigner un objet de savoir donné.

2. *Une définition de l'estimation computationnelle*

Un examen de la littérature scientifique sur l'estimation (Andrews et al., 2022; Sunde et al., 2021) nous a permis de repérer quatre formes d'estimation : l'estimation de la numérosité, l'estimation de la mesure, l'estimation sur la ligne numérique et l'estimation computationnelle. C'est à cette dernière forme d'estimation que nous nous intéressons ici. En première approche, il est possible d'associer l'estimation computationnelle à un processus qui permet de donner une réponse rapide et raisonnable à une opération sur les nombres, et ce, sans effectuer le calcul exact. L'estimation computationnelle permet ainsi d'estimer l'ordre de grandeur du résultat d'une opération arithmétique. Par ailleurs, selon Desli et Liolou (2020), cette forme d'estimation doit se faire mentalement : « L'estimation computationnelle réfère à l'action de déterminer une solution approximative, mais satisfaisante à des calculs arithmétiques par le biais de mathématiques mentales » (trad. libre de Desli et Liolou, 2020, p. 2). Il convient toutefois de distinguer calcul mental et estimation computationnelle, le premier processus produisant une réponse exacte et le second, un résultat approximatif (en ce sens qu'il avoisine la réponse exacte)

3. *Les stratégies d'estimation computationnelle*

Plusieurs stratégies permettent d'estimer le résultat d'une opération sur les nombres (voir Gunes, 2022). Ces stratégies peuvent être regroupées dans trois catégories, selon qu'elles impliquent un processus de reformulation, de traduction ou de compensation (Reys et al., 1982). Voici une description succincte de ces catégories.

Les stratégies de reformulation sont des stratégies qui impliquent une simplification des nombres sur lesquels on opère. L'opération demeure la même, mais les nombres, eux, sont modifiés de manière à simplifier le calcul. Quand une personne arrondit ou tronque les nombres impliqués dans une opération, elle utilise une stratégie de reformulation. Il en va de même lorsqu'une personne modifie les nombres de manière à opérer sur des nombres compatibles. C'est notamment le cas quand elle estime la somme de 1,27 et 12,78 en additionnant 1,25 et 12,75. Les stratégies de traduction sont des stratégies qui impliquent une modification de la structure mathématique du problème. Plus souvent qu'autrement, ces stratégies requièrent une modification de l'opération à effectuer. Imaginons qu'une personne doive estimer la somme des nombres 18,34, 19,01 et 17,99. Cette personne pourrait très bien multiplier 20 par 3 et estimer à 60 la somme de ces trois nombres. Ou encore, si elle est habile en calcul mental, elle pourrait multiplier 18 par 2 et ajouter 19 au produit obtenu. Le résultat estimé (55) se rapprocherait alors davantage du résultat exact (55,34). Les stratégies de compensation sont des stratégies mobilisant des stratégies de reformulation et de traduction et impliquant « [...] un ajustement du résultat estimé, et ce, afin de réduire la différence potentielle entre l'estimation réalisée et le résultat exact » (Rioux, Benrherbal et Couture, 2023, p. 15). Pour fin d'illustration, supposons qu'une personne doive estimer la somme des nombres 18,34, 19,01 et 17,99. Si elle calcule le triple de 20, elle sait que son approximation sera supérieure à la somme de ces nombres, car elle a arrondi les trois nombres à la dizaine supérieure avant d'opérer sur ces derniers. Aussi, pour compenser cette perte de précision, elle pourrait soustraire 5 à 60 et estimer à 55 la somme des trois nombres. Enfin, il est à noter que la stratégie d'arrondissement est une stratégie de reformulation car elle permet de simplifier les nombres sur lesquels on opère. Cela étant dit, cette stratégie de reformulation peut être mobilisée lors des

processus de traduction ou de compensation, s'il y a respectivement modification de la structure mathématique du problème ou ajustement du résultat estimé. Il en va de même de la troncature.

IV. OBJECTIFS DE LA RECHERCHE

Notre recherche s'intéressait à l'enseignement de l'estimation computationnelle au Québec et tournait son regard vers les ressources didactiques québécoises destinées à l'enseignement des mathématiques au troisième cycle du primaire. Elle nourrissait deux objectifs : (1) Décrire les situations utilisées pour travailler l'estimation computationnelle dans ces ressources didactiques et (2) Identifier les stratégies d'estimation computationnelle enseignées aux élèves dans ces mêmes ressources.

V. MÉTHODOLOGIE

Nous donnons ici certaines indications quant à la méthodologie suivie pour atteindre nos objectifs de recherche. Nous commençons par toucher quelques mots sur la constitution du corpus à l'étude et nous poursuivons en renseignant la personne lectrice sur l'analyse des situations recensées.

1. *Constitution du corpus à l'étude*

Plusieurs ressources didactiques peuvent être utilisées pour enseigner les mathématiques aux élèves du troisième cycle du primaire. Dans le cadre de cette recherche exploratoire, nous avons ciblé trois ressources didactiques québécoises, soit *Décimale Mathématique* (Fortier et Leblanc, 2013), *Les irréductibles* (Lord et Bergeron, 2020) et *Caméléon, classe branchée : mathématique* (Bergeron et al., 2014). Bien qu'il s'agisse d'un échantillon de convenance, les ressources didactiques ciblées devaient répondre à certains critères. Elles devaient être québécoises, avoir été publiées après 2009 et affirmer être conformes à la *Progression des apprentissages* (MELS, 2009). Elles devaient servir à enseigner les mathématiques aux élèves du 3^e cycle du primaire (5^e et 6^e année) et être accompagnées d'un guide d'enseignement. De plus, ce guide devait permettre de repérer facilement, dans les manuels de l'élève, les situations impliquant un travail sur l'estimation. En ce qui a trait à la sélection des situations d'enseignement, nous avons consulté le guide d'enseignement de chaque ressource didactique et retenu, dans les manuels de l'élève, les situations que les personnes autrices avaient identifiées pour travailler l'estimation. Quand les guides référaient à un thème comportant plusieurs situations, nous avons considéré toutes les situations de ce thème, question de bien cerner le contexte entourant l'enseignement de l'estimation computationnelle.

2. *Analyse des situations recensées*

Notre premier objectif consistait à décrire les situations utilisées pour travailler l'estimation computationnelle dans les ressources didactiques sélectionnées. Pour atteindre cet objectif, nous souhaitions adopter un cadre d'analyse non contraignant, et ce, afin de pouvoir intégrer à notre description les éléments qui émergeaient au fil de nos observations. Cela étant dit, lorsqu'opportun, nous nous posons les questions suivantes : cette situation mobilise-t-elle l'estimation computationnelle ? Si oui, dans quel contexte s'inscrit cette estimation ? Quelle définition donne-t-on de l'estimation computationnelle ? Comment légitime-t-on le recours à ce processus ? Sans s'y restreindre, ces questions ont orienté notre description des situations utilisées pour travailler l'estimation computationnelle. Il est à noter qu'il s'agit là d'une analyse exploratoire de la transposition externe (Chevallard, 1991) de cette forme d'estimation, considérée dès lors en tant que « savoir à enseigner ». L'attention portée aux contextes qu'empruntent les situations d'enseignement analysées relève par ailleurs de l'idée selon laquelle la transposition externe est d'abord et avant tout un processus de recontextualisation de savoirs décontextualisés. Notre second objectif consistait à identifier les

stratégies d'estimation computationnelle enseignées aux élèves dans ces mêmes ressources. Pour atteindre cet objectif, nous avons utilisé les catégories proposées par Reys et ses collaborateurs (1982) comme cadre d'analyse. Ainsi, à chaque fois qu'une situation enseignait une stratégie d'estimation aux élèves, nous avons tenté de la décrire le plus fidèlement possible et nous avons déterminé s'il s'agissait d'une stratégie de reformulation, de traduction ou de compensation. Notons qu'aucune analyse quantitative n'a été réalisée.

VI. RÉSULTATS

Nous présentons ici les résultats obtenus en analysant les situations d'enseignement de l'estimation computationnelle dans les ressources didactiques ciblées.

1. *Décimale Mathématique (Fortier et Leblanc, 2013)*

Dans cette ressource, un nombre limité de situations d'enseignement mobilisent l'estimation computationnelle. Cela dit, lorsqu'on consulte les guides d'enseignement de cette ressource, on constate que les situations devant mobiliser des connaissances sur l'approximation réfèrent pour la plupart à des situations d'enseignement de l'arrondissement. Aussi, nous constatons que les termes « approximation » et « arrondissement » sont utilisés de manière synonymique. Par ailleurs, cette ressource légitime le recours à l'estimation en avançant que l'approximation accroît la vitesse de calcul, qu'elle facilite le calcul mental, qu'elle est utile lorsqu'on fait des achats et qu'elle permet de vérifier le positionnement de la virgule lorsqu'on multiplie deux nombres décimaux non entiers. Enfin, lorsque notre regard se tourne vers les situations qui mobilisent réellement une estimation computationnelle, nous observons que la quasi-totalité de ces situations invite les élèves à estimer la somme ou la différence de montants d'argent.

L'arrondissement, qui est d'abord et avant tout une stratégie de reformulation, est la seule stratégie d'estimation computationnelle présentée aux élèves dans cette ressource. Ainsi, dans le cahier de savoirs et d'activités A de 5^e année, on indique que « Pour faire l'approximation d'une opération comportant des décimales, on arrondit chaque nombre à l'unité près » (Fortier et Leblanc, 2013, p. 99). Fait intéressant, plus tôt dans ce cahier, on présentait l'arrondissement comme étant une stratégie utile pour faire des approximations : « Arrondir un nombre est utile dans plusieurs contextes. Par exemple, pour faire l'approximation : - des distances parcourues ; des hauteurs de sauts ; du nombre de partisans à un match de soccer » (Fortier et Leblanc, 2013, p. 12). Nous ignorons si ces contextes se prêtent à des estimations computationnelles, à des estimations de la mesure ou à des estimations de la numérosité. Chose certaine, nous avons observé que ces contextes ne sont pas exploités dans les situations d'enseignement proposées ultérieurement. Cela signifie que dans cette ressource, l'accent est mis sur l'enseignement de la technique d'arrondissement et non sur les situations susceptibles de mobiliser l'arrondissement en tant que stratégie d'estimation.

2. *Les irréductibles (Lord et Bergeron, 2020)*

Cette ressource didactique présente l'arrondissement comme étant l'une des stratégies que l'on peut utiliser pour effectuer une estimation, laissant entendre par là qu'il existe d'autres stratégies. En effet, dans le cahier d'apprentissage A de 5^e année, on introduit ainsi l'estimation computationnelle :

Faire une approximation d'un résultat, c'est estimer une réponse près du résultat attendu. Une des façons possibles est d'arrondir les nombres faisant partie de l'opération mathématique. $880 + 1245 = ?$ On peut arrondir pour faire une approximation du résultat : $900 + 1200 = 2100$ (Lord et Bergeron, 2020, p. 53).

L'approximation est également présentée comme étant une stratégie mathématique : « Arrondis les nombres pour faire rapidement l'approximation d'une réponse. Compare ton approximation au résultat pour le valider » (Lord et Bergeron, 2020, p. 154). Ainsi, cette ressource didactique légitime le recours à l'estimation en avançant qu'elle permet de valider rapidement le résultat d'un calcul. Comme c'était le cas pour *Décimale Mathématique*, cette ressource enseigne également aux élèves que l'approximation permet de vérifier le positionnement de la virgule dans le résultat d'une opération impliquant des nombres décimaux non entiers : « Avant d'additionner ou de soustraire des nombres décimaux, il peut être utile de faire une approximation du résultat afin de s'assurer d'avoir bien positionné la virgule dans la réponse » (Lord et Bergeron, 2020, p. 130). Enfin, lorsque les élèves sont appelés à estimer la réponse à de petits problèmes mathématiques mobilisant des opérations sur les nombres décimaux non entiers, les nombres impliqués ne renvoient pas à des montants d'argent, mais bien à des mesures exprimées en kilomètres, en mètres ou en litres. Le problème suivant en offre un exemple :

Fais une approximation. Calcule ensuite le résultat exact.

a) Monsieur Ferrini a parcouru 28,94 kilomètres sur son voilier. De cette distance, 19,57 kilomètres ont été franchis grâce au vent. Quelle distance monsieur Ferrini a-t-il parcourue en utilisant son moteur ? (Lord et Bergeron, 2020, p. 123).

3. *Caméléon, classe branchée : mathématique (Bergeron et al., 2014)*

Dans le cahier d'apprentissage A de 5^e année, nous observons que les situations d'enseignement devant impliquer un travail sur l'estimation renvoient plutôt à des situations d'enseignement du calcul mental. Nous avons effectué les mêmes observations dans le cahier d'apprentissage B de 5^e année. Cela étant dit, à la page 29, dans une section portant sur la multiplication d'un nombre décimal non entier par un nombre naturel, cette ressource introduit l'arrondissement comme étant une stratégie permettant d'estimer un produit :

Pour obtenir le produit approximatif d'une multiplication, arrondis les termes de façon à obtenir le plus de 0 possible. Ces nombres seront plus faciles à calculer.

Afin d'obtenir un produit qui se rapproche le plus possible du produit exact :

- arrondis un terme à la hausse et l'autre à la baisse ;
- ensuite, coupe et colle les zéros (Bergeron et al., 2014, p. 29)

Cette idée d'arrondir un facteur à la hausse et l'autre à la baisse est intéressante dans certaines circonstances, mais ne conviendrait pas à des nombres tels que 18 et 69, le produit de 20 et de 70 étant plus rapproché du résultat exact (1242) que le produit de 10 et 70. De plus, en cherchant à obtenir le plus de 0 possible, on facilite les calculs, certes, mais on court le risque d'obtenir une approximation qui s'éloigne davantage du résultat exact. Enfin, il convient de mentionner que la stratégie consistant à couper et à coller les zéros est une stratégie de calcul mental, et non une stratégie d'estimation computationnelle.

Dans le cahier d'apprentissage A de 6^e année, on parle d'approximation d'un nombre :

Il existe deux moyens d'obtenir une approximation d'un nombre : l'estimation et l'arrondissement.

Faire une approximation par estimation permet de trouver la valeur approchée d'une grandeur quand la valeur exacte est difficile à calculer.

Exemple : Estimer le nombre d'élèves qui participent au cross-country.

Faire une approximation par arrondissement permet de remplacer une valeur exacte par une autre valeur arrondie, donc approximative, à une position donnée (Bergeron et al., 2014, p. 62).

Le premier moyen dont il est question renvoie à une estimation de la numérosité (déterminer approximativement le cardinal d'une collection) et le second, à l'arrondissement, qui n'est pas présenté comme une stratégie d'estimation computationnelle. Bien qu'il existe un lien logique entre ces moyens et l'estimation, leur emploi relève ici de la métonymie. Par ailleurs, ces explications ne viennent ni soutenir, ni légitimer les activités d'estimation computationnelle qui figurent dans les deux pages qui suivent. En effet, à la page 63 est proposé un petit problème à l'intérieur duquel les élèves doivent estimer la somme de différentes durées exprimées en minutes. À la page 64 est proposé un petit problème à l'intérieur duquel les élèves doivent estimer la somme de différents montants d'argent. Enfin, bien qu'il y ait une mention selon laquelle l'arrondissement des nombres facilite les calculs, à notre connaissance, cette ressource didactique ne légitime pas le recours à l'estimation computationnelle.

VII. DISCUSSION DES RÉSULTATS

Nous discutons ici des résultats en lien avec les deux objectifs de notre étude. Seront donc présentés des éléments de discussion relatifs à la description des situations utilisées pour travailler l'estimation computationnelle dans les ressources didactiques sélectionnées et à l'identification des stratégies d'estimation computationnelle enseignées aux élèves dans ces mêmes ressources. Notons que devant l'absence d'études antérieures sur la question, pour l'instant, les résultats dont nous discutons peuvent difficilement être mis en parallèle avec d'autres.

1. *Discussion des résultats relatifs au premier objectif*

Quand il est question d'estimation, les guides d'enseignement des trois ressources réfèrent à des blocs de situations diverses. Lorsque nous examinons ces blocs, nous constatons que peu de situations abordent l'estimation computationnelle telle que nous l'avons définie dans le cadre conceptuel. En effet, il est généralement question d'arrondissement ou de calcul mental, et les situations d'enseignement de l'estimation computationnelle sont parfois absentes des blocs de situations auxquels les guides d'enseignement nous ont référés. Cela signifie que l'arrondissement est souvent présenté de façon très procédurale, et ce, en faisant abstraction du rôle qu'il peut jouer en estimation computationnelle. Cela signifie également qu'il y a une certaine confusion entre calcul mental et estimation, certaines situations invitant les élèves à calculer mentalement le résultat exact d'une opération. En ce qui a trait à la manière de définir cette forme d'estimation, seule la ressource *Les irréductibles* (Lord et Bergeron, 2020) offre aux élèves une définition du processus ; les autres se contentent de présenter l'arrondissement comme étant la stratégie à déployer pour effectuer des approximations. Maintenant, quand nous analysons la manière de légitimer le recours à l'estimation computationnelle, nous avons noté qu'exception faite de *Caméléon, classe branchée : mathématique* (Bergeron et al., 2014), les ressources didactiques analysées mettent l'accent sur l'accroissement de la vitesse de calcul, sur la validation des calculs ainsi que sur la vérification du positionnement de la virgule lors des opérations sur les nombres décimaux non entiers. Enfin, lorsque les problèmes proposés aux élèves sont contextualisés, les ressources didactiques invitent le plus souvent les élèves à arrondir des mesures ou des sommes d'argent avant d'opérer sur ces dernières, mais sans pour autant justifier le recours à l'estimation. En fait, les contextes des situations présentées aux élèves renvoient la plupart du temps à ce que Wager (2012) nommait « activités extrascolaires liées aux mathématiques » et servent

de prétextes pour travailler l'estimation, sans pour autant établir un lien avec les stratégies informelles ou les pratiques culturelles associées à ces activités.

2. *Discussion des résultats relatifs au second objectif*

Dans les ressources didactiques analysées, l'arrondissement, qui est une stratégie de reformulation, est la seule stratégie d'estimation computationnelle enseignée. Cela s'explique probablement par le fait que l'arrondissement est la seule stratégie d'estimation computationnelle mentionnée dans la *Progression des apprentissages* (MELS, 2009), bien que cet objet d'apprentissage ne soit pas explicitement présenté comme étant une stratégie d'estimation. Nous notons par ailleurs que les élèves sont encouragés à utiliser cette stratégie, peu importe les nombres et les opérations concernées, ce qui n'encourage pas le développement de leur flexibilité en calcul. Pourtant, selon Star et ses collaborateurs, être un bon estimateur computationnel implique de connaître plusieurs stratégies et d'être en mesure de sélectionner la stratégie la plus appropriée pour un problème donné et une intention donnée (Star et al., 2009). L'usage exclusif des ressources didactiques analysées ne permettrait donc pas aux élèves de développer pleinement leurs compétences en estimation computationnelle.

VIII. CONCLUSION

L'étude dont il était ici question explorait le traitement réservé à l'estimation computationnelle dans trois ressources didactiques québécoises destinées à l'enseignement des mathématiques au troisième cycle du primaire. Ses résultats indiquent que l'arrondissement est la seule stratégie d'estimation computationnelle qui est présentée. Ce constat nous préoccupe puisque ces ressources n'enseignent pas aux élèves à adapter leur stratégie en fonction des nombres et des opérations concernées, ce qui pourrait avoir une incidence sur le développement de leurs compétences en estimation. En ce qui a trait aux justifications du recours à l'estimation computationnelle dans les ressources didactiques étudiées, nous observons que la plupart sont liées à la validation des résultats de calculs impliquant des nombres naturels ou des nombres décimaux. À l'instar d'Andrews et ses collaborateurs (2022), qui ont étudié les curriculums mathématiques du Royaume-Uni, nous constatons également que les ressources didactiques analysées omettent de faire valoir que l'estimation computationnelle est utile dans les circonstances où les ressources en temps et en attention sont limitées. À notre avis, cela est susceptible d'affecter, chez les élèves, le sens et la portée de cet apprentissage. Pourquoi estimerait-on le résultat d'une opération quand on peut le calculer précisément ? Les réponses à cette question sont à chercher dans des situations similaires à l'exemple que nous avons présenté en introduction, et ce, que l'on considère l'estimation comme un outil à mettre au service de la résolution de problème ou comme un objet de savoir en lui-même. Enfin, l'étude que nous rapportons ici met en lumière une certaine confusion entre estimation, approximation, arrondissement et calcul mental. Est-ce le cas pour l'ensemble des ressources didactiques dédiées, au Québec, à l'enseignement des mathématiques ? Les personnes enseignantes présentent-elles ce processus aux élèves et si oui, comment ? Se limitent-elles aux situations présentes dans les ressources didactiques ? À leurs yeux, quelle est la pertinence de cet objet de savoir ? De plus amples recherches seraient nécessaires pour répondre à ces questions et pour soutenir les personnes qui ont à enseigner l'estimation computationnelle.

RÉFÉRENCES

Andrews, P., Xenofontos, C. et Sayers, J. (2022). Estimation in the primary mathematics curricula of the United Kingdom: Ambivalent expectations of an essential competence. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(8), 2199-2225.

- Andrews, P., Bødtker Sunde, P., Nosrati, M., Petersson, J., Rosenqvist, E., Sayers, J. et Xenofontos, C. (2021). Computational estimation and mathematics education: A narrative literature review. *Journal of Mathematics Education*, 14(1), 6-27.
- Bednarz, N. et Proulx, J. (2024). L'estimation et l'approximation dans l'enseignement des mathématiques : questions et clarifications conceptuelles. *Petit x*, (120), 39-67.
- Bergeron, C., Bergeron, C. L. et Sauvageau, K. (2014). *Caméléon, classe branchée : mathématique, 5e [-6e année] du primaire*. Les Éditions CEC.
- Desli, D. et Lioliou, A. (2020). Relationship between computational estimation and problem solving. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(3), em 0602.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (réédition, revue et augmentée). La Pensée Sauvage.
- Fortier, N. et Leblanc, A. (2013). *Décimale mathématique : 5e [-6e] année du primaire*. Pearson.
- Ganor-Stern, D. (2018). Do exact calculation and computation estimation reflect the same skills? Developmental and individual differences perspectives. *Frontiers in Psychology*, 9, article 1316.
- Gunes, G. (2022). Investigation of the computational estimation skills of and strategies employed by pre-service primary school teacher. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(3), em0689.
- Lord, S. et Bergeron, M. M. (2020). *Les irréductibles : mathématique, 5e[-6e] année*. Chenelière Éducation.
- Lemaire, P., Lecacheur, M. et Farioli, F. (2000). Children's strategy use in computational estimation. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 54(2), 141.
- Lemonidis, C. et Likidis, N. (2019). An integrated hierarchical model of 5th grade students' computational estimation strategies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(1), 84-106.
- Ministère de l'Éducation, du Loisir et des Sports [MELS]. (2009). *Progression des apprentissages – Mathématique*. Gouvernement du Québec.
- Proulx, J. (2021). Leçons de la classe de mathématiques – estimation. *Vivre le primaire*, 34(3), 19-21.
- Reys, R. E., Rybolt, J. F., Bestgen, B. J. et Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(3), 183–201. <https://doi.org/10.2307/748555>
- Rioux, M., Benrherbal, A. et Couture, A. (2023). Estimer le résultat d'une opération : pourquoi et comment ? *Vivre le Primaire*, 36(2), 14-16.
- Star, J., Rittle-Johnson, B., Lynch, K. et Perova, N. (2009). The role of prior knowledge in the development of strategy flexibility: The case of computational estimation. *ZDM*, 41(5), 569-579.
- Sunde, P. B., Petersson, J., Nosrati, M., Rosenqvist, E. et Andrews, P. (2021). Estimation in the mathematics curricula of Denmark, Norway and Sweden: Inadequate conceptualisations of an essential competence. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 66(1). <https://doi.org/10.1080/00313831.2021.1897881>
- Wager, A. A. (2012). Incorporating out-of-school mathematics: from cultural to embedded practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, 9-23.

CONDITIONS ET CONTRAINTES SOUS-JACENTES À L'UTILISATION DU MATÉRIEL DE MANIPULATION AU PRIMAIRE : UNE ÉTUDE THÉORIQUE

| AGBATCHI* BABATOUNDÉ MAURICE, CORRIVEAU** CLAUDIA ET JEANNOTTE*** DORIS

Résumé | À partir des écrits scientifiques sur l'utilisation du matériel de manipulation en mathématiques, notre recherche doctorale vise à identifier les conditions et les contraintes d'utilisation de ce matériel afin de mieux outiller les enseignants. En nous appuyant sur la recherche théorique et une méthode d'analyse propositionnelle de discours, combinées avec des méthodes d'analyse sémantique et structurale, nous allons dégager ces conditions et contraintes en lien avec les niveaux de l'échelle de codétermination didactique.

Mots-clés : matériel de manipulation, artéfact historico-culturel, matériel concret, outil mathématique, objet physique.

Abstract | Based on scientific writings on the use of manipulative materials in mathematics, our doctoral research aims to identify the conditions and constraints of using these materials to better equip teachers. By relying on theoretical research and a propositional discourse analysis method, combined with semantic and structural analysis methods, we will identify these conditions and constraints in relation to the levels of the didactic codetermination scale.

Keywords: Manipulative material, artifact historic-cultural, concrete material, mathematical tool, physical object.

I. PROBLÉMATIQUE DE LA RECHERCHE

Dès le primaire, les enseignants abordent différents concepts mathématiques avec leurs élèves. Pour ce faire, des enseignants invitent les élèves à utiliser des matériels de manipulation variés pour représenter différents objets mathématiques comme les nombres. Depuis la mise en place du programme de formation de l'école québécoise (PFÉQ) en 2002, des mesures concrètes ont été prises pour améliorer la qualité de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans les différents cycles du primaire (MELS, 2002). En 2009, le ministère de l'Éducation du Québec a doté les enseignants du primaire d'un document qui prescrit une progression des apprentissages en mathématiques au primaire (PDA_PFÉQ). Cette progression a été mise en place par le gouvernement dans le but d'améliorer la réussite scolaire des élèves et amène, encore aujourd'hui, les enseignants à revoir leurs manières de concevoir les situations d'apprentissage et d'enseignement. Avec l'objectif de soutenir le développement des compétences mathématiques des élèves, le ministère de l'Éducation a produit, en 2019, un Référentiel d'intervention en mathématique (RIM). Malgré l'importance que le matériel de manipulation revêt en contexte de classe, plusieurs auteurs consultés (Carbonneau, Marley et Selig, 2013 ; O'Meara, Johnson et Leavy, 2020 ; Puchner, Taylor, O'Donnell et Fick, 2010 ; Uribe-Flórez et Wilkins, 2017) soutiennent qu'un effort doit être fait pour soutenir les enseignants dans sa mise en place et son utilisation et c'est à ça que nous nous intéressons dans le cadre de cette recherche. À la lumière de ces constats faits par différentes personnes autrices, nous avons analysé les documents institutionnels et dressé un panorama des écrits scientifiques autour du matériel de manipulation.

* Doctorant – Université de Laval – Canada – babatounde-maurice.agbatchi.1@ulaval.ca

** Directrice de thèse – Université Laval - Canada – claudia.corriveau@fse.ulaval.ca

*** Co-directrice de thèse – Université du Québec à Montréal – Canada – jeannotte.doris@uqam.ca

Nous avons observé dans divers documents institutionnels (MELS, 2002 ; MELS, 2009 ; MEES, 2019) l'importance accordée au matériel de manipulation pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Ces documents mentionnent à plusieurs reprises l'utilisation de ce matériel, qui est ainsi prescrite dans les programmes. Toutefois, la manière de l'utiliser est laissée à la discrétion des enseignants et enseignantes (Poisard, Valdivieso, Robin, Riou-Azou et Le Guen, 2022 ; Tholence, 2022).

Dans le domaine de la recherche, trois enjeux principaux émergent des écrits sur le matériel de manipulation en mathématiques. Le premier est la polysémie de ce matériel, nécessitant un accompagnement des enseignants pour aider les élèves à faire le lien avec les concepts mathématiques (Bartolini et Martignone, 2020). Le deuxième enjeu concerne l'âge approprié pour utiliser ce matériel, avec des avis divergents sur son efficacité selon l'âge des élèves. Ross et al. (2020) soutiennent que l'âge est un facteur à considérer lors du choix du matériel. En revanche, Carbonneau et al. (2013) remettent en question la corrélation entre l'âge et l'efficacité du matériel. Enfin, le troisième enjeu porte sur la formation et les connaissances mathématiques des enseignants, soulignant le besoin d'accompagnement pour une utilisation efficace du matériel en classe. Certaines recherches adoptent une perspective déficitaire pour expliquer les ambiguïtés dans l'utilisation du matériel, attribuées au manque de connaissances des enseignants sur le moment et la manière d'utiliser ce matériel (Puchner et al., 2010 ; Swan et Marshall, 2010).

En conclusion, aborder ces enjeux permet de donner un aperçu des conditions et des contraintes sous-jacentes à l'utilisation du matériel de manipulation en mathématiques. Cependant, cela soulève également des questions. L'exploration des documents institutionnels et des recherches nous conduit à formuler notre objectif : **dégager dans la littérature scientifique les conditions et contraintes d'utilisation du matériel de manipulation afin de mieux outiller les enseignants.**

II. PREMIERS ÉLÉMENTS DE NOTRE CADRE CONCEPTUEL

Lors de cette présentation par affiches, nous explorons la définition du matériel de manipulation en mathématiques, au cœur de notre recherche doctorale. Pour mieux comprendre cet objet, nous avons analysé des articles scientifiques qui en fournissent diverses définitions. Ces définitions varient selon que l'étude se concentre sur l'utilisation du matériel par les élèves, les enseignants ou les futurs enseignants, ou sur un concept mathématique spécifique. Ce faisant, nous avons élaboré un tableau pour identifier des thèmes communs (voir figure 1 pour un extrait du tableau).

Auteurs (année)	Pages	Définition
Bartolini et Martignone (2020)	p.487	« Mathematical manipulatives are artifacts used in mathematics education. They are designed to be used in order to represent, model, or demonstrate mathematical concepts or processes in a concrete, physical, or virtual form. »
Watt, Douglas et George (2021)	p.7	« Swan and Marshall (2010) define a mathematical manipulation as "an object that can be used by an individual to represent numbers, things which, numbers, and processes." »
	p.8	« The mathematical features of mathematical mathematical tools or manipulatives such as counters, base-ten blocks, pattern blocks, must be unambiguous features of the classroom (e.g., base-ten blocks, pattern blocks, etc.) »
Chen et al. (2017)	p.2	« Manipulatives are concrete objects that are commonly used in elementary classrooms to represent mathematical concepts . These objects, for example, are blocks specifically designed to represent the base-ten system in the decimal number system (i.e., ones, tens, hundreds, and so on). »
Hindes et al. (2021)	p.138	« Manipulatives are physical objects designed to represent mathematical concepts (Furniss & Wooten, 2017) and the students could use them to represent mathematical concepts . »

Figure 1 – Extraits du tableau des définitions (le QUOI est surligné en jaune, le QUI en turquoise, le POURQUOI en vert et le COMMENT en rose).

En analysant des articles, diverses questions ont émergé concernant les définitions du matériel de manipulation en mathématiques. Ces définitions incluent des explications sur ce qu'est le matériel, qui l'utilise, son utilité et la manière dont il est utilisé. Quatre éléments clés ont été identifiés : **Quoi** (qu'est-

ce que le matériel de manipulation ?), **Qui** (qui l'utilise ?), **Pourquoi** (à quoi sert-il ?) et **Comment** (comment est-il utilisé ?).

L'étude des diverses définitions a permis de dégager de notre corpus quatre quasi-synonymes du matériel de manipulation à savoir objet, artefact, outil et matériel (*object, artifact, tool, material, traduction libre*). Pour ce qui est des différents sens, on peut remarquer que chacun des mots utilisés apporte un éclairage différent. En effet, le terme **objet** est souvent utilisé lorsque le matériel de manipulation est directement lié à l'élève. Dans le contexte de l'enseignement des mathématiques, certains auteurs ajoutent des qualificatifs comme *concret* (Hurst et Linsell, 2020 ; Meke et al., 2018 ; Uribe-Flórez et Wilkins, 2017) ou *physique* (Hurst et Linsell, 2020 ; Larbi et Mavis, 2016 ; Uribe-Flórez et Wilkins, 2017) pour préciser le sens du matériel de manipulation. Un objet concret ou physique est un objet tangible que les élèves peuvent toucher et manipuler directement (Hurst et Linsell, 2020).

Le terme **artefact** désigne une création humaine avec une intention pédagogique. Bartolini et Martignone (2020) identifient deux classifications : concret/virtuel et historico-culturel/artificiel. La classification concrète inclut les matériels de manipulation historico-culturels et artificiels, tandis que la catégorie virtuelle se réfère aux matériels de manipulation numériques. La catégorie concrète est associée au matériel de manipulation physique.

Le terme **outil** est utilisé pour accomplir une tâche et peut avoir plusieurs significations selon le contexte. Par exemple, une voiture peut être un outil de travail. Les personnes autrices utilisent le terme *outil* pour souligner que le matériel de manipulation sert à agir ou à effectuer un travail en mathématiques. Des qualificatifs comme *outil mathématique* (Boggan et al., 2010) et *outil pédagogique* (Larbi et Mavis, 2016) sont couramment utilisés dans les articles.

Enfin, le terme **matériel** est utilisé pour désigner des interactions physiques avec des éléments visuels et textuels. En anglais, on utilise *manipulative* ou *materials*. Laski et al. (2015) parlent de *matériel concret* comme des blocs ou des tuiles, utilisés pour illustrer des concepts mathématiques ou soutenir des procédures. Ces matériels aident les élèves à visualiser et expérimenter les principes mathématiques de manière concrète, renforçant ainsi leur compréhension.

De plus, l'analyse des définitions des articles consultés met en lumière la raison d'être et les diverses fonctions du matériel de manipulation en mathématiques. Ces fonctions sont très variées selon les différentes définitions et perspectives des auteurs. Le matériel sert à l'apprentissage des concepts mathématiques (Boggan et al., 2010 ; Hidayah et al. 2021), à la compréhension des concepts mathématiques (Griffiths et al., 2017 ; Meke et al., 2018 ; Swan et Marshall, 2010), à l'exploration, acquisition ou études des concepts et processus mathématiques (Bartolini et Martignone, 2020 ; Hurst et Linsell, 2020), à la concrétisation des concepts abstraits (Uribe-Flórez et Wilkins, 2017), à la résolution problème (Murphy, 2017 ; Uribe-Flórez et Wilkins, 2017) et à la représentation des concepts ou processus mathématiques (Hidayah et al. 2021 ; Uribe-Flórez et Wilkins, 2017). En conclusion, l'analyse des diverses définitions de l'utilisation du matériel de manipulation en mathématiques révèle la grande variété de ses fonctions. Nous avons identifié ces fonctions et émettons l'hypothèse qu'elles nous aideront à déterminer, dans les différents articles de notre corpus, les conditions et contraintes liées à l'utilisation du matériel de manipulation en mathématiques, ainsi que les unités d'analyse à identifier.

III. CONCLUSION

Pour mieux comprendre le matériel de manipulation en mathématiques et identifier les conditions et contraintes de son utilisation, nous avons analysé les définitions issues de notre corpus de publications scientifiques. Cette analyse a révélé des quasi-synonymes et des fonctions variées du

matériel dans l'apprentissage des mathématiques au primaire. Ces éléments serviront à constituer notre corpus d'articles à analyser et à identifier les unités d'analyse dans les articles sélectionnés.

RÉFÉRENCES

- Bartolini, M. G. et Martignone, F. (2020). Manipulatives in mathematics education. Dans S. Lerman (dir.), *Encyclopedia of mathematics education* (p. 487-494). Springer International.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_93
- Boggan, M., Harper, S. et Whitmire, A. (2010). Using manipulatives to teach elementary mathematics. *Journal of Instructional Pedagogies*, 3, 1-6.
- Carbonneau, K. J., Marley, S. C. et Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380-400.
<https://doi.org/10.1037/a0031084>
- Griffiths, R., Back, J. et Gifford, S. (2017). *Using manipulatives in the foundations of arithmetic*. Nuffield Foundation. <https://www.nuffieldfoundation.org/project/using-manipulatives-in-the-foundations-of-arithmetic-2>
- Hidayah, I., Isnarto, Masrukan, Asikin, M. et Margunani. (2021). Quality management of mathematics manipulative products to support students' higher order thinking skills. *International Journal of Instruction*, 14(1), 537-554. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1282131.pdf>
- Hurst, C. et Linsell, C. (2020). Manipulatives and multiplicative thinking. *European Journal of STEM Education*, 5(1), article 4. <https://doi.org/10.20897/ejsteme/8508>
- Larbi, E. et Mavis, O. (2016). The use of manipulatives in mathematics education. *Journal of Education and Practice*, 7(36), 53-61.
- Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Daoust, C. et Murray, A. K. (2015). What makes mathematics manipulatives effective? Lessons from cognitive science and montessori education. *SAGE Open*, 5(2). <https://doi.org/10.1177/2158244015589588>
- Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement Supérieur [MEES]. (2019). *Référentiel d'intervention en mathématique*. Gouvernement du Québec.
- Meke, K. D. P., Wutsqa, D. U. ET Alfi, H. D. (2018). The effectiveness of problem-based learning using manipulative materials approach on cognitive ability in mathematics learning. *Journal of Physics: Conference Series*, 1097, article 012135. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1097/1/012135>
- Ministère de l'Éducation [MEQ]. (2002). *Programme de formation de l'école québécoise. Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie*. Gouvernement du Québec.
http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PFEQ_mathematique-primaire.pdf
- Ministère de l'Éducation [MEQ]. (2009). *Progression des apprentissages*. Gouvernement du Québec.
http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PDA_PFEQ_mathematique-primaire_2009.pdf
- Murphy, J. (2017). *The application of manipulatives in the writing process*. California State University, San Marcos.
- O'Meara, N., Johnson, P. et Leavy, A. (2020). *A comparative study investigating the use of manip.pdf*.
<https://documentcloud.adobe.com/spodintegration/index.html?locale=fr-fr>

- Poisard, C., Valdivieso, F., Robin, R., Riou-Azou, G. ET Guen, P. L. (2022). Des ateliers mathématiques dans les classes : manipuler et jouer pour apprendre. *Mediterranean Journal of Education*, 2(2), 47-57.
- Puchner, L., Taylor, A., O'Donnell, B. et Fick, K. (2010). Teacher learning and mathematics manipulatives : A collective case study about teacher use of manipulatives in elementary and middle school mathematics lessons. *School Science and Mathematics*, 108, 313-325.
<https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2008.tb17844.x>
- Swan, P. et Marshall, L. (2010). *Revisiting Mathematics Manipulative Materials*.
<https://documentcloud.adobe.com/spodintegration/index.html?locale=fr-fr>
- Tholence, M. (2022). *Les effets du matériel de manipulation sur les apprentissages mathématiques au cycle 1*. Institut national supérieur du professorat et de l'éducation – Académie de Grenoble.
<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-03703819/document>
- Uribe-Flórez, L. J. et Wilkins, J. L. M. (2017). Manipulative use and elementary school students' mathematics learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(8), 1541-1557.
<https://doi.org/10.1007/s10763-016-9757-3>

USAGE DE LA GRILLE D'OBSERVATION DE LEÇON DE MATHÉMATIQUES

POUR LA FORMATION INITIALE ET CONTINUE AU BURKINA FASO :

RÉALITÉS ET PERSPECTIVES

| SAWADOGO* TIMBILA

Résumé | L'analyse des choix opérés par l'enseignant et la manière dont il met en œuvre en classe permet à l'encadreur de donner des conseils à l'enseignant et aussi à l'enseignant d'opérer une pratique réflexive de son activité d'enseignement. Au Burkina Faso, dans le cadre de la formation initiale et la formation continue, les enseignants, les formateurs et les encadreurs pédagogiques utilisent une grille d'observation de leçon. Cette recherche ambitionne un regard critique sur la grille utilisée pour ce qui concerne les mathématiques. La pertinence de cet outil de formation et d'encadrement est questionnée et les perspectives d'enrichissement de la grille recherchées.

Mots-clés : mathématiques, grille d'observations, pratiques enseignantes

Abstract | The analysis of the choices made by the teacher and the way in which he implements them in class allows the supervisor to give advice to the teacher and also to the teacher to operate a reflective practice of his teaching activity. In Burkina Faso, as part of initial training and continuing education, teachers, trainers and educational supervisors use a lesson observation grid. This research aims to take a critical look at the grid used for mathematics. The relevance of this training and supervision tool is questioned and the prospects for enriching the grid are sought.

Keywords: Mathematics, observation grid, teaching practices

I. INTRODUCTION

L'analyse des pratiques enseignantes est de nos jours un champ de recherche florissant en sciences de l'éducation. Robert et Rogalski (2002) évoquent plusieurs composantes des pratiques enseignantes que sont les composantes cognitives et médiatives, la composante sociale, la composante institutionnelle et enfin la composante personnelle. Ces différentes dimensions rentrent en jeu et influent sur les choix individuels des enseignants dans une pratique de classe. Dans l'activité d'enseignement des mathématiques, les enseignants opèrent en amont et en aval des choix. L'analyse des choix opérés par l'enseignant et la manière dont il met en œuvre en classe ses choix permet à l'encadreur de donner des conseils à l'enseignant et aussi à l'enseignant d'opérer une pratique réflexive de son activité d'enseignement.

Au Burkina Faso, le ministère en charge de l'enseignement post-primaire et secondaire dispose d'une direction chargée de l'encadrement pédagogique et de la formation initiale et continue. Elle est chargée de la mise en œuvre des directives gouvernementales en termes de formation des enseignants qui sont sur le terrain ou en passe de l'être après un recrutement sur des thématiques variés. L'école normale supérieure est la structure chargée de la formation initiale des professeurs des lycées et collèges de l'enseignement général et la formation technique et professionnelle. Dans le cadre de la formation initiale comme dans la formation continue, les formateurs et les encadreurs pédagogiques utilisent différents outils parmi lesquels on note une grille d'observation de leçon.

Cette recherche ambitionne porter un regard critique sur l'utilisation de la grille dans la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques. La pertinence de cet outil de formation et

* École Normale Supérieure – Burkina Faso – sawtimbs@gmail.com

d'encadrement est questionnée et les perspectives d'enrichissement de la grille recherchées. La grille d'observation est-elle pertinente pour observer les pratiques enseignantes en mathématiques au plan pédagogique et didactique ? Quelles modifications peut-on opérer sur la grille pour la rendre plus pertinente pour l'observation des pratiques dans le contexte de la mise en œuvre de l'approche par les compétences au Burkina Faso ?

II. ASPECTS THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES

Dans cette partie nous situons le cadre théorique et méthodologique de la recherche. Il s'agit principalement de développer les notions de pratiques enseignantes, d'observations de ces pratiques et de fixer le cadre méthodologique de recueil et d'analyse des données.

1. *Pratiques enseignantes*

Le concept de pratique enseignante a fait l'objet de nombreuses théorisations (Altet, 1991, 2002, 2018 ; Bru, 2000 ; Lenoir, 2009 ; Vandebrouck, 2008 ; Robert, 2008 ; Bächtold, Boilevin et Calmettes, 2017).

Pour Altet (2002) la pratique enseignante se définit comme « la manière de faire singulière d'une personne, sa façon propre d'exécuter l'activité d'enseignement » en insistant sur ses trois volets constitutifs :

« La pratique recouvre à la fois des actions, des gestes, des procédures (observables), mais aussi des choix, des stratégies, des décisions, des fins, des buts (activité cognitive interne qui guide ce qui est observable), et les normes du groupe professionnel (dimension institutionnelle) avec les processus et inter-processus en jeu dans la dynamique de l'interaction enseignement-apprentissage. » (Altet, 1994)

Selon Engeström et al. (2001), cité par Gilbert et al. (2013), analyser l'activité c'est considérer un système qui inclut l'individu, les outils, matériels ou conceptuels, qu'il utilise, ses relations avec la communauté qui l'entoure et le produit qu'il se propose de réaliser, les interactions qui s'y produisent, les transformations qui s'y opèrent, tout en conservant une vision globale du système. Une analyse didactique des pratiques enseignantes pourrait-elle occulter les activités proposées aux élèves et les interactions entre l'enseignant et les élèves ?

En didactique des mathématiques et en didactique des sciences, la pratique enseignante est définie globalement comme étant « tout ce qui se rapporte à ce que l'enseignant pense, dit ou ne dit pas, fait ou ne fait pas, sur un temps long, que ce soit avant, pendant, après les séances de classe » (Robert, 2008, p. 59). Il s'agit de la pratique d'enseignement en face à face pédagogique avec des élèves en classe et un savoir scolaire à construire, avec en amont et en aval un temps didactique de préparation et de régulation (Altet, 2019, p. 32). Pour Abboud et Rogalski (2018), comprendre les pratiques enseignantes, c'est analyser les connaissances et les savoirs qu'ils mobilisent ou dont ils ont besoin, les ressources qu'ils utilisent (Gueudet et Trouche, 2010). Pour Coulange (2015, p. 82),

« L'étude des pratiques enseignantes amène à prendre un point de vue global, qui comprend à la fois les activités précises du sujet (considérées sur plusieurs échelles) et les contraintes imposées par le métier de professeur qui pèsent sur ces activités (en relation avec les déterminants institutionnels, sociaux et personnels, liés aux programmes et aux conditions d'exercice du métier d'enseignant) ».

Pour notre recherche, l'analyse des pratiques rapporte des actions, des gestes, des procédures (observables), des stratégies, des décisions que l'enseignant entreprend dans le but d'atteindre les objectifs qui lui sont assignés (Altet, 1994), en étroite liaison avec les notions, les savoirs et les savoir-faire mathématiques objets de la leçon.

2. *Observations*

L'observation est l'action de regarder avec attention les êtres, les choses, les événements, les phénomènes, pour les décrire, les étudier, les expliquer, en tirer des conclusions (Fernandez, 2021, p. 163). Selon Legendre (2005), l'observation est définie comme une « action de porter une attention minutieuse et méthodique sur un objet d'étude dans le but de constater des faits particuliers permettant de mieux le connaître ». L'observation est le point de départ de toute intervention car elle éclaire le professionnel sur une situation.

Pour Postic (1971), cité par Léon, A. (1975, p. 9),

« les différentes recherches sur l'observation des situations pédagogiques ont valorisé successivement les thèmes suivants : traits de personnalité ou de comportement du maître, interactions verbales entre maîtres et élèves, aspects fonctionnels de l'acte pédagogique (fonctions d'éveil, d'organisation, de contrôle, etc.), aspects cognitifs de l'acte pédagogique ».

Ainsi les interactions en classe font objets de l'observation. Les interactions de bases sont celles de l'élève avec le milieu, pris aussi bien au sens général (milieu social, scolaire, etc.) qu'au sens particulier de situation (matériel qu'il manipule, questions posées, rapports définissant le statut de la vérité qu'il construit... etc.) ; le maître est conduit à contrôler toutes les sources scolaires d'informations et il se substitue à la plupart d'entre elles parce qu'il ne peut pas les faire interagir avec ses élèves de façon satisfaisante. (Brousseau, 1978, p. 31).

Pour Meunier (2015, p. 19), ce n'est pas tout d'observer, il faut aussi structurer la façon de le faire, sinon le jugement que l'on pose devient questionnable. Il importe pour l'enseignant d'avoir accès à des outils pour consigner les observations faites en classe. Pour l'observation des pratiques enseignantes, les instruments utilisés sont généralement des grilles conçus par l'institution, l'enseignant ou le chercheur. Parmi ces outils nous avons la grille d'observation de leçons qui énumère un ensemble de concepts, d'habiletés, d'interaction ou d'attitudes dont on notera la présence ou l'absence pendant l'observation de la leçon.

3. *Cadre méthodologique*

Une approche mixte de recherche a été utilisée dans le recueil des données. Un questionnaire en ligne a été envoyé des enseignants mathématiques. Ils sont au nombre de de Quatre-vingt (80) à avoir répondu aux questionnaires. Des entretiens ont été réalisés avec dix (10) encadreurs pédagogiques de l'enseignement secondaire. Il est intéressant de noter que les encadreurs pédagogiques sont chargés du suivi-conseils et de la formation initiale des enseignants sur le plan pédagogique et didactique. Les données recueillies avec le questionnaire ont été analysées par l'intermédiaire de l'outil Google Forms. Les données issues des entretiens ont été retranscrits et ont fait l'objet d'une analyse de contenus au sens de Bardin, 1997 (voir aussi Bardin, 2003 ; Bauer, 2012 ; Robert et Bouillaguet, 2007 ; Schreier, 2014).

III. RÉSULTATS ET DISCUSSIONS DES RÉSULTATS

Dans cette partie nous présentons la grille d'observations et les résultats issus de la recherche sont présentés et nous discutons de ces résultats.

1. *La grille d'observations de leçon*

Cette partie nous abordons la problématique de la recherche. Dans la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques au Burkina Faso, une grille d'observation de leçon est utilisée par

les formateurs pour suivre les activités d'enseignement. Cette grille comporte trois axes d'observations qui sont : le déroulement de la leçon, l'analyse de la fiche pédagogique et celle des activités administratives.

Le déroulement de la leçon occupe une large part de l'observation avec une première rubrique portant sur les contenus enseignés. La conformité des contenus aux curricula, l'exactitude scientifique, la rigueur mathématique, la qualité de la trace écrite, la cohérence dans l'agencement des notions et la pertinence des activités proposées dans chaque phase sont les éléments observables de la rubrique « contenus ». la deuxième rubrique de cet axe intitulée « animation » porte sur la maîtrise des méthodes et techniques utilisées (organisation de la classe, conduite des activités), la gestion des interactions (gestion des réponses et des questions des élèves, gestion des erreurs, distribution de la parole, communication horizontale et verticale, valorisation des réponses des élèves), la pertinence des méthodes et techniques d'enseignement utilisées, la gestion du temps, la gestion du matériel didactique (tableau, matériel de construction...), le contrôle du travail des élèves, la clarté des consignes, des questions et des réponses, le climat de classe (discipline, ambiance dans la classe, etc...).

Tableau 1 – Rubriques de l'axe observation « Déroulement de la leçon »

Axe	A. CONTENU
Déroulement de la leçon	1. Exactitude scientifique
	2. Rigueur mathématique
	3. Pertinence des activités (prérequis ; motivation, activités introductrices de la notion, exercice pour faire fonctionner la notion, exercices d'évaluation terminale, exercices de réinvestissement et/ou d'approfondissement, exercices de réinvestissement et/ou d'approfondissement)
	4. Qualité de la trace écrite
	5. Conformité au programme
	6. Cohérence dans l'agencement des notions
	B. ANIMATION
	1. Maîtrise des méthodes et techniques utilisées (organisation de la classe, conduite des activités)
	2. Gestion des interactions (gestion des réponses et des questions des élèves, gestion des erreurs, distribution de la parole, communication horizontale et verticale, valorisation des réponses des élèves)
	3. Pertinence des méthodes et techniques d'enseignement utilisées
	4. Gestion du temps
	5. Gestion du matériel didactique (tableau, matériel de construction...)
	6. Contrôle du travail des élèves
	7. Clarté des consignes, des questions et des réponses.
	8. Climat de classe (discipline, ambiance dans la classe, etc...)
	C. QUALITÉS DE L'ENSEIGNANT
	1. Voix (débit, articulation, tonalité)
	2. Qualité de l'expression (écrite et orale)
	3. Personnalité (dynamisme, enthousiasme, maîtrise de soi)
	4. Tenue vestimentaire et aspects corporels

(Source : MENAPLN : Grille d'observation de leçon de mathématique au Burkina Faso)

L'analyse de la fiche de leçon porte sur la forme (conformité et présentation) et le fond (la formulation des objectifs, leur pertinence, la congruence des tâches proposées avec les objectifs et la fidélité pendant le déroulement de leçon.

La rubrique tâche administrative renvoie aux contrôles des absences et à la tenue des cahiers de textes. Le contrôle des absences est une étape préconisée par les différentes inspections avec une visée à la fois pédagogique et administrative. Sur le plan pédagogique, il permet à l'enseignant de montrer son empathie pour les apprenants et sur le plan administratif, ce contrôle permet de faire le point à l'administration et aux parents sur la situation des élèves. Le cahier de textes répertorie au jour le jour les activités menées par l'enseignant en termes de cours, d'exercices, d'évaluation. Son observation permet de situer la leçon dans une progression précise et aussi d'analyser les différentes activités proposées aux élèves avant la leçon du jour.

Tableau 2 – Rubriques des axes d'observation « Fiche pédagogique » et « tâches administratives »

FICHE PÉDAGOGIQUE	A. FORME
	1. Présentation
	2. Conformité
	B. FOND
	1. Formulation des objectifs
	2. Pertinence des objectifs
	3. Congruence des tâches proposées avec les objectifs
TÂCHES ADMINISTRATIVES	4. Fidélité
	1. Contrôle des absences (présence et tenue du cahier d'absence)
	2. Cahier de textes (Tenue, progression, présence des énoncés des devoirs et des exercices ou leurs références...)

(Source : MENAPLN : Grille d'observation de leçon de mathématique au Burkina Faso)

La présente recherche s'est focalisée sur l'utilité de la grille et la pertinence des différentes rubriques telles que présentées dans le cadre de la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques

2. Résultats

Les enseignants et les encadreurs pédagogiques de mathématiques ont été interrogés sur l'utilité et la pertinence de la grille d'observation dans la formation initiale et continue des enseignants. Les enseignants sont unanimes sur l'utilité de grille d'observation dans leur formation. Les enseignants ayant eu une formation initiale dans les écoles de formation des enseignants du secondaire présentent la grille comme leur boussole durant la formation et pendant leur stage pratique. Les enseignants disent que la grille leur permet de préparer leurs leçons conformément aux prescriptions du service d'encadrement. Elle leur permet également

Les encadreurs précisent que l'utilisation de la grille d'observation homologuée par le service de l'encadrement et permet de faire prendre conscience à l'enseignant sur les éléments objectifs sur lesquels il sera suivi et évaluer. La grille permet aussi à l'observateur de recenser les éléments positifs et les éléments à améliorer dans la pratique classe d'un enseignant afin de lui donner des conseils. La grille d'observation est utile pour la formation des enseignants de mathématiques car elle permet de dire aux enseignants quels sont les gestes pédagogiques à adopter en classe. L'observation en classe permet de fournir aux enseignants des commentaires critiques et constructifs afin d'améliorer leur gestion de classe et leurs techniques pédagogiques. Un des encadreurs interviewés dira que l'utilité de la grille peut être résumé comme suit :

Elle permet à l'enseignant de savoir ce que l'institution éducative ou scolaire attend de lui en situation de classe.
Elle permet aussi d'apprécier le niveau de réalisation de la prestation de l'enseignant en classe. Elle est surtout une

base sur laquelle enseignant et encadreur ou décideur politique peuvent établir un contrat d'objectif de réalisation des attentes de l'institution scolaire.

Interrogés sur la qualité de la grille d'observation en vigueur dans l'enseignement secondaire en mathématiques, les encadreurs reconnaissent la qualité de la grille. Elle contient la plupart des rubriques attendues dans les gestes professionnels d'un enseignant. Les encadreurs notent cependant que la grille comporte un certain nombre d'aspects qui ne facilitent pas son utilisation. Un des encadreurs interviewés dit ceci : « il y a beaucoup de va-et-vient quand tu utilises la grille compte tenu du fait que plusieurs éléments sont à observer en même temps dans différentes rubriques ». certains encadreurs la trouvent longue et comportant beaucoup de rubriques pas toujours faciles à cerner. Les rubriques « congruence des tâches proposées avec les objectifs » « pertinence des méthodes et techniques » semblent être des rubriques qui n'ont pas la même compréhension chez les acteurs. Certaines rubriques comme l'utilisation de la technologie dans l'enseignement des mathématiques, l'environnement de travail, l'état psychologie des apprenants ne sont pas mentionnées dans la grille d'après les enseignants. Ces aspects selon ces derniers peuvent être ajoutées à la grille car impactant la productivité de l'enseignant et partant de là, la qualité de l'apprentissage chez les apprenants. La notion de tenue vestimentaire et d'aspect corporel mérite un contenu clair et précis. Les enseignants pointent aussi du doigt les notions d'exactitude scientifique, de pertinence des activités, pertinence des méthodes et techniques d'enseignement utilisées et cohérence dans l'agencement des notions. Certains des enquêtés allant jusqu'à proposer que la rubrique « pertinence des méthodes et techniques d'enseignement utilisées » soient élaguées de la grille car pouvant être vérifiée dans la maîtrise des méthodes et techniques; de même que notion « la clarté des consignes et des questions » qui peut être vérifiée avec la rubrique gestion des interactions.

Le système éducatif burkinabé est en train d'entrée dans l'approche par les compétences dans l'enseignement post-primaire et secondaire (12-19ans) depuis la rentrée scolaire 2022. Cette approche préconise une autre manière de gérer les séances et les séquences d'apprentissage. Dans ce sens les enquêtés ont proposé des changements qui pourraient permettre l'amélioration et la contextualisation de la grille d'observation.

3. *Discussion des résultats*

L'utilisation de modèles préconçus pour l'observation des pratiques enseignantes a connu des critiques dans la recherche. Brousseau (1978) relève la grande tentation de faire un simple recensement des types de données (toujours les mêmes) et une liste des techniques de recueil d'analyse de ces données. Pour lui un des principaux types d'observations des activités didactiques est :

la prise systématique d'informations précisées à l'avance, dans le cadre d'une position théorique cohérente et explicite, ou mieux d'une hypothèse suffisamment et sincèrement douteuse, et ce dans des conditions réifiables et suivant une procédure standardisée. Prise au sens le plus strict, l'observation consiste ici à constater la réaction des faits et à répondre par oui ou par non à une question posée d'avance. (Brousseau, 1978, p. 132).

Pour ce chercheur, cette observation considérée comme le plus satisfaisant du point de vue scientifique est techniquement le plus facile à mettre en œuvre mais il est difficile à rattacher à une décision didactique ou à un objet didactique théorique pertinent. Dans ce sens il est souvent le plus décevant parce qu'il est toujours très fragmentaire à cause du nombre de variables. De ce fait, il masque la presque totalité de la signification des processus observés.

La grille d'observation d'une leçon de mathématiques au Burkina Faso présente les traits d'une prise systématique d'information à partir de rubriques et de variables préconçus et ne sauraient échappée aux écueils relevés par Brousseau (1978).

Les résultats de notre étude prouvent que la grille d'observation de leçon en mathématique est un outil de développement professionnel des enseignants. Elle est beaucoup utilisée par les enseignants et les encadreurs pédagogiques de mathématiques dans la formation initiale et continue au niveau du Burkina Faso. Elle n'échappe pas aux écueils relevés par Brousseau, et les réponses des enquêtés relatives aux aspects non pris en compte dans la grille prouve que la standardisation des rubriques d'observations est une des faiblesses de la grille. Par exemple des encadreurs ont relevé des va-et-vient dans la grille sur des aspects à observer qui ne facilitent pas l'utilisation de la grille. Cette remarque trouve sa pertinence par exemple dans les volets gestion des questions et réponses des élèves, gestion des erreurs, clarté des consignes et des réponses de l'enseignant qui sont à observer tout le long de l'activité d'enseignement.

De même des rubriques comme la congruence des tâches proposées avec les objectifs, la pertinence des méthodes et techniques ont été épinglées comme présentant des divergences de compréhension chez les acteurs. Cette divergence pourrait être atténuée par des indications en termes d'attente de la part de l'autorité administrative et pédagogique qu'est la direction chargée de l'encadrement pédagogique et de la formation initiale et continue.

Des propositions des enquêtés pour l'améliorer en introduisant de nouvelles rubriques ne pourraient permettre à la grille d'observer tous les faits didactiques lors d'une leçon de mathématiques. La prise en compte des aspects psychologiques, la clarification de certaines rubriques ont été aussi proposées. Ces propositions ont le mérite de rendre la grille plus facile à utiliser.

IV. CONCLUSION

La pratique réflexive est d'une importance capitale dans la professionnalisation des enseignants. Les ressources permettant ou facilitant la pratique réflexive sont d'un intérêt certain pour les intervenants dans la formation des enseignants et pour les enseignants eux-mêmes. La présente étude a montré que l'utilisation de la grille d'observation dans la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques au Burkina Faso est d'une importance pour le développement professionnel des enseignants. La grille d'observations présente certes des qualités mais elle pourrait être améliorée par la clarification de certaines rubriques d'observations et la prise en compte de certaines rubriques liées aux aspects psychologiques des apprenants. La mise en œuvre de l'Approche par les compétences au Burkina Faso, conduira certaines à sa révision pour la prise en compte de certaines variables liées à cette approche.

RÉFÉRENCES

- Abboud, M. et Rogalski, J. (2018). Les concepts et méthodes pour analyser l'activité de l'enseignant utilisant des technologies. Dans J. Pilet et C. Vendeira (dir.), *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques de l'ARDM, 2-3 février 2018, Paris, France* (p. 46-55). IREM de Paris.
<https://hal.science/hal-02421410/document>
- Bru, M. (2000). *Les variations didactiques dans l'organisation des conditions d'apprentissage*. EUS. (Ouvrage original publié en 1991)
- Altet, M (2019). Conjuguer des recherches sur les pratiques enseignantes et sur la formation des enseignants : une double fonction scientifique et sociale des Sciences de l'éducation. *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*, 52(2), 29-60. <https://doi.org/10.3917/lsdle.522.0029>

- Altet, M. (2018). Former les enseignants autrement par l'analyse des pratiques effectives d'enseignement-apprentissage : le projet OPERA. Dans L. Puren et B. Maurer, B. (dir.), *La crise de l'apprentissage en Afrique francophone subsaharienne* (p. 119-135). Peter Lang.
- Altet, M. (1991). *Analyse séquentielle et systémique de l'articulation du processus enseignement-apprentissage : recherche sur les interactions pédagogiques, modes d'ajustement et décisions interactives des enseignants en classe* (2 Tomes). HDR, CERSE.
- Altet, M. (2017). A observação das práticas de ensino efetivas em sala de aula: pesquisa e formação [L'observation des pratiques enseignantes effectives en classe : recherche et formation]. *Cadernos de Pesquisa*, 47(166), 1196-1223. <https://doi.org/10.1590/198053144321>
- Altet, M. (2004). L'analyse des pratiques en formation initiale des enseignants : développer une pratique réflexive sur et pour l'action. *Éducation permanente*, (159), 101-111.
- Bächtold, M., Boilevin, J.-M. et Calmettes, B. (2017). *La pratique de l'enseignant en sciences : comment l'analyser et la modéliser ?* Presses universitaires de Louvain.
- Brousseau, G. (1978). L'observation des activités didactiques. *Revue française de pédagogie*, 45, 129-139. <https://doi.org/10.3406/rfp.1978.1669>
- Coulange, L. et Robert, A (2015). Les mathématiques dans les activités du professeur. Conséquences pour la formation. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque de l'EMF2015 « Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage », 10-14 octobre 2015, Alger, Algérie* (p. 81-94). <https://emf.unige.ch/application/files/6214/6400/7494/EMF2015GT1COULANGE.pdf>
- Engeström, Y., Miettinen, R. et Punamaki, R. L. (dir.). (1999). *Perspective on activity theory*. Cambridge University Press.
- Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133-156. <https://doi.org/10.1080/13639080020028747>
- Gilbert, P., Raulet-Croset, N., Mourey, D. et Triomphe, C. (2013). Pour une contribution de la théorie de l'activité au changement organisationnel. *GRH*, 7(2), 67-88. <https://doi.org/10.3917/grh.132.0067>
- Fernandez, L. (2021). L'observation. Dans A. Bioy, M.-C. Castillo et M. Koenig (dir.), *Les méthodes qualitatives en psychologie clinique et psychopathologie* (2^e éd., p. 161-177). Dunod. <https://doi.org/10.3917/dunod.casti.2021.01.0161>
- Léon, A. (1975). Les grilles d'observation des situations pédagogiques. *Revue française de pédagogie*, 30, 5-13. <https://doi.org/10.3406/rfp.1975.1584>
- Meunier, H. (2015). L'observation au cœur de l'évaluation des apprentissages. *Québec français*, (175), 18-19.
- Postic, M. (1971). L'analyse des actes pédagogiques des professeurs de sciences. *Les Sciences de l'Éducation*, (1), 57-119.
- Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2(4), 505-528.
- Schön, D. A. (1993). *Le praticien réflexif. À la recherche du savoir caché dans l'agir professionnel*. Logiques. <https://doi.org/10.1080/14926150209556538>

Vandebrouck, F. (dir.). (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques enseignantes*. Octarès.

ANNEXES

QUESTIONNAIRE À L'ENDROIT DES ENSEIGNANTS ET DES ENCADREURS

1. Quelle est votre ancienneté dans le domaine de l'enseignement/encadrement des mathématiques? Donner le donnée le nombre d'années (en chiffres)
2. Quelle est votre ancienneté en tant qu'enseignant/encadreur de mathématiques? Donner le donnée le nombre d'années (en chiffres)
3. Quelles utilisations faites-vous de la grille d'observation de leçon depuis que vous l'avez?
4. Pensez-vous que la grille est utile pour la formation des enseignants de mathématiques?
5. La grille est-elle facile à utiliser?
6. Pensez-vous que la grille est complète? Sinon, que peut-on ajouter pour qu'elle soit complète?
7. Pensez-vous qu'il y a des rubriques qui peuvent être élaguer dans la grille d'observation? Si oui, lesquelles? Pourquoi?
8. Y a-t-il des rubriques qui méritent d'être mieux explicitées?
9. Quels changements pensez-vous qu'on peut opérer sur la grille d'observation dans la perspective de mise en œuvre de l'APC?

USAGE DE RESSOURCES BASÉES SUR LES DONNÉES MASSIVES EN ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES : QUEL SENS Y DONNENT DES ENSEIGNANTS

| FREIMAN* VIKTOR, YARO** KWESI, LOUIS*** NATACHA, LÉGER**** MICHEL,
CHIASSEON***** MARIO, KAMBA***** JACQUES ET ERAZO***** ATILIO

Résumé | Cette étude utilise des perspectives mathématiques critiques pour examiner les expériences des enseignants du secondaire dans l'utilisation de ressources de mégadonnées pour enseigner les mathématiques au service du développement durable. Ainsi, six enseignantes du Nouveau-Brunswick (de la 6e à la 9e année) ont participé aux ateliers d'apprentissage professionnel pour créer et mettre en œuvre des tâches mathématiques à l'aide de sources de données massives ouvertes en lien avec les objectifs de développement durable de l'ONU. Nous partagerons les premières conclusions de l'étude qui émanent des expériences des enseignantes en mettant en lumière des aspects du milieu auxquels elles sont sensibles.

Mots-clés : mégadonnées, perspective critique en mathématiques, apprentissage professionnel des enseignants

Abstract | This study uses critical perspective in mathematics education to examine secondary school teachers' experiences using big data resources to teach mathematics for sustainable development. Six female teachers from New Brunswick (grades 6-9) participated in professional learning workshops to create and implement mathematical tasks using open big data sources related to the UN Sustainable Development Goals. We will share initial findings from the study that emerge from the teachers' experiences, highlighting aspects of the *milieu* that they are sensitive to.

Keywords: Big data, critical perspective in mathematics education, teachers professional learning

I. INTRODUCTION

Les origines de notre contribution au GT7 remontent à l'EMF2012, le groupe de travail 6 portant sur les ressources et le développement professionnel des enseignants (Hitt et coll., 2012). Notre présentation portait alors sur le partage de données d'expérimentation de simulateurs virtuels par les enseignants du Nouveau-Brunswick (N.-B., système scolaire francophone) et plus particulièrement à la sensibilité des enseignants (DeBlois, 2006) envers l'utilisation des environnements informatisés mis à leur disposition et les milieux (c'est-à-dire tout ce qui agit sur l'enseignement et l'apprentissage ou ce sur quoi agit l'enseignement et l'apprentissage) vers lesquels ils porteront leur attention. (Freiman et coll., 2012, p. 827). Cette fois-ci, l'on présente les premiers résultats d'un nouveau projet portant sur l'usage de ressources de données massives (ou mégadonnées, ou big data) dans l'enseignement de

* Université de Moncton – Canada – viktor.freiman@umoncton.ca

** Université d'Alberta – Canada

*** Université d'Alberta – Canada

**** Université de Moncton – Canada

***** Université de Moncton – Canada

***** Université de Moncton – Canada

***** Université de Moncton – Canada

mathématiques, en lien avec les objectifs de développement durable (ODD) de l'ONU ([Objectifs de développement durable](#)).

Les données sont devenues un « phénomène social » en raison de leur impact sur la sphère plus large de notre société (Gebre, 2018). Par littératie des données (data literacy), nous entendons la capacité à lire, travailler avec, analyser et argumenter avec des données (D'Ignazio et Bhargava, 2015). Dans le contexte de l'éducation, il y a eu un regain d'intérêt pour l'exploration de stratégies pédagogiques visant à favoriser les compétences en matière de littératie des données chez les élèves du primaire et du secondaire, en mettant l'accent sur l'utilisation de l'intelligence artificielle (IA) et du Big Data (Adams et coll., 2021). Cet intérêt accru est motivé par au moins trois facteurs fondamentaux. Le premier est que notre société moderne est axée sur les données, avec un accès accru à des données facilement et gratuitement disponibles dans divers formats lisibles par l'homme et par la machine (Gebre, 2018). Pour que les élèves utilisent ces données disponibles dans leur vie quotidienne, il est nécessaire de les doter de compétences pertinentes en matière de littératie des données – analyse et interprétation des données. Deuxièmement, les compétences en littératie des données sont fondamentales pour la réussite scolaire des élèves dans l'enseignement postsecondaire, en particulier dans les domaines liés aux STIM (sciences, technologies, ingénierie, mathématiques) exigeant, entre autres, les bases des compétences en pensée computationnelle (*computational thinking*) et en modélisation mathématique qui sont essentielles pour les carrières dans la science des données et l'intelligence artificielle (Khan et Mason, 2021). Outre les perspectives de carrière dans les sciences liées aux données, notre prochaine génération de scientifiques et de citoyens, en général, doit également reconnaître à la fois le potentiel et les limites de l'utilisation des données dans notre monde moderne. Enfin, ce qui est rarement abordé dans les classes de la maternelle à la terminale, les élèves doivent être sensibilisés à la littératie des données et à sa pertinence dans leur vie quotidienne, en particulier être capables d'analyser et d'interpréter de manière critique les données, en vue de les sensibiliser aux problèmes liés à la durabilité locale et mondiale (au-delà de la durabilité environnementale).

Nous situons notre travail dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à travers des questions liées à la durabilité, à la littératie des données et au big data. Par exemple, les problèmes mondiaux qui nécessitent une attention particulière ne manquent pas : plus de 65 millions de personnes dans le monde sont déplacées (HCR, 2016) ; 9 des 10 années les plus chaudes jamais enregistrées ont eu lieu depuis 2000 (NASA, 2017) ; 1 personne sur 10 dans le monde n'a pas accès à l'eau potable (OMS, 2015). Pour résoudre des problèmes aussi complexes, il est nécessaire d'impliquer diverses parties prenantes (étudiants, enseignants, communautés) possédant de multiples perspectives (politiques, sociales, économiques, culturelles) et issues de domaines variés (sciences, technologie, ingénierie et mathématiques, sciences humaines, arts). L'enseignement des mathématiques pour le développement durable est une approche permettant de préparer les élèves et les enseignants à la fois à la lecture (compréhension) et à l'écriture (transformation) du monde grâce aux mathématiques (Gutstein, 2006) en réponse au développement des compétences du XXI^e siècle telles que la pensée critique, l'éthique et la responsabilité sociale (Ananiadou et Claro, 2009) chez les élèves du primaire et du secondaire. Cependant, rares sont les ressources visant à soutenir l'enseignement ou l'apprentissage des mathématiques à l'aide de sources de big data pour éduquer les élèves sur les questions liées aux ODD et la durabilité. Par conséquent, les enseignants doivent être conscients des limites et des opportunités de l'utilisation de ces données dans leur pratique.

Une nouveauté dans le contexte de l'enseignement des mathématiques au Nouveau-Brunswick, Canada, l'intérêt pour l'utilisation de données massives n'est toutefois pas étrange aux documents stratégiques du gouvernement en place. Notamment, les objectifs du projet ciblent une problématique clairement identifiée dans le plus récent Plan d'éducation provincial de 10 ans (GNB, 2016a)

permettant à tous les élèves de posséder de solides fondements en numératie, en sciences, ingénierie et technologie qui s'avèrent cruciaux pour une société de savoir (objectif 8). Il est intéressant que cet objectif, faisant l'allusion aux disciplines STIM (sciences, technologie, ingénierie, mathématiques) utilise le nom « numératie » qui remplace (implicitement) les mathématiques, dont le rôle dans cette grappe d'éducation reste encore à définir (LeBlanc et coll., 2022) même si l'intention de souligner des liens de disciplines STIM avec les problèmes de la vie courante y soit apparent. D'ailleurs, la province a commencé, dès septembre 2023, à expérimenter un nouveau programme de mathématiques de 9^e année (15 ans) entièrement basé sur la numératie.

Un autre document stratégique d'importance pour la population d'élèves francophones de la province est le Profil de sortie de l'élève de l'école acadienne et francophone (GNB, 2016b). En mettant l'emphase sur les trois types de compétences, à savoir, les compétences cognitives, socio-affectives et communicationnelles vitales dans le contexte francophone minoritaire, notre projet sur les données massives résonne avec la visée du Profil *Vivre une citoyenneté engagée et éthique*, en permettant à l'élève d'explorer les données réelles liées aux enjeux qui touchent directement sa vie et celle de ses concitoyens (santé, bien-être) ainsi donnant un sens à la société dans laquelle il vit. Également, on rejoint la visée *Développer un désir d'apprendre tout au long de sa vie* visant à développer une attitude d'ouverture dans un monde en pleine mutation bien reflétée dans les données que les élèves seront appelés à analyser dans les scénarios en lien avec la durabilité ; ce lien direct avec la vie de tous les jours leur permettra de poursuivre leurs apprentissages puisque ceux vécus en milieu scolaire sont en lien avec ceux de la vie courante. Finalement, on note un lien direct avec la visée *Mener une vie équilibrée*, car en s'intéressant aux enjeux de durabilité et en s'appuyant sur les données réels, les élèves pourront réfléchir à leur pouvoir agir et ainsi développer des compétences qui contribuent à leur mieux-être et à celui de la collectivité tout en mobilisant et combinant leur ressources internes et externes permettant de faire des choix dans leur projet vie-carrière et leur engagement citoyen.

Du point de vue didactique, notre étude s'inscrit dans la vision interdisciplinaire des mathématiques et de leur enseignement permettant, entre autres, de relier les enjeux mondiaux et locaux (Lafuente-Lechuga et al., 2020). Le contexte de littératie des données permet également de lier plus étroitement les mathématiques, la numératie et le big data (Chiasson et Freiman, 2022). À leur tour, les ODD intégrés à un projet interdisciplinaire ouvrent la voie à l'étude des questions sociales et de la justice dans les cours de mathématiques (Yaro et al., 2020). D'ailleurs, les dimensions inter- et transdisciplinaires sont bien présentes dans les programmes d'études en mathématiques (M-12) au N-B. Le programme formule, entre autres, les résultats d'apprentissages transdisciplinaires (entre autres, la pensée critique et créative et les compétences en technologies de l'information et de la communication). De plus, on y trouve également les principes directeurs visant l'interdisciplinarité et le sens qu'on accorde aux mathématiques, ainsi que les principes didactiques, soit, gérer et résoudre une situation-problème, communiquer mathématiquement, raisonner mathématiquement, et surtout établir des liens de mathématiques avec d'autres disciplines et la vie de tous les jours (Freiman et coll., 2012).

But de notre projet : Explorez des façons innovantes d'enseigner aux étudiants l'application de concepts mathématiques en utilisant des ressources Big Data pour résoudre des problèmes du monde réel liés aux objectifs de développement durable (ODD) et à la justice sociale. En tant qu'objectifs, nous envisageons de (1) collaborer avec les enseignants de mathématiques du primaire et du secondaire (niveaux 6 -12) pour créer des activités ou des tâches utilisant le big data afin de développer les compétences des élèves en littératie des données dans le contexte de problèmes du monde réel dans le cadre de projets interdisciplinaires liés aux STIM ; (2) engager les élèves à explorer des sources authentiques et fiables de big data pour accroître leur compréhension au sujet des problèmes mondiaux

liés aux ODD et à la justice sociale ; (3) augmenter la capacité des élèves à prendre des décisions et à agir, si nécessaire, pour résoudre des problèmes liés au développement durable en s'appuyant sur l'analyse des données et la modélisation mathématique.

II. CADRE CONCEPTUEL : PERSPECTIVE CRITIQUE DE L'ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES ET MODÈLES DE L'USAGE DE RESSOURCES DE BIG DATA

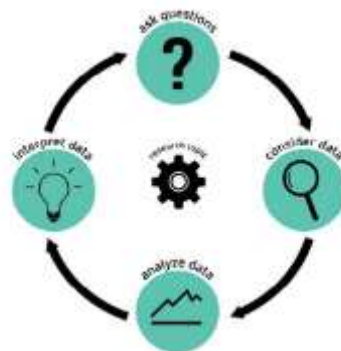
Le cadre conceptuel général de notre étude s'inscrit dans une perspective d'enseignement critique des mathématiques (Skovsmose, 1994) en vues de susciter chez les élèves des connaissances, des compétences et des attitudes nécessaires pour créer des communautés démocratiques qui embrassent la justice sociale à l'intérieur et à l'extérieur de l'école (Aslan et coll., 2011). Dans cette perspective, les mathématiques sont vues comme outil d'analyse de big data pour résoudre des problèmes mondiaux complexes liés à la pauvreté, la croissance démographique, les catastrophes naturelles, épidémies, etc. Ainsi, les problèmes mathématiques qui combinent les

« processus mathématiques de modélisation et d'analyse avec les jugements et l'interprétation des données contextualisées impliquent une vision des mathématiques vues avant tout comme une activité humaine (Yaro et coll., 2020) qui n'est pas "éthiquement neutre, non détachée des connaissances du monde réel et non tranchée" » (Shaughnessy, Garfield et Greer, 1996, p. 226).

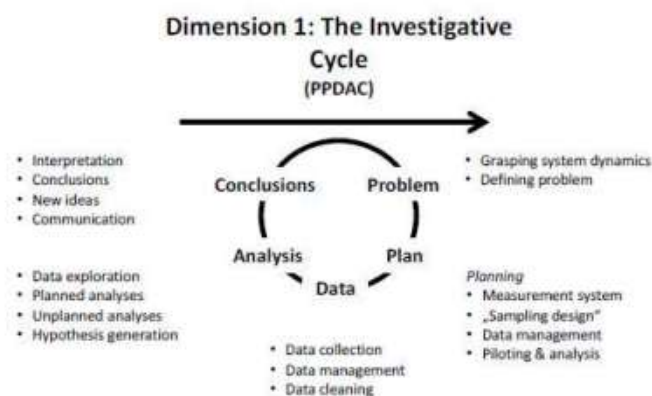
Cette vision implique, entre autres, une conceptualisation de ressources comme étant doublement pertinentes, en tant que dispositif directement ciblé pour l'apprentissage de mathématique dans un contexte authentique lié à la vie de tous les jours et en tant que véhicule d'activation de ressources matérielles (objets tangibles et outils), culturelles (habiletés et connaissances), sociales (interactions et relations), ainsi que symbolique (reconnaissance et prestige) pour résoudre des problèmes réels liés à la communauté (ex. qualité de l'air) (Shim et Yoon, 2024).

Barwell (2013) a mis en évidence la complexité des enjeux lorsqu'on implique les élèves dans l'analyse de phénomènes de vie réelle tels que les changements climatiques. Selon lui, les statistiques descriptives sont nécessaires pour décrire les changements climatiques, mais la modélisation de changements climatiques est basée sur les mathématiques très avancées (Barwell, 2018). Par contre, la communication des enjeux de changements climatiques est aussi l'affaire de numératie qui se base sur les ressources plus diversifiées et moins rigoureuses (médias,...). Cette transformation met en évidence le rôle de chaque apprenant au sein d'une communauté plus large en tant que citoyen critique et actif. Selon l'auteur, la complexité des enjeux crée des obstacles à l'application de méthodes traditionnelles (statistiques classiques). Il faut donc en tenir compte pour l'enseignement de maths.

Les big data constituent ainsi un « phénomène sociotechnique » qui implique la « capacité de rechercher, d'agréger et de croiser de grands ensembles de données [...], pour, entre autres, rechercher des modèles et créer des catégories, des profils ou des indicateurs souvent utilisés pour la prise de décision et les analyses prédictives » (Sander, 2020, p. 3). Le contexte d'usage de données massives met en évidence la nécessité de repenser les paradigmes de l'enseignement des statistiques en donnant plus d'ouverture à la diversité des données et à une variété d'approches d'analyse qui ne reposent pas toujours sur les lois classiques d'inférence statistique (règles plus flexibles) mais plutôt misant sur l'importance du questionnement et du processus cyclique d'investigation permettant de poser des questions, d'identifier les données, d'analyser les données et d'interpréter les données (Gould et al., 2017).



Le projet ProDaBi analysé par Biehler et coll. (2018), a explicitement intégré l'enseignement de statistique et les **enjeux socio-culturels** (16-17 ans) en mettant de l'emphase sur les données, la représentation et la variation en permettant aux élèves, dans le cadre du module d'introduction, de jouer le rôle de « détectives de données » en explorant entre autres, l'outil *Google Trends*. Leur modèle, aussi de nature cyclique, prévoyait l'étape de définition du problème, de planification, de collecte, gestion et nettoyage des données suivie de phases d'analyse et de conclusions (voir figure 1).



(Biehler et coll., 2018)

Figure 1 – Le cycle d'investigation de big data

En favorisant le questionnement chez les élèves, les chercheurs ont identifié des questions de bas niveau (« Do boys use their smartphone more often than girls? ») par opposition à celles de haut niveau (Which differences exist in the digital media use of 5th and 6th graders?)

Par rapport aux apprentissages professionnels des enseignants, notre analyse s'inspire de travaux de DeBlois notamment sur la sensibilité, un concept didactique qui

contribue, à la fois, à distinguer environnement et milieu, ce dernier concept étant emprunté à la théorie des situations didactiques. La notion de sensibilité a permis d'étudier le processus de transformation de l'interprétation des enseignants vis-à-vis de l'apprentissage de leurs élèves, et de repérer l'influence de ces interprétations sur le choix des interventions qu'ils prévoient de réaliser (DeBlois et coll., p. 1128).

Dans le contexte de notre étude, il fallait donc aider les enseignants de mathématiques de l'école intermédiaire (niveaux 6 – 8 du primaire au N.-B.) et secondaire (niveaux 9 -12) à exploiter de nouvelles ressources numériques et technologiques pour fournir des contextes réels riches favorisant un apprentissage et un engagement plus approfondi envers les mathématiques chez les élèves. C'est donc avec cette perspective d'utilisation de ressources par les enseignants et la création de dispositifs

d'enseignement – apprentissage pour les élèves que notre collaboration avec les enseignants s'est déroulée lors de deux ateliers sur l'usage de données massives.

III. ATELIERS SUR L'USAGE DE DONNÉES MASSIVES

Une collaboration entre les équipes de chercheurs de l'Université d'Alberta et de l'Université de Moncton a permis d'élaborer les ateliers pour les enseignants de mathématiques de deux provinces canadiennes en les introduisant au contexte d'utilisation des données massives et leurs liens possibles avec les enjeux de développement durables (objectifs de l'ONU). Ainsi, à Moncton (N.-B.) les deux ateliers d'une durée d'une journée, le premier en novembre 2023 et le deuxième en avril 2024 ont permis aux six enseignantes (niveaux scolaires 6 – 9) d'explorer les ressources, concevoir les scénarios d'enseignement-apprentissage (premiers atelier) et les mettre à l'essai avec leurs élèves (entre les ateliers) pour finalement partager leur expérience avec leurs collègues et les chercheurs (deuxième atelier). Autorisée par le comité d'éthique de la recherche de l'Université de Moncton, une collecte des données lors de deux ateliers a permis de faire des entretiens de groupe avec les enseignants et de recueillir des exemples de leur travail de scénarisation et de mise à l'essai avec les élèves.

Le premier atelier a débuté avec une discussion entre les enseignantes (en petits groupes) et en grand groupe en lien avec leur expérience avec les big data et les ODD, suivie d'une présentation sur l'histoire du big data, les définitions et les trois étapes fondamentales du processus de travail avec ces données (collecte, traitement et visualisation, Bachimont, 1996) ; tout en ressortant des liens avec les mathématiques. Différents exemples ont été discutés par rapport au phénomène de factivisme ([FRENCH Be a Fact-ivist Lesson Plan](#)), l'importance de questionnement, pensée critique quant à l'usage de données, pour terminer avec les stratégies et les exemples de ressources de données massives. L'atelier s'est terminé avec quelques idées initiales sur la scénarisation possible exprimées par les enseignantes.

Le deuxième atelier a débuté avec le partage de l'expérience de l'utilisation de ressources de big data avec les élèves et des éléments de scénarisation. Ce travail a suivi un exposé théorique sur les écrits en lien avec les données massives, leurs usages possibles en salle de classe et des liens avec les enjeux de développement durable. Des exemples de quelques scénarios possibles présentés par l'équipe de chercheurs (déforestation, montée de prix de l'alimentation, qualité d'eau potable, croissance démographique) ont été analysés par les enseignantes. Leur tâche était d'identifier les enjeux de développement durable (en lien avec les objectifs de l'ODD), investiguer le problème à l'aide de plateformes de données massives, donner du sens aux données (à l'aide d'un questionnement continu et critique), choisir de moyens de représentation adéquate de données (visualisation). Le travail de scénarisation s'est ensuite poursuivi. À la fin, une réflexion en grand groupe a permis de revenir sur l'expérience vécue par les enseignantes (ateliers et expérimentation en classe) et la pertinence de poursuivre le travail l'année scolaire suivante (voir figure 2).

Par exemple, une requête effectuée à partir de la plateforme *Worldometer* a permis de ressortir les données en temps réel sur la disparition de forêts à l'échelle planétaire. En analysant les données par jour, l'on pouvait apprendre, entre autres, que 13 144 hectares représentent la superficie de forêts détruite en une seule journée (au moment de la requête). On peut également voir la dynamique (comment ça change d'une minute à l'autre, d'une heure à l'autre, etc, comparer ces chiffres avec un repère local ; comment, par exemple ça se compare avec la superficie de Moncton ? On peut modéliser la dynamique de disparition de forêts (fonction affine) en utilisant, par exemple, le logiciel GeoGebra permettant de jouer avec différents paramètres. On peut aussi examiner l'ampleur du problème au Canada, ex. *Un aperçu des ressources forestières du Canada* (statcan.gc.ca).

ENVIRONNEMENT		
1 465 769	forêt détruite <i>cette année</i> (Hectares)	[+]
1 973 321	Terres arables perdues en raison de l'érosion du sol <i>cette année</i> (ha)	[+]
10 325 266 173	Emissions de CO2 <i>cette année</i> (tonn.)	[+]
3 382 202	Désertification <i>cette année</i> (Hectares)	[+]
2 759 983	Produits chimiques toxiques déchargés par les industries <i>cette année</i> (tonn.)	[+]

(Source : [Worldometer - real time world statistics](#))

Figure 2 – Exemple de données en temps réel provenant de la ressource *Worldometer*,

Alors que l'analyse des données de recherche est encore en cours, nous présentons ici des éléments auxquels les enseignantes étaient sensibles au sens de DeBlois (2006).

IV. PREMIERS RÉSULTATS : À QUOI LES ENSEIGNANTS SONT SENSIBLES ?

Alors que pour toutes les six enseignantes, l'expérience avec les ressources de données massives était la première, elles ont toutes montré, lors du premier atelier, un intérêt de les explorer dans leur enseignement. Les idées d'usage exprimées par nos participantes étaient très variées. Par exemple, une enseignante planifiait faire une exploration d'un problème de sources et de coûts d'énergie en voyant des liens avec d'autres disciplines (sciences et technologies), la statistique (données de Statistique Canada) ainsi que des enjeux de développement durable (empreinte écologique) :

On va voir la vie personnelle, la vie professionnelle, le contexte sociétal, puis sciences et technologies. Puis, je n'avais pas fait beaucoup de sciences et technologies encore, ça fait que je voulais aller intégrer sciences et technologies. Puis, ça s'adonne que j'avais déjà commenté quelque chose sur l'empreinte écologique de notre province, pour ensuite se rendre à l'empreinte écologique de toi-même ou de ta famille. Ça fait que j'avais déjà trouvé sur Statistique Canada plusieurs diagrammes sur l'électricité au Nouveau-Brunswick. J'ai posé quelques questions.

Au niveau de l'analyse de données, ses idées se tournent autour de sources d'électricité par région en essayant de donner du sens aux informations trouvées :

Donc, ici, c'est la production d'électricité par région. Donc, on a toutes les provinces. On pourrait, par exemple, juste prendre le Nouveau-Brunswick. C'est plus facile à comprendre au début. Donc, là, on voit les différentes sortes d'énergie qui créent notre électricité. On a une petite légende sur le côté ici qui donne nos pourcentages. Donc, on voit que c'est l'énergie nucléaire à 40 %, Nouveau-Brunswick. L'énergie hydroélectrique qui est beaucoup plus que je pensais.

Lors de partage d'expérimentation en classe, au deuxième atelier, différents exemples de scénarios mis à l'essai en salle de classe ont été fournis par les enseignantes. Par exemple, une enseignante de 6^e année a suscité le questionnement chez ses élèves par rapport à la raison de collecter les données (réelles) (*Alors, pourquoi collectons-nous des données ?*) et leur usage (*Où les données sont-elles utilisées ? Pourquoi ?*) en leur donnant différentes pistes de réflexion : *Qu'est-ce que les données vous ont appris ? En comparant les régions, quelles sont les différences ? Quelles pourraient être les causes de ces différences ? Existe-t-il des facteurs culturels/économiques ?* Les élèves ont exploré trois ressources de données massives ([Histogramme](#) - [Timeline](#)

of History, Worldometer - real time world statistics), Banque Mondiale (données sur le climat, [Les mégadonnées au service du développement | Nations Unies](#)) en produisant les infographies représentant les résultats de leurs recherches portant, entre autres, sur les enjeux de croissance économique (équité, solidarité), de crise de logement et d'énergie propre (voir figure 3) :



Figure 3 – Exemple d'infographies produites par les élèves de 6^e année à partir d'exploration de ressources big data (fourni par une enseignante)

Voici les thèmes qui ont été ressortis lors de la discussion sur l'apport de l'expérience vécue par les enseignantes, en termes de gains (voir figure 4). Des différents bienfaits identifiés, peuvent être regroupés en trois catégories semblent émerger : (1) valeur augmentée des savoirs mathématiques (sentiment d'utilité chez les élèves), authenticité des tâches (données en temps réel ; possibilité d'aller en profondeur), travail signifiant avec les données (différentes façons de représenter les données (ex., infographie) ; réfléchir sur les données et questionner ; faire des prédictions et estimations) ; (2) liens interdisciplinaires (français, développement personnel et bien-être) ; (3) compétences transdisciplinaires (haut niveau ; pensée critique, autonomie, collaboration entre les élèves). Il a été également ressorti que la préparation ne prend pas beaucoup de temps, parce que la direction de questionnement et d'analyse est déterminée par les élèves à qui on accorde plus de pouvoir agir et de prise de décisions. Comme défis, les enseignantes ont mentionné le manque de temps pour se familiariser avec les ressources et l'absence d'une banque de ressources partagées.

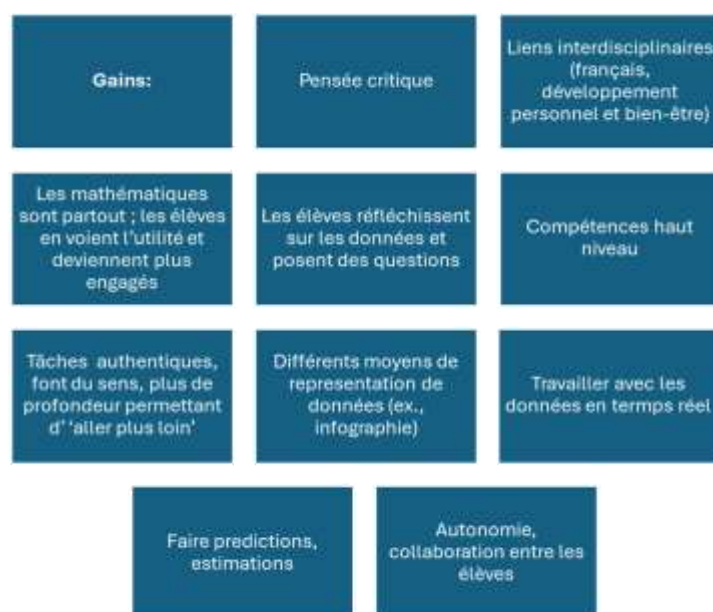


Figure 4 – Les thèmes concernant les bénéfices d'usage de ressources de big data en salle de classe (résultats d'analyse d'entretiens avec le groupe d'enseignantes)

À titre de conclusion, notons que les enseignantes participantes à notre étude portant sur l'usage de données massives en enseignement des mathématiques, en lien avec les enjeux de développement durable semblent avoir bien apprécié l'expérience leur permettant de voir l'utilité de nouvelles ressources. Les bienfaits ressortis par les enseignantes semblent être de nature inter- et transdisciplinaire des mathématiques qui a été mise de l'avant avec la réforme du début des années 2000 dans les écoles francophones du N.-B. (Canada), ce qui apporte un sens réel aux apprentissages des mathématiques en misant sur les tâches authentiques, les ressources numériques de données massives ouvertes, de représentations visuelles et dynamiques, le tout mettant au profit le développement de diverses compétences chez les élèves dont la pensée critique, l'autonomie et la collaboration. Toutes les enseignantes ont exprimé le besoin de poursuivre l'expérience en créant, entre autres, une base de scénarios possibles et une communauté de partage de ressources et de pratiques avec leurs collègues.

RÉFÉRENCES

- Adams, C., Pente, P., Lerner, G. et Rockwell, G. (2021). Artificial intelligence ethics guidelines for K-12 education: A review of the global landscape. Dans *Actes de la 22^e conférence internationale « Artificial Intelligence in Education » AIED2021, 14-18 juin 2021, Utrecht, Pays-Bas* (partie II, p. 24-28). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-78270-2_4
- Ananiadou, K. et M. Claro (2009). 21st century skills and competences for new millennium learners in OECD countries. *OECD Education Working Papers*, (41). <http://dx.doi.org/10.1787/218525261154>
- Bachimont, B. (2000). L'intelligence artificielle comme écriture dynamique : de la raison graphique à la raison computationnelle. Dans J. Petitot et P. Fabbri (dir.), *Au nom du sens* (p. 290-319). Grasset.
- Chiasson, M. et Freiman, V. (2022). Rethinking the 21st-century school: New citizens' skills for the digital era and their interaction with mathematics teaching and learning. Dans C. Michelsen, A. Beckmann, V. Freiman, U. T. Jankvist et A. Savard (dir.), *Mathematics and its connections to the arts and sciences (MACAS). 15 years of interdisciplinary mathematics education* (p. 69-107). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-10518-0_5
- DeBlois, L. (2006). Influence des interprétations des productions des élèves sur les stratégies d'intervention en classe de mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 62(3), 307-329.
- DeBlois, L., Del Notaro, C., Mawfik, N. et Roditi, E. Les pratiques enseignantes et l'apprentissage mathématique des élèves [Compte-rendu du groupe de travail 9]. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Actes du Colloque EMF2012 « Enseignement des mathématiques et contrat social. Enjeux et défis pour le 21^e siècle », 3-7 février 2012, Université de Genève, France* (p. 1127-1132). https://www.periscope-r.quebec/full-text/les_pratiques_enseignantes_et_lapprentissage_mathematique_des_eleves.pdf
- D'Ignazio, C. et Bhargava, R. (2015). *Approaches to building big data literacy*. https://precollege.oregonstate.edu/sites/precollege.oregonstate.edu/files/big_data_literacy.pdf
- Gould, R. (2017). Data literacy is statistical literacy. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 22-25. <https://doi.org/10.52041/serj.v16i1.209>
- Gouvernement du Nouveau-Brunswick [GNB]. (2016a). *Plan d'éducation de 10 ans*. https://www2.gnb.ca/content/gnb/fr/corporate/promo/convention_collective_quinquennale.html
- Gouvernement du Nouveau-Brunswick [GNB]. (2016b). *Profil des élèves de l'école secondaire acadienne et francophone*.

- Gutstein, E. (2006). « The real world as we have seen it » : Latino/a parents' voices on teaching mathematics for social justice. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(3), 331-358.
- Freiman, V., Savard, A., Larose, F. et Theis, L. (2012). Les simulateurs virtuels pour soutenir l'apprentissage de probabilités : un outil pour les enseignants. Dans J.-L. Dorier et S. Gousseau Coutat (dir.), *Actes du colloque EMF2012 « Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle », 3-7 février 2012, Université de Genève, Suisse* (p. 824–837).
<https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF12003.pdf>
- Gebre, E. H. (2018). Young adults' understanding and use of data: Insights for fostering secondary school students' data literacy. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 18(4), 330-341.
- Hitt, F., Maschietto, M., Trgalova, J. et Sokhna, M. (2012). Ressources et développement professionnel des enseignants [Compte-rendu du groupe de travail 6]. Dans J.-L. Dorier et S. Gousseau Coutat (dir.), *Actes du colloque EMF2012 « Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle », 3-7 février 2012, Université de Genève, Suisse* (p. 772-783).
<https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF12003.pdf>
- Khan, K. et Mason, J. (2021). The M in STEM and issues of data literacy. Dans *Proceedings of the 29th international conference on computers in education conference (ICCE2021), 22-26 novembre 2021, conférence en ligne* (vol. 1, p. 632-637). <https://library.apsce.net/index.php/ICCE/article/view/4209>
- Lafuente-Lechuga, M., Cifuentes-Faura, J. et Faura-Martínez, Ú. (2020). Mathematics applied to the economy and sustainable development goals: a necessary relationship of dependence. *Education Sciences*, 10(11), 339-350.
- LeBlanc, M., Freiman, V. et Furlong, C. (2022). From STEM to STEAM: Learning from students working in school makerspaces. Dans *Mathematics and its connections to the arts and sciences (MACAS) 15 years of interdisciplinary mathematics education* (p. 179-203). Springer.
- Sander, I. (2020). Critical big data literacy tools. Engaging citizens and promoting empowered internet usage. *Data & Policy*, 2, article e5. <https://doi.org/10.1017/dap.2020.5>
- Skovsmose, O. (1994). Towards a critical mathematics education. *Educational studies in mathematics*, 27(1), 35-57.
- Shaughnessy, J. M., Garfield, J. et Greer, B. (1996). Data handling. Dans A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick et C. Laborde (dir.), *International handbook of mathematics education. Part 1* (p. 205-237). Springer.
- Shim, J. et Yoon, S. A. (2024). Improving STEM education through resource activation: A study of culturally relevant teaching for critical data literacy in a high school science classroom. *Journal of Research in Science, Mathematics and Technology Education*, 7(S1), 1-26. <https://doi.org/10.31756/jrsmt.311SI>
- Yaro, K., Amoah, E. et Wagner, D. (2020). Situated perspectives on creating mathematics tasks for peace and sustainability. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 20(2), 218-229. <https://doi.org/10.1007/s42330-020-00083-w>

EXPLORER LE RÔLE DE LA COMPRÉHENSION DES CONCEPTS MATHÉMATIQUES DANS LE CONTEXTE DU *DÉBOGAGE* DANS LE DESIGN EN INGÉNIERIE ASSOCIÉ À L'INFORMATIQUE PHYSIQUE ET AU *CODAGE* INFORMATIQUE

| KAMBA* JACQUES ET FREIMAN** VIKTOR

Résumé | Au Nouveau-Brunswick, au Canada, plusieurs écoles offrent aux élèves la possibilité d'apprendre à coder et d'utiliser des appareils informatiques physiques dans le cadre d'activités de design en ingénierie. Le présent article analyse spécifiquement le rôle de la compréhension des concepts mathématiques lors du débogage des erreurs de code informatique lors de la création d'artefacts d'ingénierie. Les résultats de l'article montrent plusieurs épisodes de travaux d'étudiants où des liens mathématiques sont présents explicitement ou implicitement.

Mots-clés : design en ingénierie, *débogage*, *codage*, appareils informatiques physiques (AIP) et modèle.

Abstract | In New Brunswick, Canada, several schools offer students the opportunity to learn to code and use physical computing devices as part of engineering design activities. The present article specifically analyzes the role of understanding mathematical concepts during debugging of computer code errors when creating engineering artifacts. The results of the article show several episodes of student work where mathematical connections are explicitly or implicitly present.

Keywords: Engineer design, *debugging*, coding, physical computing devices (PCD) and model.

Remarque : Afin d'alléger le texte de l'article et d'en faciliter la lecture, veuillez prendre note que le genre masculin sera utilisé pour désigner à la fois le masculin et le féminin, et ce, sans aucune discrimination.

I. ENJEUX SOCIÉTAUX LIÉS AUX USAGES DES RESSOURCES NUMÉRIQUES ET NON NUMÉRIQUES DANS LE DESIGN EN INGÉNIERIE DANS L'ÉCOLE

Dans notre contribution au même groupe de travail lors du Colloque 2018 (Freiman et Chiasson, 2018), nous avons repéré la tendance de complexification et de diversification de ressources sur le plan trans-, inter-, et disciplinaire. Les auteurs ont ainsi mis en évidence que les nouveaux types d'espaces, riches en technologies, dynamiques, mobiles munis des affordances de rétroaction instantanée créent des opportunités pour les enseignants d'enrichir le répertoire de stratégies de résolution de problèmes, de plus en plus complexes qui sont axées, entre autres, sur l'exploration, le bricolage (*tinkering*) et la pensée computationnelle (informatique) dans le contexte de création de défis de robotique par les élèves (Freiman et Chiasson, 2018). Cette tendance semble s'amplifier, depuis 2016, avec la croissance de labos de fabrication numérique (aussi connus comme *makerspaces*) dans les écoles du Nouveau-Brunswick (N.-B.) (Canada), marquée par un enthousiasme notable de la part de certains enseignants qui voient leurs salles de classe se transformer en véritables labos créatifs pour engager les élèves dans un apprentissage intégré des sciences, technologies, ingénierie et mathématiques (STIM) en les initiant à explorer une variété de technologies de pointe (Freiman, 2020). Afin d'aider les enseignants à mettre en place des activités de fabrication pour stimuler l'intérêt des élèves pour les STIM, plusieurs

* Université de Moncton – Canada – cjk2904@umoncton.ca

** Université de Moncton – Canada – viktor.freiman@umoncton

associations à but non lucratif ou caritatives, telles que Labo Créatifs (Brilliant Labs en anglais) (<https://laboscreatifs.ca/>) ou Place aux compétences (<https://pacnb.org/fr/>), mettent à la disposition des enseignants trois types de ressources : Les outils numériques tels que des environnements de *codage informatique*, de *micro:bit*, des servomoteurs et des hélices en plus de fournir les matériaux usuels tels que des cartons, de la peinture et de la colle. Enfin, de personnes-ressources provenant de ces organismes se portent volontaires pour assister les enseignants et leurs élèves dans leurs activités de création informatisée. Les labos créatifs deviennent ainsi un objet d'intérêt de recherche, notamment au N.-B., au sein de l'équipe du Réseau des partenaires CompeTI.CA qui s'est intéressée, entre autres, aux compétences du 21^e siècle, à l'approche de tinkering (Furlong et Léger, 2022), au design en 3D (Freiman et Lingley, 2023) et au rôle de mathématiques ('M') dans les activités STIM aux labos créatifs (LeBlanc et al., 2022). Notre étude poursuit dans la même veine en s'intéressant particulièrement au *débogage* et ses liens avec les mathématiques lors d'une utilisation autonome par les élèves de diverses ressources matérielles et technologiques.

Les progrès de la technologie numérique accroissent la complexité du monde moderne et engendrent des enjeux sociétaux d'envergure dans presque toutes les sphères de la société moderne (p. ex. : l'éducation, la fabrication et l'économie). Les technologies numériques peuvent créer des incidents et des failles (p. ex. : des erreurs de code, des pannes informatiques et des mises à jour défectueuses) qui peuvent affecter des personnes humaines, des entreprises et la Société tout entière (George, 2024). Les risques et les vulnérabilités liés aux technologies numériques et à leurs usages appellent aux citoyens d'aujourd'hui la nécessité d'acquérir de nouveaux types d'habiletés qui pourraient leur permettre d'identifier et de trouver solutions aux erreurs de code et aux problèmes liés aux technologies. Parmi ces habiletés, plusieurs auteurs évoquent le *débogage* (Ismail et Hassan, 2019 ; Li et al., 2019). Le *débogage* est un processus qui concerne la correction des erreurs de code et la résolution de divers problèmes liés aux appareils informatiques physiques (AIP) et aux modèles physiques (Hennessy Elliott et al., 2023).

Dans notre étude, nous avons pu observer les élèves d'une classe de 4^e année du primaire (9-10 ans) travailler sur un projet interdisciplinaire partant du programme de science (exploration du monde animal), en effectuant les recherches sur un animal choisi et en présentant les résultats de leurs recherches au public (leurs écoliers et les parents). Entre autres, leur tâche plus spécifique consistait en création, en équipe de 3-4 élèves, d'une maquette d'animal en y intégrant un *micro:bit*, une carte micro-contrôleur programmable, ayant des capteurs et actionneurs intégrés (<https://microbit.org/fr/>).

Ainsi, plusieurs questions émergent dans ce contexte ; entre autres, quel est le type des erreurs de code et des problèmes liés aux AIP que les élèves rencontrent lors de la réalisation de ce projet ? Comment les élèves identifient-ils et corrigent-ils les erreurs de code ? De quelle manière la compréhension de mathématique pourrait-elle soutenir le *débogage* des erreurs de code et d'ajustement de maquettes physiques produites par les élèves ? Dans notre communication, on va tenter de répondre à ces questions à partir d'un travail de 3 élèves qui ont choisi de produire une maquette d'un tigre blanc dont une partie (les dents) ferait un mouvement de rotation de 90 degrés à l'aide d'un servomoteur intégré. Notons que pour ces élèves, tout comme pour leurs pairs, cette expérience avec le *codage informatique* et le *micro:bit* était la première (du moins, dans le contexte scolaire).

II. CADRE CONCEPTUEL : RESSOURCES DES DESIGN EN INGÉNIERIE ET LA GENÈSE INSTRUMENTALE DES ÉLÈVES

Dans les années 1990-2000s, une conceptualisation d'usage des outils informatiques prend de l'élan avec l'émergence de l'approche instrumentale en enseignement de mathématiques puisant dans les

idées de l'ergonomie cognitive (Rabardel, 1995) et dans l'approche anthropologique en didactique des mathématiques (Chevaillard, 1991). Dans sa contribution à l'EMF 2006, Artigue (2006) explique l'apport de chaque théorie : la première (ergonomie cognitive) permet de faire une distinction entre l'objet logiciel – l'artefact – et l'instrument pour celui qui en fait usage, tout en reflétant la complexité de processus individuels et sociaux de la genèse instrumentale tandis que la 2^e (approche anthropologique) qui apporte une dimension institutionnelle (apprentissage et enseignement, normes et valeurs,...) permettant de situer les genèses instrumentales individuelles au sein de genèses institutionnelles (artefact introduit dans le système éducatif ; transformation de l'artefact en instrument). (Artigue, 2006, p. 8).

Trouche (2005), à son tour, apporte de l'éclairage sur la fertilité de l'approche instrumentale pour ressortir le rôle (1) des artefacts dans les pratiques, les apprentissages et les enseignements mathématiques, à la fois comme l'expérience et l'assistant à l'activité humaine ; (2) du contexte dans lequel les artefacts peuvent devenir les instruments au cours de processus complexes, qui ont des dimensions individuelles et collectives ; et 3) de l'instrument, comme résultat d'un processus de transformation, par l'individu, de l'artefact (l'instrumentalisation) et d'un processus de structuration de l'activité (l'instrumentation).

Dans les années 2010-2020s, avec l'arrivée de nouveaux environnements d'apprentissage informatisés et de nouveaux outils à disposition des enseignants et des élèves, l'approche instrumentale semble gagner d'importance dans le contexte de l'enseignement des mathématiques. Par exemple, en mettant de l'emphasis sur le rôle de l'enseignant dans la genèse instrumentale des élèves (entre autres, le choix de logiciel à utiliser), Drijvers et al. (2014) ont repris le concept d'orchestration instrumentale de Trouche (2005) pour identifier différents types d'organisation de travail des élèves, dont un nommé *Work-and-walk-by* nous intéresse particulièrement (dans le contexte de labo créatif), car dans ce cas, les élèves travaillent seuls ou avec leurs pairs sur une tâche impliquant l'usage de technologies et l'enseignant se déplace dans la salle de classe en répondant aux questions des élèves et suivant leur progrès. À leur tour, Gueudet et al. (2014) y ajoutent l'utilisation autonome (sans intervention de l'enseignant) et l'utilisation accompagnée lorsque l'enseignant reste à côté des élèves qui ont plus de difficultés d'usage d'un logiciel et les aide plus explicitement dans leur travail.

Selon King et English (2016), le design en ingénierie est une activité qui consiste à produire des artefacts, à les tester et à les reconcevoir en fonction des tests précédents. Les activités d'apprentissage qui offrent aux élèves des défis d'ingénierie et des possibilités de conception sont considérées comme bénéfiques pour soutenir et développer davantage les processus de modélisation, de discours et d'échafaudage naturel dans lesquels les élèves collaborent avec leurs pairs pour résoudre des problèmes de la vie réelle (DeJarnette, 2012). Dans ces activités, les élèves développent leur compréhension par l'interaction et l'observation de leur environnement (Vygotsky, 1978). Les projets de design aident les élèves à voir les liens entre les concepts scientifiques et les solutions aux problèmes du monde réel (Sadler et al., 2014). Parmi les différents types de matériaux et de technologies disponibles pour soutenir les activités de design en ingénierie, il y a des environnements de *codage informatique*, des AIP (*micro:bit*) et des matériaux usuels tels que le carton.

Quant au processus de design, nous avons adapté les étapes de la pensée design proposées par Pruneau et al. (2019). Ainsi, lors de l'étape 1 (Figure 1) les élèves, ayant déjà construit un modèle physique de leur animal, commencent leur processus de conception d'un système informatisé de mouvement en choisissant une partie du corps de l'animal à dynamiser (observation-inspiration) et en imaginant comment cette partie bougerait et comment elle pourrait être automatisée (définition-synthèse-idéation). Dans un deuxième temps (étape 2) un prototype de système informatique physique est construit, y compris le *codage*, le transfert du programme vers un AIP et l'intégration dans la

maquette. L'étape 3 permet aux élèves d'effectuer un test pour présenter, finalement leur prototype final au public (étape 4). Au cours du processus de création et de test de leurs prototypes, les élèves ont été confrontés à un certain nombre de problèmes qui nécessiteront un *débogage*.

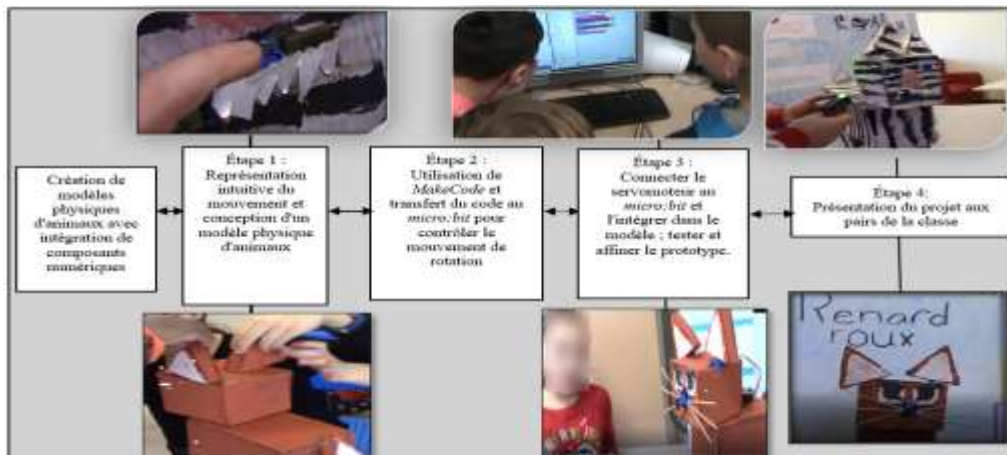


Figure 1 – Processus de design en ingénierie en 4 étapes

Le *débogage* est défini de différentes manières et sous plusieurs angles. Dans le cadre du présent article. Le *débogage* demeure une pratique de la pensée informatique (PI) (Grover et Pea, 2018), il est un processus cognitif qui consiste à identifier et à corriger des erreurs de codes et aussi à résoudre divers problèmes liés aux AIP (Hennessy Elliott et al., 2023), et aux artefacts physiques. Selon la littérature, il semble y avoir un lien étroit entre la PI et les mathématiques. Shute et al. (2017) expliquent que « la pensée mathématique se compose de trois parties : les croyances sur mathématiques, processus de résolution de problèmes et justification des solutions » (p. 4). Plusieurs compétences de la PI, telles que le séquençage (algorithmes), la modularité et le *débogage* pourraient être considérés comme « fondamentales » pour la compréhension mathématique par des élèves, dès leurs jeunes âges (4-5 ans) (Lavigne et al., 2020). Les auteurs soutiennent que lorsque les jeunes élèves sont engagés dans le *débogage* (ce qui signifie identifier les erreurs de code, décomposer les séquences d'un programme et tester le fonctionnement du programme), ils peuvent utiliser des connaissances mathématiques (comme utiliser une régularité, compter ou comparer) pour corriger les erreurs de code (Lavigne et al., 2020).

À cet égard, nous avons examiné quelques études susceptibles de révéler les liens entre l'apprentissage des mathématiques et le *débogage*. Par exemple, Shumway et al. (2021, p. 21) ont étudié les concepts de comptage, de raisonnement spatial, d'unités de mesure et d'opérations sont apparus comme des forces favorables ou défavorables lorsque des élèves ont débogué des programmes. Aussi, Riche et al. (2019) ont montré comment impliquer des élèves dans le processus de *débogage*. En effet, lorsque des élèves observent, émettent des hypothèses, modifient et testent, ils peuvent créer un contexte fructueux pour soutenir mutuellement l'apprentissage des mathématiques et le développement de la PI de manière intégrée. De la même manière, Kilhamn et al. (2021) ont étudié le potentiel de la programmation informatique, lorsqu'elle est intégrée au programme de mathématiques, pour soutenir l'exploration de différents concepts et processus mathématiques.

III. EXEMPLE DE DÉBOGAGE DES ERREURS DE CODE ET DE MAQUETTE

Le cas choisi pour notre communication présente le processus de *débogage* suivi par les élèves de 4e année qui ont été regroupés dans une équipe de trois personnes. Ils ont conçu et créé une maquette

d'un tigre blanc, une espèce très rare dans la nature. Nous avons fait des observations en classe lors de la réalisation du projet par les élèves avec l'enregistrement vidéo de quelques moments de leur travail. Nous avons également fait un entretien avec les élèves et leur enseignante à la fin du projet. L'analyse de données est réalisée en fonction de quatre étapes de la pensée design que les élèves ont suivi pour créer la maquette avec un système informatisé intégré.



(Source : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tigre_d%27Asie_%C3%A0_robe_blanche.jpg)

Figure 2 – Modèle de l'animal pour imiter le mouvement naturel de mâchoires d'un tigre,

Étape de la création de la maquette : D'après nos observations, les élèves se sont engagés dans un processus de design où ils ont utilisé divers matériaux pour créer une maquette de tigre blanc (Figure 2). Au départ, les élèves ont choisi de dynamiser les mâchoires de la maquette qui devraient modéliser le mouvement naturel d'un tigre lui permettant d'ouvrir et de fermer sa bouche par le mouvement de servomoteur attaché au *micro:bit* programmé. À ce propos, E1 dit ceci : *On va bouger sa bouche.*

Les élèves se sont mis à discuter de comment créer la bouche sur la tête de leur maquette (l'image 2 de la Figure 3 ci-dessous). Une forme rectangulaire a ainsi émergé de leur discussion :

- E1 : Comment on va couper la bouche ? Comme un rectangle ?
- E2 : Oui, on va faire de même [il prend la feuille et fait le dessin pour montrer comment ils vont couper la bouche].
- E1 : Ça, c'est la tête, les yeux. Est-ce qu'on va couper la bouche comme ça ? [Il dessine une ligne droite sur la tête du dessin pour représenter la bouche, voir l'image 1 de la Figure 3].
- E2 : Non, plus couper en ligne [il ajoute deux lignes en largeur de la ligne droite de la bouche, voir l'image 2 de la Figure 3].
- E1 : Comment ? ça peut aller comme ça et comme ça [il dessine deux flèches pour montrer comment les dents vont monter et descendre. Voir l'image 3 de la Figure 3]
- E2 : Ça va descendre de même. On fait un rectangle [ils vont couper la bouche à la forme d'un rectangle].

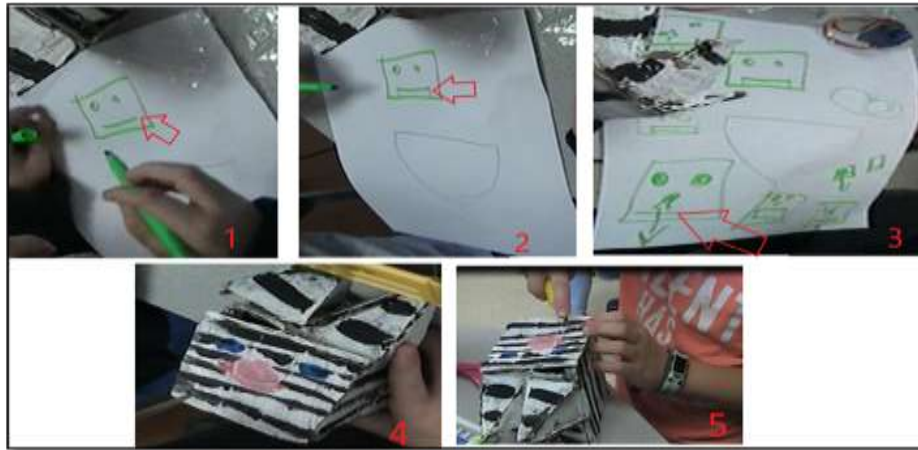


Figure 3 – Dessin de la bouche, idée intuitive de mouvement et coupure de bouche

Pendant que les deux élèves de cette équipe essaient de faire un sketch de la bouche (forme et position), leur collègue commence à découper le rectangle à l'aide d'un couteau (l'image 5 de la Figure 3 ci-dessus). D'ailleurs, l'image 3 de la même Figure 4, montre la représentation intuitive du mouvement de mâchoires (flèche vers le haut et vers le bas). Les élèves semblent déjà avoir des idées intuitives d'algorithme de mouvement contrôlé par le *micro:bit* : lorsque le bouton de démarrage A du *micro:bit* serait pressé. Les élèves se sont, par la suite, rendu compte que la réalisation d'un tel mouvement sera trop complexe, voire impossible. Ils décident donc de se limiter au mouvement plus simple de rotation de dents (de 90°). Les élèves devaient alors programmer le *micro:bit* pour que ce mouvement soit reproduit sur la maquette. La section suivante présente l'étape de *codage informatique* et les efforts de *débogage* des erreurs de code liées à ce programme.

Étape de la conception de programme informatisé : À l'aide d'une plateforme de *codage* MakeCode, les élèves ont tenté de créer les séquences du code informatique (blocs) opérant les mouvements des mâchoires de leur animal qui seront exécutés par des servomoteurs contrôlés par le *micro:bit*. La première version du programme contenait cinq blocs de code, comme le montre la Figure 4 : Le premier bloc signifie le démarrage du programme. Les deux blocs en couleur rouge déterminent la position de servo broche allant de 90 à 180° ainsi assurant une rotation de 90 degrés. Enfin les deux blocs bleus signifient les pauses entre les mouvements de servo broche (la pause de 10 000 ms, soit 10 secondes).

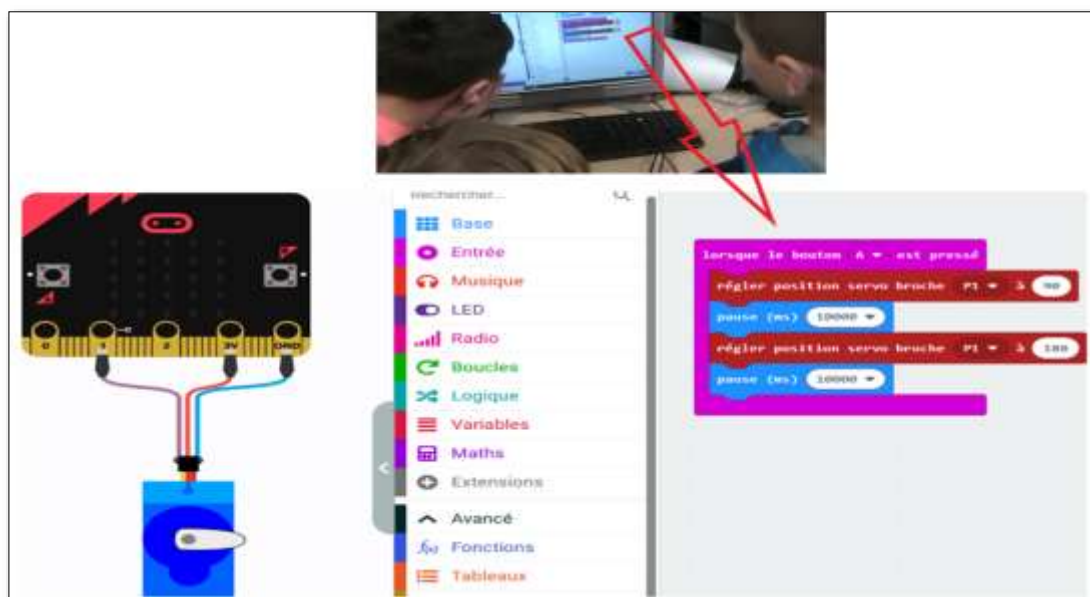


Figure 4 – Efforts des élèves pour coder le mouvement des mâchoires à l'aide de MakeCode

Nous avons pu observer que lors de tests réalisés par les élèves que l'hélice de simulateur de servomoteur pouvait effectuer un mouvement de rotation de 90 degrés dans le sens horaire. À cette étape, l'usage de la ressource a permis aux élèves d'explorer les concepts de temps (de pause) et d'angle de rotation dans un contexte de codage informatique.

Selon le journal de bord du chercheur, les élèves ont réalisé que leurs codes ne fonctionnent pas correctement. Entre autres, ils ont jugé que leur pause était trop longue. Leur enseignante qui a vu le problème a aidé les élèves en leur suggérant de diminuer la durée de la pause (à 1 seconde) pour que le servomoteur puisse mieux effectuer des mouvements aller-retour. Interrogés par le chercheur à la fin du projet, les élèves se sont rappelé de problème, sauf la durée d'une seconde (ils ont dit 1 minute, à la place de 1 seconde, ce qui plus court que 10 secondes initiales.

- E3 : Oui, on faisait sur l'ordinateur, on faisait l'affaire (le codage), on a fait comme 10 secondes, on ne voulait pas faire une longue pause. Mais on a mis comme une minute
- CH : Qui vous a aidé à corriger l'erreur ?
- E1 : C'est madame.

Également, il manquait le bloc de boucle, alors l'élève devait redémarrer le programme pour que l'hélice du simulateur de servomoteur répète le mouvement, mais les élèves n'y ont porté l'attention. Ils avaient donc besoin d'aide de l'enseignante pour comprendre qu'il fallait modifier la durée de la pause.

Étape de la mise à l'essai et validation : À cette étape, les élèves devaient intégrer le servomoteur et le *micro:bit* dans la maquette pour tester le fonctionnement de leur système informatisé de mouvement. Cependant, les élèves ont éprouvé certaines difficultés liées à la dynamisation des mâchoires de la maquette selon leur idée initiale. En effet, leur bouche était conçue de manière statique de sorte qu'on ne pouvait pas faire bouger les mâchoires. Les élèves ont ainsi trouvé un compromis prévoyant de dynamiser les dents de la maquette au lieu des mâchoires. À ce propos, l'E2 s'exprime comme suit : « On a trouvé des solutions, à la place d'ouvrir et fermer la bouche, on a fait bouger les

dents ». Les élèves ont alors coupé un morceau de carton en la forme de zigzag pour représenter les dents de la maquette (Figure 5). Les dents ont été collées sur l'hélice du servomoteur intégré dans la bouche de maquette, comme le montre la Figure 6 suivante. Les élèves ont vérifié, par la suite, le mouvement de dents, une rotation de 90 degrés (Figure 6)



Figure 5 – Mise à l'essai et création et intégration de dents



Figure 6 – Test de mouvement de dents

Étape de la présentation du projet : Les élèves ont présenté leur produit final aux pairs de la classe et à la communauté scolaire interne de l'école (Figure 7). La présentation était accompagnée d'un bref exposé oral expliquant l'animal et son mode de vie, prouvant l'intérêt et le choix portés sur l'animal, et rendant compte du déroulement de la réalisation du projet en matière d'apprentissages acquis, de méthodologie du travail, de répartition des tâches, des difficultés rencontrées et des solutions apportées.



Figure 7 – Tableau de présentation et produit final

IV. DISCUSSION ET CONCLUSION

L'article partage quelques résultats obtenus dans le cadre d'une étude doctorale portant sur le *débogage* dans un contexte de design en ingénierie. Dans le présent exemple, les élèves ont été introduits, pour la première fois, dans un *codage informatique* pour programmer une partie de leur maquette d'effectuer un mouvement de rotation à l'aide d'un servomoteur intégré contrôlé par un *micro:bit*. La complexité de la tâche réalisée par les élèves est ainsi mise en évidence dans le processus

d'instrumentation (au sens de Trouche, 2005) dans lequel l'utilisation de diverses ressources a été prise en charge par les élèves lors d'une exploration autonome (avec peu d'aide de la part de l'enseignante) (Gueudet et al., 2014). Bien à l'aise dans la construction de leur maquette initiale (en 3D), les élèves devaient alors faire face à une multitude de problèmes au niveau d'informatisation de leur système.

En cherchant à programmer leur mouvement, les élèves ont bien repéré les blocs de code nécessaires. Mais une fois rendu compte d'un fonctionnement incorrect de leur modèle (une pause trop longue), les élèves semblent avoir de la difficulté à comprendre les concepts mathématiques liés aux variables de temps et d'angle de rotation et savoir comment convertir des mesures de temps (millisecondes en secondes). Ces concepts vont cependant au-delà de ce que le programme d'études en mathématiques du N.-B. prévoit pour le niveau de la 4^e année.

De plus, vivement discutée à l'étape de conception collective de la bouche de la maquette, l'idée d'un mouvement coordonnée de deux mâchoires de tigre (vers le haut et vers le bas), bien présente dans les schémas construits par les élèves s'est heurtée à une impossibilité physique de dynamiser une forme rectangulaire trop statique de la bouche qu'ils ont conçue. Il semble ainsi avoir un décalage au niveau de coordination des actions centrées sur le codage et le transfert de code vers l'AIP (*micro:bit*) et la structure géométrique de leur modèle (la tête de leur maquette).

Étant une pratique de la PI qui a, selon Shute et al. (2017), une relation étroite avec les mathématiques, le débogage a permis aux élèves de mobiliser divers concepts mathématiques à différents stades de leur projet créatif. Les élèves ont notamment utilisé des concepts mathématiques liés à la géométrie pour résoudre le problème lié à la maquette en ajustant la forme de la bouche et de dents permettant d'assurer le mouvement désiré. Ils se sont également attardés aux problèmes liés aux paramètres de code en MakeCode, notamment, pour ajuster la durée de la pause. Bien qu'utile pour la réalisation des actions concrètes de *débogage*, ce lien entre le *débogage* et les mathématiques demeure encore peu explicité dans ce type d'activités informelles ; encore moins, on y voit un lien direct avec le curriculum. Également, on note l'importance de l'aide de l'enseignante (et d'autres personnes ressources présentes en classe), leur rôle doit également être clarifié davantage.

Ces observations, bien qu'utiles pour comprendre la genèse instrumentale de l'élève (Trouche, 2005), ne fournissent pas toutefois suffisamment de données pour comprendre comment le contexte plutôt informel d'exploration de ressources STIM interagit avec le processus de construction de savoirs mathématique au sens institutionnel (Chevallard, 1991). Il y a donc une nécessité de mener des études plus approfondies pour comprendre comment rendre plus explicite (et efficace) le rôle de mathématiques dans un projet interdisciplinaire impliquant le *codage informatique* et l'usage de AIP.

RÉFÉRENCES

- Artigue, M. (2006). The integration of symbolic calculators into secondary education: some lessons from didactical engineering. Dans G. Guin, K. Ruthven et L. Trouche (dir.), *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument* (p. 231-294). Springer.
- Ball, T., Chatra, A., Peli de Halleux, J., Hodges, S., Moskal, M. et Russell, J. (2019). Microsoft MakeCode: Embedded programming for education, in blocks and TypeScript. Dans *Proceedings of the ACM SIGPLAN2019, Symposium on SPLASH-E, 25 octobre 2019, Athènes, Grèce* (p. 7-12). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/3358711.3361630>
- Csapó, G. (2019). Placing event-action-based visual programming in the process of computer science Education. *Acta Polytechnica Hungarica*, 16(2), 35-57. http://acta.uni-obuda.hu/Csapo_89.pdf

- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2^e éd.). La Pensée sauvage.
- DeJarnette, N. (2012). America's children: Providing early exposure to STEM (science, technology, engineering and math) initiatives. *Education*, 133(1), 77–84.
- Deed, C., Cardellino, P., Matthews, E. et Outhall, A. (2022). A qualitative exploration of cardboard architecture in post-pandemic schools. *International Journal of Educational Research Open*, 3, article 100186. <https://doi.org/10.1016/j.ijedro.2022.100186>
- De Zoysa, S. (2024) *Microsoft global outages caused by CrowdStrike software glitch*. https://www.researchgate.net/publication/382625564_Microsoft_global_outages_caused_by_CrowdStrike_software_glitch
- Drijvers, P., Tacoma, S., Besamusca, A., Van den Heuvel, C., Doorman, M. et Boon, P. (2014). Digital technology and mid-adopting teachers' professional development: A case study. Dans A. Clark Wilson, O. Robutti et N. Sinclair (dir.), *The mathematics teacher in the digital era* (p. 189–212). Springer.
- Freiman, V. (2020). Issues of teaching in a new technology-rich environment: Investigating the Case of New Brunswick (Canada) School Makerspaces. Dans Y. Ben-David Kolikant, D. Martinovic et M. Milner-Bolotin (dir.), *STEM teachers and teaching in the digital era: Professional expectations and advancement in the 21st century schools* (p. 273-292). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29396-3_15
- Freiman, V. et Chiasson, M. (2018). Enjeux de diversification et complexification de ressources : un cas de programmation informatique d'un robot dans une école de demain. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMF2018 « Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines », 22-26 octobre 2018, Gennevilliers, Paris* (p.712-720). IREM de Paris. https://emf.unige.ch/files/9615/7545/7017/GT6_FREIMAN-CHIASSONCA_actes_EMF2018.pdf
- Freiman, V. et Lingley, J. (2024). Micro-tensions from students' prototyping in a school makerspace: Lessons from an unfinished work. Dans K. Plakitsi et S. Barma (dir.), *Sociocultural approaches to STEM education: An ISCAR international collective issue* (p. 259-293). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-44377-0_12
- Furlong, C. et Léger, M. T. (2022). Le *tinkering* au cœur du processus de résolution de problèmes en contexte de fabrication numérique à l'école. *Revue hybride de l'éducation*, 5(2), 127-149. <https://doi.org/10.1522/rhe.v5i2.1227>
- George, A. S. (2024). When trust fails: Examining systemic risk in the digital economy from the 2024 CrowdStrike outage. *Partners Universal Multidisciplinary Research Journal*, 1(2), 134-152. <https://doi.org/10.5281/zenodo.12828222>
- Grover, S. et Pea, R. (2018). Computational thinking: A competency whose time has come. Dans S. Sentance, E. Barendsen et C. Schulte (dir.), *Computer Science Education : Perspectives on Teaching and Learning in School* (p. 19-38). Bloomsbury Academic. <http://dx.doi.org/10.5040/9781350057142.ch-003>
- Guedet, G., Buteau, C., Mesa, V. et Misfeldt, M. (2014). Instrumental and documentational approaches: From technology use to documentation systems in university mathematics education. *Research in Mathematics Education*, 16(2), 139-155. <https://hal.science/hal-01006510v1>
- Hennessy Elliott, C., Gendreau Chakarov, A., Bush, J. B., Nixon, J. et Recker, M. (2023). Toward a debugging pedagogy: Helping students learn to get unstuck with physical computing systems. *Information and Learning Sciences*, 124(1/2), 1-24. <https://doi.org/10.1108/ILS-03-2022-0051>

- Ismail, A. A. et Hassan, R. (2019). Technical competencies in digital technology towards industrial revolution 4.0. *Journal of Technical Education and Training*, 11(3).
<https://doi.org/10.30880/jtet.2019.11.03.008>
- Jang, D. J. et Kim, S. A. (2016). Performance-oriented kinetic façade design based on interworking between physical and digital models. Dans N. Yabuki et K. Makanae (dir.), *Proceeding of the 16th international conference on computing in civil and building engineering (ICCCBE 2016)*, 6-8 juillet 2016, Osaka, Japon (p. 504-511). http://www.sec.eng.osaka-u.ac.jp/secit/icccb2016/Proceedings/Full_Papers/064-192.pdf
- Juskeviciene, A., Stupurienė, G. et Jevsikova, T. (2020). Computational thinking development through physical computing activities in STEAM education. *Computer Applications in Engineering Education*, 29(1), 175-190. <https://doi.org/10.1002/cae.22365>
- Kim, C., Yuan, J., Vasconcelos, L., Shin, M. et Hill, R. B. (2018). Debugging during block-based programming. *Instructional Science*. <https://doi.org/10.1007/s11251-018-9453-5>
- King, D. et English, L. D. (2016). Engineering design in primary school: Applying STEM concepts to build an optical instrument. *International Journal of Science Education*, 38(18), 2762-2794.
<https://doi.org/10.1080/09500693.2016.1262567>
- Kvaššayová, N., Mansell, M., Cápay, M. et Bellayová, M. (2021). The BBC micro:bit in Slovakia. Dans *Proceedings of the international conference on Information and Digital Technologies (IDT2021)*, Zilina, Slovaquie (p. 359-365). <https://doi.org/10.1109/IDT52577.2021.9497573>
- Kilhamn, C., Bråting, K. et Rolandsson, L. (2021). Teachers' arguments for including programming in mathematics education. Dans G. A. Nortvedt, N. F. Buchholtz, J. Fauskanger, F. Hreinsdóttir, M. Häikiöniemi, B. E. Jessen, J. Kurvits, Y. Liljekvist, M. Misfeldt, M. Naalsund, H. K. Nilsen, G. Pálsdóttir, P. Portaankorva-Koivisto, J. Radišić et A. Wernberg (dir.), *Proceedings of NORMA 20, The 9th Nordic Conference on Mathematics Education « Bringing Nordic mathematics education into the future »*, Juin 2021, Oslo, Norvège (p. 169-176). http://matematikdidaktik.org/wp-content/uploads/2021/04/NORMA_20_preceedings.pdf
- Lavigne, H. J., Presser, A. L. et Rosenfeld, D. (2020). An exploratory approach for investigating the integration of computational thinking and mathematics for preschool children. *Journal of Digital Learning in Teacher Education*, 36(1), 63-77.
- LeBlanc, M., Freiman, V. et Furlong, C. (2022). From STEm to STEM: Learning from students working in school makerspaces. Dans C. Michelsen, A. Beckmann, V. Freiman, U. T. Jankvist, A. Savard (dir.), *Mathematics and its connections to the arts and sciences (MACAS). 15 years of interdisciplinary mathematics education* (p. 179-203). https://doi.org/10.1007/978-3-031-10518-0_10
- Li, C., Chan, E., Denny, P., Luxton-Reilly, A. et Tempero, E. (2019). Towards a framework for teaching debugging. Dans *ACE19 Proceedings of the twenty-first Australasian computing education conference*, 29-31 janvier 2019, Sydney, Australie (p. 79-86). <https://doi.org/10.1145/3286960.3286970>
- Pruneau, D. (2019). *La pensée design pour le développement durable. Applications de la démarche en milieux scolaire, académique et communautaire*. Livres en ligne du CRIRES.
https://lel.crires.ulaval.ca/works/guide_pedagogique.la_pensee_design_pour_le_developpement_durable_0.pdf
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

- Rich, K. M., Strickland, C., Binkowski, T. A. et Franklin, D. (2019). A K–8 debugging learning trajectory derived from research literature. Dans *Proceedings of the 50th ACM technical symposium on computer science education (SIGCSE19)*, 27 février au 2 mars 2019, Minneapolis, USA (p. 745–751).
- Sadler, P. M., Coyle, H. P. et Schwartz, M. (2014). Engineering competitions in the middle school classroom: Key elements in developing effective design challenges. Dans W. C. Newstetter (dir.), *Design Education* (p. 299-327). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315799308>
- Shute, V. J., Sun, C. et Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational Research Review*, 22, 142-158. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2017.09.003>
- Shumway, J. F., Welch, L. E., Kozlowski, J. S., Clarke Midura, J. et Lee, V. R. (2021). Kindergarten students' mathematics knowledge at work: The mathematics for programming robot toys. *Mathematical Thinking and Learning*, 25(4), 380-408. <https://doi.org/10.1080/10986065.2021.1982666>
- Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 25(1), 91-138.
- Vygotsky L. S. (1978). *Mind in society: Development of higher psychological processes*. Harvard university press.

ANALYSE DU PROCESSUS ITÉRATIF D'UNE DESIGN-BASED RESEARCH IMPLIQUANT LA CRÉATION D'UNE BANQUE D'ACTIVITÉS VISANT LE RAISONNEMENT SPATIAL AU PRIMAIRE

| FOREST* MYLÈNE, MARCHAND** PATRICIA ET SINCLAIR*** NATHALIE

Résumé | Ce texte aborde le processus itératif d'élaboration et d'expérimentation d'une banque d'activités valorisant le raisonnement spatial pour des élèves du 3^e cycle du primaire (10-12 ans). Dans un premier temps, le processus itératif de type Design-based Research adopté pour le projet de recherche en cours sera décrit. Dans un deuxième temps, une analyse de ce processus sera exposée par le biais d'une analyse exploratoire et émergente des modifications qu'une des activités proposées aura subies.

Mots-clés : raisonnement spatial, Design-based Research, banque d'activités, enseignement primaire

Abstract | This text addresses the iterative process of developing and experimenting with a bank of activities that promote spatial reasoning for students in the 3rd cycle of elementary school (ages 10-12). First, the iterative process, based on Design-based Research, adopted for the ongoing research project will be described. Second, an analysis of this process will be presented through an exploratory and emergent analysis of the transformations undergone by one of the proposed activities.

Keywords: Spatial reasoning, Design-based Research, bank of activities, primary education

I. INTRODUCTION ET MISE EN CONTEXTE

Dans la vie, les élèves développent différents raisonnements mathématiques à la maison, dans le cadre de jeux ludiques encadrés ou libres, sportifs ou artistiques et donc ils arrivent à l'école avec un capital culturel qui leur est propre. Le raisonnement spatial (RS) dont il est question dans cette étude peut être propulsé ou non par ce capital culturel et le but de ce projet est justement de proposer des activités dans le cadre de la classe de mathématiques au primaire pouvant le propulser pour tous.

Il existe deux grandes catégories de raisonnements, les raisonnements quantitatifs et qualitatifs. Dans la société, un raisonnement semble primé au détriment de l'autre. Le raisonnement quantitatif nous permet de calculer, comparer et prédire des phénomènes dans notre environnement et fait partie intégrante de notre culture technologique. Mais c'est un raisonnement plus qualitatif qui nous permet de comprendre des relations, d'imaginer des comportements et de lier le monde concret avec des modèles mathématiques et scientifiques.

« Most of us have been taught to think and talk about the world using words, lists, and statistics. These are useful tools but they do not come close to telling the full story. Thinking spatially opens the eye and mind to new connections, new questions, and new answers. »
(Center for Spatial Studies, UCSB, 2008, p. 6, dans Ontario Ministry of Education, 2014).

Le RS dont il est question dans cette étude en est un qualitatif. D'ailleurs, ce raisonnement qualitatif, souvent prôné par les plus grands scientifiques, fait appel au sens de l'espace. Par exemple, la droite numérique crée un espace qui nous permet de « voir » ce qu'il y a entre 2 et 3 ; d'imaginer ce qui pourrait se passer de « l'autre côté » de zéro, de lier un intervalle à une distance numérique, etc. Toutefois, les recherches ont montré jusqu'à présent que son développement en classe de mathématiques n'est pas

* Université du Québec à Montréal – Canada – forest.mylene@courrier.uqam.ca

** Université de Sherbrooke – Canada – patricia.marchand@usherbrooke.ca

*** Université Simon-Fraser – Canada – nathalie_sinclair@sfu.ca

évident puisque les programmes de formation et les ressources didactiques qui en découlent ne sont pas explicites à ce propos.

L'origine de ce projet découle ainsi d'une problématique mondiale sur l'apport et la valorisation du raisonnement qualitatif, ici du RS, dans la conceptualisation de notions mathématiques et scientifiques à l'école (Cheng et Mix, 2012 ; Davis et Spatial Reasoning Study Group, 2015 ; Newcombe, 2010 ; Ontario Ministry of Education, 2014 ; Uttal et al., 2013). Le RS représente un processus (concret et mental) permettant d'anticiper, d'imaginer, de contrôler et de communiquer des états ou des transformations d'objets dans l'espace (Battista, 2007 ; Berthelot et Salin, 1999-2000 ; Marchand, 2006). Il est reconnu comme étant « *an important predictor of achievement in many STEM careers* » (Davis et The Spatial Reasoning Study Group, 2015 ; Moss et al., 2016 ; Newcombe, 2017). Bien qu'il existe une corrélation positive entre le RS et le taux de réussite des élèves en mathématiques (Cheng et Mix, 2012 ; Verdine et al. 2017) et qu'il fait partie des visées des programmes de formation du primaire du Québec, il est encore peu exploité à l'école (Marchand, 2020 ; Salin, 2013 ; Verdine et al. 2017). Nous avons accompagné pendant trois ans des enseignants du primaire dans la mise en place d'une ressource didactique sous forme de banque d'activités visant le développement du RS. Cet accompagnement s'inscrit dans une approche Design-based Research (Anderson et Shattuck, 2012) et le présent article apporte un premier éclairage sur ce processus itératif : comment une activité de la ressource proposée initialement par l'équipe de chercheurs a été transformée ? Et, à quelles préoccupations chaque modification apportée à cette activité semble répondre de part et d'autre, enseignantes, conseillère pédagogique (CP) et chercheurs ?

II. CADRE DE RÉFÉRENCE

Dans le cadre de cet article, nous analysons une ressource didactique. Dans ce contexte, une ressource est vue comme « ce qui permet à un sujet ou une institution de nourrir son action, de se « res-sourcer. Curriculum, manuels, documents pédagogiques, sites Internet, logiciels, vidéos, jeux, calculatrice, objets, idées, concepts, notions, expériences, discussions peuvent être des ressources. » (Freiman et al., 2024). Et l'aspect ressourcement sera analysé dans l'étude des itérations de la ressource visée, dans notre cas, une activité visant le RS au primaire. Plus spécifiquement dans ce ressourcement, il sera question des modifications apportées au document de travail et des préoccupations qui guident celles-ci. Pour être en mesure de caractériser ces préoccupations, nous devons rappeler les deux cadres qui sous-tendent l'élaboration initiale de la banque d'activités dans la cognition incarnée et la structure génératrice d'activités visant le développement du RS.

Notre projet s'insère dans les travaux valorisant la cognition incarnée (CI) en prônant non pas une vision centrée sur le traitement de l'information, mais plutôt sur une vision sensorielle basée sur l'action de l'apprenant (Barsalou, 2008 ; Wilson, 2002). Cette perspective est fondée sur le principe que tout apprentissage s'appuie sur une interaction perceptive et physique de l'élève avec son environnement (Barsalou, 2008 ; Wilson, 2002). En mathématiques, de Freitas et Sinclair (2014) montrent comment la coordination de la main (et sa manipulation d'objets) et de l'œil (qui observe et contrôle) fait évoluer le concept du nombre ordinal, par exemple dans le dénombrement d'objets, créant un rythme itératif qui se fait sentir directement, sans passer par le langage. Marchand (2020) montre comment la manipulation et la description à l'aveugle de différents solides peuvent contribuer à la conceptualisation de ceux-ci. Étant donné que ces avenues semblent prometteuses, nous les avons considérées lors de l'élaboration initiale de la banque d'activités.

Le RS est circonscrit dans cette étude par la structure génératrice d'activités (SGA) développée par Marchand (2020), illustrant les principales balises à prendre en considération lors de l'élaboration

d'activités valorisant le développement du RS. Elle a été conçue pour élaborer et analyser les activités potentiellement propices au développement du RS. Dans ce cadre, le RS comporte un volet « orientation » avec des activités de repérage exploitant différents référentiels, tels que la latéralité ou les points cardinaux, et traitant de relations extrinsèques (entre objets), ainsi qu'un volet « organisation » avec des activités de visualisation mentale sollicitant des relations intrinsèques (entre parties d'un même objet) (Uttal et al., 2013). Pour caractériser ces deux types d'activités, les trois niveaux d'abstraction proposés par Battista (2007) nous servent de repères. Le niveau « archéologique » permet aux élèves d'acquérir une conscientisation des objets qui les entourent en les décrivant et en les analysant visuellement. Vient ensuite le niveau « photographique », lorsque les objets ont été suffisamment étudiés par les élèves et qu'ils sont en mesure de s'en faire une image mentale (IM) statique. Et, au niveau d'abstraction « scénographique », les élèves doivent, tout comme un scénariste, imaginer les personnages (ici les objets), leurs caractéristiques, leurs interactions et leurs transformations dans l'espace. Enfin, une troisième balise ciblée de ce cadre nous permet de réaliser une analyse fine des activités élaborées en termes de variables de la situation : la conception de l'espace selon Brousseau (1983) (micro/méso/macro-espace) ; la dimension et la nature des objets (0D/1D/2D/3D, prototypiques/non, position typique/non) ; maillage des tâches demandées aux élèves (Berthelot et Salin, 1999-2000 ; Davis et al., 2015 ; Moss et al., 2016) ; et la nature du questionnement de l'enseignant ciblant le RS (Marchand, 2020 ; Zhang et al., 1992).

III. MÉTHODOLOGIE

Afin de pouvoir répondre à nos deux questions de recherche, 1) les étapes d'une recherche de type Design-based Research seront énoncées. Ensuite (2), l'activité ciblée pour explorer ce processus itératif sera décrite selon les fondements qui la soutiennent et les choix réalisés par les chercheurs pour la présenter aux praticiens. Les données recueillies pour analyser les modifications réalisées à cette activité seront identifiées et situées dans le processus (3). Le traitement des données inspiré d'une analyse émergente sera brièvement exposé (4).

1. Méthodologie du projet de recherche

L'approche qualitative utilisée pour le projet de recherche est du type Design-based Research (Anderson et Shattuck, 2012) qui s'appuie sur une interaction entre le design d'une activité et la théorie sous-jacente dans la mesure où elle est composée de phases itératives entre l'élaboration et l'expérimentation d'une ressource valorisant le développement du RS auprès d'élèves de la 4^e année à la 6^e année du primaire (9-12 ans). En ce qui a trait à l'activité analysée dans le présent texte, la Figure 1 illustre le processus itératif mis en action.

Toutes les activités de la banque ont ainsi été élaborées, de manière itérative, par l'ensemble des partenaires du projet, soit des chercheurs, des enseignantes et une CP. Elles ont été analysées, en amont et en aval de leur expérimentation, par le biais d'une grille basée sur les éléments du cadre de référence, sur les échanges entre les différents partenaires lors de rencontres et à partir des journaux de bord complétés par les enseignantes. Pour chaque activité, il y a eu une itération par année et donc pour un potentiel de trois itérations jusqu'à maintenant.



Figure 1 – Schéma du processus itératif pour une activité

2. *Présentation de l'activité ciblée par cette analyse*

L'activité ciblée pour décrire le processus d'appropriation d'une ressource didactique est intitulée *Peux-tu le dessiner ?* (Voir annexe 1). Notre choix de cette activité, parmi la douzaine d'activités faisant partie de la banque, s'est imposé pour trois raisons : elle a été expérimentée par plusieurs enseignantes et sur plus d'une année ; deux itérations et donc trois versions de celle-ci ont été produites durant le projet de recherche ; et, il était possible de retourner dans les journaux de bord et les moments d'échanges afin de recueillir des informations sur les préoccupations de chacun en lien avec les modifications apportées d'une version à l'autre.

La tâche demandée aux élèves ici est de reproduire une image incluse dans un carré à la suite d'une observation faite de celle-ci dans un temps limité. Cette tâche peut paraître simple, mais elle prend en compte plusieurs éléments de nos cadres théoriques. Ici, les élèves sont privés d'un de leurs sens, la vue, pour faire appel aux autres sens afin de reproduire l'image (CI et SGA). De plus, l'action de reproduire l'image en son absence demande nécessairement à ces derniers d'être actif mentalement et de recourir à une abstraction photographique pour réussir la tâche (CI et SGA). La progression des images proposée aux élèves a pour but de mettre en évidence les relations entre les segments (relations spatiales, géométriques et métriques) et donc leur organisation spatiale (SGA). Il y a des régularités qui reviennent d'une image à l'autre pour construire et discuter de celles-ci en classe. De plus, le questionnement lors de la phase collective sur les stratégies employées par les élèves pour chacune des images permet de rendre explicite l'action mentale réalisée par les élèves (CI) et plus précisément, la richesse des stratégies possibles (ex. : image globale, balayage de haut en bas, mots-clés) afin de valoriser leur développement chez tous les élèves (SGA). En lien plus globalement sur le développement d'un raisonnement qualitatif, cette activité permet de traiter d'une organisation ou d'un fractionnement d'un carré de différentes manières en analysant ses propriétés spatiales, géométriques ou métriques sans recourir à des quantités, mais en travaillant directement sur les figures en jeu. Initialement, elle avait été qualifiée de niveau 2, intermédiaire, puisqu'il était question de dessiner des traits sur une feuille et que cette tâche nous semblait plus complexe que de reproduire l'image générée par la manipulation de pièces, comme celles du Tangram.

Ces éléments théoriques ont guidé l'élaboration de cette activité, mais la manière de les partager auprès des praticiens a aussi été planifiée par l'équipe. Le premier choix a été de leur faire vivre une activité tirée de notre banque d'activités. Cet espace permet aux praticiens d'avoir une expérience commune sur laquelle se poursuivront nos échanges (verbalisation des impressions mutuelles), de mieux saisir les enjeux conceptuels derrière le développement du RS, d'anticiper les raisonnements et difficultés des élèves et d'anticiper la manière que celle-ci pourrait être vécue dans leur classe (approche de formation homologique). Le deuxième choix a été de présenter globalement le premier cadre et trois des sept balises du deuxième cadre qui semblaient incontournables pour ce projet (RS, niveaux d'abstraction et tâches). Les autres balises ayant été considérées lors de l'élaboration restaient implicites pour les autres partenaires, à moins qu'elles aient émergé lors d'échanges collectifs (ex. : changement d'espace). Un troisième choix a été de présenter ce cadre à la suite de l'expérimentation commune de l'activité pour ainsi rattacher les éléments du cadre directement à la pratique en y donnant du sens pour eux.

3. *Données recueillies pour l'analyse*

Il a été mentionné plus haut, que nous avons accès aux différentes versions de l'activité, aux journaux de bord des enseignantes l'ayant expérimentée ainsi qu'aux enregistrements des moments

d'échanges entre partenaires. Les données recueillies pour cette analyse spécifiquement sont présentées ci-dessous (Tableau 1).

Tableau 1 – Données recueillies pour l'activité *Peux-tu le dessiner ?*

Activité <i>Peux-tu le dessiner ?</i>	- 3 versions de la planification - 3 combinaisons d'images à présenter aux élèves
Journaux de bord	- 6 journaux de bord
Rencontres entre les partenaires	- 2 enregistrements de moments d'échanges

Les données associées à l'activité correspondent aux trois versions de la planification ainsi qu'à trois combinaisons différentes d'images à présenter aux élèves. Les impressions des enseignantes à propos de l'expérimentation de cette activité proviennent, d'une part, des six journaux de bord et, d'autre part, des propos tenus lors de deux enregistrements de moments d'échanges entre les différents partenaires (enseignantes, chercheurs et une CP). La première rencontre a permis de présenter et de faire vivre l'activité aux enseignantes ainsi que de recueillir le témoignage d'une enseignante ayant réalisé cette activité l'année précédente. La seconde rencontre a permis d'obtenir les impressions des enseignantes à la suite de l'expérimentation de cette activité. En tout, 10 enseignantes de la 4^e à la 6^e année l'ont expérimentée en classe lors des années scolaires 2022-2023 ($n = 4$) et 2023-2024 ($n = 6$). Une seule enseignante a réalisé l'activité au cours des deux années.

4. *Traitement des données recueillies*

Le traitement des données s'est fait à l'aide d'un croisement entre ces trois types de données : analyse des trois versions de l'activité, analyse des journaux de bord et analyse des rencontres filmées avec les différents partenaires. La ressource produite, ici sous forme des trois versions de l'activité, représente notre donnée centrale et les modifications apportées orientent notre regard pour décrire le processus itératif lié à l'élaboration et l'expérimentation de cette dernière. Les deux autres types de données permettent d'émettre des hypothèses parfois directes ou inférées des préoccupations de chacun des partenaires qui guident ces modifications.

IV. TRANSFORMATION D'UNE ACTIVITÉ DE LA RESSOURCE VALORISANT LE RS : *PEUX-TU LE DESSINER ?*

Afin de présenter de manière synthétique les modifications de cette activité et des préoccupations de chacun des partenaires qui les ont guidées, nous procédons à une analyse transversale des trois versions de l'activité. Cette comparaison a été déclinée en trois volets suivant les trois rubriques du document produit : le matériel, le déroulement et les adaptations possibles. Pour chacun de ces volets, les modifications apportées aux documents de cette activité seront exposées et l'analyse portera sur les préoccupations qui ont mené à celles-ci que nous pouvons extraire des moments d'échanges et de traces recueillies dans les journaux de bord réalisés dans l'intervalle de ces trois versions.

1. *Modifications et préoccupations en lien avec le matériel proposé dans l'activité*

Nous présentons ici les trois versions du matériel proposé dans l'activité *Peux-tu le dessiner ?*, c'est-à-dire les informations contenues dans la planification (Tableau 2).

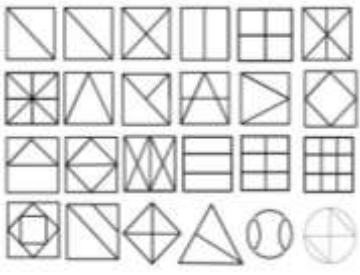
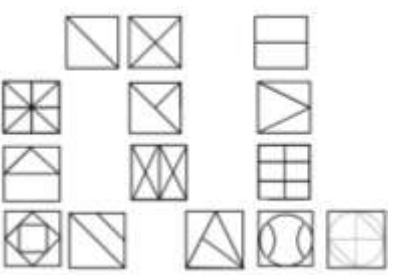
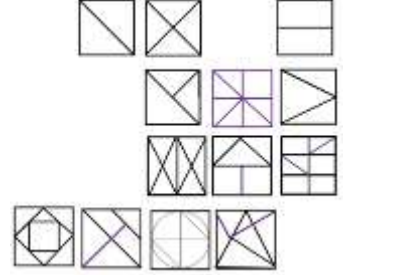
Tableau 2 – Différentes versions du matériel proposé dans l'activité Peux-tu le dessiner ?

Version 1 (2022-2023)	Version 2 (2023-2024)	Version 3 (2024-2025)
- Une feuille avec un carré au contour noir (voir annexe) * Une feuille par image - Un crayon	- Une feuille avec un carré noir (Modèle carré au contour noir) - Une pochette protectrice - Un crayon effaçable	
Avant de commencer, assurez-vous que chaque élève dispose d'un crayon et d'une feuille de papier avec un carré noir.	... d'un crayon effaçable et d'une feuille de papier avec un carré noir insérée dans une pochette protectrice	

Les modifications apportées visaient principalement à assurer la pérennité des activités. Par exemple, l'utilisation d'une pochette de plastique pour insérer la feuille contenant le carré noir, accompagnée d'un crayon effaçable, permettait de limiter le gaspillage de papier et de rendre le matériel réutilisable. Par ailleurs, la conseillère pédagogique insistait sur l'importance de concevoir un matériel durable, pouvant être utilisé sur plusieurs années et, idéalement, partagé entre différentes enseignantes. Elle proposait notamment la création d'un bac regroupant l'ensemble des activités et leur matériel, destiné à être utilisé dans plusieurs écoles.

Les images à présenter aux élèves ont également subi certaines transformations (Tableau 3).

Tableau 3 – Images à présenter aux élèves dans l'activité Peux-tu le dessiner ?

Version 1 (2022-2023)	Version 2 (2023-2024)	Version 3 (2024-2025)
		

À la suite de la première expérimentation, des enseignantes rapportent que les élèves trouvent les images trop simples ($n = 4$). En réponse, le niveau de difficulté a été abaissé de 2 à 1, et certaines images ont été retirées afin d'accélérer la progression. Lors de l'expérimentation de la seconde itération, malgré les modifications apportées aux images, une enseignante a noté dans son journal de bord que « Nous aurions préféré 4 ou 5 images plus difficiles, voire très difficiles ». En conséquence, l'équipe de chercheurs a retravaillé les images afin de mieux répondre aux besoins exprimés.

Par ailleurs, une discussion collective a eu lieu autour des images à présenter aux élèves, au cours de laquelle les enseignantes ont questionné le degré de précision attendu dans les dessins (ex. : les élèves doivent-ils utiliser une règle ? Et dans le cas de la balle de baseball ?). Pour cette raison, la troisième version comporte des images représentant un niveau spatial de complexité plus élevé et non métrique comme le cas du cercle génératif, permettant ainsi un partage d'une plus grande variété de stratégies spatiales pouvant être utilisées par les élèves. Par conséquent, les deux images incluant le cercle ont été retirées afin de ne pas faire dériver les apprentissages vers un raisonnement quantitatif (mesure-précision) au lieu de qualitatif (RS). Il fut intéressant de constater que les préoccupations des

enseignantes relatives aux images à présenter ne concernaient pas seulement des enjeux logistiques, mais qu'il y a une sensibilisation de plus en plus présente envers le développement du RS chez leurs élèves.

2. Modifications et préoccupations en lien avec le déroulement proposé dans l'activité

Le tableau 4 présente les modifications apportées au déroulement proposé dans l'activité *Peux-tu le dessiner ?*

Tableau 4 – Différentes versions du déroulement proposé dans l'activité *Peux-tu le dessiner ?*

Version 1 (2022-2023)	Version 2 (2023-2024)	Version 3 (2024-2025)
Durée : 2 x 20 minutes	Durée : 30 à 45 minutes	
[...] Au besoin, demandez aux élèves d'apporter des corrections à leur travail.	[...] Un retour sur les stratégies peut être fait entre chaque image.	[...] Il est intéressant de faire un retour sur les stratégies entre chaque image.

À la suite de l'expérimentation de la première itération, la durée de l'activité est passée de 2 séances de 20 minutes à une séance variant entre 30 et 45 minutes puisque des enseignantes ($n = 3$) ne voyaient pas la nécessité de réaliser l'activité en deux moments distincts. Une enseignante nomme qu'il a été bénéfique de faire un retour sur les stratégies utilisées entre chaque image plutôt que seulement lors de la phase collective à la fin de l'activité. Considérant l'objectif de cette activité, les membres de l'équipe de recherche ont souhaité, dans la version 3, mettre ainsi l'accent sur l'importance et la pertinence de réaliser ce partage de stratégies entre chaque image qui était implicite dans le document partagé. Aussi, Des enseignantes ($n = 3$) ont suggéré de réaliser cette activité avant les autres, modifiant ainsi l'ordre de la banque d'activités proposées par l'équipe de recherche. Une enseignante a ainsi confirmé ce changement d'ordre de l'activité. Alors qu'au départ, les chercheurs pensaient que reproduire une image en son absence avec le matériel serait plus simple que la tracer sur une feuille, l'expérimentation a montré qu'au contraire le fait de la tracer était plus accessible pour les élèves (tâches habituelles) et plus encadré spatialement (à l'intérieur du carré).

Les préoccupations concernant le déroulement de cette activité sont liées au désir, partagé par tous, de favoriser le développement du RS chez les élèves en s'assurant de respecter une certaine progression dans les activités et de centrer l'activité sur la verbalisation des stratégies utilisées par les élèves, donc sur le raisonnement qualitatif, plutôt que sur l'obtention de la bonne réponse. Une des raisons qui ont amené les enseignantes à participer à ce projet était leur désir de faire parler davantage leurs élèves lors des activités mathématiques et la CP a vu, dans cette demande, un lien direct avec les activités de cette ressource. Cette modification est donc en cohérence avec cette préoccupation initiale des enseignantes plus globale, d'un « changement de climat de classe ».

3. Modifications et préoccupations en lien avec les adaptations possibles proposées dans l'activité

Les différentes versions des adaptations possibles¹ proposées dans l'activité *Peux-tu le dessiner ?* sont présentées ci-dessous (Tableau 5).

¹ Dans toutes les activités, des adaptations sont possibles afin que les enseignants puissent ajuster l'activité selon leur réalité et leurs contraintes, sachant que celles-ci peuvent être vécues de différentes manières en classe.

Tableau 5 – Différentes versions des adaptations possibles proposées dans l'activité *Peux-tu le dessiner ?*

Version 1 (2022-2023)	Version 2 (2023-2024)	Version 3 (2024-2025)
Adaptation : Vous pouvez encourager les élèves à « dessiner dans les airs » l'image pendant les 5 secondes, ce qui pourrait aider certains d'entre eux avec le dessin proprement dit.	Adaptations possibles : - Vous pouvez laisser aux élèves trois secondes pour observer à la place de cinq. - Vous pouvez encourager [...]	

Lors de la première itération, il est mentionné dans le journal de bord d'une enseignante qu'elle a réduit le temps d'affichage à 3 secondes afin d'augmenter le niveau de difficulté. Nous avons alors inclus cet élément dans les adaptations possibles. Si la demande avait été d'augmenter le temps d'observation ou de permettre aux élèves de tracer l'image en l'observant, elle n'aurait pas été retenue par les chercheurs puisqu'elle n'aurait pas respecté les conditions favorables au développement du RS. Aucune autre modification n'a été apportée lors de la seconde itération concernant les adaptations possibles.

Une des préoccupations des enseignantes concerne l'adaptation de l'activité au niveau des élèves pour s'assurer qu'ils restent engagés dans la réalisation de la tâche. Du côté des chercheurs, une de leurs préoccupations est la nécessité de faciliter la compréhension de l'activité par les enseignantes.

V. DISCUSSION ET CONCLUSION

La discussion autour des modifications apportées à l'activité initialement proposée par l'équipe de chercheurs met en lumière l'évolution de cette ressource au fil des itérations. Les modifications répondent aux préoccupations des différents acteurs impliqués et permettent une réflexion collective liée aux trois moments clés de l'activité de classe (en amont, pendant et en aval de celle-ci). Du côté des enseignantes, l'accent a été mis sur la mise en œuvre de l'activité et sur l'adéquation des tâches à réaliser au rythme des élèves, garantissant ainsi un niveau de difficulté adapté et le maintien de leur engagement. Les chercheurs, quant à eux, ont manifesté une préoccupation pour l'appropriation de l'activité par les enseignantes, du maintien des enjeux liés au développement du RS et de la pérennité de son utilisation dans la pratique. De manière plus proche des chercheurs, la conseillère pédagogique partage des préoccupations centrées sur la durabilité et le partage de la ressource. Un point de convergence clair entre tous les acteurs est le développement du RS chez les élèves, objectif fondamental de cette démarche collaborative. Un autre point central dans cette analyse est la place accordée à la verbalisation en classe illustrant un changement de climat de classe par les enseignantes et une manifestation du développement du RS par les chercheurs.

Cette analyse exploratoire révèle le rôle de la collaboration dans l'élaboration et l'expérimentation de ressources pédagogiques. On observe également une saturation progressive de l'activité, marquée par une diminution des modifications lors des dernières itérations, témoignant d'un alignement progressif des préoccupations de chacun, tant du côté des chercheurs que des praticiens. Cette dynamique contribue à l'émergence de préoccupations partagées, facilitant ainsi une appropriation mutuelle des enjeux pédagogiques et didactiques.

Finalement, il ressort de cette analyse que la ressource développée occupe une place centrale dans le dispositif, tant du point de vue des chercheurs que de celui des praticiennes. Pour les chercheurs, elle s'appuie sur des fondements théoriques liés au développement du raisonnement spatial, tandis que pour la CP et les enseignantes, ces éléments semblent s'incarner dans ce processus itératif lié à l'élaboration de la ressource elle-même, qui devient en quelque sorte « autoportante » en tant que

vecteur de savoir. Cette perception renforce l'importance accordée à la durabilité et au partage de la ressource. À ce jour, la CP joue un rôle clé dans sa diffusion à l'intérieur de son centre de services scolaire, agissant comme porte-parole du RS auprès des enseignantes. Dans cette perspective, une plateforme Web est en cours de développement afin d'assurer une diffusion plus large, incluant des planifications détaillées, le matériel requis pour les activités, ainsi que des capsules de vulgarisation sur le développement du RS.

RÉFÉRENCES

- Anderson, T. et Shattuck, J. (2012). Design-based research: A decade of progress in education research? *Sage Journals*, 41(1), 16-25. <https://doi.org/10.3102/0013189X11428813>
- Barsalou, L. W. (2008). Grounded cognition. *Annual Review of Psychology*, 59, 617-645.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. Dans F. K. Lester, Jr. (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 843-908). National Council of Teachers of Mathematics.
- Berthelot, R. et Salin, M.-H. (1999-2000). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N*, (65), 37-59. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/65n4_1562227030012-pdf
- Brousseau, G. (1983). Étude des questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie Dans *Actes du Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Université Joseph Fourier, Grenoble* (vol. 45, p. 183-226).
- Center for Spatial Studies, UCSB. (2008). *Imagine a nation of spatial thinkers*. <https://escholarship.org/uc/item/0cw6w51v>
- Cheng, Y.-L. et Mix, K. S. (2012). Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of Cognition and Development*, 15(1), 2-11.
- Davis, B. et The Spatial Reasoning Study Group. (2015). *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations*. Routledge.
- de Freitas, E. et Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom*. Cambridge University Press.
- Freiman, V., Sokhna, M. et Wozniak, F. (2024). *EMF 2025, GT7 : Les ressources pour de nouveaux défis* [appel à contribution]. <https://sites.google.com/view/emf2025/groupe-de-travail/gt7>
- Marchand, P. (2006). Comment développer les images mentales liées à l'apprentissage de l'espace en trois dimensions ? *Annales de didactique et des sciences cognitives*, 11, 103-121.
- Marchand, P. (2020). Quelques assises pour valoriser le développement des connaissances spatiales à l'école primaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 40(2), 1-44.
- Moss, J., Bruce, C. D., Caswell, B., Flynn, T. et Hawes, Z. (2016). *Taking shape. Activities to develop geometric and spatial thinking. Grades K-2*. Pearson Canada.
- Newcombe, N. (2017). Harnessing spatial thinking to support STEM learning. *OECD Education Working Papers*, (161). <https://doi.org/10.1787/7d5dcae6-en>
- Ontario Ministry Of Education. (2014). *Paying attention to Spatial Reasoning* [Support Document for Paying Attention to Mathematics Education]. <http://thegamesmethod.com/wp-content/uploads/2015/04/LNSPayingAttention.pdf>

- Salin, M.-H. (2013). Quelques remarques autour des finalités de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. Dans *Actes du XI^{ème} colloque international des Professeurs et des Formateurs de Mathématiques chargés de la Formation des Maîtres. Enseignement de la géométrie à l'école : enjeux et perspectives* (p. 32-40).
- Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C. et Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352-402.
- Verdine, B. N., Michnick Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K. et Newcombe, N. (2017). Links between spatial and mathematical skills across the preschool years. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 82(1), 77-85.
- Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin & Review*, 9, 625–636.
<http://doi.org/10.3758/BF03196322>
- Zhang, L.-W., Ma, Q.-W., Orlick, T. et Zitzelsberger, L. (1992). The effect of mental-imagery training on performance enhancement with 7–10-years-old children. *The Sport Psychologist*, 6, 230-241.

ANNEXE 1

Matériel

- Images à projeter sur le TNI (voir 25. Peux-tu le dessiner? - Images)
- Une feuille avec un carré noir (voir 25. Modèle carré noir) • Une feuille par image
- Un crayon

Durée : 2 x 20 minutes

Niveau de difficulté : 2

Déroulement

Dans cette activité, les élèves doivent prêter attention à la forme, à la structure et aux relations géométriques lorsqu'ils reconstituent des dessins de lignes retenues en mémoire (par exemple, un carré traversé par une ligne).

Avant de commencer, assurez-vous que chaque élève dispose d'un crayon et d'une feuille de papier avec un carré noir (voir Document – Modèle carré noir).

Lorsque la classe est prête, projetez une conception géométrique sélectionnée et demandez à la classe de l'examiner attentivement pendant environ cinq secondes (les élèves ne doivent pas dessiner à ce stade, mais étudier la conception en termes de forme, de structure et de relations géométriques). Au bout de cinq secondes, cachez le dessin et demandez à la classe de faire de son mieux pour dessiner l'image de mémoire. Montrez à nouveau le dessin et demandez aux élèves de déterminer si leur copie est une réplique exacte de l'original. Au besoin, demandez aux élèves d'apporter des corrections à leur travail.

Terminez par une discussion en classe, ou des discussions en petits groupes, sur les propriétés géométriques du dessin :

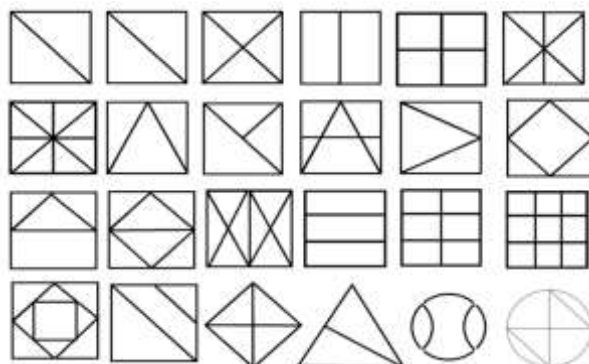
- Comment les élèves se souviennent-ils du dessin?
- Comment les élèves ont-ils vu le modèle de manières différentes (par exemple, une enveloppe par rapport à un X)?
- Quelles stratégies avez-vous utilisées pour vous souvenir de la conception?
- Y avait-il certaines formes qui se démarquaient?
- Existe-t-il différentes manières de dessiner le même motif?
- Que remarquez-vous lorsque vous coupez un carré en deux à l'aide d'une diagonale?

Grâce à une discussion en classe, les élèves en viendront à reconnaître qu'il existe de nombreuses façons de voir, de se souvenir et de construire ou de déconstruire des objets dans un espace bidimensionnel.

Adaptation : Vous pouvez encourager les élèves à « dessiner dans les airs » l'image pendant les 5 secondes, ce qui pourrait aider certains d'entre eux avec le dessin proprement dit.

Compétences spatiales impliquées

- Raisonnement proportionnel
- Mémoire visuo-spatiale



RESSOURCE ET BESOINS PRAXÉOLOGIQUES DU PROFESSEUR

| WOZNIAK* FLORIANE

Résumé | Cette communication s'intéresse aux conditions de la prise en charge par les ressources des besoins praxéologiques du professeur. Notre réflexion est nourrie par l'expérience de la conception d'une ressource en ligne par un collectif constitué de professeurs des écoles, de formateurs et d'une chercheuse didacticienne à propos du repérage dans le micro-espace.

Mots-clés : repérage spatial, ressource, praxéologie, déterminant didactique.

Abstract | This paper examines the conditions under which resources can meet the praxeological needs of teachers. Our reflection is nourished by the experience of the design of an online resource by a collective of teachers, trainers and a didactic researcher on the theme of locating in micro-space.

Keywords: spatial location, resource, praxeology, didactic determinant.

I. INTRODUCTION

Une des fonctions du professeur dans sa classe est de créer les conditions de l'étude et de l'apprentissage des objets de savoir énoncés dans les programmes d'enseignement. Pour ce faire, il doit accomplir deux grands types de tâches : concevoir son enseignement et mettre en œuvre son enseignement. Tout un travail de transposition didactique interne est alors à réaliser qui le conduit à consulter diverses ressources comme des documents institutionnels, des manuels, des sites Internet, des revues professionnelles, etc. Une enquête auprès des professeurs des écoles (Margolinas et Wozniak, 2009) avait révélé un questionnement essentiellement fondé sur les choix à réaliser entre différentes propositions. Cependant, ces choix ne sont pas toujours étayés par des savoirs professionnels (Wozniak, 2010) de sorte que les ajustements opérés par les professeurs peuvent conduire à dénaturer les situations initialement robustes sur le plan didactique. Nous faisons l'hypothèse que les ajustements qui dénaturent la situation sont des révélateurs des besoins de connaissances mathématiques et didactiques des professeurs.

Ce constat nous conduit à nous demander comment les ressources peuvent-elles prendre en charge les besoins praxéologiques du professeur ? Cette communication présente une réponse à cette question, telle qu'elle a été élaborée dans le cadre d'un travail collaboratif avec des professeurs des écoles et des formateurs au sein d'un groupe de l'institut de recherche pour l'enseignement des sciences (IRES) de Montpellier. Réponse qui repose sur l'hypothèse qu'au-delà du scénario de la situation d'enseignement-apprentissage, le professeur a besoin de lui donner du sens, d'avoir une certaine intelligibilité de ses enjeux et comprendre ses principes organisateurs.

La première partie de ce texte explicite ce que nous appelons le travail épistémologique du professeur et ses besoins praxéologiques. Une seconde partie traite des éléments qui assurent la robustesse des situations didactiques — les déterminants didactiques (Hersant, 2011) — et présente un dispositif qui permet de les révéler. La dernière partie expose les choix opérés pour concevoir une ressource qui intègre les besoins praxéologiques du professeur que nous avons identifiés pour enseigner les connaissances spatiales liées au repérage dans un micro-espace aux deux premières années de l'école élémentaire (enfants de 6 à 8 ans).

* Université de Montpellier, IMAG – UMR 5149 – France – floriane.wozniak@umontpellier.fr

II. LE TRAVAIL ÉPISTÉMOLOGIQUE DU PROFESSEUR ET SES BESOINS PRAXÉOLOGIQUES

Pour exercer leur profession, les enseignants doivent maîtriser des savoirs professionnels que Shulman (1986) distingue en deux grandes catégories : les savoirs professionnels communs à l'ensemble des enseignants et les savoirs professionnels spécifiques comme les savoirs relatifs à la discipline enseignée — *the subject matter content knowledge* —, au curriculum — *the curriculum knowledge* — et les savoirs pédagogiques relatifs aux savoirs enseignés — *the pedagogical content knowledge*. Ball, Thames et Phelps (2008) proposent une liste non exhaustive de types de tâches qu'accomplit le professeur et qui nécessite la maîtrise de savoirs mathématiques spécifiques (*specialized content knowledge*) :

Mathematical Tasks of Teaching

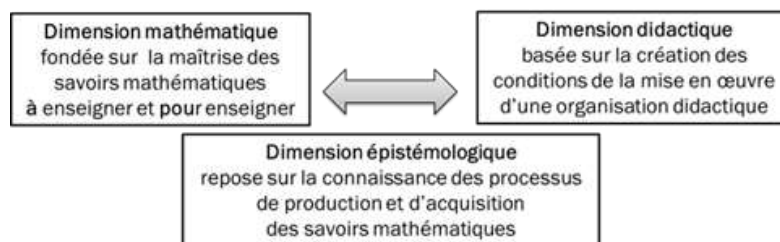
- Presenting mathematical ideas;
- Responding to students' "why" questions;
- Finding an example to make a specific mathematical point;
- Recognizing what is involved in using a particular representation;
- Linking representations to underlying ideas and to other representations;
- Connecting a topic being taught to topics from prior or future years;
- Explaining mathematical goals and purposes to parents;
- Appraising and adapting the mathematical content of textbooks;
- Modifying tasks to be either easier or harder;
- Evaluating the plausibility of students' claims (often quickly);
- Giving or evaluating mathematical explanations;
- Choosing and developing useable definitions;
- Using mathematical notation and language and critiquing its use;
- Asking productive mathematical questions;
- Selecting representations for particular purposes;
- Inspecting equivalencies. (Ball et al., 2008, p. 400)

Dans ce texte, nous nous intéressons aux activités du professeur en lien avec les savoirs à enseigner et en particulier au contenu des ressources qui sont de nature à soutenir ses activités. La théorie anthropologie anthropologique du didactique, propose de modéliser les activités humaines en termes de *praxéologie* (Chevallard, 1999). Une praxéologie est l'agrégat de types de tâches, de techniques pour accomplir ces types de tâches, de discours sur les techniques — littéralement des technologies — et de théories où s'inscrivent ces techniques et leurs technologies associées. Ce modèle rend ainsi solidaire une connaissance au sein d'une *praxis* et un savoir générateur de connaissances qui s'exprime par un *logos*. Ce que nous appelons le travail épistémologique du professeur (Wozniak, 2019) est la part de son activité qui vise à créer les conditions épistémiques d'un apprentissage. Il est constitué de l'ensemble des praxéologies liées aux savoirs en jeu, savoirs à enseigner et *pour* enseigner, et se fonde sur des savoirs construits *pour* et *dans* l'action d'enseigner. Pour illustrer ce point de vue, nous reprenons un exemple issu de Wozniak (2019) :

Imaginons qu'un professeur veuille donner à étudier un exercice dans lequel il s'agit de déterminer la nature du quadrilatère EFGH dont les sommets sont les milieux des côtés d'un quadrilatère convexe ABCD. Il ne (re)connait pas « le problème de Varignon » et sur son schéma EFGH est un losange. Intrigué, il cherche à identifier à quelle(s) condition(s) EFGH est un quadrilatère particulier (losange, rectangle, carré) et découvre que les relations (de longueur et d'angle) entre les diagonales du quadrilatère ABCD sont déterminantes. Ce qui au départ était une curiosité mathématique se révèle être — peut-être à son insu — une véritable analyse a priori. (Wozniak, 2019, p. 36)

Ainsi, analyse mathématique et analyse didactique se réalisent conjointement et en interaction : les mathématiques sont autant l'objet que l'outil de l'analyse didactique. Si la maîtrise des savoirs

mathématiques constitue une condition écologique des systèmes didactiques — difficile d’enseigner ce que l’on ne connaît pas —, la maîtrise des savoirs didactiques constitue une condition économique, en ce qu’elle permet de créer les conditions d’un apprentissage. Le travail épistémologique du professeur se fonde ainsi sur une théorie de la connaissance et de l’acte de connaître, de sorte qu’il comporte trois dimensions : mathématique, didactique et épistémologique (voir figure 1).



(Wozniak, 2019, p. 37)

Figure 1 – Les trois dimensions du travail épistémologique du professeur.

De nombreuses recherches ont révélé les difficultés pour les enseignants à mener à bien leur mission, citons par exemple l’enseignement de la modélisation (Blum, 2015). Il requiert la maîtrise des modèles mathématiques, des gestes didactiques pour accompagner les élèves dans le processus de modélisation sous-tendue par la connaissance de ce processus lui-même et une manière d’appréhender les mathématiques dans leurs relations au réel (Wozniak, 2012). La mise au jour des besoins praxéologiques du professeur (Wozniak, 2020) consiste alors à identifier ce qui est nécessaire, tant du point de vue de l’organisation mathématique que du point de vue didactique, à l’accomplissement du projet initial d’enseignement. Une fois identifiées les praxéologies mathématiques, didactiques et épistémologiques utiles, nécessaires, voire indispensables à l’enseignement d’un objet de savoir, il reste à déterminer comment les professeurs peuvent les acquérir (Chevallard et Cirade, 2010). La formation initiale et la formation continue des enseignants sont évidemment essentielles. Cependant, une précédente enquête (Wozniak, 2010) a laissé entrevoir qu’une ressource pouvait agir comme milieu d’apprentissage pour le professeur en créant les conditions d’acquisition de savoirs d’expériences. C’est cet aspect que nous allons envisager à présent à travers le récit de la conception d’une ressource par un collectif constitué de professeurs des écoles, de formateurs et d’une chercheuse didacticienne.

III. CONCEVOIR DES SÉQUENCES D’ENSEIGNEMENTS ET IDENTIFIER LEURS DÉTERMINANTS DIDACTIQUES

L’institut de recherche pour l’enseignement des sciences de Montpellier est un lieu où se rencontrent des enseignants du primaire, du secondaire ou du supérieur, des formateurs d’enseignants et des chercheurs en sciences, en mathématiques ou en didactique autour de projets de conception de ressources pour l’enseignement ou de projets de formation. Le groupe « premier degré », constitué d’une quinzaine de personnes¹, est coanimé par une mathématicienne et une didacticienne, auteure de ce texte. Si la production de situations d’enseignement et des ressources associées est une finalité pour les professeurs et les formateurs engagés dans le groupe, elle est un moyen de diffuser les résultats de la recherche en didactique ainsi qu’une source d’étude des conditions et des contraintes qui pèsent sur les systèmes didactiques pour la didacticienne. Ce faisant, le travail collectif se constitue en dispositif de formation pour les participants à travers les questions qu’ils se posent pour mener à bien leurs

¹ Lors de la conception de la séquence présentée ici, il était constitué de Sonia Bayle, Samuel Causse, Anne Cortella, Virginie Dalmayrac, Deva Dauriac, Sophie Gastal, Hervé Gensac, Laëtitia Granier, Corinne Gruel, Émilie Jaudon, Matthieu Lafon, Sylvie Passet, Crystèle Pouget, Florence Valour, Floriane Wozniak.

projets. Le fonctionnement de ce collectif n'est pas hiérarchisé. Chaque membre, indépendamment de son statut et de son ancienneté dans le groupe, est légitime pour proposer l'étude d'une question professionnelle, d'une situation d'enseignement, partager une expérience réussie ou non. Le choix des thématiques sur lesquelles travaillent le groupe est légitimé par les programmes d'enseignement et validé collectivement. Chacun contribue alors à la réflexion, aux expérimentations et à leurs observations. Plusieurs projets sont ainsi menés en parallèle autour de l'écriture d'un texte décrivant la séquence ou de l'analyse des situations expérimentées. Les rencontres des membres du groupe s'organisent par projets avec des temps collectifs de comptes-rendus de l'état d'avancement des projets, de mutualisation d'expériences et d'apports didactiques. Entre les rencontres, des expérimentations sont réalisées et observées (par les formatrices ou les animatrices du groupe) pour nourrir les analyses. Lorsque les membres du groupe valident l'aboutissement de la séquence, le cycle prend fin. La ressource interne au groupe ainsi finalisée peut être diffusée à l'extérieur du groupe. La figure 1 synthétise le processus de production d'une ressource qui s'organise autour d'un cycle de co-élaborations d'une séquence d'enseignement, d'expérimentations et d'analyses didactiques.

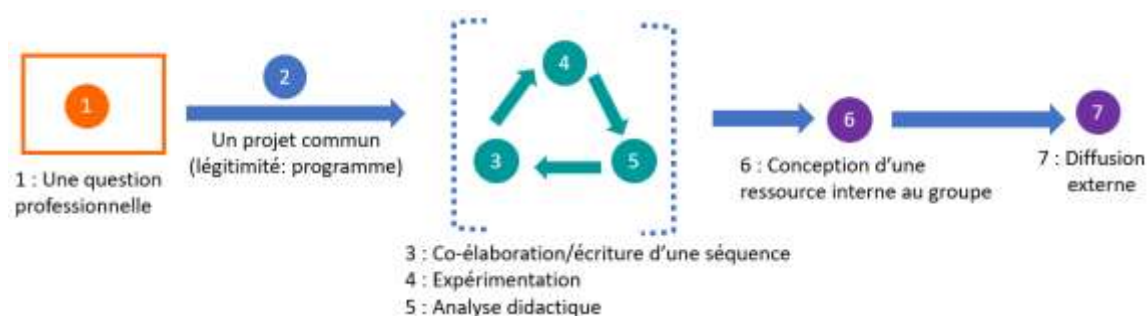


Figure 2 – Processus de production d'une ressource, groupe « premier degré » de l'IRES de Montpellier.

Dès les premiers travaux sur les ingénieries didactiques, les conditions de leur transmission et de leur reproductibilité ont été interrogées (Artigue, 1988). Quels descripteurs d'une ingénierie, d'une situation, d'une séance ou d'une séquence favorisent son appropriation au-delà du cercle de ses concepteurs ? De façon minimale, un premier geste consiste à lever les implicites et les ambiguïtés, en présentant, par exemple, le matériel utilisé et en explicitant les différentes phases de la séance. Mais ce type de ressource ne suffit pas. Comme le souligne Hersant (2011, p. 305), « Une des façons d'aborder cette problématique est d'identifier les éléments des situations qui garantissent leur robustesse par rapport au savoir, ce que nous appelons les déterminants d'une situation. » Se pose alors la question de l'identification de ces déterminants didactiques qu'il s'agirait de transmettre pour une mise en œuvre au plus proche de sa conception.

La particularité du groupe « premier degré » de l'IRES de Montpellier est sa pérennité et la diversité de ses membres. Ainsi, une même situation est (re)travaillée et expérimentée plusieurs fois, sur un temps long (plusieurs années) et dans des classes aux contextes variés (centre-ville, zone d'éducation prioritaire, zone rurale). Cette pluralité de mises en œuvre et ces ajustements successifs révèlent les conditions et les contraintes qui pèsent sur le travail épistémologique du professeur et ce faisant permettent d'identifier les déterminants didactiques (au sens de Hersant) de la situation par un effet de saturation, en quelque sorte. C'est d'ailleurs lorsqu'il y a une certaine stabilisation des mises en œuvre et des effets produits sur les apprentissages des élèves que se dégage au sein du groupe un consensus sur la fin du projet.

Concernant la ressource « se repérer dans le micro-espace », le groupe « premier degré » de l'IRES de Montpellier a répondu à un appel d'offre pour intégrer la banque de séquences didactiques du réseau

Canopé². La possibilité d'intégrer des extraits vidéos a conduit quelques membres du groupe à développer la dimension formatrice de la ressource initiale.

IV. PRENDRE EN CHARGE LES BESOINS PRAXÉOLOGIQUES DU PROFESSEUR DANS UNE RESSOURCE

1. La séquence « repérer dans le micro-espace »

L'origine du projet qui a conduit à la conception de la ressource « repérer dans le micro-espace » est la participation de certains membres du groupe « premier degré » de l'IRES de Montpellier à un atelier dans un colloque de formateurs d'enseignants du premier degré (Marchand, Braconne-Michoux, 2014). La situation proposée par ces chercheuses repose sur un dispositif : une boîte avec un trou par lequel des saynètes avec divers objets peuvent être observées. Quatre séances sont proposées : construction des saynètes et description ; jeu de la devinette où il s'agit de retrouver la boîte correspondant à sa description ; dessin du contenu de la boîte depuis le trou ; dessin du contenu de la boîte depuis un trou imaginaire.

La séquence que nous avons conçue reprend l'idée de l'observation du contenu d'une boîte par un trou que nous nommons porte. En revanche, les objets utilisés sont seulement des cubes de couleur dont la représentation dessinée en vue de face ou de dessus est un carré (figure 3).



Figure 3 – Les boîtes utilisées dans la séquence.

Avec ce matériel, le contenu de la boîte est observé en vue de dessus lorsque la boîte est ouverte et en vue de face lorsqu'elle est fermée. L'objectif d'apprentissage de la séquence est double. D'une part, la maîtrise du vocabulaire spatial (par exemple, à gauche, à droite, au milieu) qui peut différer suivant qu'on observe le contenu de la boîte en vue de dessus ou en vue de face (par exemple, en haut, en bas, à l'arrière, à l'avant). D'autre part, la découverte qu'une situation de repérage nécessite de définir un repère — ici les bords de la boîte et la porte comme point de repère — tandis que le repérage requiert deux informations selon les deux dimensions du plan.

La séquence comporte cinq séances structurées en trois temps suivies d'une évaluation. Dans un premier temps, les élèves produisent des messages oraux descriptifs, boîte ouverte (séance 1) puis boîte fermée (séance 2). Dans un second temps, les élèves produisent des représentations dessinées, boîte ouverte (séance 3) puis boîte fermée (séance 4). Enfin, dans le troisième temps, les élèves interprètent un message oral émis à partir de l'observation d'une boîte fermée pour produire une représentation dessinée (séance 5). Le tableau 1 synthétise la séquence.

² <https://www.reseau-canope.fr/bsd/sequence.aspx?bloc=886173>

Tableau 1 – Les différentes séances de la séquence « repérer dans le micro-espace »

	Vue de dessus (boîte ouverte)	Vue de face (boîte fermée)	
Message oral	Séance 1	Séance 2	Séance 5
Représentation dessinée	Séance 3	Séance 4	

Les séances 1 et 2 articulent description orale et boîte, les séances 3 et 4 articulent représentation dessinée et boîte tandis que la séance 5 articule description orale et représentation dessinée. Enfin, les séances reposent sur des situations d'émission-réception où un binôme d'élèves donne un message (oral ou dessiné) à un autre binôme qui doit l'interpréter. Les rôles étant ensuite échangés.

Selon le fonctionnement habituel du groupe, la ressource initialement produite est un ensemble de fiches descriptives des séances à partir de différentes rubriques : objectif d'apprentissage, matériel, durée, tâches des élèves, mode de validation, mise en commun et institutionnalisation. Des photos présentant le matériel et des exemples de productions d'élèves complétant les fiches. C'est sur cette base que nous avons conçu la ressource qui est venue enrichir la banque de séquences didactiques de Canopé dont l'enjeu est de fournir des supports pour la formation des enseignants. Ceci nous a conduit à rendre visibles et à expliciter les déterminants didactiques (au sens de Hersant) de la séquence.

2. La ressource « repérer dans le micro-espace » : prendre en charge la dimension formatrice

L'expérimentation répétée, sur une longue période (plusieurs années), dans des contextes différents et variés a permis d'identifier les éléments déterminants pour atteindre les objectifs d'apprentissage. L'identification empirique de ces éléments, sans toujours être formulée, avaient été intégrée en acte à travers la description des séances. La production d'une ressource qui assume une dimension formatrice rendait nécessaire d'explicitier ces ingrédients sur lesquels le travail épistémologique du professeur se réalise au cours de la séquence.

Une des spécificités de la banque de séquences didactiques de Canopé est de proposer des extraits vidéo de la mise en œuvre dans les classes. Toutes les séances ont ainsi été filmées par des techniciens professionnels. Les extraits vidéos devant être relativement courts, une sélection de moments représentatifs de chaque séance a été réalisée.

La ressource disponible sur Internet est structurée en différentes rubriques dont la première fournit un résumé vidéo de chaque séance. Elle est suivie de la rubrique « mise au point » où trois vidéos proposent chacune une focale sur des moments déterminants pour la construction des apprentissages. Elles montrent la gestion par le professeur de trois moments de mise en commun et sont accompagnés d'un court texte qui présente leur contenu. Le premier moment permet l'émergence du critère de la porte comme point de repère. Le second assure la découverte par les élèves de la nécessité de représenter les bords de la boîte lorsque la feuille n'est pas rectangulaire. Enfin le troisième moment porte sur la nécessaire tolérance à accorder à la description de la position des objets en discutant les cas litigieux (ce sont davantage des zones qui sont décrites que des positions).

Une troisième rubrique « commentaires, analyses et documents » présente des vidéos d'entretiens avec le professeur qui a été filmé dans sa classe, le point de vue d'une formatrice qui revient sur la nécessité d'enseigner les savoirs spatiaux et celui d'une enseignante spécialisée qui présente pourquoi cette séquence est adaptée pour des élèves avec des besoins éducatifs particuliers en discutant sa démarche inclusive.

L'entretien avec le professeur des écoles est l'occasion d'explicitier deux nouveaux déterminants didactiques en lien avec la mise en œuvre de la séquence. D'une part, le lien entre le vocabulaire spatial utilisé et l'orientation de la boîte au moment de la validation (boîte posée verticalement contre le tableau ou posée sur la table d'un élève) afin d'éviter des formulations ambiguës. D'autre part, les deux temps de la validation d'une situation d'émission-réception pour discuter de l'adéquation du message au modèle initial puis de l'adéquation de la production à partir du modèle (voir figure 4).

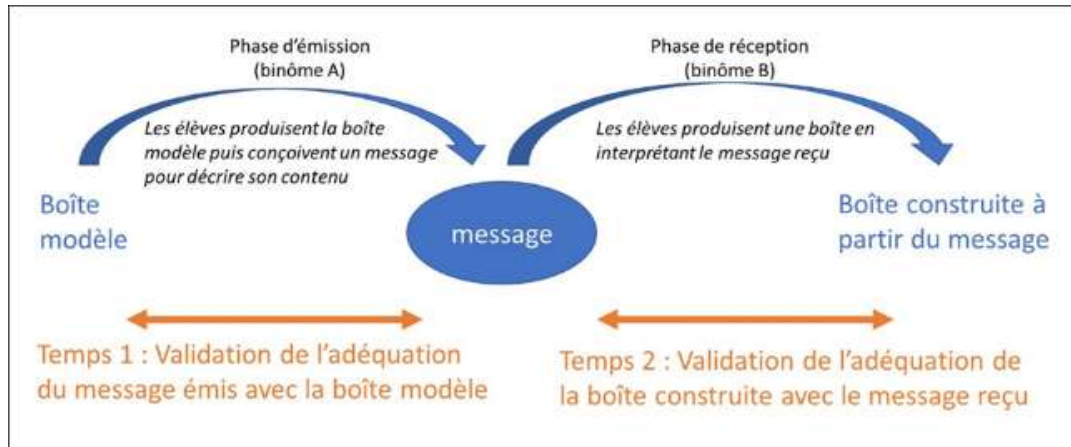


Figure 4 – Les deux temps de la validation d'une situation d'émission-réception.

Un dernier extrait revient sur un aspect épistémologique : construire les apprentissages dans un rapport de nécessité plutôt que de fournir des réponses à des questions que les élèves ne se posent pas. Ainsi, il s'agit de laisser les élèves découvrir par eux-mêmes le rôle de la porte comme point de repère plutôt que de l'introduire à un moment où les élèves ne perçoivent pas le rôle qu'elle pourrait jouer dans le repérage.

À côté de ces vidéos, trois documents sont fournis. La « fiche séquence » décrit les séances à partir de rubriques déjà évoquées plus haut. Le « document enseignant » doit lui permettre de comprendre comment mettre en œuvre la séquence et ses principes organisateurs. On y retrouve les ingrédients qui nourrissent son travail épistémologique et font de lui un acteur de son enseignement plutôt qu'un exécutant. Ce document fournit une présentation générale de la séquence, il explicite la structure de la séquence (cf. tableau 1), le lien entre les séances et les différents points de vue, le lien entre vocabulaire et points de vue, les variables didactiques et les choix opérés, la mise en œuvre particulière d'une situation d'émission-réception et les conditions de sa validation, des exemples d'institutionnalisation, des photos de fond de boîtes. Il donne aussi des indications pratiques concrètes pour gérer les situations d'émission-réception comme nommer les boîtes à l'arrière, préparer un tableau avec la liste des binômes et les noms des boîtes associées en émission ou en réception. Certains de ces éléments sont illustrés par les vidéos soit dans la classe soit dans l'entretien du professeur des écoles. Ce document permet d'en garder une trace. Un troisième document est la « présentation de la séquence et de ses enjeux » qui met en perspective la séquence en explicitant les dimensions mathématique et épistémologique qui sous-tendent la conception de la séquence comme la différence entre savoirs géométriques et savoirs spatiaux, la nécessité d'avoir deux types d'informations pour situer un objet dans un espace à deux dimensions (ici, haut/bas et droite/gauche), la construction des savoirs dans un rapport de nécessité. Enfin, une bibliographie et la référence aux programmes complètent l'ensemble des ressources.

Cette ressource faite de vidéos de classe et d'entretiens, de textes est à présent disponible en ligne mais nous n'avons pas les moyens de savoir comment elle est utilisée par les professeurs des écoles ou en formation. Ceci ne nous permet pas d'évaluer si elle répond effectivement aux besoins praxéologiques du professeur que nous avons identifiés. Néanmoins, les éléments repérés comme déterminants didactiques et la pertinence des choix réalisés pour les prendre en charge dans la ressource peuvent être scientifiquement discutés.

V. CONCLUSION

Ce texte s'intéresse à la question *Comment les ressources peuvent-elles prendre en charge les besoins praxéologiques des professeurs ?* Il présente comment un collectif de professeurs des écoles, de formatrices et une didacticienne ont conçu une ressource en tentant d'y répondre. Poser cette question, c'est considérer la dimension formatrice d'une ressource. Nous faisons l'hypothèse que les ressources qui sont des descriptions des conditions matérielles et organisationnelles, même lorsqu'elles intègrent une référence aux objectifs d'apprentissage en lien avec les programmes d'enseignement, ne se réfèrent qu'à la *praxis* du professeur. Il leur manque la part de *logos* qui explicite la raison d'être des choix didactiques opérés dans la ressource, donne une compréhension des enjeux et met en perspective les savoirs mathématiques enseignés.

La ressource présentée dans ce texte intègre la diversité des éléments qui nous semblent essentiels pour la mise en œuvre « éclairée » d'une séquence d'enseignement où le professeur est acteur, voire comptable, de son enseignement plutôt que simple transmetteur :

- les trois dimensions du travail épistémologique du professeur : mathématique (comme la différence entre connaissances spatiales et géométriques ou le lien entre types de vue et vocabulaire), didactique (les conditions d'une validation d'une situation d'émission-réception), épistémologique (la construction des apprentissages dans un rapport de nécessité) ;
- les gestes professionnels d'ordre pédagogique (marquer les boîtes, préparer une liste en tableau pour organiser l'échange de boîtes).

La complémentarité des deux supports (vidéos et textes) facilite l'articulation de la pratique et des éléments technologiques (au sens de Chevallard) qui soutiennent cette pratique. Les extraits vidéos montrent concrètement la mise en œuvre de la séquence et les gestes professionnels à maîtriser. Les textes décrivent la pratique (fiche professeur), l'accompagne (document pour la mise en œuvre) et lui donne de l'intelligibilité en mettant en perspective ses enjeux.

Poser la question de la façon dont une ressource peut prendre en charge les besoins praxéologiques du professeur, c'est faire l'hypothèse qu'une ressource pourrait y parvenir. Or les travaux sur la transposition didactique ont révélé que ce qui se fait ici et maintenant dans la classe dépend aussi de conditions et de contraintes qui dépassent les systèmes didactiques. L'échelle des niveaux de codétermination didactiques (Chevallard, 2002) est alors un outil puissant pour structurer ce qui pèse sur les systèmes didactiques et conduit le professeur à faire ce qu'il fait. Mais si tous les besoins praxéologiques du professeur ne peuvent être satisfaits par une ressource, celle-ci peut y contribuer, au moins pour certains d'entre eux.

RÉFÉRENCES

- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Ball, D. L., Thames, M. H. et Phelps, G. (2008). content knowledge for teaching. what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?. Dans S. Cho (dir.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical* (p. 73-96). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie et régulation. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir.), *Actes de la XI^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 41-56). La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. et Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. Dans G. Gueudet, et L. Trouche (dir.), *Ressources vives* (p. 41-55). PUR.
- Hersant, M. (2011). Les ingénieries de développement : à la recherche de déterminants de situations, une étude de cas relative aux problèmes pour chercher. Dans C. Margolinas, M. Abboud, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouk et F. Wozniak (dir.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 305-326). La Pensée sauvage.
- Marchand, P. et Braconne-Michoux, A. (2014). Quels types d'activités permettent de développer les connaissances spatiales chez les élèves du primaire ? Le cas de la boîte à image (Atelier A11). Dans *Actes du XL^e colloque de la COPIRELEM « Enseignement de la géométrie à l'école : enjeux et perspectives »*, Nantes. <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WO/IWO14008/IWO14008.pdf>
- Margolinas, C. et Wozniak, F. (2009). Usage des manuels dans le travail de l'enseignant : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. *Revue des Sciences de l'Éducation*, 35(2), 82-104.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Wozniak, F. (2020). Les besoins praxéologiques du professeur. *Educação Matzmatika Pesquisa*, 22(4), 787-800.
- Wozniak, F. (2019). Fondements du travail épistémologique du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 39(1), 15-50.
- Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32(1), 7-55.
- Wozniak, F. (2010). Transposition didactique interne et dialectique des médias et des milieux. Dans A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade et C. Ladage (dir.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (p. 859-878). IUFM de l'académie de Montpellier.

EXPÉRIMENTATION ERGONOMIQUE ET DIDACTIQUE D'UNE RESSOURCE

DOCUMENTAIRE : COURSE FRACTIONNÉE, PROPORTIONNALITÉ ET

VITESSE MOYENNE

| GEORGET* JEAN-PHILIPPE ET DELATTRE** BENJAMIN

Résumé | Les effets contrastés de ressources de formation sur les pratiques d'enseignants de fin de l'école primaire ont conduit à l'élaboration d'une expérimentation basée sur une séquence interdisciplinaire articulant mathématiques et éducation physique et sportive. Celle-ci aborde les notions de course fractionnée, de proportionnalité et de vitesse moyenne. L'approche méthodologique retenue s'appuie sur les didactiques disciplinaires et sur des concepts d'ergonomie.

Mots-clés : ergonomie des ressources de formation, éducation physique et sportive, course fractionnée, proportionnalité

Abstract | The contrasting effects of training resources on the teaching practices at the end of elementary school led to the development of an experiment based on an interdisciplinary sequence combining mathematics and physical education and sports education. The sequence addresses the concepts of interval run, proportionality and average speed. The methodological approach is based on didactics of both disciplines and some ergonomic concepts.

Keywords: Ergonomics of teaching training resources, physical and sports education, interval run, proportionality

I. CONTEXTE GÉNÉRAL DU PROJET DE RECHERCHE

Avant de présenter les éléments spécifiques de notre nouvelle expérimentation et des éléments didactiques relatifs aux deux disciplines mathématiques et éducation physique et sportive sur lesquelles elle s'appuie, revenons sur son origine.

Depuis 2016, à la suite de constats sur les effets contrastés de la formation sur les pratiques d'enseignement de professeurs des écoles stagiaires (PES) en mathématiques à l'Institut national supérieur du professorat et de l'éducation (Inspé) Normandie Caen (France), nous avons lancé une expérimentation centrée sur un ensemble de ressources documentaires.

Ces ressources forment un ensemble hétérogène composé d'éléments théoriques, de trames de séquences sur des sujets mathématiques, de scénarios de séances plus ou moins détaillés, de diaporamas et de références puisées dans les littératures scientifique, professionnelle et institutionnelle. Elles sont mises à disposition des PES dès le début de la formation à l'Inspé Normandie Caen sous forme d'un unique fichier archive au format ZIP en ligne (170 Mo).

Cet ensemble de ressources est volontairement hétérogène afin de permettre différentes appropriations pouvant aller, de manière optimale, jusqu'à l'appropriation des sources et références utilisées pour le construire. En effet, ces ressources visent à rester une source de formation sur le moyen et le long terme pour les PES une fois qu'ils sont sortis du dispositif de formation initial.

Des modalités de formation spécifiques permettent aux PES de les consulter et de se les approprier durant l'année. En particulier, les PES peuvent consulter les ressources qui les intéressent en priorité

* Université de Caen Normandie (Inspé), CIRNEF UR 7454 – France – jean-philippe.georget@unicaen.fr

** Université de Caen Normandie (Inspé), CIRNEF UR 7454 – France – benjamin.delattre@unicaen.fr

pour préparer leur enseignement en fonction de leurs conditions de stage (niveau d'enseignement, sujets mathématiques abordés, etc.). De plus, ces ressources sont aussi à disposition des personnels de l'Éducation nationale qui les tutorient au cours de l'année de stage. Ces derniers peuvent ainsi potentiellement faire du lien entre la formation à l'Inspé et le stage.

Depuis le début de l'expérimentation et selon les années, différents questionnaires ont été soumis aux PES et des observations en classe ont été réalisées (Georget et Dufy, 2020). Ils ont permis de faire évoluer la présentation des ressources et le dispositif de formation. Ils ont aussi permis de constater que le dispositif produisait des effets pertinents sur les pratiques, tels la mise en œuvre de situations de recherche et de preuve entre pairs, même si ces effets paraissaient parfois limités, comme pour la gestion de certaines mises en commun des productions des élèves. Des échanges avec les partenaires de l'Éducation nationale ont aussi montré que certaines ressources diffusent au-delà du cercle des professeurs stagiaires. C'était un effet de bord escompté pour diffuser les résultats de la recherche en didactique de mathématiques au-delà de l'enseignement dispensé au sein de l'Inspé.

Partant du constat que les ressources enseignantes jouent un rôle important sur les pratiques du fait des situations d'enseignement qu'elles proposent (Houdement, 1998 ; Coppé et Houdement, 2002), il est pertinent de s'intéresser à leur ergonomie (Tricot et al., 2003 ; Georget, 2009, 2010). Nous nous intéressons particulièrement aux aspects et aux questions principales suivantes qui résument ce que nous appelons *expérimentation ergonomique et didactique de ressources documentaires* :

- Utilité : les ressources permettent-elles aux enseignants, ici des PES, d'enseigner au mieux des résultats de la recherche scientifique ?
- Adaptabilité : les enseignants peuvent-ils les adapter à leur pratique et à leurs élèves ? Prennent-elles en compte l'expertise des enseignants, c'est-à-dire l'expérience qu'ils ont acquise au cours de leur parcours professionnel et de formation ?
- Accessibilité : les enseignants peuvent-ils consulter ces ressources facilement ? Sont-elles facilement compréhensibles ?
- Acceptabilité : les enseignants les utilisent-ils volontiers ?

Malgré les améliorations apportées au fil des ans, des problèmes d'ergonomie demeurent. Les PES évaluent les ressources comme pertinentes pour leur formation et leur pratique d'enseignement, mais ils peinent parfois à se repérer dans la somme de ressources disponibles malgré la présence d'un résumé des différents dossiers thématiques proposés et d'un guide d'appropriation. S'ajoutent à cela des obstacles techniques tels que l'absence d'un moteur de recherche et de liens hypertextes entre les documents, la complexité de la gestion et de l'accessibilisation des mises à jour, et les bugs de certains systèmes d'exploitation lorsque le fichier archive n'est pas complètement extrait.

Pour tenter de résoudre plusieurs de ces problèmes, une nouvelle structuration des ressources basée sur un site web est expérimentée durant l'année universitaire 2024-2025. C'est en particulier le cas d'une ressource interdisciplinaire associant mathématiques et éducation physique et sportive (EPS) traitant de proportionnalité et de vitesse moyenne dans un contexte de course fractionnée avec des élèves de cycle 3 (8-11 ans).

II. NÉCESSITÉ D'UNE RESSOURCE D'ENSEIGNEMENT ARTICULANT COURSE FRACTIONNÉE, PROPORTIONNALITÉ ET VITESSE MOYENNE

Il a été montré l'inaboutissement fréquent du projet d'appropriation du modèle proportionnel auprès des élèves jusqu'au collège (Hersant, 2005 ; Simard, 2012, 2022 ; Voisin, 2013). Par ailleurs,

notre projet de recherche s'inscrit dans une démarche d'éducation inclusive (Assude, 2019) qui vise à contribuer au développement des « mathématiques pour tous » dans des situations de recherche et de preuve entre pairs (Georget, 2009, 2021). Il s'agit ici de permettre à chaque élève, quel que soit son niveau de maîtrise de la proportionnalité, ici dans un contexte de calcul de vitesse, d'accéder à des techniques adaptées à ses capacités.

La conception des séquences s'appuie sur la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). Les variables didactiques permettent à la fois de favoriser différentes stratégies de calcul et de favoriser l'implication d'une majorité d'élèves dans une visée d'éducation inclusive. Le même principe d'inclusion est retenu dans les séances d'EPS en prenant en compte l'évolution de la mobilisation en situation des élèves (Delattre, 2021 ; Bui-Xuân, 1999), ce qui permet à chaque élève d'évaluer ses performances et de construire des projets évolutifs personnalisés de course et d'entraînement.

Nos travaux antérieurs (Delattre et Georget, 2016) ont déjà combiné la didactique de l'EPS et celle des mathématiques pour concevoir un dispositif interdisciplinaire course continue-proportionnalité. Il a été diffusé et a fait l'objet de formations dans plusieurs circonscriptions proches de notre université.

L'intensification de la sédentarité des jeunes suppose de développer une éducation physique de qualité pour tous (Nancy, 2015). Une revue de littérature a mis en évidence la nécessité de travailler en course intermittente dès l'âge de 7-8ans (Gerbeaux et Berthoin, 1999) à partir de projets individualisés. Les effets de ce travail sur la santé commencent à être bien connus tels l'augmentation des capacités aérobie, le développement cardio-respiratoire et la perception plus positive des efforts corporels. Toutefois, il n'existe pas de travaux qui permettent à des enseignants non spécialistes de s'approprier les dispositifs pédagogiques permettant d'organiser ces pratiques. Or, cette stratégie de travail permet à chaque élève de s'engager au maximum de ses capacités avec des effets identifiables rapidement et donc porteurs de motivation. Les données produites par les élèves peuvent être exploitées dans d'autres champs disciplinaires, en particulier en mathématiques. L'activité physique est par ailleurs reconnue comme particulièrement bénéfique pour les performances des élèves en mathématiques (Singh et al., 2019).

Enfin, des échanges avec des spécialistes de la physiologie de l'exercice ont permis de conclure que le dispositif de course intermittente pourrait largement se développer tout en conservant une logique scolaire et interdisciplinaire. Cette logique suppose la construction par les élèves de projets d'entraînement individualisés en lien avec la construction et la manipulation de concepts liés à la proportionnalité et à la vitesse moyenne.

III. DISPOSITIF DE COURSE EN EPS ET ARTICULATION AVEC LES MATHÉMATIQUES

Les élèves sont disposés individuellement dans des couloirs parallèles. Des repères numérotés au sol (voir explication ci-après) permettent aux élèves observateurs de recueillir des données sur les performances des élèves coureurs au cours d'une série de course fractionnée. Par exemple 12 courses de 10 secondes alternant chacune avec 20 secondes de pause équivalent à un total de 2 minutes de course. Si une course ayant l'objectif d'atteindre le repère 8 a été réussie par un coureur, l'observateur note 8 sur la feuille de performance prévue à cet effet. Sinon, il note un signe indiquant que l'objectif n'a pas été atteint. Les feuilles de performance et les repères au sol permettent aux élèves d'évaluer l'évolution de leur performance au cours d'une série, d'une série à l'autre, et d'une séance d'EPS à l'autre.

Lors des premières courses, les élèves ont tendance à courir très vite, ce qui les épuise rapidement et ne permet pas de maintenir la même vitesse sur les dernières courses. Accompagné par l'enseignant,

les élèves apprennent ensuite à réguler leur course au cours d'une série en choisissant individuellement un repère raisonnable pour eux.

En début de séquence, les élèves ignorent le sens des repères numérotés. Une séance de mathématiques leur permet de comprendre que les numéros correspondent à la vitesse moyenne en km/h pour effectuer le trajet dans le temps donné. Pour cela, ils calculent successivement la distance parcourue à vitesse constante en 20 secondes, 30 secondes, 1 minute, 2 minutes (c'est à dire la durée totale de course) puis en 1 heure. Ils effectuent leurs calculs avec des stratégies de leur choix. De part leurs connaissances à ce niveau d'enseignement, leurs stratégies sont basées sur la linéarité additive ou multiplicative et le retour à l'unité. Les premiers calculs sont effectués avec le repère 27. Ce nombre a été choisi parce que les calculs mettent en jeu des nombres entiers et que la vitesse correspondante (27 km/h) est inatteignable pour des élèves de cet âge. Dans un second temps, après une mise en commun des procédures utilisées, les élèves sont motivés pour calculer individuellement la vitesse moyenne qui correspond à leur propre performance en réinvestissant les techniques vues précédemment.

L'unité quotient km/h est introduite comme correspondant à une distance mesurée en kilomètre parcourue à vitesse constante en une heure. Le lien est fait avec la séance d'EPS où les élèves ont appris qu'une course à vitesse régulière était le meilleur moyen, à la manière des athlètes de haut niveau, d'améliorer leurs performances.

L'interdisciplinarité provisoire des séquences d'EPS et de mathématiques renforcent ainsi les concepts disciplinaires en même temps que la conscience disciplinaire (Reuter, 2007) de chaque discipline. Les séquences peuvent ensuite se dérouler relativement indépendamment l'une de l'autre.

L'association interdisciplinaire de la course et de la proportionnalité n'est pas une nouveauté. Elle a déjà été abordée, par exemple par Artigue et Robinet (1981). Ici, le traitement en diffère par plusieurs points parmi les suivants :

- Le type de course est radicalement différent, course de vitesse dans le cas d'Artigue et Robinet, course fractionnée dans notre cas.
- Au lieu d'une comparaison entre élèves qui aurait peu de sens dans une approche inclusive, la logique de l'association des disciplines mathématiques et EPS se base d'emblée sur la progression individuelle de chaque élève.
- La modélisation de la course sous la forme d'une course à vitesse constante et d'une mesure en km/h est assumée explicitement. Pour calculer, on imagine que l'on court toujours à la même vitesse alors que les élèves savent, pour l'avoir largement éprouvé, qu'il y a des phases d'accélération et de décélération à chacune de leur course.
- Les premiers calculs de proportionnalité sont imposés aux élèves afin de favoriser l'apparition de différentes techniques de résolution d'un problème de proportionnalité. Ce n'est que dans un second temps que les élèves effectuent des calculs à partir de leurs propres données de course en employant les techniques de calcul qui leur paraissent les plus accessibles.
- L'articulation entre la séquence d'EPS et celle de mathématique est davantage exploitée. Le lien entre les repères au sol et les vitesses moyennes en km/h est explicité en cours de séquence et permet une meilleure appréhension à la fois des projets de course personnalisés et de la notion de vitesse moyenne.
- Bien que cela reste envisageable, nous n'avons pas exploité de représentation graphique de la vitesse moyenne.

IV. EXPÉRIMENTATION D'UNE PREMIÈRE RESSOURCE

Afin de diffuser la séquence interdisciplinaire ainsi conçue, nous avons élaboré un premier document qui a été proposé à une professeure des écoles pour sa classe de CM2 (9-10 ans) en Réseau d'éducation prioritaire. Le dispositif a été testé dans sa classe de mars à mai 2024 (6 séances d'EPS et 2 séances de mathématiques). Il a permis de montrer que l'engagement des élèves était important dans les deux disciplines avec des progrès conséquents et progressifs en prenant en compte leurs besoins situés (élèves avec accompagnement personnalisé, élèves avec des degrés variables de sédentarité et de compréhension de la proportionnalité).

Une formation destinée à des enseignants de la fin du primaire et début du secondaire a également été mise en œuvre avec cette première ressource pour la tester in situ, ce qui a permis des premiers retours sur son accessibilité et son utilité pédagogique.

La poursuite de l'élaboration de cette ressource pédagogique à visée inclusive et interdisciplinaire suppose, d'une part de rendre cette ressource la plus accessible possible via un site web dédié *responsive*¹, et d'autre part d'améliorer cette ressource en faisant collaborer enseignants et chercheurs.

Le principe de l'élaboration d'un « prototype » destiné à être testé à plus grande échelle s'inspire de l'approche « continuée dans l'usage » (Cèbe et Goigoux, 2018) qui vise à ce qu'une majorité de professionnels puisse s'approprier une ressource didactiquement robuste en gérant le compromis entre ce qui est « souhaitable » sur le plan des apprentissages et des stratégies d'enseignement visées et le « raisonnable » sur le plan de l'utilisation pratique de la ressource pour les enseignants.

À cette fin, une nouvelle expérimentation est programmée en 2024-2025 dans le cadre du Programme d'investissement avenir 100 % Inclusion, un défi, un territoire² (PIA3 100 % IDT). Elle doit permettre de recueillir des données plus systématiques sur l'ergonomie de la ressource et les mises en œuvre effectuées par les enseignants :

- Utilité : la ressource doit permettre de mettre en œuvre un enseignement interdisciplinaire, de mettre en projet les élèves et de produire des effets d'apprentissage rapides et durables pour tous les élèves.
- Utilisabilité : elle doit permettre de s'adapter à chaque élève et s'intégrer aux progressions pédagogiques des enseignants, tant sur le plan matériel que celui de l'organisation des groupes et des contenus d'enseignement-apprentissage.
- Accessibilité : la ressource est *responsive* et conçue avec l'aide d'informaticiens sensibilisés à l'interopérabilité (Thivierge, 2012, p. 2) et à l'approche *low-tech* (ADEME, 2022), d'un typographe et d'une spécialiste de l'accessibilité. Un moteur de recherche permettant d'accéder directement à des sous-parties des documents est intégré.
- Acceptabilité : la ressource doit viser à ce que les enseignants aient envie de l'utiliser, puissent y accéder facilement et contribuer à son évolution s'ils le souhaitent, et puissent le partager et collaborer avec d'autres collègues.

L'approche méthodologique combine d'une part évaluation par inspection (Tricot et al., 2003) par le biais d'entretiens semi-directifs enregistrés en audio et lors d'échanges informels avec des enseignants, et d'autre part évaluation empirique par observation et enregistrement vidéo de pratiques en classe.

¹ Site web *responsive* ou réactif : site web consultable depuis différents appareils avec un confort similaire.

² Programme d'investissement de l'État français sur 10 ans.

Les enregistrements audio d'entretiens semi-directifs individuels ou en groupes avec les élèves, les fiches de performance, les traces écrites et des carnets de bord des élèves seront analysés pour objectiver les effets du dispositif dans les sphères scolaire et sociale des élèves.

V. CONCLUSION

Cette contribution présente une nouvelle expérimentation de ressources enseignantes, elle-même incluse dans une expérimentation sur plusieurs années d'un ensemble de ressources destinées à des enseignants de l'école primaire.

Cette expérimentation articule mathématiques et éducation physique et sportive (EPS) et aborde les notions de course fractionnée, de proportionnalité et de vitesse moyenne.

Sur les plans théorique et méthodologique, elle s'appuie sur les didactiques des mathématiques et de l'EPS ainsi que sur des concepts d'ergonomie.

Au moment de la soumission de la présente contribution, la ressource enseignante qui sera support de l'expérimentation prévue en avril-mai 2025 est en cours d'élaboration.

Note : Cette contribution est financée par les actions 2 et 3 du PIA3 100 % IDT (Programme d'investissement avenir 100 % Inclusion, un défi, un territoire). Ce PIA vise à développer des dispositifs collaboratifs de recherche et de formation autour de l'éducation inclusive. Sur 10 ans (2020-2030), il regroupe 4 INSPÉ et à 3 académies.

RÉFÉRENCES

- ADEME. (2022). *Démarches low-tech. État des lieux et perspectives* [Rapport].
<https://bibliothèque.ademe.fr/consommer-autrement/5421-demarches-low-tech.html#product-features>
- Artigue, M. et Robinet, J. (1981). Courses chronométrées. *Grand N*, (24), 47-69.
- Assude, T. (2019). Dynamique inclusive, don et reconnaissance. *La nouvelle revue - Éducation et société inclusives*, 86(2), 13-26.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Pensée sauvage.
- Bui-Xuân, G. (1999). *Pédagogie conative, le corps mobilisé* [HDR inédit]. Université Montpellier.
- Cèbe, S. et Goigoux, R. (2018). Lutter contre les inégalités : Outiller pour former les enseignants. *Recherche et formation*, 87(1), 77-96.
- Coppé, S. et Houdement, C. (2002). Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N*, (69), 53-62.
- Delattre, B. (2021). Apprendre par adoption à l'école. Éléments introductifs et illustrations dans la discipline Éducation Physique et Sportive. *Penser l'Éducation*, (49), 9-40.
<https://journals.openedition.org/pensereduc/410>
- Delattre, B. et Georget, J.-P. (2016). *Problématisation interdisciplinaire d'une activité « course de durée » du point de vue des didactiques de l'EPS et des mathématiques*. <https://www.canal-u.tv/chaines/cemu/semaine-des-mathematiques-2016/02-problematization-interdisciplinaire-d-une-activite>
- Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot].
<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00426603/>

- Georget, J.-P. (2010). Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants. Dans M. Abboud-Blanchard et A. Flückiger (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, année 2010* (p. 45-65). ARDM et IREM de Paris 7.
- Georget, J.-P. (2021). Potentiels des situations de recherche et de preuve entre pairs en classe de mathématiques et dévolutions. Dans P. Buznic-Bourgeacq (dir.), *Sujets et objets de la dévolution, une institution de l'autonomie* (p. 35-47). ISTE.
- Georget, J.-P. et Dufy, C. (2020). Des documents et des modalités de formation pour favoriser la mise en œuvre de situations de recherche et de preuve entre pairs dans des classes de l'école primaire. *Revue de mathématiques pour l'école*, 233, 50-59. <https://doi.org/10.26034/vd.rm.2020.1736>
- Gerbeaux, M. et Berthoin, S. (1999). *Aptitude et pratiques aérobies chez l'enfant et l'adolescent*. PUF.
- Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repère-IREM*, (59), 5-41.
- Houdement, C. (1998). Le choix des problèmes pour la « résolution de problèmes ». *Grand N*, (63), 59-76.
- Nancy, M. (2015). *L'Éducation physique de qualité. Directives à l'intention des décideurs* [Rapport]. UNESCO.
- Reuter, Y. (2007). La conscience disciplinaire : présentation d'un concept. *Éducation et didactique*, (1-2), 55-71. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.175>
- Simard, A. (2012). Proportionnalité en CM2 et sixième. *Petit x*, (90), 35-52.
- Simard, A. (2022). Les divisions au prisme de la proportionnalité. *Petit x*, (116), 107-114.
- Singh, A., Saliasi, E., van den Berg, V., Uijtdewilligen, L., de Groot, R. H. M., Jolles, J., Andersen, L. B., Bailey, R., Chang, Y. K., Diamond, A., Ericsson, I., Etnier, J. L., Fedewa, A. L., Hillman, C. H., McMorris, T., Pesce, C., Pühse, U., Tomporowski, P. D. et Chinapaw, M. J. M. (2019). Effects of physical activity interventions on cognitive and academic performance in children and adolescents: A novel combination of a systematic review and recommendations from an expert panel. *British Journal of Sports Medicine*, 53(10), 640-647. <https://doi.org/10.1136/bjsports-2017-098136>
- Thivierge, R. (2012). *Le profil d'application Normetic* (version 1.1). GTN-Québec.
- Tricot, A., F. Plégat-Soutjis, Camps, J.-F., Amiel, A., Lutz, G. et Morcillo, A. (2003, avril). *Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des ELAH* [Communication]. Congrès « Environnements informatiques pour l'apprentissage humain », Strasbourg, France. <https://hal.science/edutice-00000154v1>
- Voisin, S. (2013). *L'enseignement de la proportionnalité en SEGPA. Contraintes, spécificités, situations* [Thèse de doctorat, Université Victor Segalen - Bordeaux II].

**GT8 | LES TECHNOLOGIES
POUR L'APPRENTISSAGE,
L'ENSEIGNEMENT ET LA
FORMATION**

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL 8

LES TECHNOLOGIES POUR L'APPRENTISSAGE, L'ENSEIGNEMENT ET LA FORMATION

| BUTEAU* CHANTAL, NOUHOU** ABDLOUL MASSALABI, SOURY-LAVERGNE*** SOPHIE ET
VANDEBROUCK**** FABRICE

I. INTRODUCTION

Le groupe de travail a été animé par Chantal BUTEAU et Fabrice VANDEBROUCK, Abdoul Massalabi NOUHOU et Sophie SOURY-LAVERGNE n'ayant pas pu participer en présentiel mais ayant assisté et contribué aux débats par un dispositif de visioconférence. Nous avons discuté de neuf communications portant sur le primaire, le secondaire et le post secondaire. Des technologies de diverse nature étaient en jeu dans les communications : des logiciels de programmation (MatLab, Python), des micro monde comme GéoGébra ou Cabri, des exercices et, c'est la nouveauté, une présentation d'usages d'imprimantes 3D, d'usages d'un jeu sérieux (i.e., Minecraft Éducation) et d'usages d'une intelligence artificielle (IA). Les sujets mathématiques étaient variés : la géométrie, les connaissances spatiales, des méthodes numériques en analyse, l'algèbre et la modélisation. Du côté des cadres théoriques mobilisés, les papiers ont réinvesti l'approche instrumentale (genèses instrumentales, double genèses, orchestrations instrumentales), la théorie des situations didactiques (TSD), la théorie de la médiation sémiotique (TSM), la cogmonition, la théorie anthropologique du didactique (TAD) et des éléments de théorie de l'activité en didactique des mathématiques (TADM).

II. SYNTHÈSE DES COMMUNICATIONS SELON QUATRE AXES

Nous présentons maintenant brièvement les neuf communications suivant quatre axes retenus pour organiser les présentations : trois communications axées sur les apprentissages des élèves, trois axées sur les pratiques enseignantes, une communication sur la formation des enseignant·e·s et deux communications axées sur la conception de technologies.

Tout d'abord **Mai Huy et Ouellette** expérimentent des utilisations d'imprimantes 3D en soutien à l'apprentissage de la géométrie dans l'espace au primaire, à travers la fabrication par les élèves de porte-clés avec des contraintes à suivre. Ensuite, **Thibault et al.** expérimentent dans des classes du primaire et du secondaire le jeu sérieux Minecraft Education pour en faire ressortir des avantages pour les apprentissages en algèbre et en géométrie et identifier les défis didactiques à affronter. **Merjane et al.** expérimentent enfin en école d'ingénieurs les apports possibles d'un logiciel de calcul numérique en analyse, dans le but de dévoluer aux étudiants ingénieur le choix des méthodes numériques les mieux adaptées à leurs activités.

* Department of Mathematics and Statistics, Brock University, St.Catharines – Canada – cbuteau@brocku.ca

** Département de didactiques de disciplines, Université Djibo Hamani de Tahoua – Niger – nouhou.abdoulmassalabi@udh.edu.ne

*** Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LIG – France – sophie.soury-lavergne@univ-grenoble-alpes.fr

**** LDAR, Université Paris Cité, F-75013 Paris – France – vandebro@u-paris.fr

Du côté des pratiques enseignantes, **Megherbi** explore des pratiques déclarées sur les usages de logiciels pour les apprentissages de la géométrie à la fin du primaire (élèves de 9 à 11 ans). **Khalloufi-Mouha** étudie l'utilisation dans une classe de seconde (élèves de 15 ans) d'une appliquette intégrée à Cabri et examine comment cet outil aide le professeur à introduire et institutionnaliser le concept de mesure d'un arc orienté. Enfin **Moussitou** examine les pratiques d'évaluation des productions des élèves en utilisant des outils d'IA dans une approche hybride, combinant expertise humaine et potentialité de l'IA.

La communication de **St Cyr et al.** portait sur l'émergence chez les enseignant·e·s en formation initiale de schèmes professionnels d'usage de programmation informatique. Les deux dernières communications portaient plus directement sur de l'ingénierie de construction de technologies : d'un côté SPAGEO pour l'apprentissage au primaire des connaissances spatiales dans le papier de **Coutat et al.** de l'autre côté MINDMATH pour les apprentissage au premier cycle du secondaire (élèves de 12 à 14 ans) de l'algèbre et de la géométrie à travers le papier de **Grugeon-Allys et al.**

Nous notons plusieurs thèmes non traités pour lesquels nous avons sollicité des contributions lors de l'appel : l'accompagnement et la compensation du handicap, les modalités et co-modalités d'enseignement hybride, ou à distance ou encore l'étude des contextes d'organisation des recherches et leur impact sur les résultats. Ces thèmes donnent lieu à des travaux au-delà de la communauté EMF et pourraient donc être repris pour le prochain colloque.

III. DISCUSSION ET OUVERTURES

Lors de la dernière session de notre groupe de travail, nous nous sommes divisés en petits groupes pour réfléchir et discuter sur différents axes, préparés par les responsables de groupe, incluant la formulation de questions pertinentes qui gagneraient à être approfondies. Dans cette section, nous relevons des enjeux qui ont été discutés pendant le congrès ou lors de la session de synthèse et qui, selon nous, sont à reprendre pour le prochain EMF.

1. *Apparition de nouvelles tâches proposées aux élèves et principes de conception des tâches et des technologies*

Aucune réelle nouveauté dans les tâches conçues pour les élèves n'a été présentée lors de ce groupe de travail. Les caractéristiques des tâches pour les élèves, utilisées dans les études présentées, sont peu décrites et peu problématisées dans les contributions. Les apports des contributions sont ailleurs. Par exemple, le type de tâche proposé par May Hui et Ouellette pour l'usage d'un logiciel de conception d'objets et d'imprimante 3D, ou le processus collectif de conception des tâches chez Thibault et ses collègues ne sont pas nouveaux. Ils relèvent de modèles valorisés en didactique (comme par exemple la démarche projet ou bien la résolution de problème), ou reprennent une tâche déjà publiée, comme par exemple la situation de la poulie chez Khalloufi-Mouha.

Néanmoins, deux contributions présentent le développement ou l'évolution de technologies conçues pour l'enseignement et l'apprentissage. L'évolution de l'environnement SPAGEO pour l'apprentissage des connaissances spatiales par les élèves, présenté par Coutat et ses collègues, a maintenant pour enjeu d'identifier, dans les procédures des élèves, les informations nécessaires à l'enseignant·e pour les aider de façon pertinente. Le projet MINDMATH, dans le papier de Grugeon-Allys et ses collègues, présente une modélisation didactique du savoir en géométrie (en référence à un modèle praxéologique) et un modèle de l'élève fondé sur le type de justification qu'il produit. Il permet de produire des parcours (une succession de tâches élèves), individualisés, passant par des tâches « pivots » pour atteindre l'objectif d'apprentissage visé. La modélisation obtenue à partir des outils

théoriques didactiques est implémentée dans l'environnement, ce qui fait la démonstration de l'opérationnalité des connaissances et savoirs didactiques.

2. *Les pratiques enseignantes à l'ère du numérique*

Les présentations ont permis de mener des réflexions sur les pratiques enseignantes à l'ère du numérique et ses effets sur les apprentissages en mathématiques des élèves. Les pratiques consistent à proposer des situations ouvertes où l'élève est amené à manipuler les objets mathématiques et à formuler des conjectures ne sont toujours pas dominantes. Force est de constater que l'intégration des outils numériques dans les pratiques enseignantes dépend du contexte de l'expérimentation et la qualité de la formation des enseignant·e·s de mathématiques. Les présentations ont ainsi mis en lumière des limites à cette l'intégration des outils numériques dans les pratiques enseignantes (par exemple par Megherbi, par Khalloufi-Mouha et par Merjane et ses collègues). Elles ont présenté les principaux défis qui sont les infrastructures adaptées et les supports techniques dans les établissements, le manque de formation du personnel enseignant pour adapter l'utilisation des outils numériques aux besoins d'accompagnement des élèves en situation de la classe. L'objectif de transformation des postures enseignantes, de transmissive à médiatrice et réflexive (Abboud, 2024) reste à poursuivre. De même les technologies plus récentes, telles que l'IA ou les logiciels de conception et d'impression 3D pourraient faire évoluer les pratiques enseignantes. Mais cette transformation de la posture de l'enseignant·e n'est pas clairement observée à travers les travaux présentés dans le groupe de travail.

3. *Dispositifs de formation et de développement professionnel des enseignants actuellement mis en place et étudiés*

C'est une question qui reste d'actualité et qui interpelle tous les autres axes de questionnement : quelle forme d'accompagnement et de formation des enseignant·e·s pourrait contribuer à une intégration efficace des outils numériques dans la classe mathématique ?

Seulement une des communications a directement abordé ce sujet, soit St-Cyr et collègues qui ont discuté une approche méta-cognitive dans des cours mathématiques pendant la formation disciplinaire et visant le développement professionnel initial des futur·e·s enseignant·e·s pour l'intégration du codage dans la classe mathématique. Cette approche souligne un point relevé dans la session de synthèse du GT8 : il faut parfois accepter de ne pas être expert en technologie (i.e. d'être formé « à 100 % »), tant qu'on a une intention pédagogique-didactique, et se lancer.

Pour ce qui est du développement professionnel, des recherches participatives qui prennent comme origine les besoins des enseignant·e·s, comme ce fut le cas dans les travaux de Thibault et collègues, pourraient être particulièrement pertinentes si on vise des changements dans les pratiques. Une des grandes difficultés qui persiste est le manque de temps des enseignant·e·s, alors que les occasions ponctuelles de développement professionnel ne semblent pas permettre de réelles évolutions des pratiques. Un modèle intégrant différentes modalités de formation pourrait permettre de mieux s'adapter à la réalité des enseignant·e·s.

4. *Intelligence artificielle (IA) générative : nouvelles opportunités et enjeux*

Mentionnée dans plusieurs présentations, l'IA générative a été discutée principalement dans l'une des contributions, soit celle de Moussitou concernant son rôle dans l'évaluation des apprentissages. Elle explore le rôle d'aide de l'IA pour l'analyse par l'enseignant·e des productions des élèves et dont l'atout est la rapidité et le traitement systématique, tout en pointant la non prise en charge du contexte et du besoin exact de l'élève.

D'autres opportunités générées par l'IA générative peuvent être relevées. Pour l'enseignant·e, elle permet d'automatiser certaines tâches dont la planification de tâches pédagogiques (planification de leçons, synthèses, diapos accompagnatrices de leçons, création de tests, création d'activités interactives, correction, etc.). Mais il reste que l'enseignant·e se doit d'être expert·e en sa matière afin de détecter les suggestions erronées de l'IA – par exemple dans l'identification d'erreurs par l'IA à des fins de corrections, incluant une rétroaction aux élèves. Pour l'élève, elle pourrait par exemple soutenir son apprentissage lorsque utilisée comme tuteur individuel. Elle pourrait aussi transformer la manière dont les élèves peuvent s'engager dans la résolution de problèmes mathématiques (Pepin et al., 2025). Par exemple, l'idée d'étudier l'usage d'un RAG de type logiciel de calcul numérique couplé à une IA générative (LLM Large modèle de langage) pour former les élèves ingénieurs à l'analyse numérique est introduite par Merjane et ses collègues. Cette idée est maintenant à développer et devrait produire de nouvelles technologies au service de l'apprentissage et l'enseignement.

Cependant, les IA génératives soulèvent également des préoccupations fondamentales concernant l'apprentissage (par exemple, avec la possibilité pour les élèves de répondre simplement par le copié-collé d'un résultat ChatGPT), l'évaluation et l'intégrité académique (par exemple, il faut garder un œil attentif sur les principes éthiques et sécuritaires des usages des outils d'IA par les élèves). On peut également s'interroger à propos de l'influence et l'accélération du recours aux IA génératives sur le phénomène de désaffection envers les mathématiques (et les STEM) au niveau mondial. Ces enjeux en lien avec l'IA générative seront certainement à reprendre pour le prochain EMF.

5. *Synthèse du GT8 de l'EMF 2025 en trois points*

Nous terminons avec trois points qui renferment des aspects et questions essentiels à nos travaux et discussions en cours et futurs :

1. Le changement de paradigme de la nature de tâches à proposer aux élèves, notamment avec l'arrivée de l'IA générative, est essentiel à considérer et dépend de plusieurs facteurs dont les affordances de la technologie numérique pour les notions mathématiques visées ainsi que des objectifs d'apprentissage.
2. La formation initiale et formation continue des enseignant·e·s, parfois plus expérimenté·e·s que nous avec ces technologies émergentes, reste un facteur décisif pour une bonne intégration des technologies numériques dans la classe de mathématique.
3. Le constat d'une part de l'accélération des technologies numériques (par exemple l'IA générative) et d'autre part de freins de leur intégration dans l'enseignement mathématique forment un écart dont les enjeux sont multiples.

RÉFÉRENCES

- Abboud, M. (2024). L'enseignant de mathématiques aux temps des technologies numériques : un cadre théorique adaptant la double approche pour étudier son activité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (numéro spécial), 165-188. <https://hal.science/hal-04209359v3>
- Pepin, B., Buchholtz, N. et Salinas-Hernandez, U. (2025). A scoping survey of ChatGPT in mathematics education. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 11, 9-41. <https://doi.org/10.1007/s40751-025-00172-1>

MODÉLISATION ET IMPRESSION 3D EN SOUTIEN À L'APPRENTISSAGE DE LA GÉOMÉTRIE : UNE EXPÉRIMENTATION AVEC L'IMPRESSIION 3D AU PRIMAIRE

| MAI HUY* KHOI ET OUELLETTE** JEAN-FRANÇOIS

Résumé | Cette étude explore l'intégration de la modélisation et de l'impression 3D pour soutenir l'apprentissage de la géométrie au primaire. À travers une expérimentation en classe, les élèves ont conçu et imprimé un porte-clés, mobilisant des notions de volume, de mesure et de proportionnalité, tout en développant des compétences numériques et collaboratives. Les résultats montrent que l'I3D stimule l'engagement, facilite la transition entre 2D et 3D et renforce la pensée spatiale. Toutefois, des défis subsistent, notamment en matière de formation des enseignants et d'alignement avec le curriculum. L'étude propose des recommandations pour une intégration réfléchie de l'I3D, misant sur un accompagnement pédagogique structuré et une approche progressive d'appropriation des outils de modélisation.

Mots-clés : impression 3D, modélisation, géométrie au primaire, apprentissage actif, pensée spatiale

Abstract | This study explores the integration of 3D modeling and printing to support geometry learning in elementary education. Through a classroom experiment, students designed and printed a personalized keychain, engaging with concepts of volume, measurement, and proportionality while developing digital and collaborative skills. Results show that 3D printing enhances engagement, facilitates the transition from 2D to 3D thinking, and strengthens spatial reasoning. However, challenges remain regarding teacher training and curriculum alignment. The study proposes recommendations for a thoughtful integration of 3D printing, emphasizing structured pedagogical support and a progressive approach to adopting modeling tools.

Keywords: 3D printing, modeling, geometry, active learning, spatial thinking, elementary education

I. CONTEXTUALISATION ET PROBLÉMATISATION DE LA RECHERCHE

Dans un contexte éducatif en transformation, l'essor de technologies comme l'impression 3D (I3D) ouvre de nouvelles perspectives pour l'enseignement de la géométrie au primaire. Reposant sur des concepts abstraits tels que le volume, l'aire, la capacité ou les transformations spatiales, cette discipline demeure difficile à appréhender lorsqu'elle est abordée uniquement à travers des représentations bidimensionnelles (Beauset et al., 2024). Or, de nombreuses recherches en didactique des mathématiques montrent que la manipulation concrète d'objets favorise la compréhension de ces notions complexes (Assude et al., 2022). L'I3D permet aux élèves de modéliser et de créer eux-mêmes des objets physiques, ancrant l'apprentissage dans l'expérimentation active. Cette approche s'inscrit dans une dynamique pédagogique qui valorise l'apport des outils numériques pour renforcer la visualisation et la compréhension des concepts mathématiques (Nicod & Parisod, 2018 ; Heitz Ferrand & Gillot, 2018).

* Université du Québec en Abitibi-Témiscamigue (UQAT) – Canada – khoi.maihuy@uqat.ca

** Université du Québec en Abitibi-Témiscamigue (UQAT) – Canada – jean-francois.ouellet2@uqat.ca

1. *Problématisation*

L'intérêt grandissant pour la modélisation et l'impression 3D dans l'éducation reflète la volonté d'adopter des approches plus interactives et ancrées dans l'exploration des concepts mathématiques, comme le démontrent les travaux de Cochran et al. (2016), Ndiaye et al. (2016), Ng et al. (2022) et Roy et al. (2023). De plus, des recherches francophones récentes montrent que l'I3D et la modélisation 3D favorisent le raisonnement proportionnel, la visualisation spatiale, ou encore le passage entre la géométrie 2D et la géométrie 3D (Beuset et al., 2024 ; Heitz Ferrand & Gillot, 2018 ; Nicod & Parisod, 2018).

Ces technologies permettent d'offrir une expérience d'enseignement et d'apprentissage concrète et tactile, facilitant l'accès à des notions abstraites au primaire, telles que la modélisation 3D et la mesure (Ministère de l'Éducation Nationale, France). Par ailleurs, les recherches de Ndiaye et al. (2016) et de Heitz Ferrand et Gillot (2018) montrent que l'I3D encourage la créativité et le travail collaboratif, tout en facilitant la compréhension des relations spatiales.

Cependant, l'intégration de l'I3D dans l'enseignement de la géométrie soulève plusieurs questions didactiques et méthodologiques :

- Comment l'I3D influence-t-elle la compréhension des concepts géométriques au primaire ?
- Quels sont les défis liés à l'appropriation de cette technologie par les enseignants et les élèves ?
- Comment optimiser son intégration pour assurer un apprentissage efficace et pérenne ?

Notre recherche vise à explorer ces questions en mettant en place une expérimentation centrée sur l'apprentissage du volume et des transformations spatiales au primaire.

2. *Repères culturels et interdisciplinarité*

Notre étude s'inscrit dans le cadre théorique de l'approche STIM (science, technologie, ingénierie et mathématiques), reconnue comme un levier pour une éducation intégrative répondant aux défis du 21^e siècle (Sanders, 2009 ; Becker & Park, 2011). L'intégration de la modélisation et de l'impression 3D dans l'enseignement de la géométrie s'inscrit dans cette ambition, en enrichissant l'expérience pédagogique par des applications concrètes et interdisciplinaires.

Inspirés par le constructionnisme (Papert & Harel, 1991), nous concevons les élèves comme des créateurs actifs de leur savoir, construisant du sens à travers l'expérimentation et la résolution de problèmes authentiques. Dans cette optique, nous prôtons un apprentissage contextualisé, relié à des situations réelles (Blumenfeld et al., 1991), où la créativité est mobilisée comme compétence essentielle pour innover et s'adapter (Robinson, 2011 ; Csikszentmihalyi, 1996).

La modélisation 3D, en lien avec la compétence numérique définie par le Gouvernement du Québec (2019) et Karsenti et al. (2020), permet de développer les habiletés technologiques nécessaires à l'utilisation des logiciels et plateformes numériques dans des activités pédagogiques et de la vie courante. Notre projet s'inscrit pleinement dans cette vision, intégrant les domaines STIM pour favoriser une compréhension globale des concepts et développer la pensée critique (Mai Huy, 2021). De plus, notre projet s'aligne avec plusieurs dimensions de la compétence numérique, soulignant l'importance de son intégration dans l'éducation moderne (Gouvernement du Québec, 2019 ; Karsenti et al., 2020).

3. *Mathématiques au primaire*

Dans notre projet, nous misons sur des projets et ateliers pour engager les élèves dans la résolution de situations-problèmes complexes en mathématiques, suivant les travaux de Cochran et al. (2016). Ces situations permettent de contextualiser les apprentissages dans des environnements réels et motivants. L'introduction à l'informatique et au codage, via les logiciels de modélisation 3D, joue un rôle central en mobilisant les notions mathématiques au service de la création numérique, dans des contextes innovants et ludiques.

Un axe fondamental de notre démarche est le développement de la pensée spatiale, notamment la compréhension des représentations dans un système tridimensionnel (X, Y, Z), essentielle pour la visualisation et la manipulation mentale des objets (Marchand & Bisson, 2017). Notre étude aborde également des notions clés telles que l'aire, la capacité et le volume, pour renforcer les relations quantitatives et le raisonnement proportionnel (Mai Huy, Theis et Mary, 2013 ; MÉQ, 2001 ; National Council of Teachers of Mathematics, 2000 ; Van de Walle & Lovin, 2008), au cœur de notre approche didactique visant une compréhension approfondie des mathématiques au primaire.

4. *Défis répertoriés par la recherche et question de recherche*

L'un des principaux défis de l'intégration de l'I3D réside dans la formation des enseignants, qui doivent non seulement maîtriser les outils de modélisation, mais aussi les intégrer de manière cohérente aux objectifs didactiques (Karsenti et al., 2020). La gestion du temps et des ressources techniques constitue également un enjeu important (Ndiaye et al., 2016 ; Heitz Ferrand & Gillot, 2018). Plusieurs études (Beauset et al., 2024 ; Heitz Ferrand & Gillot, 2018) insistent sur la nécessité de concevoir des activités spécifiquement orientées vers l'apprentissage de la géométrie, afin que l'I3D ne se limite pas à la reproduction d'objets, mais favorise la conceptualisation et le raisonnement mathématique.

L'accessibilité technologique et le coût du matériel demeurent par ailleurs des obstacles majeurs. L'acquisition d'imprimantes 3D représente un investissement significatif pour les écoles, et la réussite de l'implantation dépend de modèles économiques viables et d'un soutien logistique adapté (Schelly, Anzalone, Wijnen & Pearce, 2015).

Face à ces défis, nous préconisons une approche intégrative de l'I3D comme outil d'apprentissage interactif et collaboratif (Abu Khurma et al., 2023), ainsi qu'une démarche de co-construction dynamique des savoirs entre chercheurs, technopédagogues et enseignants, en adéquation avec les réalités du terrain (Desgagné et al., 2001 ; Paavola & Hakkarainen, 2005).

Ainsi, notre question de recherche se formule comme suit : « *Comment la modélisation et de l'impression 3D peuvent appuyer les élèves du primaire dans leur compréhension et leur apprentissage de la géométrie (et de la mesure) ?* »

II. CADRE DE RÉFÉRENCE

En abordant l'intégration de l'I3D dans le contexte éducatif primaire, il est essentiel de comprendre à la fois les avantages pédagogiques et les défis pratiques que cette technologie présente. Ce cadre de référence vise à présenter les concepts-clés de modélisation mathématique et de modélisation 3D, et nos objectifs de recherche, en nous appuyant sur des recherches actuelles et des pratiques collaboratives en didactique.

1. Modélisation mathématique et modélisation 3D

La modélisation, au cœur de l'activité mathématique, constitue un processus intellectuel complexe mobilisé pour représenter, interpréter et résoudre des situations concrètes à l'aide d'outils mathématiques. Dans la perspective de Yvain-Prébiski et Discours (2023), la modélisation mathématique permet non seulement de donner du sens aux objets mathématiques, mais aussi d'articuler des savoirs issus de différents domaines, ce qui renforce l'interdisciplinarité. Dans le contexte scolaire, elle engage les élèves dans une démarche itérative de problématisation, de représentation, de traitement et de validation, leur permettant ainsi de construire activement des connaissances. Cette vision rejoint notre approche pédagogique et didactique avec l'intégration de la modélisation 3D, notamment via l'utilisation de TinkerCad, qui rend concrètes les représentations mathématiques. Par la manipulation de formes tridimensionnelles, les élèves traduisent des contraintes géométriques en objets modélisés, favorisant ainsi la compréhension des grandeurs, des proportions et des transformations dans l'espace. L'environnement de conception numérique devient un outil médiateur qui prolonge la pensée mathématique dans l'action, tel que le suggèrent les auteurs, en soutenant la construction d'une pensée structurée et critique. Cette modélisation numérique, inscrite dans une dynamique d'exploration-rétroaction, favorise une entrée tangible dans des apprentissages géométriques souvent perçus comme abstraits par les élèves du primaire.

2. Approche collaborative et impact de l'impression 3D sur l'apprentissage des mathématiques

La collaboration entre chercheurs, technopédagogues et enseignants est un pilier central pour une intégration réussie des technologies en éducation, notamment l'impression 3D. Ce partenariat tripartite favorise un dialogue constant et le partage de connaissances, nécessaires à la co-construction d'objets de recherche pertinents et adaptés aux réalités du terrain (Altet, 2019 ; Desgagné et al., 2001). La recherche-action collaborative, comme l'indique Somekh (2006), offre une réponse plus ajustée aux besoins spécifiques des enseignants et des élèves, en facilitant l'intégration de nouvelles pratiques pédagogiques. L'approche collaborative et dialogique de Paavola et Hakkarainen (2005), quant à elle, va au-delà du simple échange d'informations, en permettant la création de connaissances partagées et évolutives.

3. Objectifs du projet

Dans le prolongement de l'approche collaborative et de l'impact de l'impression 3D sur l'apprentissage des mathématiques, notre projet vise à répondre aux défis identifiés en articulant des objectifs concrets. Nos trois objectifs s'alignent sur les enjeux pédagogiques, didactiques et technologiques, tout en favorisant une intégration harmonieuse de l'I3D dans les pratiques éducatives.

1. Intégrer efficacement l'impression 3D dans le curriculum de mathématiques au primaire : Développer des stratégies pour aligner l'utilisation des I3D avec les programmes d'études existants, en mettant l'accent sur l'enrichissement des concepts mathématiques fondamentaux.
2. Améliorer la compréhension spatiale et la résolution de problèmes en géométrie chez les élèves du primaire : Utiliser l'impression 3D pour développer la pensée spatiale des élèves et leur capacité à résoudre des problèmes géométriques complexes.
3. Favoriser une collaboration efficace entre chercheurs, technopédagogues et enseignants du primaire : Établir un cadre de travail collaboratif et dialogique pour une co-construction de connaissances et un développement professionnel continu.

III. PREMIÈRE EXPÉRIMENTATION EN CLASSE : CONCEPTION ET IMPRESSION D'UN PORTE-CLÉS

L'objectif principal de cette première expérimentation en classe était d'initier les élèves à la modélisation et à l'impression 3D tout en mobilisant des notions mathématiques essentielles, notamment la proportionnalité, la mesure et les formes géométriques (MELS, 2009). Cette activité s'aligne avec les objectifs du Programme de formation de l'école québécoise (PFÉQ) (Ministère de l'Éducation du Québec, 2001) en intégrant les apprentissages mathématiques dans des contextes réels, favorisant ainsi la mobilisation des connaissances et le développement de compétences en résolution de problèmes.

À travers la conception et la fabrication d'un porte-clés personnalisé (voir ANNEXE), les élèves, de deux classes de 5^e année primaire des Hautes-Laurentides au Québec¹, ont exploré les principes de base de la géométrie et des unités de mesure, tout en développant des compétences numériques et collaboratives. Cette activité s'inscrit dans une approche intégrative qui favorise un apprentissage actif par la manipulation et la résolution de problèmes authentiques.

1. *Déroulement de l'activité*

L'expérimentation a débuté par une **introduction à l'impression 3D par le technopédagogue**, où les élèves ont découvert le fonctionnement de cette technologie, les matériaux utilisés ainsi que son impact environnemental. L'enseignant a encouragé les élèves à poser des questions, ce qui a mené à une discussion sur la nature des filaments et leur durabilité. Un élève a demandé : « Si on fait une forme, par exemple, une gourde, pis on la remplit dedans, est-ce que ça va être polluant pour l'environnement si on la jette ? » Cette interrogation a permis d'aborder les propriétés biodégradables du PLA et d'introduire une réflexion sur l'utilisation responsable des ressources. Nous y voyons également une opportunité didactique, qui n'est certes pas exploitée cette fois-ci, pour entamer avec les élèves une discussion sur les formes géométriques d'une « gourde » ou bouteille d'eau réutilisable, que les élèves apportent régulièrement en classe et donc la forme géométrique leur est familière.

Ensuite, l'**exploration des formes géométriques** s'est faite à l'aide du tableau interactif. Les élèves ont identifié les formes de base nécessaires à la conception de leur porte-clés et ont discuté de leurs propriétés mathématiques, notamment la proportionnalité et les unités de mesure. L'enseignant a interrogé les élèves : « Une bobine de fil coûte 25 \$ par kg, pourquoi on l'a mis en kg vous pensez ? Est-ce que je pourrais mesurer la quantité autrement ? » Un élève a répondu spontanément : « Par gramme ! ». Cette discussion a facilité le lien entre les notions de mesure et les unités utilisées en impression 3D.

Lors de la phase de **modélisation sur Tinkercad**, les élèves ont été guidés pour concevoir leur propre porte-clés selon des consignes précises : un prisme rectangulaire dont la largeur devait être trois fois plus grande que la longueur, un trou cylindrique pour attacher l'anneau et une personnalisation avec leur prénom en relief. L'enseignant a posé une question clé : « Vous voyez à droite, il y a différentes formes. Qu'est-ce qu'on va pouvoir prendre pour faire un prisme à base rectangulaire ? » Un élève a identifié correctement la forme et a ajouté : « Si on l'étire, ça devient un prisme ! ». L'activité a ainsi permis de provoquer une réflexion chez certains élèves sur les propriétés des solides et leurs dimensions.

¹ Cette activité de découverte agit comme la première d'une série de trois activités évolutives, co-développées avec le technopédagogue et les enseignants et qui seront expérimentées en classes d'ici la fin de l'année scolaire 24-25.

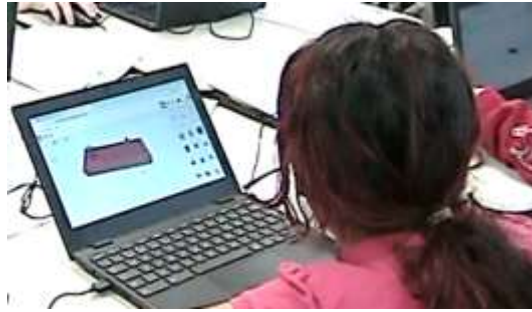


Figure 1 – Modélisation réussie d'un porte-clés par une élève grâce à Tinkercad

Avant d'imprimer, les élèves ont été invités à **estimer le poids et le coût de fabrication** de leur porte-clés en fonction du prix du filament. Cette étape a renforcé l'apprentissage des concepts de proportionnalité et de calcul des quantités. Enfin, l'impression des modèles a suscité un grand enthousiasme. Un élève a commenté avec émerveillement : « C'est vraiment cool ! Je ne pensais pas qu'on pouvait faire des objets nous-mêmes avec juste un ordinateur. »

2. Apprentissages et retombées pédagogiques

L'expérimentation a permis de mettre en lumière plusieurs retombées pédagogiques positives. Tout d'abord, le développement de la pensée spatiale a été renforcé grâce à la manipulation d'objets virtuels et à la transposition en objets physiques imprimés en 3D. Les élèves ont appris à ajuster les dimensions de leurs modèles et à comprendre comment ces changements affectaient la conception globale.

Ensuite, le renforcement des compétences mathématiques a été observable. L'application concrète des notions de mesure et de proportionnalité a facilité leur développement chez les élèves. Par exemple, un élève a démontré sa compréhension en calculant la longueur correcte d'un prisme : « Bein, ça marche. 20 [mm] fois 3, ça fait 60 [mm]. » Ce raisonnement a été valorisé et a permis une validation immédiate des apprentissages. Aussi, l'autonomie et la collaboration ont également été renforcées. Certains élèves, plus à l'aise avec le logiciel Tinkercad, ont spontanément aidé leurs camarades, facilitant ainsi un apprentissage entre pairs. Un enseignant a observé : « Ce qui est intéressant, c'est de voir comment ils s'entraident et comment ils expliquent leurs idées à leurs amis. Certains élèves qui sont d'habitude plus discrets prennent ici un rôle de leader. »

Enfin, l'intérêt et la motivation des élèves ont été accrus. La concrétisation d'une idée en un objet tangible a suscité un fort engagement. L'observation de l'impression a renforcé leur compréhension des processus techniques et a nourri leur curiosité. Un élève a exprimé sa satisfaction en voyant son porte-clés terminé : « C'est super l'un ! Bein, il y a des personnes qui n'ont jamais joué avec des imprimantes 3D pis c'est l'un de faire sa création. »

3. Défis rencontrés et ajustements pour les futures expérimentations

Malgré ces retombées positives, plusieurs défis ont été identifiés. D'abord, le temps d'apprentissage du logiciel s'est avéré plus long que prévu pour certains élèves, nécessitant un accompagnement renforcé. Pour pallier cela, il serait pertinent d'intégrer une phase d'entraînement préalable sur Tinkercad (Schelly et al., 2015). Ensuite, la précision des modèles a constitué un autre défi. Certains élèves ont rencontré des difficultés à bien positionner leur prénom sur leur porte-clés, ce qui a mené à des erreurs d'impression. Une attention particulière devra être accordée à la validation des modèles avant l'exportation des fichiers.

Enfin, la gestion du temps d'impression s'est avérée complexe. La durée de fabrication de chaque objet a parfois excédé le temps alloué, obligeant à imprimer certains modèles en dehors des heures de classe. Une solution envisageable serait de limiter la taille des porte-clés ou d'optimiser les réglages d'impression pour accélérer le processus.

Ces constats guideront les ajustements futurs, notamment l'intégration de tutoriels préalables sur l'utilisation du logiciel et l'optimisation des fichiers avant impression. Cette première expérimentation confirme que l'intégration de l'impression 3D en classe constitue un levier pédagogique et didactique pertinent, stimulant l'apprentissage des mathématiques tout en développant des compétences numériques et collaboratives.

IV. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES ET PERSPECTIVES

Les résultats préliminaires de cette première expérimentation révèlent un engagement marqué des élèves et une appropriation progressive des concepts mathématiques liés à la modélisation 3D. L'utilisation de l'impression 3D a favorisé un apprentissage actif et expérientiel, en accord avec les recommandations du Ministère de l'Éducation nationale (France) qui encourage l'usage des outils numériques pour le développement des compétences scientifiques et technologiques des élèves. Sur le plan mathématique, les élèves ont démontré une meilleure compréhension des notions spatiales et géométriques, notamment la proportionnalité et la mesure des objets. Comme l'indiquent Nicod et Parisod (2018), la manipulation de modèles 3D permet aux élèves de visualiser des relations complexes et d'expérimenter directement des transformations géométriques (Marchand & Bisson, 2017). Cette approche contribue également au renforcement de la pensée spatiale, une compétence essentielle en mathématiques (Assude et al., 2022 ; Marchand & Bisson, 2017).

L'expérimentation a également révélé l'impact positif du travail collaboratif dans l'apprentissage de la modélisation 3D. Les élèves se sont spontanément entraîdés, échangeant des stratégies pour surmonter les difficultés liées à la manipulation du logiciel. Comme l'a souligné l'enseignant 2 : « Certains élèves plus à l'aise ont spontanément aidé leurs camarades, ce qui a renforcé une dynamique de coopération et d'apprentissage entre pairs. » (Retour sur la première activité, 2025). Cette approche collaborative s'inscrit dans la logique des FabLabs, où l'apprentissage repose sur le partage des savoirs et la coopération (Nicod & Parisod, 2018). Par ailleurs, les élèves ont été encouragés à résoudre les problèmes par essais et erreurs, renforçant leur autonomie et leur capacité à raisonner de manière critique, une approche soutenue par Heintz Ferrand (2017).

Toutefois, plusieurs défis ont émergé, notamment le temps d'apprentissage du logiciel et la gestion du temps d'impression. Certains élèves ont éprouvé des difficultés à manipuler les outils numériques, nécessitant un accompagnement plus structuré. L'enseignant 2 rapporte : « Il faudrait prévoir une introduction plus progressive aux logiciels de modélisation pour éviter que les élèves ne se sentent dépassés. » (Retour sur la première activité, 2025). Bien que la motivation des élèves ait été significative, l'alignement des activités avec les objectifs du programme scolaire demeure un enjeu crucial. Assude et al. (2022) soulignent l'importance de relier les activités de manipulation de solides (imprimés ou confectionnés) aux concepts mathématiques fondamentaux, comme le volume ou la capacité, afin d'assurer un véritable apprentissage disciplinaire.

En donnant un sens concret aux apprentissages, l'I3D a suscité un vif intérêt et une curiosité accrue pour les notions mathématiques abordées, telles que les formes géométriques et les mesures modulables. Cette matérialisation a renforcé la motivation et l'autonomie des élèves en leur offrant une représentation tangible des concepts géométriques. Ng et al. (2022) montrent que l'introduction

d'outils numériques interactifs améliore significativement l'engagement et la compréhension des élèves grâce au caractère visuel et concret des concepts abordés.

Sur le plan didactique, la manipulation d'objets 3D a permis d'aborder en classe des notions abstraites telles que le volume, la proportionnalité, la mesure, la symétrie et les différentes formes géométriques (cylindre, cube, polyèdres). Cochran et al. (2016) soulignent l'importance de l'expérimentation concrète pour consolider les apprentissages mathématiques, une observation corroborée par les élèves qui ont affirmé mieux comprendre les formes et mesures en manipulant directement leurs créations.

Les résultats encouragent l'élargissement des expérimentations vers des projets interdisciplinaires associant mathématiques, sciences et technologies. Comme le souligne l'enseignant 1 lors de notre rencontre bilan : « Pour la prochaine activité, nous aimerions intégrer des calculs plus précis et des contraintes géométriques complexes pour aller plus loin dans l'apprentissage. » Une approche plus structurée de l'intégration de l'impression 3D sera ainsi développée, s'inspirant des recommandations du Ministère de l'Éducation nationale (n.d.) sur l'usage des outils numériques en classe. De plus, un renforcement de la formation des enseignants et un accompagnement technopédagogique sont envisagés pour optimiser l'impact de cette technologie sur les apprentissages (Heintz Ferrand, 2017).

V. CONCLUSION

Cette étude souligne le potentiel de l'impression 3D comme outil pédagogique innovant pour l'apprentissage de la géométrie au primaire. En favorisant une approche active, la modélisation et l'impression 3D ont renforcé l'engagement des élèves, stimulé leur pensée spatiale et facilité la compréhension des concepts abstraits, notamment la transition entre 2D et 3D (Nicod & Parisod, 2018). La collaboration entre pairs et l'apprentissage par essais-erreurs ont également développé leur autonomie dans l'appropriation des notions (Assude et al., 2022).

L'originalité de cette recherche repose sur l'usage de l'I3D comme levier structurant d'apprentissage mathématique, articulant concrètement concepts tels que volume (Assude et al., 2022), proportion, et transformations spatiales (Marchand & Bisson, 2017), conformément aux recommandations pour l'intégration des technologies éducatives (Ministère de l'Éducation nationale, 2018 ; Heitz Ferrand, 2017 ; Heitz Ferrand & Gillot, 2018). Cependant, plusieurs défis demeurent. La formation des enseignants est cruciale pour assurer une intégration pertinente de l'I3D aux séquences didactiques (Bower, 2017 ; Bower et al., 2020 ; Ndiaye et al., 2016). De plus, l'accessibilité technologique et la disponibilité des ressources restent des enjeux majeurs pour garantir une mise en œuvre équitable (Beauset et al., 2024).

À partir de ces constats, plusieurs recommandations s'imposent : adopter une approche progressive à la modélisation 3D avec des exercices guidés, articuler étroitement les activités au curriculum pour soutenir l'apprentissage des mathématiques, et promouvoir l'intégration de l'I3D dans des démarches interdisciplinaires STIM (Nicod & Parisod, 2018 ; Sanders, 2009). Enfin, une réflexion sur les modèles d'accompagnement technopédagogique, reposant sur la collaboration entre chercheurs, enseignants et formateurs, est essentielle pour assurer un usage durable et optimal de l'I3D (Heitz Ferrand & Gillot, 2018).

En définitive, cette recherche ouvre des perspectives prometteuses pour l'intégration de l'impression 3D comme levier d'innovation didactique en mathématiques. Son exploitation réfléchie contribuera à enrichir les pratiques pédagogiques, tout en renforçant les compétences spatiales, numériques et critiques des élèves.

RÉFÉRENCES

- Abu Khurma, O., Ali, N. et Swe Khine, M. (2023). Exploring the impact of 3D printing integration on STEM attitudes in elementary schools. *Contemporary Educational Technology*, 15(4), article ep458.
- Altet, M. (2019). Conjuguer des recherches sur les pratiques enseignantes et sur la formation des enseignants : une double fonction scientifique et sociale des Sciences de l'éducation. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle*, 52(2), 29-60.
- Assude, T., Marchand, P., Millon-Fauré, K., Theis, L. et Koudogbo, J. (2022). Des systèmes d'aide à l'enseignement : une étude de cas à propos du volume. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 42(3), 285-324.
- Beauset, R., Lequeu, C. et Duroisin, N. (2024) Évaluation du processus cognitif de visualisation utilisé dans l'apprentissage de la géométrie. *Mesure et évaluation en éducation*, 47(1), 155-189.
- Becker, K. et Park, K. (2011). Effects of integrative approaches among science, technology, engineering, and mathematics (STEM) subjects on students' learning: A preliminary meta-analysis. *Journal of STEM Education*, 12(5-6), 23-37.
- Blumenfeld, P. C., Soloway, E., Marx, R. W., Krajcik, J. S., Guzdial, M. et Palincsar, A. (1991). Motivating project-based learning: Sustaining the doing, supporting the learning. *Educational Psychologist*, 26(3-4), 369-398.
- Bower, M. (2017). *Design of technology-enhanced learning - Integrating research and practice*. Emerald Publishing Group.
- Bower, M., Stevenson, M., Forbes, A., Falloon, G. et Hatzigianni, M. (2020). Makerspaces pedagogy – supports and constraints during 3D design and 3D printing activities in primary schools. *Educational Media International*, 57(1), 1–28.
- Cochran, J., Cochran, Z., Laney, K. et Dean, M. (2016). Expanding geometry understanding with 3D printing. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 21(9), 534-542.
- Csikszentmihalyi, M. (1996). *Creativity: Flow and the psychology of discovery and invention*. HarperCollins.
- Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L. et Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, 27(1), 33-64.
- Karsenti, T., Poellhuber, B., Parent, S. et Michelot, F. (2020). Qu'est-ce que le Cadre de référence de la compétence numérique ? *Revue internationale des technologies en pédagogie universitaire*, 17(1), 7-10.
- Heitz Ferrand, M.-H. (2017). L'imprimante 3D pour la scolarisation des élèves en situation de handicap : des expérimentations en classe. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, 79-80(3), 301-316. <https://doi.org/10.3917/nras.079.0301>
- Heitz Ferrand, M.-H. et Gillot, I. (2018). De l'impression 3D à la représentation dans l'espace : une expérience avec des élèves refusant d'apprendre. *La Nouvelle Revue - Éducation et Société Inclusives*, 83-84(3), 199-214.
- Marchand, P. et Bisson, C. (2017). *La pensée spatiale, géométrique et métrique à l'école : réflexions didactiques*. JFD.
- Ministère de l'Éducation du Québec [MÉQ]. (2001). *Programme de formation de l'école québécoise : domaine de la mathématique, de la science et de la technologie*. Gouvernement du Québec.

- Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur [MEES]. (2019). *Cadre de référence de la compétence numérique*. Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation nationale, France (n.d.). *L'impression 3D à l'école*. Dossier pédagogique.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Ndiaye, Y., Hérold, J. F. et Laisney, P. (2016). L'imprimante 3D, outil d'aide à l'apprentissage des élèves dans l'activité de conception créative au lycée technologique. Dans *Actes du Colloque international francophone « Éduquer et former au monde de demain », avril 2016*. <https://amu.hal.science/hal-01443653>
- Nicod, R. et Parisod, L. (2018). Trois outils de fabrication différents pour rendre plus accessible l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Revue de Mathématiques pour l'école*, 230, 38-45. <https://doi.org/10.26034/vd.rm.2018.1780>
- Ng, D. T. K., Tsui, M. F. et Yuen, M. (2022). Exploring the use of 3D printing in mathematics education: A scoping review. *Asian Journal for Mathematics Education*, 1(3), 338-358.
- Paavola, S. et Hakkarainen, K. (2005) The knowledge creation metaphor – An emergent epistemological approach to learning. *Science et Education*, 14(6), 535-557.
- Papert, S. et Harel, I. (1991) *Constructionism*. Ablex Publishing.
- Robinson, K. (2011). *Out of our minds: Learning to be creative*. Capstone.
- Roy, N., Caron, V. & Plante, A. (2023) Le numérique au service des pratiques créatives au primaire. *Vivre le primaire (Automne 2023)*, 58-61.
- Sanders, M. (2009) STEM, STEM Education, STEMmania. *The Technology Teacher*, 68(4), 20-26.
- Schelly, C., Anzalone, G., Wijnen, B. et Pearce, J. M. (2015). Open-source 3D printing technologies for education: Bringing additive manufacturing to the classroom. *Journal of Visual Languages et Computing*, 28, 226-237. <https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3331158>
- Somekh, B. (2006). *Action research: A methodology for change and development*. Open University Press.
- Yvain-Prébiski, S. et Discours, J. (2023). La modélisation mathématique dans la résolution de problèmes concrets (Atelier A13 et 23). Dans *Actes du 48^e colloque international sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles (COPIRELEME2022), 14-16 juin 2022, Toulouse, France* (p. 129-148). <https://hal.science/hal-04206854/document>

ANNEXE

1^{ère} Activité impression 3D



Votre classe aimerait organiser une sortie spéciale pour Noël. Pour financer cette activité, vous allez fabriquer et vendre des porte-clés personnalisés.

L'objectif est de récolter 1 000 \$ après avoir payé toutes les dépenses. Les porte-clés seront fabriqués avec une imprimante 3D, en utilisant du Polyterra, un matériau solide et écologique. Une bobine de fil Polyterra coûte 25 \$ par kilogramme. Dans un premier temps, vous allez réaliser un test pour vous entraîner à fabriquer un porte-clé. Voici les étapes à suivre :

1. **Nommer le fichier** : Enregistrez le fichier en mettant votre prénom comme nom de fichier (**en haut à gauche**)
2. **La base du porte-clé** : Elle sera un prisme rectangulaire. Sa largeur doit être 3 fois plus grande que sa longueur. Ajuster la hauteur à 5.
3. **Ajouter un trou** : Ajoutez un cylindre à gauche du prisme pour faire un trou.
4. **Ajoutez votre prénom** : Utilisez la fonction **TEXT** pour écrire votre prénom et placez-le sur le porte-clé. Ajuster la hauteur à 5.

Une fois votre conception terminée, exportez le fichier en format .STL. Pendant la préparation pour l'impression (le découpage), vérifiez combien de grammes de fil seront nécessaires pour fabriquer votre porte-clé.

AVANTAGES ET DÉFIS DIDACTIQUES LIÉS À L'USAGE DE L'ENVIRONNEMENT VIRTUEL DE MINECRAFT EDUCATION POUR L'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

| THIBAUT* MATHIEU, MICHOT** SANDRINE, RIOUX*** STÉPHANIE, ROY**** MÉLANIE ET
PHILIBERT***** SHANIE

Résumé | Minecraft Education est un jeu sérieux ayant un potentiel pédagogique, mais peu d'études empiriques ont porté sur le potentiel didactique. Dans cette recherche collaborative, 8 enseignant·es et 6 conseiller·ères pédagogiques ont participé à des rencontres de travail. La collecte de données a été menée dans 10 classes d'élèves du primaire et du secondaire. L'analyse des entretiens individuels avec 12 enseignant·es et conseiller·ères pédagogiques a permis de faire ressortir des avantages et défis didactiques.

Mots-clés : Jeu sérieux, Minecraft Education, Affordance, Artefact numérique, Apprentissage des mathématiques

Abstract | Minecraft Education is a serious game with pedagogical potential, but few empirical studies have focused on its didactical potential. In this collaborative research, eight teachers and six educational consultants took part in working meetings. Data collection was carried out in 10 classes of primary and secondary school pupils. Analysis of individual interviews revealed didactic benefits and challenges.

Keywords: Serious game, Minecraft Education, Affordance, Digital artifact, Mathematics learning

I. MISE EN CONTEXTE

À notre époque, l'apprentissage par le jeu est répandu et il existe de nombreux environnements d'apprentissage technologiques. Des aspects de ces environnements peuvent être favorables (ou non) pour l'apprentissage et il convient donc de s'y pencher plus attentivement pour juger du potentiel d'apprentissage d'un jeu. Minecraft Education est un jeu vidéo en vogue (Kipnis, 2018) dans lequel les joueur·ses réalisent des constructions en utilisant librement divers blocs de construction cubiques. Ce jeu vidéo est de type « bac à sable », c'est-à-dire que la personne conceptrice du jeu n'a pas déterminé d'objectifs précis ou de ligne directrice stricte. Alors, la personne qui joue est libre d'accomplir les objectifs de son choix, ce qui favorise sa créativité et son imagination, puisqu'elle peut réaliser les scénarios de son choix et construire ses propres mondes à l'aide de blocs de construction. La Figure 1 donne un aperçu de l'environnement de Minecraft Education, où on peut construire (placer) et détruire (miner) des blocs cubiques et divers objets choisis dans l'inventaire.

* Université du Québec en Outaouais – Canada – mathieu.thibault@uqo.ca

** Université du Québec à Montréal – Canada – michot.sandrine@courrier.uqam.ca

*** RÉCIT MST, service national – Canada – stephanie.rioux@recit.qc.ca

**** Université du Québec en Outaouais – Canada – roym103@uqo.ca

***** Université du Québec en Outaouais – Canada – phis06@uqo.ca



Figure 1 – Aperçu de l'environnement de Minecraft Education

Quelques textes scientifiques ont permis de relever des avantages pédagogiques liés à l'utilisation de Minecraft Education en classe. Par exemple, il a été observé que ce jeu a un effet motivant chez les élèves (Andlauer et al., 2018 ; Bayliss, 2012 ; Kim et Park, 2018) et favorise la collaboration entre eux (Jensen et Hanghøj, 2020 ; Petrov, 2014), la créativité (Koroglu et Yildiz, 2021 ; Petrov, 2014) ainsi que le développement des compétences en technologie (Koroglu et Yildiz, 2021) et en communication (Petrov, 2014). L'utilisation de Minecraft Education permettrait aussi aux élèves de voir que des concepts mathématiques peuvent s'appliquer au quotidien et dans d'autres disciplines scolaires (Jensen et Hanghøj, 2020). Malgré ces constats, Minecraft Education comporte des limites et différents défis pédagogiques liés à son usage en classe. En effet, certaines personnes enseignantes sont réticentes à l'utiliser en classe puisque ce jeu demande certaines connaissances technologiques afin de l'intégrer dans leur enseignement (Petrov, 2014). Lorsque des élèves n'y ont jamais joué, ces novices peuvent se sentir désavantagés (Koroglu et Yildiz, 2021). Au contraire, pour les élèves qui ont l'habitude d'y jouer, la divergence du contexte scolaire et du contexte de jeu à la maison peut amener un désengagement de la tâche (Andlauer et al., 2018). Les avantages et défis pédagogiques ont donc été documentés dans quelques études et se rapportent à des éléments plutôt généraux sur la manière d'enseigner ou d'apprendre en classe, mais ne visent pas nécessairement l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

En ce qui a trait au potentiel didactique, il semblerait que Minecraft Education donne du sens à différents concepts mathématiques (Jensen et Hanghøj, 2020) notamment en géométrie et en algèbre (Kim et Park, 2018). Ce jeu peut aussi soutenir le développement d'habiletés spatiales (Koroglu et Yildiz, 2021) et la compréhension du sens des formules d'aire et de volume (Moore, 2018). Kim et Park (2018) mentionnent d'ailleurs que Minecraft Education peut être utilisé comme du matériel de manipulation virtuel qui soutient l'apprentissage des élèves. Néanmoins, les fonctionnalités du jeu limitent les concepts mathématiques qui peuvent être travaillés, en raison de la forme cubique des blocs et de leur taille (Koroglu et Yildiz, 2021).

Toutefois, peu d'études empiriques en langue française ont porté sur le potentiel didactique de Minecraft Education et encore moins en didactique des mathématiques. Ainsi, une étude plus approfondie est de mise afin de mieux cibler le potentiel didactique qu'offre ce jeu pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Précisons d'abord quelques concepts clés (jeux sérieux, avantage et défi didactique, affordance, artéfact et matériel de manipulation virtuel), avant de présenter nos choix méthodologiques et quelques résultats.

II. CADRE CONCEPTUEL : QUELQUES DÉFINITIONS DE CONCEPTS CLÉS

L'apprentissage par le jeu est central dans l'utilisation de Minecraft Education. De fait, il est considéré comme un *jeu sérieux* (*serious game*), c'est-à-dire une

application informatique, dont l'intention initiale est de combiner, avec cohérence, à la fois des aspects sérieux (*serious*) tels, de manière non exhaustive et non exclusive, l'enseignement, l'apprentissage, la communication, ou encore l'information, avec des ressorts ludiques issus du jeu vidéo (*game*) [et] a donc pour but de s'écarter du simple divertissement (Alvarez, 2007, p. 249).

Ainsi, un jeu sérieux va bien au-delà du simple jeu, car il y a une intention d'apprentissage qui est au cœur de la situation et non pas seulement le plaisir de jouer. Selon cette définition, Minecraft Education peut être considéré comme un jeu sérieux.

Comme décrit précédemment, il aurait un potentiel didactique pour l'enseignement des mathématiques et, à cet effet, présenterait différents *avantages et défis didactiques*. D'un côté, en termes d'avantage didactique, le jeu sérieux peut influencer positivement (favorise / soutient / facilite / aide / optimise) l'apprentissage de concepts et processus mathématiques. D'un autre côté, son influence peut être plutôt négative (limite / restreint / nuit à cet apprentissage) et nous apparaît donc comme un défi didactique.

Afin d'étudier le potentiel didactique de cet environnement virtuel, nous avons recours au concept d'*affordance*, défini par Gibson (1977). Le terme *affordance* vient du verbe « to afford » qui a un double sens : être en mesure de faire quelque chose et offrir (qui est parfois traduit en termes de potentialité). L'*affordance* peut être définie selon des possibilités d'actions :

Les *affordances* sont les propriétés de l'environnement rendant possible une action à un individu en fonction des ressources dont il dispose. Le monde serait ainsi perçu en fonction des possibilités d'action suggérées par les objets de l'environnement. Par exemple, une chaise suggère à un individu de s'asseoir dessus, [mais] cette même chaise ne serait pas *affordante* pour un éléphant, car ses propriétés corporelles ne sont pas compatibles avec l'objet. (François, 2020, p. 49)

Le concept d'*affordance* permet donc de prendre des lunettes pour regarder nos données en termes d'avantages et de défis didactiques. En effet, dans le monde virtuel de Minecraft Education, le grand nombre d'objets virtuels (par exemple, divers matériaux de construction) ainsi que les commandes de base du jeu (placer et miner des blocs, se déplacer, etc.) offrent différentes possibilités d'actions chez les joueurs·ses. Ces objets, même virtuels, peuvent être considérés comme des *artefacts* au sens donné par Rabardel (1995). Nous introduisons alors les concepts d'*artefacts matériels et numériques*, afin de mieux saisir en quoi les objets virtuels sont des *artefacts*. Un *artefact matériel* est un objet réel fait de matière qui peut être manipulé, touché : il est tangible. On peut penser aux *artefacts* traditionnels tels les bouliers, les calculatrices, les instruments de géométrie, etc. Toutefois, le mot « *artefact* » doit être considéré plus largement : des *artefacts* non matériels tels les *artefacts* symboliques (ex. : la division euclidienne) ou les *artefacts* numériques existent. Selon Voltolini (2017), un *artefact* numérique permet de « re-matérialiser les objets mathématiques abstraits qui sont invisibles et virtuels » (p. 44). Minecraft Education est un environnement virtuel constitué de plusieurs *artefacts* numériques, dont l'*affordance* est par exemple de matérialiser le volume d'un prisme en le représentant à l'aide de blocs pour former ce solide. Par ailleurs, Voltolini (2017) considère que l'articulation des *artefacts* matériels et numériques est bénéfique pour l'apprentissage des élèves dans la mesure où l'*artefact* numérique enrichit l'*artefact* matériel et amène l'individu à utiliser de nouvelles stratégies de résolution.

Les *artefacts* numériques présents dans Minecraft Education peuvent être considérés comme du *matériel de manipulation virtuel*. De fait, il est défini comme une représentation visuelle interactive d'un objet dynamique, en ligne, qui offre des possibilités de construire des connaissances mathématiques (Moyer et al., 2002). Cette définition s'applique à Minecraft Education du fait qu'il est possible d'y représenter diverses constructions à l'aide de blocs de manière dynamique tout en travaillant des concepts mathématiques variés (représentation spatiale, volume, aire, périmètre, fractions, numération positionnelle, etc.).

De plus, les affordances obtenues pour la classe ne dépendent pas uniquement de l'outil ou de l'environnement en tant que tel, mais peuvent varier aussi selon l'exploitation qu'on en fait, du contexte éducatif et de la personne enseignante (Drijvers, 2003 cité dans Jeannotte et Corriveau, 2022). Ainsi, ce jeu sérieux peut être utilisé d'une manière qui n'avait pas nécessairement été envisagée par les personnes qui l'ont conçu et pourrait ainsi être employé afin de favoriser l'enseignement-apprentissage des mathématiques.

Dans un contexte d'accélération de l'intégration en classe des jeux sérieux, une prise de recul est nécessaire pour faire ressortir l'affordance de l'usage d'un tel jeu pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Nous avons donc ciblé cette question de recherche : Quels sont les avantages et les défis didactiques liés à l'usage de l'environnement virtuel de Minecraft Education pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques au primaire et au secondaire ?

III. CONSIDÉRATIONS MÉTHODOLOGIQUES

Pour avancer sur cette question, une recherche collaborative a été menée au Québec, en s'appuyant sur les étapes de cosituation, de coopération et de coproduction (Bednarz, 2013). Prendre en compte les perspectives des praticien·nes afin de lier les mondes de la pratique et de la recherche est une avenue intéressante pour cerner les avantages et les défis didactiques de l'usage de Minecraft Education. En effet, ce maillage d'expertises complémentaires permet d'enrichir cette recherche et la présence des praticien·nes est même jugée primordiale en raison de leur expertise pratique et connaissances du milieu.

Cette recherche se décline en trois phases successives : *Démarrage*, *Action* et *Partage*. Lors de la phase de *Démarrage*, l'équipe de recherche s'est associée à des partenaires des milieux de pratiques, soit huit enseignant·es (six du primaire et deux du secondaire) et six personnes conseillères pédagogiques qui étaient familières avec l'usage de ce jeu en classe ou qui avaient un intérêt à recourir à cet environnement virtuel pour l'enseignement des mathématiques. À l'étape de cosituation, les préoccupations des chercheur·ses et partenaires ont été considérées dès la première rencontre, ce qui a permis d'affiner l'objet de recherche à explorer et de s'assurer d'une double pertinence sociale et scientifique. À l'étape de coopération, toutes ces personnes se sont rencontrées lors d'une journée et quatre demi-journées pour coconstruire dans Minecraft Education des tâches mobilisant plusieurs domaines mathématiques. Les tâches ont été coconstruites par le travail conjoint des partenaires et la rétroaction de l'équipe de recherche. Dans la phase d'*Action*, la collecte de données a été menée au printemps 2024 dans 10 classes regroupant 220 élèves allant de la 4^e année du primaire jusqu'à la 2^e année du secondaire (9-14 ans). Pour ce faire, les tâches coconstruites ont été mises à l'essai dans les classes respectives. Les chercheur·ses ont observé et questionné les enseignant·es et les élèves en classe, recueilli les productions des élèves et enregistré des discussions de groupes d'élèves. Peu après l'expérimentation en classe, des entretiens individuels semi-dirigés d'environ 30 minutes avec les huit enseignant·es et quatre conseiller·ères pédagogiques ont été menés, afin de recueillir respectivement leurs impressions par rapport aux tâches expérimentées et aux apprentissages effectués avec Minecraft Education. La phase de *Partage* est entamée par la diffusion de résultats (préliminaires pour l'instant) dans les milieux scientifiques et pratiques. D'ailleurs, dans une démarche de recherche collaborative, l'étape de coproduction vise à une double fécondité des résultats, c'est-à-dire produire des retombées pertinentes à la fois pour la communauté scientifique (par l'avancement des connaissances) et pour la communauté de pratique. Pour ce texte, ce sont les données découlant des entretiens qui ont été analysées.

IV. PRÉSENTATION ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

Une analyse thématique (Paillé et Mucchielli, 2016) des douze entretiens a permis de mettre en évidence des avantages et défis didactiques liés à l'usage de Minecraft Education pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques, dont certains sont présentés dans Thibault et al. (accepté). Pour ce texte faisant partie du GT8 concernant les technologies, nous avons choisi quelques avantages et défis didactiques liés à l'usage de l'environnement virtuel de Minecraft Education. Plus particulièrement, nous présentons deux avantages didactiques (liés au statut de l'erreur et à la manipulation) et deux défis didactiques (liés à la forme et la taille des blocs ainsi qu'aux traces), que nous discuterons brièvement au regard d'autres études.

1. *Avantage didactique #1 : le statut de l'erreur est modifié*

Lors des entretiens individuels semi-dirigés avec les huit enseignant·es et quatre conseiller·ères pédagogiques, la modification du statut de l'erreur dans l'environnement virtuel de Minecraft Education a été mentionnée à quelques reprises. En effet, Isabelle (pseudonyme) a dit :

« Je trouve que Minecraft c'est une belle façon [...] d'amener les élèves à faire des choix, à faire des essais, des erreurs, à faire des retours autres que sur une tâche papier. [...] Pour eux c'était plus facile de l'effacer [une erreur] dans Minecraft ».

Gabriel a aussi affirmé qu'il y est plus facile de corriger ses erreurs, ce qui favoriserait le rapport positif face à l'erreur et la prise de risque en mathématiques.

Ainsi, le statut de l'erreur semble différent sur Minecraft Education par rapport à des tâches papier-crayon, car il semblerait que les élèves soient plus enclins à prendre des risques dans l'environnement de ce jeu sérieux. Certes, une erreur de construction peut facilement être réparée, en construisant ou en détruisant des blocs, alors les élèves ne craignent pas de faire des erreurs et sont rapidement engagés dans la tâche proposée. Cela rejoint un résultat de Kim et Park (2018), où un participant mentionne qu'il est intéressant de pouvoir détruire et construire des blocs sans que ça fasse de dégâts en classe. Moore (2018) mentionne aussi que l'enseignant·e devrait laisser l'élève commettre des erreurs, afin d'apprendre de ces dernières. Au lieu de percevoir l'erreur comme quelque chose de nuisible à éviter, l'erreur peut alors y être considérée comme un levier d'apprentissage. Minecraft Education pourrait même avoir l'affordance de favoriser un changement de posture de l'enseignant·e, tel que suggéré par Thibault et al. (2022).

2. *Avantage didactique #2 : le matériel de manipulation virtuel soutient l'apprentissage*

Par ailleurs, ce jeu sérieux offre un espace de manipulation qui favorise l'apprentissage actif. En effet, huit des douze participant·es à l'entretien ont comparé la manipulation de blocs dans Minecraft Education à la manipulation d'objets tangibles. Pourtant, la manipulation est virtuelle et traite plutôt d'objets pseudo-concrets, au sens où ce sont des blocs virtuels. Le jeu sérieux semble ainsi avoir l'affordance de représenter et même de manipuler des objets mathématiques, même si les blocs ne peuvent pas être manipulés physiquement. Pour illustrer ces propos, Laurent a donné un exemple de la manipulation d'objets représentant des fractions, sur papier par rapport à la manipulation en trois dimensions dans le jeu : « Ça devient de la manipulation quand même, même si c'est de l'écran ou de la souris. Ça revient au même que de faire le geste de prendre mes [blocs] Lego ». Il est à noter que l'écran et la souris sont des artefacts tangibles que l'on peut toucher physiquement, ce qui n'est pas le cas des blocs virtuels. Comparativement à la manipulation de blocs Lego, cet enseignant précise d'ailleurs que la gestion du matériel est plus facile avec Minecraft Education puisqu'il n'y a aucune limite de matériel. Cet avantage du matériel virtuel a aussi été soulevé par Carl, qui apprécie d'avoir

accès à des matériaux variés, en grande quantité, sans contrainte d'espace. Marie a également relevé qu'il est possible de travailler avec une grande quantité de blocs contrairement à ce qui serait possible avec de (vrais) blocs tangibles :

« Avec le matériel, [...] si j'avais voulu travailler avec des blocs, à la grosseur qu'ils ont faite dans Minecraft, avec [l'ordre de grandeur des nombres] qu'on travaille en cinquième année, je n'y serais pas arrivé. Je n'ai pas assez de blocs pour cela. »

Alicia a elle aussi apprécié que les élèves puissent représenter les situations avec du matériel qui n'est habituellement pas disponible dans la classe : « Les élèves étaient engagés. Ils ont représenté avec du matériel qu'ils n'auraient peut-être pas nécessairement eu dans la classe ».

Quant à Gabriel, il a mentionné que la manipulation de blocs dans Minecraft Education permet aux élèves d'avoir un support visuel qui offre une meilleure compréhension du concept de fraction, à l'aide de blocs de différentes couleurs (ou transparence) : « Ça vient chercher une compréhension qui est différente, qui est visuelle. Pour les fractions, c'est facile, car ils manipulent. Au lieu d'être dans un côté un peu abstrait de la fraction, on vient chercher la pose de blocs qui les emmènent à bien comprendre ce que la fraction représente, surtout au niveau des fractions équivalentes et irréductibles, ça va vraiment aider et débloquer plusieurs élèves ». La Figure 2a illustre une représentation de la fraction $\frac{2}{3}$ à l'aide des blocs virtuels.

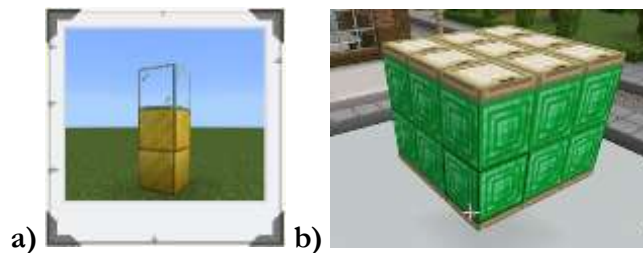


Figure 2 – Utilisation de Minecraft Education pour a) visualiser une fraction et b) représenter l'aire

Pour sa part, Patricia a évoqué que le jeu sérieux est utilisé pour manipuler et représenter différents concepts mathématiques, notamment l'aire (latérale et totale) d'un prisme comme dans la Figure 2b :

« Souvent il va y avoir la manipulation, il va y avoir les outils, les objets pour manipuler en classe. [...] De se représenter physiquement l'addition que l'élève doit faire, la soustraction, la fraction, l'aire, le volume, le périmètre, tout ça c'est extrêmement facile, selon moi, à faire en utilisant Minecraft. »

Il s'agit donc d'un avantage important, car ce jeu a le potentiel de travailler divers concepts mathématiques à l'étude en réduisant certaines contraintes logistiques et matérielles. Alors, il ne s'agit pas d'amener les élèves à travailler en surplus de ce qui est prévu par le programme de formation de l'école québécoise (MEQ, 2006a, 2006b). Il s'agit plutôt de travailler sur ces mêmes concepts, mais autrement, par l'affordance d'une manipulation de blocs virtuels. Il semblerait alors que le matériel de manipulation virtuel présente un avantage, notamment en favorisant le lien entre le matériel de manipulation tangible et les représentations abstraites des concepts mathématiques, tout comme l'ont aussi fait ressortir Özgün-Koca et Edwards (2011). Ceci dit, ce ne sont pas tous les concepts mathématiques qui peuvent être aisément travaillés à l'aide de Minecraft Education, ce qui nous amène à présenter des défis didactiques issus de l'analyse des entretiens.

3. Défi didactique #1 : la construction est limitée par la forme et la taille des blocs

Le premier défi didactique mentionné par onze des douze participant·es est lié à la forme et la taille des blocs dans Minecraft Education. En effet, les blocs sont cubiques et de taille unique (1 mètre cube) ce qui limite les possibilités de construction. Marie a mentionné que « c'est sûr que Minecraft est carré. Donc, tout ce qui est rond ou triangle, on est contraint un petit peu ». Patricia a aussi relevé la limite due à la forme des blocs et aux fonctionnalités, où on ne peut pas représenter précisément ce qui est circulaire : « on n'est pas capable de couper des blocs, on n'est pas capable de faire des rondeurs, des sphères ». De plus, selon Laurent on ne peut pas travailler les angles avec des cubes et que pour les prismes il n'y a pas de valeur ajoutée par rapport à du matériel de manipulation tangible :

« C'est sûr qu'en géométrie, tout ce qui est angulaire nous cause problème. Et [...] je ne suis pas convaincu de l'utilité en travaillant les solides, même si ce sont des prismes qui vont être réguliers [...]. Ce bout-là, j'ai de la [difficulté] à voir ma plus-value, versus prendre du matériel de manipulation ».

Noémie a elle aussi été déçue de ne pas pouvoir travailler plusieurs solides (pyramides, cylindres et boule) qui prennent pourtant une part importante de l'enseignement dans les programmes de formation au secondaire. Ainsi, en raison de la forme cubique des blocs et de leur taille, les fonctionnalités du jeu limitent les concepts mathématiques qui peuvent être travaillés, ce qui rejoint les constats de Koroglu et Yildiz (2021).

De son côté, Carl a précisé avoir essayé de construire d'autres prismes et solides avec les élèves. Un de ses élèves a tenté de construire une pyramide, mais « il a fallu casser le fait que, non, ce n'était pas une pyramide. Donc, ça ne respecte pas les caractéristiques d'une pyramide. [...] Donc, l'élève pourrait construire une mauvaise conceptualisation de la pyramide à ce moment-là ». Cet extrait fait ressortir qu'une représentation approximative peut renforcer une mauvaise conceptualisation de la pyramide, qui est plutôt ce qu'on appelle une pyramide à degrés. Cette construction pyramidale en forme d'escalier géant n'est pas lisse et n'a donc pas de vrais sommets (de la pyramide), comme on peut le voir dans la Figure 3 (malgré la tentative en arrière-plan d'utiliser des rails en diagonale pour rendre sa construction plus lisse). En raison de la limite de la forme et la taille des blocs, la représentation dans Minecraft Education pourrait ainsi engendrer des conceptions erronées dans certains cas.



Figure 3 – Utilisation limitée de Minecraft Education pour représenter approximativement une pyramide

4. Défi didactique #2 : l'artefact pour laisser des traces du raisonnement est limité

Un autre défi didactique mentionné par six des douze participant·es est lié aux traces. Par exemple, Marie a fait remarquer qu'il est difficile pour les élèves de laisser des traces écrites dans Minecraft Education. En effet, l'environnement n'a pas été conçu pour qu'on y note naturellement des traces, alors l'écriture n'est pas aussi abordable qu'on le souhaiterait. On peut y utiliser le *Livre et la plume*, qui est en fait un objet dans lequel le joueur peut écrire à l'aide du clavier. Il s'agit alors d'un artefact numérique qui a le potentiel de laisser des traces de son raisonnement. Il est à noter que ce sont les enseignant·es qui ont donné cette abordabilité au jeu, mais une telle utilisation (scolaire) du *Livre et la plume* peut faire perdre l'aspect du jeu sérieux et les fonctionnalités sont limitées : on ne peut pas écrire

d'exposant ou d'indice, les symboles mathématiques sont restreints, il est difficile d'effacer efficacement, etc.

Dans la Figure 4a, une production d'élève illustre la limite de l'écriture des indices (A_T), des exposants (c^2) et du symbole racine ($\sqrt{}$). D'ailleurs, cette production découle de la tâche associée, dont les consignes sont écrites dans un tableau de Minecraft Education (Figure 4b), lui aussi limité pour les symboles mathématiques (malgré une affordance de l'exposant).

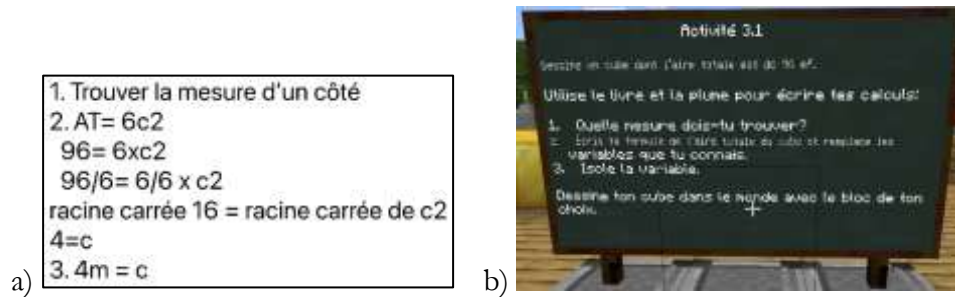


Figure 4 – Utilisation limitée de Minecraft Education a) pour laisser des traces écrites dans le Livre et la plume, puis b) pour donner des consignes dans une tâche

Rosalie a remarqué qu'il était difficile pour les élèves d'utiliser l'artefact numérique du *Livre et la plume* pour laisser des traces écrites afin de justifier leur raisonnement : « Je m'attendais peut-être à avoir de meilleures réponses dans le *Livre et la plume*. [...] Les élèves semblaient quand même perdus dans l'exploration du *Livre et la plume*. C'était difficile pour eux de mettre des mots sur les transformations ». Selon Noémie, cette gestion des traces est moins efficace que sur papier (tant du point de vue de l'enseignante que des élèves), notamment en ce qui concerne les enjeux pour les symboles mathématiques. Myriam a elle aussi expérimenté des difficultés lorsque ses élèves ont voulu laisser des traces de leurs calculs dans le *Livre et la plume*, en particulier pour les symboles mathématiques. Par exemple, puisque l'exposant deux ne s'écrit pas, elle avait peur que ça crée une erreur (faire une multiplication par deux au lieu d'élever au carré). De plus, puisqu'il n'est pas possible d'écrire dans le *Livre et la plume* et de voir le solide en même temps, les élèves devaient constamment fermer puis ouvrir le *Livre et la plume* pour observer le solide, puis répondre aux questions de la tâche. Enfin, pour recueillir des traces représentatives de l'apprentissage des élèves et les aider à structurer leurs constructions, Sophie a demandé aux élèves de faire un plan à l'échelle avant de faire leur construction. Ceci illustre qu'elle considère que les traces dans Minecraft Education ne sont pas aussi précises, efficaces et aidantes que sur papier, d'où la nécessité de prévoir des alternatives sur papier. Ces exemples divers font ressortir le manque d'affordance de Minecraft Education à pouvoir laisser des traces mathématiques complètes du raisonnement des élèves.

V. CONCLUSION

Notre analyse des entretiens individuels a fait ressortir deux avantages didactiques ainsi que deux défis didactiques. Il en découle de manière générale que Minecraft Education est un environnement favorable pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques.

De fait, un avantage didactique est que le statut de l'erreur est modifié par rapport à ce qu'on pourrait observer dans un environnement papier-crayon : les élèves sont engagés et plus enclins à prendre des risques, puisqu'ils peuvent facilement corriger leurs erreurs de construction. Aussi, les objets virtuels du jeu sérieux ont l'affordance d'être utilisés comme du matériel de manipulation virtuel par les élèves, ce qui pourrait les aider à représenter les concepts enseignés, sans qu'il y ait des désagréments liés à la gestion de matériel tangible.

Malgré cela, le défi didactique lié à la forme cubique et la taille des blocs restreint les constructions aux rectangles et prismes rectangulaires, ce qui rend l'enseignement de la géométrie plane et celle dans l'espace relativement pauvres. Enfin, l'artefact numérique du *Livre et la plume* (et du tableau) n'a pas l'affordance de recueillir des traces écrites représentatives de l'apprentissage et du raisonnement des élèves, car ces derniers ne peuvent y inscrire de symboles mathématiques et les fonctionnalités du jeu les empêchent de noter leurs réponses tout en construisant dans l'environnement virtuel.

Pour la suite du projet, la phase de *Partage* est à poursuivre dans la prochaine année, notamment par l'analyse des autres données (observations en classe, productions d'élèves et discussions de groupes avec des élèves). Cela nous permettra d'analyser nos données de manière complémentaire et de préciser nos résultats préliminaires, pour en apprendre davantage sur les avantages et les défis didactiques de l'usage de Minecraft Education pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Il nous semble important de révéler ces avantages et défis didactiques qui pourraient aider les enseignant·es à choisir si (et comment) l'affordance de cet environnement technologique peut soutenir (ou non) l'apprentissage en mathématiques, en cohérence avec les pistes soulevées par Hitt et al. (2012).

RÉFÉRENCES

- Alvarez, J. (2007). *Du jeu vidéo au serious game, approches culturelle, pragmatique et formelle* [Thèse de doctorat, Université de Toulouse]. HAL theses. <https://hal.science/tel-01240683>
- Andlauer, L., Thiault, F. et Bolka-Tabary, L. (2018). Apprendre avec le jeu numérique Minecraft.edu dans un dispositif interdisciplinaire en collège. *Sciences du jeu*, (9), 1-15. <https://journals.openedition.org/sdj/1057>
- Bayliss, J. D. (2012). Teaching game AI through Minecraft mods. Dans *Actes de la 4^e conférence internationale Games Innovation Conference (IGIC2012)*, 7-9 septembre 2012, Rochester, USA (p. 1-4). IEEE. <https://doi.org/10.1109/IGIC.2012.6329841>
- Bednarz, N. (2013). Regarder ensemble autrement : ancrage et développement des recherches collaboratives en éducation au Québec. Dans N. Bednarz (dir.), *Recherche collaborative et pratique enseignante : regarder ensemble autrement* (p. 13-29). L'Harmattan.
- François, C. (2020). *Intégration des interactions sensori-motrices et affectives dans le comportement d'achat* [Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes]. <https://theses.hal.science/tel-03167797>
- Gibson, J. J. (1977). The theory of affordances. Dans R. Shaw et J. Bransford (dir.), *Perceiving, acting, and knowing. Toward an ecological psychology* (p. 67-82). Lawrence Erlbaum Associates.
- Hitt, F., Cortés Zavala, C. et Rinfret, M. (2012). Utilisation des technologies dans la classe de mathématique au secondaire : des outils sous exploités. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Actes du colloque EMF2012 « Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle »*, 3-7 février 2012, Université de Genève, Suisse (p. 849-862). <https://emf.unige.ch/colloques-invisible/actes-emf-2012>
- Jeannotte, D. et Corriveau, C. (2022). Manipulatives, affordance and the learning of fraction: The twelfth task. Dans A. E. Lischka, E. B. Dyer, R. S. Jones, J. N. Lovett, J. Strayer et S. Drown (dir.), *Proceedings of the 44th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 17-20 novembre 2022, Middle Tennessee State University. <https://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2044%202022%20Proceedings.pdf>

- Jensen, E. O. et Hanghøj, T. (2020). What's the math in Minecraft? A design-based study of students' perspectives and mathematical experiences across game and school domains. *Electronic Journal of e-LEARNING*, 18(3), 261-274. <https://www.researchgate.net/publication/343583766>
- Kim, Y. R. et Park, M. S. (2018). Creating a virtual world for mathematics. *Journal of Education and Training Studies*, 6(12), 172-183. https://digitalcommons.tamusa.edu/edci_faculty/3
- Kipnis, A. (2018). Communication through playful systems: Presenting scientific worlds the way a game might do. *Integrative and Comparative Biology*, 58(6), 1235-1246. <https://academic.oup.com/icb/article/58/6/1235/5056708>
- Köroğlu, M. N. et Yildiz, B. (2021). Design thinking in mathematics education: The Minecraft case. *Technology, Innovation and Special Education Research Journal*, 1(2), 150-179. <https://www.tiserjournal.com/wp-content/uploads/2022/01/Design-Thinking-in-Mathematics-Education-The-Minecraft-Case-3.pdf>
- Ministère de l'éducation du Québec [MEQ]. (2006a). Chapitre 6. Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie. Dans *Programme de formation de l'école québécoise : éducation préscolaire – Enseignement primaire*. Gouvernement du Québec. <https://cdn-contenu.quebec.ca/cdn-contenu/education/pfeq/primaire/programmes/PFEQ-mathematique-primaire.pdf>
- Ministère de l'éducation du Québec [MEQ] (2006b). Chapitre 6 : Mathématique. Dans *Programme de formation de l'école québécoise : enseignement secondaire, premier cycle* (pp. 223–264). Gouvernement du Québec. <https://cdn-contenu.quebec.ca/cdn-contenu/education/pfeq/secondaire/programmes/PFEQ-mathematique-premier-cycle-secondaire.pdf>
- Moore, K. (2018). Minecraft comes to math class. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 23(6), 334–341. <https://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacmiddscho.23.6.0334>
- Moyer, P. S., Bolyard, J. J. et Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics*, 8(6), 372-377. <https://courses.edtechleaders.org/documents/elemmath/manipulatives.pdf>
- Özgün-Koca, S. et Edwards, T. (2011). Hands-on, minds-on or both? A discussion of the development of a mathematics activity by using virtual and physical Manipulatives. *Journal of Computers in Mathematics and Sciences Teaching*, 30(4), 389–402. <https://www.learntechlib.org/noaccess/34539/>
- Paillé, P. et Mucchielli, A. (2016). *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales* (4^e éd.). Armand Colin.
- Petrov, A. (2014). *Using Minecraft in education: A qualitative study on benefits and challenges of game-based education* [Mémoire de maîtrise, University of Toronto]. <https://tspace.library.utoronto.ca/handle/1807/67048>
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : une approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin. <https://hal.science/hal-01017462/document>
- Thiault, F., Andlauer, L. et Bolka-Tabary, L. (2022). L'appropriation du jeu vidéo par les enseignants : les apports pédagogiques de l'usage de Minecraft. edu au collège. Dans Y. Rochat, S. Krichane et I. Pante (dir.), *Penser (avec) la culture vidéoludique*. PULG. <https://hal.science/hal-03705684/document>

- Thibault, M., Rioux, S., Michot, S., Roy, M. et Philibert, S. (2024, juin). Démarrage d'un projet portant sur les avantages et défis didactiques de Minecraft Education pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques [Communication]. Dans S. Dufour, N. Julien, R. Nolin, I. Oliveira et V. Robert (dir.), *Actes du Colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec (GMD2024), 17-19 juin 2024, Sherbrooke, Canada* (p. 154-168). Université de Sherbrooke.
- Voltolini, A. (2017). *Duo d'artefacts numérique et matériel pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3* [Thèse de doctorat, Université de Lyon]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-01585845>

L'APPORT DES LOGICIELS DE CALCUL NUMÉRIQUE : CAS DES APPROXIMATIONS VIA L'ANALYSE NUMÉRIQUE DANS UNE ÉCOLE D'INGÉNIEURS TUNISIENNE

| MERJANE* CHIRAZ, IBEN HAJ ALI NAJOUA** ET KOUKI*** RAHIM

Résumé | L'Analyse Numérique traite des problèmes d'approximations qui ne sont pas résolubles dans un environnement papier-crayon. La résolution de ce type de problèmes nécessite l'utilisation d'un logiciel de calcul numérique. Parallèlement, un enseignement d'Analyse Numérique est dispensé dans l'école d'ingénieurs « EI ». Nous nous proposons dans cet article d'examiner l'organisation mathématique et l'organisation didactique en interrogeant les documents officiels et les enseignants de mathématiques.

Mots-clés : Analyse Numérique, logiciel, organisation mathématique, organisation didactique, transposition

Abstract | Numerical Analysis deals with approximation problems that are not solvable in a paper-and-pencil environment. Solving this type of problems requires the use of numerical calculation software. At the same time, Numerical Analysis teaching is provided in an engineering school « EI ». In this article, we propose to examine the mathematical organization and the didactic organization by questioning official documents and mathematics teachers.

Keywords: Numerical Analysis, software, mathematical organization, didactic organization, transposition

I. INTRODUCTION

Dans Kilani et al. (2022), l'approximation absurde $(0,95)^{97} \cong -3,85$ est obtenue en utilisant le développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $(1 + x)^{97}$ au point 0,05. Cette même absurdité (un nombre strictement positif est presque égal à un nombre strictement négatif) persiste en utilisant la différentielle. Alors, nous nous sommes posé la question : quelle est la méthode d'approximation adéquate pour obtenir une valeur approchée convenable ? Les approximations numériques sont présentes dans le cursus de la formation d'ingénieur aussi bien comme outil que comme objet d'enseignement (Douady, 1986) notamment dans le module Analyse Numérique dont l'objet consiste à fournir des algorithmes susceptibles de donner des solutions numériques à des problèmes de mathématiques issus de l'analyse classique et qui sont fastidieux à faire dans un environnement papier-crayon sinon impossibles. Ceci nécessite l'implémentation d'algorithmes dans un logiciel de calcul numérique.

Par ailleurs, notons qu'en 2023 FunSearch qui est un large Language Model¹ (LLM) combiné avec un évaluateur a découvert de nouvelles solutions à deux problèmes ouverts en mathématique. Aussi, en 2024 AlphaGeometry qui est un LLM combiné avec une méthode symbolique a obtenu un score proche du médaillé d'or humain aux olympiades de mathématiques pour des problèmes de géométrie.

* Université de Carthage (ENICAR) – Tunisie – chiraz.morjen@enicar.ucar.tn

** Université de Tunis ESSECT (LR11ES02 – LARIME) – Tunisie – NAJOUA.HAJALI@essect.u-tunis.tn

*** Université de Tunis el Manar (IPEI El Manar) – Tunisie – rahim.kouki@ipeiem.utm.tn

¹ Large Language Model, LLM (Les grands modèles de langage) constituent une catégorie de modèles de fondation entraînés à l'aide d'immenses quantités de données pour comprendre et générer des textes en langage naturel, ainsi que d'autres types de contenu, afin d'accomplir un large éventail de tâches. <https://www.ibm.com/fr-fr/think/topics/large-language-models>

Ainsi les systèmes : LLM + évaluateur ou bien LLM + méthode symbolique sont experts en mathématique².

Notre ambition est de concevoir un système intelligent qui sera capable de fournir la méthode d'approximation adéquate pour un calcul approché donné. Nous nous posons alors la question : par quel système, allons-nous coupler un LLM pour y arriver ? Un début de réponse à cette question peut être envisagé en utilisant la « Retrieval-Augmented Generation » (RAG³) qui est une méthode d'optimisation des réponses d'un LLM. En cherchant des données et des connaissances spécifiques externes (ces données vont être extraites du corpus que nous allons concevoir), la RAG prétraite ces données ensuite les intègre au LLM ce qui permet d'améliorer ses réponses en limitant considérablement ses hallucinations. Dans cette optique, une étude des documents officiels correspondants à l'enseignement de l'Analyse Numérique s'impose afin de déterminer les méthodes numériques d'approximations à enseigner et les prescriptions relatives à leurs enseignements pour cerner le corpus nécessaire au fonctionnement de la RAG.

Dans cet article, nous nous interrogeons sur comment l'Analyse Numérique est enseignée dans une école d'ingénieurs tunisienne « EI ». Nous nous proposons d'examiner le passage du savoir savant au savoir enseigné. Tout d'abord, nous allons présenter, une analyse en termes de transposition didactique externe qui consiste à analyser la réélaboration et les organisations mathématique et didactique du cours d'Analyse Numérique, en général, dans les programmes des différentes filières du cursus d'ingénierie. La deuxième dimension renvoie à une analyse en termes de transposition didactique interne à travers laquelle nous comptons comprendre comment les approximations sont enseignées mais surtout s'il y a une conformité entre ce qui est recommandé par les programmes et ce qui est scénarisé par les enseignants. Aussi, nous nous intéressons à observer comment se crée le besoin de l'utilisation de logiciels de calcul numérique. Nous avons opté pour l'analyse d'une série d'exercices, du TP correspondant d'enquêter auprès des enseignants. Nous donnons enfin, les conclusions et des perspectives.

II. L'ANALYSE NUMÉRIQUE COMME SAVOIR SAVANT

L'Analyse est au carrefour des mathématiques et de l'informatique. Son utilité réside dans la résolution des problèmes qu'il est difficile ou impossible de résoudre avec l'Analyse Classique. Dans Quarteroni et al. (2007), on distingue trois grands axes de l'Analyse Numérique. Le premier, traite des méthodes directes et itératives de la résolution des systèmes linéaires ainsi que les approximations des vecteurs et des valeurs propres. Le second, il s'intéresse à la résolution des équations et des systèmes d'équations non linéaires, l'interpolation polynomiale et l'intégration numérique. Quant au troisième axe, il porte sur la résolution des équations différentielles ordinaires, aux équations aux dérivées partielles, les polynômes orthogonaux et les problèmes aux limites.

L'Analyse Numérique couvre un large spectre de notions mathématiques allant de l'algèbre linéaire jusqu'aux problèmes aux limites. Elle résout les problèmes de la réalité physique. Dans ce travail nous nous focalisons sur la mécanique. Ainsi la résolution de tels problèmes nécessite sept étapes. Voici plus de précision sur ces étapes. Pour résoudre un problème d'Analyse Numérique selon (Quarteroni, Ricardo, et Saleri, 2007). La première étape consiste en la formulation du problème. Après, vient le choix de la méthode numérique adéquate. La troisième étape consiste en l'implémentation de la méthode à l'aide d'un logiciel de calcul numérique. Après, vient l'analyse des erreurs puis la cinquième

² Pour plus de précisions consulter : <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.15542.68168>

³ Génération augmentée de récupération : <https://cloud.google.com/use-cases/retrieval-augmented-generation?hl=fr>

étape qui est la validation des résultats. La sixième est l'optimisation des performances et l'amélioration de la précision et enfin la septième étape consiste à présenter et interpréter les résultats.

Pour résoudre, par exemple, une équation de la forme $f(x) = 0$ où f est une fonction. On commence par formuler le problème en identifiant les données et les inconnues. Ensuite, on choisit la méthode adaptée à cette équation. Puis, on vérifie l'existence de la solution. Cela étant, on choisit une condition initiale x_0 qui garantit la convergence de la méthode. Enfin, on fixe un critère d'arrêt selon la précision souhaitée. Les documents officiels précisent-ils les étapes qui sont à la charge de l'enseignant et celles qui sont à la charge des apprenants.

Chevallard définit la transposition didactique externe, comme étant la transformation du savoir savant à un savoir à enseigner (Chevallard, *Pourquoi la transposition didactique ?*, 1982). Cette transposition s'opère dans la noosphère et par les prescripteurs qui vont décider quels savoirs vont être enseignés et comment ils vont être adaptés pour répondre aux exigences institutionnelles. Ainsi, nous nous sommes posés les questions : Quels sont les axes de l'Analyse Numérique qui vont être enseignés ? Quels sont les acteurs de la transposition didactique externe de l'Analyse Numérique ? Est-ce que le choix du savoir à enseigner est préalablement établi par le ministère, ou bien il est à la charge de l'enseignant ? Comment l'Analyse Numérique en tant que savoir savant va être adaptée pour qu'elle devienne un savoir à enseigner ? Quels sont les choix didactiques prescrits et les moyens pédagogiques déployés pour opérer cette transposition externe ?

Pour répondre à ces questions nous avons consulté les documents officiels afin d'examiner la transposition didactique externe de l'Analyse Numérique. Avant d'analyser ces documents nous présentons l'institution sur laquelle porte notre investigation.

III. PRÉSENTATION DE L'INSTITUTION

Le terrain d'investigation est une école d'ingénieurs Tunisienne que nous notons « EI » afin de garder l'anonymat. Cette institution a ouvert ses portes en 2002 en tant qu'Ecole Supérieure de Technologie et d'Informatique ensuite transformée, depuis septembre 2012, en une Ecole Nationale d'Ingénieurs. Elle offre quatre formations en : Génie Informatique (Info), Mécatronique (MECA), Génie des Systèmes Infotroniques (GSI) et Génie des systèmes Industriels et Logistique (GSIL). Elle est, également, habilitée à délivrer les diplômes de Doctorat en Génie Electrique et un Mastère de Recherche en Automatique, Robotique et Traitement de l'Information. D'après les différents plans d'études (ENICARTHAGE, 2019), l'Analyse Numérique est enseignée en 1^{re} année du cycle Ingénieur. Les élèves ingénieurs inscrits en 1^{re} année sont âgés entre 20 et 21 ans. La majorité des élèves ingénieurs de l'institution « EI » viennent des Instituts Préparatoires aux Cycles d'Ingénieurs.

Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons d'abord l'Analyse Numérique dans le savoir à enseigner via une analyse les documents officiels à savoir le guide des études d'ingénieur, les matrices de compétences et les plans d'étude des filières de l'institution « EI ». Ensuite, nous consacrons un deuxième paragraphe pour l'Analyse Numérique comme savoir enseigné en faisant une analyse d'une série d'exercices et en menant une enquête qualitative auprès des enseignants de mathématiques de l'Institution « EI ». L'objectif de l'enquête consiste à comprendre l'organisation mathématique et didactique de l'Analyse Numérique qui a été établie à partir des documents officiels et la série d'exercices. Nous terminons notre travail par présenter les conclusions et les perspectives de notre investigation.

IV. L'ANALYSE NUMÉRIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT

Afin d'apporter les éléments de réponses aux questionnements posés précédemment, notre paragraphe comportera deux volets : le premier concerne l'Analyse Numérique dans le savoir à enseigner et le second concerne l'Analyse Numérique dans le savoir enseigné.

1. *L'Analyse Numérique dans le savoir à enseigner*

Les documents officiels relatifs au cursus d'ingénieurs l'institution « EI » se résument en le guide des études d'ingénieur, les Matrices de compétences relatives aux différentes filières et les différents plans d'études relatifs aux différentes filières. Nous nous proposons de les examiner dans l'objectif de relever les consignes émises par la noosphère sur le savoir à enseigner concernant l'Analyse Numérique.

2. *Place de l'Analyse Numérique dans le guide d'ingénieur*

Le guide des études ingénieurs (ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique de Tunisie, 2022) est destiné aux élèves des classes terminales du secondaire souhaitant poursuivre des études d'ingénieur. Il donne un aperçu des parcours possibles et des spécificités de la formation en ingénierie. Il est aussi destiné aux étudiants qui s'intéressent aux études d'ingénieurs et souhaitant changer de parcours universitaire. Ce guide donne une brève description du profil de l'ingénieur à l'issue de sa formation initiale ainsi que dans le milieu professionnel.

En Résumé, l'ingénieur, dans les divers domaines de ses activités, joue un rôle essentiel en assumant des fonctions clés liées aux études, à la recherche et développement, à la production, à la maintenance, à la gestion et à l'organisation. Ces fonctions lui confèrent différentes responsabilités, allant de l'ingénieur concepteur à la direction d'une entreprise ou à un poste de cadre administratif supérieur (ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique de Tunisie, 2022).

La formation en ingénierie semble conférer à l'ingénieur des compétences de base techniques, analytiques et organisationnelles. L'octroi de ces compétences est tributaire outre de la volonté et l'engagement personnel de l'élève ingénieur, de la qualité de la formation des différentes filières d'ingénierie. Le guide de l'ingénieur ne fournit pas de détails quant au savoir à enseigner dans les écoles d'ingénieurs et spécialement celui relatif à l'Analyse Numérique. Néanmoins, un grand intérêt est porté aux prérequis mathématiques des étudiants voulant intégrer les écoles d'ingénieurs où il est impératif à tous les étudiants qui ont passé deux années dans les instituts préparatoires de passer un concours de mathématiques pour toutes les spécialités sauf celles appartenant au domaine agricole et de la géologie.

Afin de comprendre la place de l'Analyse Numérique dans la formation nous avons interrogé les matrices de compétences relatives aux trois filières d'ingénieries dans l'institution « EI ». Nous présentons ci-après l'Analyse Numérique dans les matrices de compétences.

3. *Place de l'Analyse Numérique dans les matrices de compétences*

Une matrice de compétences est un tableau qui présente les compétences supposées acquises par l'ingénieur selon le métier qu'il entreprend d'exercer. Dans les différentes filières de l'institution « EI », l'Analyse Numérique fait partie des modules qui permettent de développer chez l'élève ingénieur des compétences qui doivent être acquises à la fin de son cursus. Le degré d'appropriation de ces compétences est mesuré en trois niveaux : niveau basique, niveau intermédiaire et niveau avancé. Chaque métier exige un certain nombre de compétences acquises à un certain niveau. Si l'on considère les modules d'Analyse Numérique 1 et Analyse Numérique 2, ils font partie des modules qui permettent de développer un certain nombre de compétences à des niveaux différents.

Pour l'ingénieur en informatique, l'Analyse Numérique contribue à développer trois compétences qui sont : « analyser les statistiques des données », « déployer une solution » et « prendre des décisions ». Ces compétences sont exigées à des niveaux différents selon les métiers à exercer. Notons que la compétence « déployer une solution » est exigée à un niveau basique pour un développeur et pour un expert des médias numériques et à un niveau avancé pour un testeur et un intégrateur, mais il n'y a pas de métiers, selon la matrice de compétences, où cette compétence est exigée à un niveau intermédiaire.

A l'instar de l'ingénieur en informatique, pour l'ingénieur en mécanique l'Analyse Numérique contribue à développer trois compétences qui sont « Aptitude à connaître et à comprendre un large champ de sciences fondamentales », « capacité à modéliser et à simuler des systèmes mécaniques », « capacité à avoir l'esprit d'analyse et d'attention à l'égard des détails ». Cette dernière est exigée seulement à un niveau avancé pour tous les métiers.

Pour la filière GSIL, l'Analyse Numérique est impliquée dans le développement d'une seule compétence à savoir « Aptitude à connaître et à comprendre un large champ de sciences fondamentales ». La plupart des métiers exige un niveau basique de cette compétence alors qu'aucun métier n'exige un niveau de compétence avancé.

Dans les matrices de compétences, il n'y a pas de prescriptions concernant le contenu à enseigner des différents modules, il n'y a pas d'exigences explicitement formulées quant au contenu de l'Analyse Numérique. Les prescripteurs n'ont donné de directives ni sur le savoir à enseigner ni son organisation.

Dans ce qui suit nous présentons l'Analyse Numérique dans les différents plans d'étude.

4. Place de l'Analyse Numérique dans les plans d'étude des différentes Filières

Les plans d'études présentent une description du cursus de la formation d'ingénieur. Ils décrivent l'organisation des différents modules, le moment de leurs enseignements, les volumes horaires attribués ainsi que les fiches descriptives des modules d'enseignement

L'examen des différents plans d'étude nous a permis de relever certains points. L'Analyse Numérique est enseignée en 1^{re} année pour toutes les filières. Cependant, pour les trois filières suivantes : INFO (Informatique) – MECA (Mécatronique) – GSIL (Génie des Systèmes Industriels et Logistique), l'Analyse Numérique est présente au 1^{er} et au second semestre avec les intitulés : Module Analyse Numérique I (1^{er} semestre) et Module Analyse Numérique II. (2^e semestre). Pour la filière GSI l'Analyse Numérique est enseignée seulement au 1^{er} semestre sous le Module Analyse numérique.

L'enseignement de l'Analyse Numérique se présente sous forme de cours intégré (CI) et de travaux pratiques (TP). Le cours intégré renferme le cours et les travaux dirigés (TD) qui consistent en la correction des séries qui portent sur le cours dans un environnement papier-crayon et sans ordinateur. Ces séries sont données à l'avance aux apprenants et elles sont communes à tous les élèves ingénieurs de la filière. Les séances de (TP) se font obligatoirement dans des laboratoires d'informatiques avec des ordinateurs dotés du logiciel de calcul numérique MATLAB. Les étudiants sont amenés à travailler individuellement ou en binômes, à programmer sur MATLAB afin de résoudre les problèmes proposés dont il est impossible de résoudre dans un environnement papier-crayon. D'après les plans d'études, les volumes horaires semestriels, attribués au cours intégré (CI) et aux travaux pratiques (TP) ne sont pas les mêmes pour les différentes filières.

Nous remarquons l'absence totale des (TP) dans la filière informatique, bien que le volume horaire attribué aux modules d'Analyse Numérique I et d'Analyse Numérique II est important relativement à celui attribué aux autres filières (GSIL) et (MECA).

Les fiches descriptives des modules d'enseignement renfermeraient des informations utiles à l'enseignant pour organiser et concevoir son cours, (TD) et /ou son (TP). Elles donnent les objectifs de l'enseignement du module. Elles précisent les prérequis nécessaires que l'élève ingénieur devrait avoir et le plan du cours dans lequel nous trouvons les intitulés des chapitres, les parties qui les constituent. Elles fixent aussi le temps alloué aux cours, (TD) et (TP). Le mode d'évaluation est aussi précisé et quelques références bibliographiques sont fournies. A priori, l'enseignant est doté de plusieurs outils pour assurer la transposition interne à savoir le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné.

Le module de l'Analyse Numérique I fait partie de l'axe « Algèbre Linéaire Numérique » et s'intéresse à la résolution des systèmes d'équations linéaires. Le module d'Analyse Numérique II fait partie du deuxième axe⁴ « fonctions et fonctionnelle ». Il traite la résolution des équations non linéaires, l'interpolation polynomiale et l'intégration numérique. Néanmoins, certains points ne sont pas explicitement formulés notamment l'organisation didactique du contenu du cours, (TD) et (TP). En effet, dans les fiches descriptives des modules d'enseignement d'Analyse Numérique on ne trouve pas d'objectifs clairs de l'enseignement. On trouve les intitulés des chapitres et ceux des paragraphes qui les constituent. Ils sont de même nature que l'Analyse Numérique comme savoir savant. On ne trouve pas de détails sur la manière d'organiser le cours, sur le choix des applications et le choix de logiciels de calcul numérique. Il n'y a pas d'indications dans le contenu qui permettent de décrire les étapes de résolution de problèmes numériques, les tâches à la charge des étudiants et celles à la charge de l'enseignant.

Concernant l'Analyse Numérique I et II, les fiches descriptives des filières (MECA) et (GSIL) donnent seulement le temps alloué aux séances de (TP). Il n'est mentionné aucune prescription quant aux parties du cours sur lesquelles il portera, ni sur le choix du logiciel de calcul numérique à utiliser. D'un autre côté, pour la filière (INFO) - sachant que pour cette filière il n'y a pas de TP - on prévoit une seule application sur MATLAB à la fin du chapitre « Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires » dans le module Analyse Numérique I et une autre à la fin du chapitre « Interpolation polynomiale » dans le module Analyse Numérique II. Pointons qu'il n'y a aucun détail sur la nature de cette application, ni sur les parties du chapitre sur lesquelles elle va porter. Le fait que cette application se fasse pendant les séances du cours, nous nous sommes posés la question comment l'enseignant va s'y prendre en cours (CI) pour intégrer le logiciel MATLAB dans son enseignement.

Nous nous sommes alors interrogés sur l'Analyse Numérique comme savoir enseigné, comment se fait l'organisation didactique de l'Analyse Numérique? Pour cela nous avons analysé une série d'exercice et le TP correspondant et avons mené une enquête qualitative auprès des enseignants de mathématique de l'institution « EI ».

5. *Analyse Numérique comme savoir enseigné*

D'après l'analyse des documents officiels l'organisation mathématique et didactique sont à la charge de l'enseignant. Pour avoir plus de renseignements sur ces deux organisations nous avons analysé une série commune du module Analyse Numérique II de la filière (MECA) (notre choix est arbitraire). La série est une application au chapitre résolution des équations non linéaires ($f(x) = 0$). Elle est donnée à l'avance aux apprenants et corrigée pendant les séances de cours intégré (CI). Précisons que sa correction ne nécessite pas l'utilisation d'un logiciel. Elle se fait dans un environnement papier-crayon. L'objectif implicite de cette série est que l'apprenant apprenne différentes méthodes numériques

⁴ Précisons que l'Analyse Numérique II de la filière touche un peu au 3^e axe « Transformations, dérivations et discrétisations par le chapitre sur la résolution des équations différentielles.

d'approximations et les teste à la main pour les implémenter dans les séances de (TP). La série est composée de 4 exercices et le TP de 3. Les énoncés des exercices proposés contiennent la fonction à étudier ainsi que la méthode numérique à utiliser. De ce fait, c'est l'enseignant qui a pris en charge la formulation du problème et le choix de la méthode numérique. Il ne les a pas laissés à la charge de l'apprenant.

Cette analyse nous a amené à questionner tous les enseignants de mathématiques de l'institution « EI » qui sont au nombre de 11 pour mieux comprendre les choix adoptés au niveau de l'organisation mathématique et didactique.

L'implémentation des méthodes numériques nécessite la manipulation d'un logiciel de calcul numérique, des connaissances sur l'algorithmique et des méthodes d'approximation. Ainsi, le but du questionnaire (voir Annexe) est de comparer ce qui est prescrit dans les fiches modules par rapport à ce qui est fait en classe. Il permet aussi de relever des indicateurs sur la manière d'enseigner les méthodes numériques proposées par les fiches modules et de préciser les logiciels utilisés.

L'analyse des réponses a montré que la majorité des enseignants donne la méthode numérique à utiliser en séance de cours et de (TP). Ces enseignants pensent que les séances de (TP) aident beaucoup les élèves ingénieurs à mieux conceptualiser l'Analyse Numérique.

Les enseignants estiment que les compétences en algorithmiques sont nécessaires.

Par ailleurs, dans les directives de la noosphère, il n'y a pas d'indication sur l'utilisation des logiciels de calcul numérique dans les séances de cours intégré (CI). Certains enseignants n'utilisent pas de logiciels dans le cours intégré (CI) et d'autres utilisent soit MATLAB, soit MATLAB en ligne, ou Octave ou bien Scilab. Il se peut que ces enseignants enseignent un module d'Analyse Numérique où il n'y a pas de (TP). Un entretien avec les enseignants peut nous éclairer sur cette question. En séance de (TP), les élèves ingénieurs aussi bien que les enseignants utilisent seulement MATLAB alors que ce n'est pas prescrit. Nous pensons que c'est peut-être dû au fait que les ordinateurs sont équipés du logiciel MATLAB. D'un autre côté, la majorité des enseignants qui ont répondu jugent nécessaire de montrer l'utilité des logiciels de calcul numérique à leurs élèves ingénieurs. Un enseignant propose les méthodes de Gauss, LU et Cholesky, le second propose MATLAB et le troisième propose l'utilisation de MATLAB avec des simulations pour montrer la vitesse de convergence.

En ce qui concerne l'avis des enseignants sur les difficultés de leurs élèves ingénieurs à résoudre des exercices avec un logiciel de calcul numérique, un enseignant affirme que les élèves ingénieurs rencontrent des difficultés liées à l'utilisation du logiciel de calcul numérique. Un enseignant pense que ces difficultés sont liées à l'algorithmique. Deux enseignants affirment qu'ils n'ont pas de difficultés et deux enseignants ne savent pas si les apprenants rencontrent des difficultés ou non.

À travers cette analyse, nous émettons l'hypothèse que les organisations mathématiques des enseignants de mathématiques de l'institution « EI » sont presque similaires alors que les organisations didactiques ne le sont pas. Des entretiens avec les enseignants peuvent nous éclairer sur ces questions.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'Analyse Numérique est une branche des mathématiques qui résout des problèmes d'approximations en utilisant un logiciel de calcul numérique. Son enseignement est omni présent dans toutes les filières de l'institution « EI » objet de notre investigation.

L'analyse des documents officiels a montré que les directives de la noosphère sont d'ordre général. Elles donnent le profil général de l'ingénieur à l'issue de sa formation initiale sans donner de précisions

sur les spécificités des modules à enseigner et en particulier les modules d'Analyse Numérique. La noosphère fournit les intitulés des chapitres des modules d'Analyse Numérique mais ne fournit aucune information sur les organisations mathématiques et didactiques. Ces deux organisations sont à la charge de l'enseignant. La résolution d'un problème par l'Analyse Numérique se fait en sept étapes. Remarquons que la noosphère ne précise pas les étapes qui sont à la charge de l'enseignant et celles qui sont à la charge de l'apprenant. Pour avoir plus de précisions, nous avons analysé une série d'exercices relative au chapitre résolution des équations non linéaires ($f(x) = 0$) et le (TP) correspondant du module Analyse Numérique II de la filière (MECA). L'analyse a montré que seuls à la charge de l'apprenant sont : les étapes « l'implémentation de la méthode à l'aide d'un logiciel de calcul numérique », « l'analyse des erreurs » « la validation des résultats » « présentation et interprétation des résultats ». L'étape « l'implémentation de la méthode à l'aide d'un logiciel de calcul numérique » se fait pendant les séances de (TP). L'étape « l'optimisation des performances et l'amélioration de la précision » ne fait pas l'objet d'enseignement dans ce module. Les étapes « formulation du problème » et « choix de la méthode numérique adaptée » sont à la charge de l'enseignant. En effet dans tous les exercices proposés la fonction est donnée ainsi que la méthode d'approximation à utiliser. Ceci nous permet d'avancer que l'outil Analyse numérique risque de ne pas être disponible (au sens de Robert) dans les autres disciplines. Dans un prochain travail nous nous projetons d'analyser le savoir enseigné des autres filières et voir s'il y a similitudes ou des divergences avec la filière (MECA) dans l'objectif de comparer les organisations mathématiques et didactiques des différents enseignants. Notre projet est aussi d'investiguer au niveau des autres disciplines de la formation afin de voir comment l'apprenant mobilise ses connaissances d'Analyse Numérique et de mieux comprendre les différents niveaux de compétences basique, intermédiaire et avancé.

Dans un cours intégré (CI) les exercices de la série sont implicitement résolubles à la main c'est-à-dire sans logiciel. Cependant en TP les exercices sont résolubles avec logiciel. Nous n'avons aucune information concernant les applications du cours du (CI). Ceci nous amène à se poser la question est ce que l'apprenant est capable par lui-même de savoir si la résolution d'un exercice d'Analyse Numérique nécessite l'utilisation d'un logiciel ou non. Une analyse du cours et une investigation auprès des apprenants peuvent nous éclairer et nous donner des éléments de réponses.

Les approximations numériques des fonctions et leurs méthodes font l'objet d'enseignement, dans toutes les filières de l'institution « EI ». D'après l'enquête menée auprès des enseignants de Mathématique ces derniers pensent que l'utilisation des logiciels de calculs numériques pourraient améliorer la conceptualisation des élèves ingénieurs des différents concepts. Néanmoins, l'absence de travaux pratiques où l'apprenant peut manipuler un logiciel de calcul numérique a poussé certains enseignants à montrer pendant les séances de cours intégré l'importance de ces logiciels mais sans que l'apprenant ait l'occasion de manipuler lui-même le logiciel. D'un autre côté certains enseignants pensent que les difficultés des apprenants viennent essentiellement du langage de programmation.

Dans une perspective d'ingénierie didactique, nous envisageons d'exploiter les potentialités des RAG afin d'aider les enseignants à concevoir des situations de classe. Nous nous sommes alors posés la question : quelles sont les contraintes sur le corpus que nous allons concevoir pour éliminer toutes les hallucinations d'un LLM.

RÉFÉRENCES

- Chevallard, Y. (1982). Pourquoi la transposition didactique ? Dans *Actes du Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG, Université scientifique et médicale de Grenoble* (p. 167-194). http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php?id_article=103
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31. <https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/>
- ENICARTHAGE. (2019). *Document étudiants-Plan d'études*.
- Kilani, I., Kouki, R. et Beldi, M. (2022). Analyse mathématique et regard didactique sur les formules de Taylor en vue d'une meilleure conceptualisation. *Educação Matemática Pesquisa*, 24(3), 62-107. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i3p062-107>
- Ministère de l'enseignement supérieur et de la Recherche scientifique de Tunisie. (2022). *Guide des études d'ingénieurs*. Direction générale des études technologiques.
- Quarteroni, A., Ricardo, S. et Saleri, F. (2007). *Méthodes numériques. Algorithmes, analyse et applications* (J.-F. Gerbeau, trad.) Springer-Verlag Italia. https://www.ceremade.dauphine.fr/~bey/enseignement/Enseignement/All_enseignement_dauphine/Module_analyse_numerique/livre%20analyse%20num%C3%A9rique/fiche_numerique/bok%253A978-88-470-0496-2.pdf
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190. <https://revue-rdm.com/1998/outils-d-analyse-des-contenus/>

ANNEXE : QUESTIONNAIRE ENSEIGNANTS

- Q-1 :** Pensez-vous que certaines compétences en algorithmique seraient nécessaires aux étudiants pour apprendre les méthodes numériques ?
- Q-2 :** Pensez-vous que les séances de TP aident les élèves ingénieurs à mieux conceptualiser les méthodes numériques enseignées ?
- Q-3 :** Lors de la résolution d'exercices en séances de cours, précisez-vous la méthode numérique à utiliser.
- Q-4 :** Utilisez-vous des logiciels de calculs numériques dans votre cours intégré ?
- Q-5 :** Citer le(s) logiciel(s) que vous utilisez dans les séances du cours intégré.
- Q-6 :** Lors de la résolution d'exercices en séances de TP, précisez-vous la méthode numérique à utiliser ?
- Q-7 :** J'enseigne le TP avec un logiciel de calculs numériques.
- Q-8 :** Citer le(s) logiciel(s) que vous utilisez dans les séances de TP.
- Q-9 :** Citer le(s) logiciel(s) que vos élèves ingénieurs de 1^{re} année utilisent dans les séances de TP.
- Q-10 :** Pensez-vous que les élèves ingénieurs de 1^{re} année sont capables d'utiliser un moteur de recherche ?

- Q-11 :** Pensez-vous que les élèves ingénieurs de 1^{re} année sont capables de télécharger un logiciel ?
- Q-12 :** Pensez-vous que les élèves ingénieurs de 1^{re} année sont capables d'installer un logiciel ?
- Q-13 :** Dans le cadre du module Analyse Numérique 1, qui est proposé uniquement sous forme de cours intégré, avez-vous jugé nécessaire de montrer aux élèves ingénieurs de 1^{re} année l'utilité d'un logiciel de calcul numérique ?
- Q-14 :** Quels outils avez-vous utilisé pour montrer aux élèves ingénieurs de 1^{re} année l'utilité du logiciel de calcul numérique ? Pourriez-vous donner des exemples concrets de situations en classe ?
- Q-15 :** Pensez-vous que les élèves ingénieurs de 1^{re} année ont des difficultés à résoudre des exercices en utilisant un logiciel de calcul numérique ?
- Q-16 :** Si vous estimez que les élèves ingénieurs de 1^{re} année ont des difficultés à faire des exercices en utilisant un logiciel de calcul numérique, pensez-vous que ces difficultés sont d'ordre Mathématique – Technologique – Autres.

EXPLORATION DES DÉFIS ET DES PRATIQUES DÉCLARÉES DANS L'INTÉGRATION DES MÉDIAS NUMÉRIQUES EN GÉOMÉTRIE : ÉTAT DES LIEUX, AVEC UNE PERSPECTIVE SUR LE CYCLE 3

| MEGHERBI* DJAMILA

Résumé | Dans cette communication, nous présentons les premiers résultats d'une enquête exploratoire menée dans le cadre d'une thèse sur l'intégration des médias numériques dans l'enseignement de la géométrie au cycle 3. À partir des pratiques déclarées par les enseignants, nous cherchons à identifier leurs perceptions des médias numériques et les défis rencontrés lors de leurs utilisations en classe à travers les praxéologies professionnelles déclarées.

Mots-clés : médias numériques, géométrie, praxéologies professionnelles, milieu, intégration

Abstract | In this communication, we present the initial results of an exploratory survey conducted as part of a thesis on the integration of digital media in teaching geometry at the third cycle level. Based on the practices reported by teachers, we seek to identify their perceptions of digital media and the challenges encountered during their use in the classroom through the declared professional praxeologies.

Keywords : Digital tools, geometry, professional praxeologies, milieu, integration

I. INTRODUCTION ET CONTEXTE

L'enseignement des mathématiques évolue dans un paysage éducatif marqué par l'essor des innovations technologiques. En France, la stratégie (synth-se-strat-gie-num-rique-2023-2027-120415_0 (3), 2023.) reflète l'engagement des pouvoirs publics à généraliser l'usage des technologies numériques dans les écoles. Les programmes scolaires intègrent ces technologies, notamment pour représenter l'espace avec des logiciels 3D. En Algérie, plusieurs cadres réglementaires et institutionnels témoignent de la volonté d'intégrer les outils numériques dans l'éducation. La (loi d'orientation-dz, 2008) et le Plan d'action gouvernemental (Algérie | Technologie | Education Profiles, 2010) traduisent cet engagement en fixant des orientations pour le renforcement des TIC dans l'enseignement. À l'échelle des initiatives pédagogiques, le Centre national Algérien d'intégration des innovations pédagogiques et de développement des technologies de l'information et de la communication en éducation joue un rôle clé dans la formation des enseignants et la mise en œuvre des outils numériques. Enfin, des documents comme le Référentiel des programmes (2010) valorisent une approche par compétences, faisant des mathématiques un levier de pensée critique. Ces initiatives témoignent de l'importance accordée à l'évolution des pratiques pédagogiques dans les deux pays.

Nous nous intéressons aux défis rencontrés par les enseignants, ainsi qu'à l'impact de ces ressources numériques sur les interactions didactiques et les pratiques pédagogiques. Parmi les domaines de mathématiques qui peuvent être impactés, la géométrie est particulièrement concernée. Longtemps enseignées à travers des manipulations concrètes et des tracés papier-crayon, elle bénéficie aujourd'hui des potentialités offertes par les logiciels de géométrie dynamique. Ces logiciels facilitent la transition entre l'espace sensible, l'espace graphique et l'espace géométrique (Guille-Biel Winder et Assude, 2023) qui permettent aux élèves d'explorer les propriétés des figures en temps réel. C'est dans ce contexte que cette étude explore les pratiques déclarées et perceptions des enseignants concernant l'utilisation

* Aix Marseille université – France – djamila.megherbi@etu.univ-amu.fr

des médias numériques dans l'enseignement des mathématiques, en particulier de la géométrie au cycle 3. Cette première phase de l'enquête poursuit deux objectifs principaux : identifier comment les enseignants choisissent et utilisent les outils numériques en fonction des contenus géométriques enseignés ; comprendre dans quelle mesure ces outils transforment leurs pratiques, notamment en termes de fréquence, de posture pédagogique et d'engagement des élèves. Nous analysons notamment comment ces ressources sont sélectionnées et utilisées pour structurer l'enseignement, leur fréquence d'utilisation et leur influence sur la dynamique de classe.

II. ÉLÉMENTS THÉORIQUES

Cette étude s'inscrit tout d'abord dans le cadre de la TAD.

1. *Outils numériques*

Cette étude s'inscrit dans le cadre de la Théorie Anthropologique de la Didactique (TAD) et s'appuie sur les travaux d'Assude (2007, 2009, 2010) et d'Artigue (2013) pour définir les outils numériques. Ces derniers englobent des logiciels spécifiques (GeoGebra, Python, Scratch), des équipements (ordinateurs, vidéoprojecteurs, tablettes) et des plateformes collaboratives (Padlet, Genially). Leur intégration facilite la visualisation en mathématiques, mais pose des défis : conception de séquences, gestion des interactions, maîtrise des outils. Comme le soulignent Assude et Artigue, l'appropriation des ressources numériques dépend non seulement de la disponibilité des équipements, mais aussi des contraintes institutionnelles et des postures enseignantes face au changement.

La dialectique ancien-nouveau (Assude, 2007, 2009) permet d'analyser comment ces outils transforment les pratiques pédagogiques. Elle met en évidence les tensions entre méthodes traditionnelles et approches numériques, ainsi que les différentes modalités d'appropriation. Dans cette perspective, Soury-Lavergne (2006) étudie la genèse instrumentale des élèves utilisant Cabri-Géomètre et montre que l'appropriation d'un logiciel de géométrie dynamique nécessite un accompagnement structuré. Ainsi, au-delà de leur simple adoption, la manière dont ces outils s'intègrent dans l'enseignement ne se limite pas à leur fonctionnalité technique, mais dépend également des interactions qu'ils génèrent dans le milieu d'apprentissage. La dialectique média-milieu (Chevallard, 2007b) constitue alors un cadre pertinent pour analyser ces interactions, en montrant comment ces ressources ne sont pas de simples supports de transmission mais participent activement à la structuration du savoir et des pratiques pédagogiques.

2. *Dialectique média-milieu*

En nous appuyant sur la dialectique média-milieu, (Chevallard, 2007a), inscrite dans la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), nous analysons les usages des technologies dans l'enseignement. Cette dialectique permet de distinguer deux fonctions pédagogiques possibles d'une ressource numérique : un média transmet de l'information (comme un manuel ou une vidéo), tandis qu'un milieu offre un espace d'interaction où l'élève agit, expérimente et construit du savoir. Un même outil peut ainsi remplir des fonctions différentes selon le contexte. Par exemple, **GeoGebra peut être utilisé comme un média** lorsqu'il sert simplement à illustrer une propriété (l'enseignant montre la symétrie axiale sur écran), **ou comme un milieu** lorsque les élèves manipulent eux-mêmes les figures pour tester des conjectures, explorer des invariants ou résoudre des problèmes. Ce qui importe, c'est l'usage que l'enseignant en fait dans le milieu didactique. Cette perspective, prolongée par les travaux de Soury-Lavergne (2020) ou Artaud (2019), montre que l'intégration des outils numériques transforme les équilibres entre savoirs, pratiques et contraintes institutionnelles. Artaud (2019) approfondit cette

réflexion en distinguant l'organisation du savoir de celle de l'étude, tout en montrant leur interdépendance. Ces outils transforment les conditions d'apprentissage et l'écologie des pratiques, nécessitant des ajustements didactiques

Il est également essentiel de différencier le matériel informatique (ordinateurs, tablettes, TNI) des ressources logicielles (GeoGebra, Scratch, Cabri-Géomètre). Soury-Lavergne (2020) montre que les logiciels de géométrie dynamique ne se limitent pas à la visualisation des objets mathématiques : ils modifient les interactions enseignant-élèves et la structuration du savoir. Dans cette perspective, plusieurs études (Artigue, 2009, 2011 ; Soury-Lavergne, 2020 ; Assude, 2007) confirment que leur usage ne se résume pas à une transformation graphique des objets mathématiques, mais qu'il redéfinit aussi les modalités d'apprentissage, en favorisant l'exploration et la manipulation active des concepts.

3. *Autres éléments théoriques*

Le schéma herbartien (Chevallard, 2007b) constitue un cadre pertinent pour analyser l'intégration des ressources numériques dans l'enseignement des mathématiques. Il modélise l'interaction pédagogique comme un processus évolutif, où les enseignants perçoivent les outils numériques à la fois comme des supports potentiels à l'enseignement et comme des éléments influençant leurs propres pratiques didactiques. Bien que Chevallard ne traite pas directement l'usage des technologies, ce cadre théorique permet d'examiner comment les enseignants évaluent leur impact sur la transmission et l'appropriation des savoirs. Dans ce cadre, nous nous appuyons également sur **le triplet de genèses** (Schneuwly, 2007) pour analyser les dynamiques d'enseignement et d'apprentissage en contexte numérique. Ce triplet comprend : **la mésogenèse**, qui concerne l'introduction et la structuration des connaissances ; **la topogenèse**, qui analyse la répartition des rôles entre enseignants et élèves ; et **la chronogenèse**, qui étudie l'organisation temporelle de l'apprentissage. L'intégration des ressources numériques modifie ces trois dimensions en influençant la manière dont les savoirs sont introduits, la distribution des responsabilités pédagogiques et la gestion du temps didactique. Ainsi, ces ressources — incluant des logiciels (GeoGebra, Python, Scratch), des équipements (ordinateurs, vidéoprojecteurs, tablettes) et des plateformes collaboratives (Padlet, Genially) — peuvent être mobilisées soit comme **outils numériques**, facilitant l'exploration et l'interaction, soit comme **médias numériques**, structurant la transmission des savoirs. Cette articulation souligne la nécessité d'ajustements pour optimiser leur intégration dans les pratiques enseignantes.

III. MÉTHODOLOGIE RETENUE

L'étude repose sur une approche qualitative visant à comprendre comment les enseignants perçoivent et utilisent les ressources numériques dans l'enseignement des mathématiques. La méthodologie retenue prend en compte les spécificités des recherches sur les pratiques déclarées des enseignants en matière d'utilisation de ces ressources. La collecte de données s'organise en deux phases distinctes. La première, repose sur des entretiens explorant les pratiques déclarées, notamment en géométrie dynamique. La première porte sur le choix des ressources utilisées et leur sélection pour structurer l'apprentissage. La deuxième concerne leur utilisation en classe, leur fréquence et leur impact sur la structuration des cours, ainsi que l'évolution des rôles enseignants-élèves. La troisième interroge l'impact déclaré des outils numériques sur l'enseignement, notamment en termes de méthodologie et d'organisation de l'étude.

Une analyse préliminaire de cette grille d'entretien a été effectuée afin de définir les attentes concernant les informations que les réponses aux questions devraient révéler, en regard des théories

didactiques établies. Chaque question est associée à un concept didactique (triplet de genèses, schéma herbartien, dialectique ancien-nouveau). Ainsi la mésogenèse est abordée par les questions 1 et 2 (utilisation des outils numériques), la chronogenèse par les questions 3 à 5 (fréquence d'utilisation et évolution temporelle), et la topogenèse par les questions 6 et 7 (répartition des rôles enseignant-élève). Le schéma herbartien, Y (enseignant) – X (élève) – Q (contenu) analyse comment l'interaction autour des contenus se structure via les outils numériques, il est mobilisé dans les questions 1, 2, 3 et 6. Enfin les questions 4, 8, 9, 10, 13 contribuent à l'analyse de la cohabitation entre les méthodes pédagogiques traditionnelles et les outils numériques. En outre, bien que la dialectique ancien-nouveau soit centrale, d'autres dialectiques comme « individu-collectif » et « conjecture-démonstration » sont également en jeu. Le tableau 1 présente l'analyse de manière synthétique.

Tableau 1 – *Tableau synthétique des questions et concepts didactiques associés*

	Questions	Concept didactique	Objectif de la question
Partie 1	Q1 : Pouvez-vous décrire quels types d'outils numériques vous utilisez dans vos cours de mathématiques, que ce soit en classe ou hors de la classe ?	Mésogenèse, Schéma Herbertien	Identifier les outils utilisés et comprendre leur intégration dans la dynamique enseignant-élève-contenu.
	Q2 : Pourriez-vous partager une notion mathématique que vous enseignez à l'aide d'outils numériques ?	Mésogenèse, Dialectique Ancien-Nouveau	Examiner comment les outils numériques coexistent avec et enrichissent les méthodes traditionnelles.
Partie 2	Q3 – Q7 : À quelle fréquence utilisez-vous ces outils numériques ?	Chronogénèse, Topogenèse	Évaluer la fréquence et les changements de rôle induits par les technologies.
Partie 3	Q8 – Q13 : En quoi l'intégration des logiciels de géométrie dynamique complète ou modifie-t-elle vos méthodes d'enseignement traditionnelles ?	Mésogenèse, Dialectique Ancien-Nouveau et Schéma Herbertien	Tenter de voir si les enseignants ont conscience de l'impact des outils sur leur pratiques existantes et sur l'organisation mathématique.

IV. RÉSULTATS DE L'ANALYSE DE DONNÉES

Notre étude repose sur un échantillon diversifié de 24 enseignants provenant de différents contextes éducatifs en Algérie où l'enseignement est dispensé en français (figure 1) : enseignants du premier et second degré du Lycée International Alexandre Dumas (LIAD), lycée français sous la tutelle de l'AEFE et de l'Ambassade de France en Algérie, enseignants du premier et du second degré d'un lycée public algérien spécifique ; ainsi que des professeurs du second degré exerçant dans les écoles privées.



Figure 1 – Répartition des 24 enseignants par type d'établissement et niveau d'enseignement

Ces axes rendent compte des pratiques déclarées, des tensions professionnelles et des ajustements concrets face aux injonctions numérique. Les entretiens, d'une durée moyenne de 20,4 minutes, ont été transcrits puis analysés selon une approche thématique, en lien avec la grille conçue à partir des concepts didactiques. Chaque axe a été décliné en thèmes spécifiques, afin de refléter la diversité des pratiques selon les contextes éducatifs. L'analyse a porté en particulier sur : l'intensité et la fréquence d'usage des outils (mésogenèse, chronogenèse) ; leur articulation avec les méthodes traditionnelles ; leur impact sur l'engagement des élèves (topogenèse) ; et les obstacles matériels, institutionnels ou professionnels évoqués. Cette démarche prolonge les travaux d'Assude et Gélis (2002), qui montrent le rôle des logiciels de géométrie dans la visualisation des concepts et la structuration de l'étude.

1. Utilisation et fréquence d'intégration des outils numériques

Les enseignants expriment la fréquence par des termes comme « rarement », « parfois » ou « souvent ». Afin d'homogénéiser ces réponses et d'introduire une dimension quantitative à l'analyse, un codage a été appliqué. Chaque réponse relative à la fréquence d'utilisation a ainsi été associée à un score sur une échelle de 0 à 3 : 0 pour une absence d'utilisation, 1 pour une utilisation faible ou ponctuelle, 2 pour une utilisation modérée et 3 pour une utilisation régulière ou fréquente. Ces scores individuels sont regroupés par type d'établissement et niveau d'enseignement, sont présentés dans le Tableau 2 qui constitue une base pour le calcul des fréquences moyennes hebdomadaires d'utilisation des outils numériques par catégorie d'enseignants.

Tableau 2 – Tableau de codage des fréquences hebdomadaires d'utilisation des outils numériques

Groupe	Enseignants et scores individuels (hebdomadaires)
LIAD 2D	P1 : 2, P2 : 3, P3 : 2, P4 : 2, P5 : 1, P6 : 1, P7 : 1, P8 : 2, P9 : 2, P10 : 1
Ecoles privées 2D	PP2-1 : 3, PP2-2 : 1, PP2-3 : 2, PP2-4 : 1
LIAD 1D	E1 : 3, E2 : 2, E3 : 3, E4 : 2, E5 : 3
Lycées publics 2D	PL-1 : 1, PL-2 : 2, PL-3 : 0
Ecoles publiques 1D	EP1 : 0, EP2 : 0

La figure 2 montre la fréquence moyenne d'utilisation des outils numériques selon contextes éducatifs. Les enseignants du premier degré du LIAD affichent une fréquence élevée (2,4), avec une utilisation quotidienne des vidéoprojecteurs et d'applications comme Calcul@TICE. Ceux du second degré (1,7) intègrent régulièrement des logiciels comme GeoGebra et Python pour les mathématiques complexes. Dans les écoles privées du second degré, la fréquence est également élevée (2,33), avec un usage centré sur les calculatrices graphiques. En revanche, les enseignants des lycées publics du second

degré (1) rapportent une faible utilisation, souvent limitée par le manque de ressources. Quant aux écoles publiques du premier degré, les enseignants ne déclarent aucune utilisation d'outils numériques.

L'analyse montre, une diversité d'approches, reflétant l'impact de ces technologies sur l'enseignement les méthodes conventionnelles. Artaud (2019) met en évidence que l'intégration d'un outil dans l'enseignement ne se limite pas à son adoption, mais qu'elle s'inscrit dans un processus plus large d'amalgamation des organisations de savoir et d'étude. Loin de constituer une simple modernisation, cette intégration modifie les équilibres praxéologiques et questionne la place des outils numériques dans les institutions éducatives.

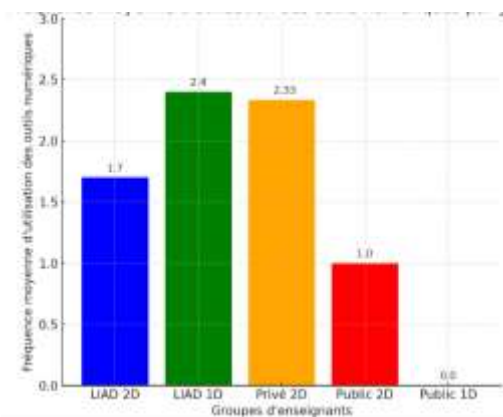


Figure 2 – Fréquence moyenne d'utilisation des outils numériques par groupe

2. Impact sur l'enseignement et articulation avec les méthodes habituelles

L'analyse des pratiques déclarées révèle des approches variées, illustrant l'impact des technologies sur l'enseignement traditionnel. Au LIAD, les enseignants considèrent les outils numériques comme des assistants pour maintenir l'attention des élèves et faciliter les exercices répétitifs (P8). Cela illustre une topogénèse où l'enseignant adapte son rôle tout en gardant le contrôle. En revanche, dans les écoles publiques algériennes du premier degré, les enseignants semblent résister à l'intégration du numérique. « Je préfère suivre les manuels, et les activités avec les outils numériques ne sont pas une priorité » (EP2). Les enseignants du second degré au LIAD adoptent une approche complémentaire, combinant méthodes traditionnelles et numériques : « Je combine toujours les deux : on commence par des exercices sur papier, puis j'introduis GeoGebra pour vérifier et illustrer » (P4). Dans les écoles privées algériennes du second degré, l'utilisation des outils numériques se concentre sur la préparation aux examens : « Nous utilisons surtout les outils numériques pour les exercices exigés par le programme, comme Python, qui sera au bac » (PP2-2). Enfin, dans les lycées publics algériens du second degré, l'intégration des outils numériques dépend souvent des initiatives personnelles des enseignants, comme PL-2, qui utilise son propre matériel pour les exercices avec GeoGebra.

3. Implication des élèves et effets perçus sur l'engagement

Les témoignages des enseignants révèlent que la perception de l'impact des outils numériques sur l'engagement des élèves varie selon le contexte éducatif et les ressources disponibles. Au LIAD, l'utilisation de GeoGebra est perçue comme essentielle par les professeurs du second degré, tant pour l'apprentissage des élèves que pour leur propre légitimité. P7 souligne que ces ressources sont omniprésentes pour les élèves : « C'est dans l'air du temps, les élèves sont habitués aux outils numériques. Si on passe à côté, c'est un problème car les outils font partie de leur quotidien ». Elle précise que ne pas les exploiter peut donner l'impression d'être déconnecté des attentes des élèves. P9

insiste également sur leur apport aux élèves à besoins particuliers, en facilitant la manipulation de concepts géométriques complexes. Les approches d'intégration varient : certains enseignants combinent ces technologies avec des méthodes traditionnelles. P4 privilégie une alternance entre exercices sur papier et vérifications interactives via GeoGebra, tandis que P6 estime que la manipulation numérique des concepts abstraits est « un atout pour la compréhension des élèves ». Au premier degré, ces outils sont surtout utilisés pour la gestion de classe. E4 et E1 indiquent qu'ils instaurent un climat d'apprentissage plus serein.

Dans les écoles privées du second degré, l'accent est mis sur la préparation aux examens, avec des outils comme les calculatrices graphiques. PP2-3 exprime néanmoins une réserve : « À quoi bon faire les variations d'une fonction avec une calculatrice si le professeur n'a plus de rôle dans l'explication ? ». Dans les écoles publiques, l'intégration du numérique est limitée par l'absence de ressources adéquates. EP2 et EP1 privilégient encore les méthodes traditionnelles, tandis que dans les lycées publics du second degré, son usage repose principalement sur des initiatives individuelles. Ces observations confirment celles de Soury-Lavergne (2020), qui souligne que les environnements de géométrie dynamique ne modifient pas fondamentalement les pratiques d'enseignement. Comme l'analyse Dubasque (2019), la question du numérique dépasse le simple accès aux outils et interroge les transformations pédagogiques et sociales qu'ils induisent. Dans cette perspective, la distinction entre « numérique » et « digital » est cruciale : le numérique, au-delà des outils, façonne les pratiques et les attentes des enseignants et des élèves.

L'analyse des entretiens montre des usages variés selon les contextes éducatifs. Au LIAD, GeoGebra est mobilisé en 5e pour les triangles (P6) et la symétrie axiale et centrale (P4). D'autres enseignants, comme P2 en 4e, l'exploitent pour l'optimisation. Au premier degré, E2 et E3 utilisent des animations 3D et des plateformes d'e-learning pour engager les élèves. Dans les écoles privées du second degré, GeoGebra est utilisé pour la visualisation de sections planes et l'optimisation de fonctions (PP2-4, PP2-1). Dans les lycées publics, il est principalement exploité avec les calculatrices graphiques (PL-1, PL-3), tandis que PL-2 l'emploie pour l'enseignement des statistiques. Ces témoignages illustrent à la fois l'impact du numérique sur l'engagement des élèves et la diversité des pratiques selon les contextes. Comme le souligne Assude (2009, 2010), la valeur didactique des outils numériques ne réside pas uniquement dans leur fonctionnalité technique, mais dans leur capacité à restructurer les situations d'apprentissage.

4. Obstacles et défis rencontrés dans l'intégration des outils numériques

Cette section aborde les défis rencontrés par les enseignants lors de l'intégration des outils numériques, illustrant les problèmes matériel, organisationnel et pédagogique spécifiques à chaque contexte éducatif. Au LIAD, des professeurs du second degré signalent un manque criant de ressources matérielles, limitant l'utilisation efficace des technologies : P8 note un « manque de matériel disponible » comme un obstacle majeur, et P5 indique que « l'accès limité aux ressources informatiques réduit leur utilisation ». Pour les enseignants du premier degré, les obstacles comprennent non seulement des insuffisances infrastructurelles, mais aussi un manque de formation adéquate, exacerbant les difficultés d'intégration des technologies.

Dans les écoles privées du second degré, outre les défis matériels, une réticence au changement du rôle traditionnel de l'enseignant est observée : « Je ne maîtrise pas vraiment ces choses-là... Mes élèves me dépassent dans ce domaine » (PP2- 4). PP2-3, quant à lui, déplore le manque de soutien institutionnel, freinant une adoption plus large. Dans les lycées publics, une dépendance excessive des élèves aux outils numériques, qui peut parfois conduire à un apprentissage plus passif (PL-1). Enfin,

dans les écoles publiques du premier degré, EP2 et EP1 rapportent un manque de ressources et d'accompagnement, soulignant que « le manque de facilités limite sévèrement l'opportunité d'intégrer la technologie dans l'enseignement » (EP1). Ces témoignages mettent en lumière la diversité des défis à surmonter pour intégrer durablement les outils numériques dans les pratiques. Comme le souligne (Artaud, 2019), l'écologie des systèmes didactiques influence la manière dont ces outils sont perçus et adoptés, l'absence de conditions favorables pouvant limiter leur transformation en artefacts didactiques pleinement exploités. Dans le même sens, (Wozniak, 2020) insiste sur l'importance des besoins praxéologiques des enseignants : leur équipement en savoirs et en pratiques joue un rôle clé dans leur capacité à s'approprier ces outils et à les intégrer dans leurs dispositifs d'enseignement.

V. DISCUSSION ET CONCLUSION

L'intégration des médias numériques dans l'enseignement des mathématiques au cycle 3 présente des défis complexes ainsi que des opportunités pour transformer les pratiques pédagogiques. Bien que les enseignants reconnaissent leur potentiel, ces outils restent souvent cantonnés à des démonstrations visuelles, sans intégration profonde dans des activités d'apprentissage spécifiques, rejoignant en cela les constats établis par Artigue (2011). Cette utilisation restreinte ne permet pas d'exploiter pleinement l'interactivité de ces outils pour renforcer la compréhension des concepts mathématiques. Selon leurs déclarations, ces ressources servent davantage à illustrer la modernité des méthodes pédagogiques qu'à opérer une réelle transformation de l'enseignement. Ces constats soulignent également la persistance des approches classiques, même dans des environnements enrichis par le numérique, et mettent en évidence des résistances à leur adoption. Or, selon Assude (2007), bien que ces ressources numériques puissent sembler remettre en question le rôle traditionnel du professeur, elles offrent en réalité des occasions de renouveler les pratiques pédagogiques si elles sont intégrées de manière réfléchie. Leur usage ne doit pas remplacer les méthodes classiques, mais favoriser une complémentarité (Assude, 2007).

Les défis rencontrés, notamment le manque de ressources matérielles et de formation, déjà soulignés par Wozniak (2020), apparaissent particulièrement prégnants dans l'enseignement public. Ils rappellent l'importance d'un accompagnement structuré et d'une mise en œuvre progressive. L'usage du numérique en mathématiques ouvre des perspectives d'évolution. Il ne doit pas être envisagé comme une simple substitution, mais comme une opportunité d'enrichissement didactique. Mobilisées avec pragmatisme, les ressources numériques peuvent préparer aux examens, approfondir l'apprentissage et favoriser des approches dynamiques. Elles modifient les équilibres de la géométrie scolaire et offrent des pistes pour une intégration ancrée dans les pratiques effectives.

RÉFÉRENCES

- Artaud, M. (2003, juin). *Analyser des praxéologies mathématiques et didactiques « à calculatrice » et leur écologie* [Communication]. Reims, France. <https://edutice.hal.science/edutice-00001315v1>
- Artaud, M. (2019). Des liens entre l'organisation du savoir et l'organisation de l'étude dans l'analyse praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 21(4), article 4. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p248-264>
- Artigue, M. (2013). L'impact curriculaire des technologies sur l'éducation mathématique. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 295-305.

- Assude, T. (2007). Changements et résistances à propos de l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement mathématique au primaire. Dans *Actes de la conférence TICEMED 4, "L'humain dans la formation à distance: la problématique du changement"*, 31 mai au 2 juin 2007, Université Paul Cézanne Aix-Marseille III, France. <https://isd.univ-tln.fr/PDF/isd29/ASSUDE.pdf>
- Assude, T., Bessières, D., Combrouze, D. et Loisy, C. (2010). Conditions des genèses d'usage des technologies numériques dans l'éducation. *Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Éducation et la Formation*, 17(1), 79-102. <https://doi.org/10.3406/stice.2010.1003>
- Assude, T. et Loisy, C. (2009). Plus-value et valeur didactique des technologies numériques dans l'enseignement. Esquisse de théorisation. *Revista Quadrante*, 18(1-2), 7-28.
- Chevallard, Y. (2007a). *Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=147
- Chevallard, Y. (2007b, 31 oct.-3 nov.). TAD - Pistes et Jalons - Didirem [Communication]. IIe Congrès international sur la TAD, Uzès, France. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/TAD_-_Pistes_Jalons_-_Didirem.pdf
- Dubasque, D. (2019). Qu'est-ce que le « numérique » ? Regards sur le champ lexical qui l'accompagne (Préface). Dans V. Meyer (dir.), *Comprendre et maîtriser les excès de la société numérique* (p. 17-22). Presses de l'EHESP.
- Guille-Biel Winder, C. et Assude, T. (2023). Articulations between tangible space, graphical space and geometrical space: Resources, practices and training.
- Ministère de l'Éducation Nationale d'Algérie. (2008). *Loi d'orientation sur l'éducation nationale*. <https://www.education.gov.dz/wp-content/uploads/2015/02/loi0804fr.pdf>
- Ministère de l'Éducation Nationale d'Algérie. (2022). *Référentiel des programmes*. <https://www.ens-oran.dz/images/cours-en-ligne/cours%20en%20ligne%20franais/R%C3%A9f%C3%A9rentiel%20des%20programmes.pdf>
- Ministère de l'Éducation Nationale d'Algérie. (2024). *Technologie et éducation en Algérie*. <https://education-profiles.org/fr/afrique-du-nord-et-asie-occidentale/algerie/~technologie>
- Ministère de l'Éducation Nationale et de la Jeunesse (France). 2023 *Synthèse de la stratégie numérique pour l'éducation 2023-2027*. <https://www.education.gouv.fr/strategie-du-numerique-pour-l-education-2023-2027-344263>
- Schneuwly, B. (2007). Note critique de [Sensevy G. et Mercier A. (dir.). Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et des élèves. PUR]. *Revue française de pédagogie : Recherches en éducation*, (160), 174-177. <https://doi.org/10.4000/rfp.906>
- Soury-Lavergne, S. (2006, 27-31 mai). Instrumentation du déplacement dans l'initiation au raisonnement déductif avec Cabri-géomètre [Communication]. Colloque de la Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke, Sherbrooke.
- Soury-Lavergne, S. (2020). La géométrie dynamique pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Cnesco. https://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2021/02/210218_Cnesco_Soury-Lavergne_Numerique_Geometrie_dynamique.pdf
- Wozniak, F. (2020). Les besoins praxéologiques du professeur. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 22(4), 787-800. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p787-800>

UTILISATION DES OUTILS GRAPHIQUES INTERACTIFS DYNAMIQUES POUR FAVORISER LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE MATHÉMATIQUE : UNE ÉTUDE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES

| KHALLOUFI-MOUHA* FATEN

Résumé | Cet article explore l'utilisation des outils graphiques dynamiques interactifs, construits dans des environnements de géométrie dynamique, comme des outils de médiation sémiotique et discursive pour soutenir l'apprentissage des élèves. En adoptant une approche discursive et sémiotique et à travers une étude de cas centrée sur l'utilisation de la situation Poulie dans Cabri, l'article examine comment ces outils aident à introduire et institutionnaliser des concepts abstraits, tels que la mesure d'un arc orienté, dans une classe de 2^e année secondaire (16-17 ans) en Tunisie. Les résultats, structurés autour de cinq projets focaux de l'enseignant, identifiés lors de l'analyse d'une discussion collective, soulignent l'importance de ces outils comme médiateurs pour favoriser la pensée mathématique abstraite, gérer les conflits commognitifs et guider les élèves vers un discours mathématique formalisé. L'étude conclut par des implications pour la conception d'outils pédagogiques efficaces et la formation des enseignants à l'exploitation de leur potentiel sémiotique et discursif dans l'enseignement des mathématiques.

Mots-clés : outils graphiques interactifs dynamiques, pratiques enseignantes, cadre discursif et sémiotique, environnements de géométrie dynamique

Abstract | This article explores the use of dynamic interactive graphical tools, constructed within dynamic geometry environments, as semiotic and discursive mediation tools to support student learning. By adopting a discursive and semiotic approach and through a case study focused on the use of the Pulley Situation in Cabri, the article examines how these tools help introduce and institutionalize abstract concepts, such as the measure of an oriented arc, in a second-year secondary school class (16-17 years old) in Tunisia. The results, structured around five teacher focal projects identified during the analysis of a collective discussion, highlight the importance of these tools as mediators for fostering abstract mathematical thinking, managing commognitive conflicts, and guiding students toward formalized mathematical discourse. The study concludes with implications for the design of effective pedagogical tools and the training of teachers in leveraging their semiotic and discursive potential in mathematics education.

Keywords: Dynamic interactive graphical tools, teaching practices, discursive and semiotic framework, dynamic geometry environments

I. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

En dépit de l'abondance des travaux portant sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques avec l'utilisation d'outils technologiques, il demeure essentiel d'approfondir notre compréhension de la manière dont les enseignants exploitent les potentialités de ces outils en classe, ainsi que d'explorer comment leurs usages spécifiques influencent l'apprentissage des élèves. Hoyles et al. (2013) soulignent que le principal défi de l'intégration des ressources technologiques réside dans la compréhension de leur utilisation en contexte scolaire pour favoriser des changements effectifs et améliorer les apprentissages en mathématiques. Dans cette perspective, ce travail propose, à travers une étude de cas, d'analyser l'exploitation des potentialités discursives et sémiotiques d'un logiciel de géométrie dynamique par un enseignant, en vue de soutenir le développement de la pensée mathématique chez les élèves.

* Faculté des Sciences de Bizerte, Université de Carthage, 7021 Bizerte – Tunisia – fkhalloufi@fsb.ucar.tn

Les logiciels de géométrie dynamique permettent de construire des objets dynamiques et interactifs, offrant une rétroaction immédiate sous forme de changements visuelles et dynamiques résultant des actions de l'utilisateur. Ces changements reflètent des propriétés mathématiques sous-jacentes. L'utilisation de ces objets en classe influence l'interaction entre les acteurs et façonne les pratiques des enseignants (Khalloufi-Mouha et Brini, 2022 ; Khalloufi-Mouha, 2024). De plus, ces objets dynamiques et interactifs peuvent susciter l'émergence de formes de discours encore informelles, basées sur leur manipulation directe, mais riches en significations mathématiques. Ces discours contiennent des récits que l'enseignant ou un expert peut interpréter dans un discours mathématique (Antonini et al., 2020 ; Khalloufi-Mouha, 2022).

Dans l'objectif de contribuer aux travaux explorant la problématique des pratiques enseignantes lors de l'intégration d'un environnement informatique et le rôle de l'enseignant dans l'exploitation de ces outils pour promouvoir l'apprentissage des élèves, cette étude focalise son attention sur l'utilisation d'outils graphiques dynamiques interactifs et examine comment ces outils peuvent être utilisés en tant que médiateurs discursifs et sémiotiques permettant de soutenir l'évolution chez les élèves d'un discours contextualisé lié à une pensée empirique vers un discours mathématique. L'étude s'appuie sur le cadre théorique et analytique développé dans Khalloufi-Mouha (2022) à travers la combinaison de la théorie de la médiation sémiotique et l'approche commognitive, et vise à identifier comment l'enseignant peut utiliser les potentialités sémiotiques et discursives de ces outils dynamiques et interactifs pour favoriser le développement d'un discours mathématique chez les élèves.

II. OUTILS GRAPHIQUES DYNAMIQUES INTERACTIFS

Lors des dernières années, plusieurs travaux se sont intéressés aux caractéristiques du discours développé par les élèves lors de l'utilisation d'environnements de géométrie dynamique (EGD). Dans cette perspective, Ng (2016) a distingué les médiateurs visuels dynamiques des médiateurs visuels statiques. Cette distinction a été approfondie par Antonini et al. (2020), Baccaglini-Frank (2021) et Weingarden et al. (2024) qui ont introduit la notion de médiateurs dynamiques et interactifs (DIM *dynamic interactive mediators*). Ces objets numériques, construits dans des environnements technologiques, peuvent être manipulés et fournissent une rétroaction immédiate sous forme de changements dynamiques. Pour les experts en mathématiques, ces changements représentent des réalisations d'objets mathématiques (Baccaglini-Frank, 2021). Les auteurs ont souligné le potentiel de l'interactivité et du dynamisme de ces médiateurs dans le processus de construction de significations mathématiques. Intégrés comme outils pédagogiques, ils permettent une exploration concrète des concepts abstraits via la manipulation de représentations graphiques et algébriques, ce qui peut favoriser un engagement et une participation active des élèves en classe (Baccaglini-Frank, 2021 ; Lisarelli, 2023). En se plaçant dans la lignée de ces travaux, cet article focalise son attention sur un type particulier des médiateurs dynamiques interactifs : les *médiateurs graphiques dynamiques interactifs*. Ces derniers représentent une simulation de situations concrètes manipulables directement par les élèves dans un environnement de géométrie dynamique, tout en fournissant une rétroaction interprétable par un expert en terme de relations mathématiques. Grâce à leurs potentialités sémiotiques et discursives, ces médiateurs peuvent permettre aux élèves de développer une signification personnelle en lien avec les rétroactions fournies et de s'engager dans l'élaboration de récits susceptibles d'évoluer vers la construction des objets mathématiques visés. Ce travail explore la façon dont l'enseignant exploite les potentialités sémiotiques et discursives de ces médiateurs graphiques dynamiques interactifs pour promouvoir l'apprentissage de concepts mathématiques abstraits.

III. CADRE THÉORIQUE

Le travail est basé sur l'utilisation l'approche sémiotique et discursive (ASD) développée dans Khalloufi-Mouha (2022) à travers la combinaison de la théorie de la médiation sémiotique (Bartolini-Bissi et Mariotti, 2008) et l'approche commognitive (Sfard, 2008). Cette approche s'intéresse à la communication mathématique en classe, en particulier dans le cas de l'utilisation d'une ressource technologique comme les environnements de géométrie dynamique. L'ASD introduit le concept de « *projet focal de l'enseignant* » comme une unité d'analyse des actions discursives et sémiotiques de l'enseignant et propose le schème analytique associé à ce concept comme outil d'analyse afin de l'opérationnaliser (Khalloufi-Mouha, 2022). Le projet focal de l'enseignant est défini comme « le projet dans lequel l'enseignant cherche à engager ses élèves et qu'il interprète comme son obligation pour avancer dans son activité d'enseignement. » (Khalloufi-Mouha, 2022, p.157). Un projet focal de l'enseignant peut être décelé à travers les outils de communication qu'il utilise dans ses différentes interventions. Ainsi, chaque projet focal est caractérisé essentiellement par le vocabulaire utilisé et par les médiateurs visuels et sémiotiques mis en œuvre par l'enseignant. Dans le cas de ce travail, l'analyse des différents projets focaux de l'enseignant permettra d'identifier comment l'enseignant peut utiliser les outils graphiques dynamiques interactifs, construits à l'aide des environnements de géométrie dynamique, comme des outils de médiation sémiotique et discursive pour promouvoir la construction des objets mathématiques visés. L'analyse se focalise sur deux niveaux : *le niveau de spécialisation* (repérer si le discours relève du domaine des mathématiques) et *le niveau d'objectivation* (étudier dans le discours de l'enseignant les différents niveaux de l'évolution des significations mathématiques qui émergent de l'interaction de plusieurs signes articulés dans une ou plusieurs interventions de l'enseignant pour guider le processus d'objectivation). L'étude des projets focaux de l'enseignant ne se limite pas à l'analyse unilatérale de son discours en négligeant celui de l'élève. Le concept de projet focal (PF) offre une perspective qui examine la communication en classe principalement sous l'angle du discours de l'enseignant. Ainsi, l'utilisation de l'ASD permet d'éclairer la façon dont les médiateurs dynamiques sont utilisés par l'enseignant pour faire évoluer le discours des élèves vers un discours mathématique portant sur les concepts en jeu. Le travail est guidé par la question de recherche suivante : *Dans quelle mesure l'enseignant peut-il faire recours à des outils graphiques dynamiques interactifs construits à l'aide d'un EGD, comme médiateurs sémiotiques et discursifs pour permettre aux élèves de passer d'un discours empirique vers un discours mathématique ?*

Pour explorer cette question, cet article présente l'étude de cas d'un enseignant qui a fait appel à l'environnement de géométrie dynamique Cabri et à la situation Poulie (Genevès, Laborde et Soury-Lavergne, 2005 ; Khalloufi-Mouha, 2009) pour introduire la notion de mesure d'un arc orienté à des élèves de 2^e année de l'enseignement secondaire Tunisien (16/17 ans)

IV. DESCRIPTION DU MÉDIATEUR GRAPHIQUE UTILISÉ DANS CETTE ÉTUDE

La situation Poulie développée dans Cabri propose un outil graphique interactif qui représente une poulie autour de laquelle une ficelle est enroulée (voir Figure 1). La première extrémité de la ficelle est représentée par le point M qui se déplace sur la poulie lorsque la ficelle est enroulée ou déroulée en utilisant l'outil déplacement de Cabri. La deuxième extrémité de la ficelle, représentée par le point G, peut être déplacée vers le haut ou vers le bas en utilisant l'outil déplacement afin d'expérimenter l'idée de l'enroulement. La longueur de la ficelle peut être augmentée ou diminuée à travers le déplacement des extrémités du segment [AB], ce qui permet de réaliser plusieurs tours. L'apport de cet outil graphique consiste essentiellement à fournir un champ d'expérimentation de la métaphore de

l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique où la ficelle est utilisée comme un signe qui fait référence à la droite des réels.

Lors de la phase de travail par binôme, les élèves ont pu expérimenter la situation et la possibilité de passer par le point N plusieurs fois. Ce qui correspond à des mesures positives différentes de l'arc orienté d'origine I et d'extrémités N . L'analyse des discussions des différents binômes (Khalloufi-Mouha, 2014) a permis de déceler la coexistence d'une interprétation géométrique et numérique de la partie de la ficelle enroulée autour de la poulie. À travers une interprétation de la partie de la ficelle autour de la poulie comme étant un arc géométrique et de sa longueur comme étant la longueur de cet arc. En se basant sur l'activité des élèves et leur expérience de l'idée de l'enroulement, l'enseignant a cherché à mettre en place une discussion collective afin d'introduire la mesure algébrique d'un arc orienté.



Rayon de la poulie 1,00 cm

Longueur de la ficelle : $AB = 12,58$ cm

longueur de ficelle enroulée sur la poulie : 2,55 cm

Périmètre de la poulie : 6,31 cm

La ficelle est enroulée autour de la poulie de 0,40 tour

Placez le point N sur la poulie de façon que la longueur de l'arc d'extrémités I et N soit égale à 3.

1/ Quelle est la longueur de la ficelle nécessaire pour que le point N soit atteint par M pour la première fois ? Quelle est la longueur nécessaire pour atteindre N pour la deuxième fois ? puis la cinquième fois ? Conclure.

2/ On choisit un réel x négatif. Peut-on placer sur le cercle un point N qui correspond à ce réel. Expliquez

Figure 1 – Activité proposée aux élèves lors de la phase de travail par binôme.

V. MÉTHODOLOGIE

1. Dispositif expérimental

La séquence a été mise en place dans une classe de 16 élèves de 2^e année (16–17 ans) d'un lycée secondaire de la région de Bizerte, en Tunisie, dans un laboratoire d'informatique où les élèves étaient placés par binômes. Le déroulement de l'expérimentation a eu lieu en dehors des séances d'enseignement et les élèves ayant participé étaient volontaires. Les données recueillies comportent les enregistrements de la séance, les enregistrements des discussions lors de la phase de travail par binôme, les fichiers Cabri des élèves ainsi que leurs fiches de travail.

L'objectif mathématique de la séquence d'enseignement analysée est d'introduire l'objet mathématique arc orienté et la mesure d'arc orienté. Les élèves connaissent déjà la définition d'un arc géométrique et la longueur d'un arc géométrique dans le cadre d'une géométrie non orientée. L'introduction de l'arc orienté est un moment important au niveau du programme des mathématiques qui marque le passage vers la géométrie orientée et qui est source de beaucoup de difficultés chez les élèves (Khalloufi-Mouha, 2009).

2. La méthodologie d'analyse

La méthodologie d'analyse des données recueillies est basée sur l'utilisation du schème analytique (Tableau 1) pour analyser le discours de l'enseignant et l'interaction en classe lors de la phase de discussion collective. Le schème analytique regroupe un ensemble de critères formulés sous forme de questions permettant de guider l'analyse des données. La réponse à ces questions peut être décelée directement dans les différentes interventions de l'enseignant, à travers un ensemble d'indicateurs verbaux et textuels

Tableau 1 – Schème analytique utilisée pour explorer le discours de l'enseignant

Caractéristiques du discours de l'enseignant	Questions guidant l'analyse	Indicateurs pour l'analyse
Vocabulaire lié à l'utilisation de l'outil graphique	Processus de spécialisation - Quelles sont les caractéristiques du vocabulaire utilisé par l'enseignant lors de la discussion collective ? - Comment le vocabulaire évolue-t-il au fur et à mesure de l'utilisation des médiateurs graphiques dynamiques ? - Dans quelle mesure le vocabulaire est-il en lien avec l'objet mathématique visé ?	- Catégories des signes verbaux utilisés : artefact (lié directement à l'objet graphique), pivot ou mathématiques. - Les expressions et les énoncés produits par l'enseignant sont en lien avec l'outil graphique ou avec l'objet mathématique.
	Processus d'objectivation - Les interventions de l'enseignant portent-elles sur les processus ou sur les propriétés de l'objet en jeu ? - Comment l'enseignant exploite-t-il les transformations visibles des graphiques pour guider les élèves vers une abstraction ? - comment s'opère le passage des objets concrets vers les objets abstraits (réification) ? - Est-ce que l'enseignant utilise des termes communs pour regrouper des objets ayant un caractère commun (saming) ? - Est-ce que les interventions de l'enseignant évoquent les objets relatifs à l'objet mathématique en jeu de façons séparées ou comme propriétés du même objet ? (encapsulation)	- Passage de l'utilisation de verbes d'action vers des noms (nominalisation). - Transitions de la description de l'outil graphique et les rétroactions vers un vocabulaire formel (réification). - Vocabulaire spécifique lié aux rétroactions dynamiques de l'outil. - Utilisation de signes ou termes abstraits pour décrire les objets mathématiques. - Focalisation sur des processus ou des propriétés mathématiques observées via les graphiques dynamiques. - Encapsulation des processus en objets abstraits. - Introduction de nouveaux termes pour grouper un ensemble des aspects de l'objets graphique ayant des propriétés communes observées lors sa manipulation.- Passage à l'utilisation de termes mathématiques spécialisés pour remplacer un discours sur les processus (il s'agit de l'encapsulation des processus en un objet).

Caractéristiques du discours de l'enseignant	Questions guidant l'analyse	Indicateurs pour l'analyse
Médiateurs visuels lié à l'utilisation de l'outil graphique	- Quels sont les types de médiateurs visuels utilisés et comment sont-ils introduits ? - Quelles interactions entre les médiateurs visuels et discursifs sont observées ?	- Identification des types de médiateurs visuels introduits (symboles, graphiques ou autre). - Interaction entre les graphiques et le discours de l'enseignant. - Références explicites aux rétroactions dynamiques des graphiques dans le discours. - Interprétation mathématique des phénomènes observés dans les graphiques.

VI. RÉSULTATS

L'objectif de cette étude est d'explorer comment l'enseignant utilise des médiateurs graphiques dynamiques interactifs comme des outils de médiation sémiotique et discursive afin de promouvoir l'apprentissage des élèves. Plus précisément, l'analyse se concentre sur l'exploitation de la situation Poulie dans Cabri par l'enseignant pour orchestrer les échanges en classe, faire émerger des significations mathématiques et guider les élèves dans la transition entre un discours contextualisé lié aux pratiques empiriques et le discours mathématique lié à une conceptualisation théorique de l'objet mathématique en jeu.

L'analyse de la discussion collective a permis d'identifier cinq projets focaux (Khalloufi-Mouha, 2022).

- PF1 : Démarrage de la discussion collective et initiation au partage des significations personnelles élaborées à la suite de l'exploration de l'outil graphique
- PF2 : Utilisation de la situation Poulie afin d'amener les élèves à se rendre compte de l'existence de plusieurs mesures algébriques de l'arc orienté
- PF3 : Retour sur la définition déjà introduite de l'arc orienté afin de résoudre le Conflit Commognitif
- PF4 : Retour sur l'activité avec la situation Poulie afin de surmonter le conflit commognitif et justifier l'existence de plusieurs mesures pour un arc orienté
- PF5 : Co-construction de l'expression de la mesure algébrique d'un arc orienté

Dans le PF1, l'enseignant fait une référence directe à la manipulation de l'outil graphique « situation Poulie » et à l'enroulement de la ficelle autour de la poulie. Cette référence a permis à l'enseignant d'initier le processus de confrontation entre les différentes significations personnelles pour guider les élèves vers l'élaboration d'une signification commune partagée par toute la classe et institutionnalisée par l'enseignant. Cela constitue une initiation au processus sémiotique qui s'appuie sur l'interaction avec l'outil graphique dynamique comme une activité partagée par tous les élèves.

Les diverses interventions des élèves se sont caractérisées par un discours contextualisé basé sur l'utilisation de signes contextualisés en décrivant leur activité à travers l'utilisation de la situation Poulie et en identifiant les régularités observées. Leurs interventions ont révélé leur implication dans le projet focal de l'enseignant. L'exemple de l'intervention de Ikbel illustre les remarques précédentes « Ikbel: On a enroulé la ficelle pour atteindre N, la première fois c'est 3, pour la deuxième fois c'est 3 plus un tour du cercle c'est-à-dire le périmètre et comme ça on ajoute à chaque fois le périmètre ».

Dans le PF2, l'enseignant a cherché à amener les élèves à se rendre compte de l'existence de plusieurs mesures de l'arc orienté IN en s'appuyant sur leur activité avec la situation Poulie et sur leurs connaissances antérieures sur l'objet arc géométrique pour introduire le nouvel objet « arc orienté » et ses mesures. Dans ses interventions, l'enseignant fait une référence directe à la situation Poulie en utilisant des signes verbaux qui évoquent l'idée d'enroulement. Par la suite, l'enseignant a introduit une interprétation mathématique de la longueur de la ficelle enroulée comme étant une mesure de l'arc orienté d'origine I et d'extrémité N en évoquant l'existence de plusieurs mesures. L'étude du discours de l'enseignant a permis d'identifier une évolution au niveau du processus d'objectivation de la mesure d'arc orienté à travers l'interprétation mathématique de l'activité d'enroulement.

L'étude des différents projets focaux de l'enseignant ont permis de déceler sa façon d'utiliser la situation Poulie comme un outil sémiotique et discursif qui favorise la transition de l'expérience pratique (enroulement) vers l'interprétation théorique (mesures multiples) et par la suite vers une abstraction algébrique (expression de la mesure d'un arc orienté). Cela s'est traduit à travers une évolution du discours de l'enseignant, marqué par un passage d'une description contextuelle basée sur l'utilisation de verbes d'action tels que (« enrouler », « faire un tour ») à une conceptualisation mathématique basée sur l'utilisation d'un vocabulaire mathématique (« mesure de l'arc orienté », « Périmètre du cercle »). La participation des élèves dans la discussion a fait apparaître leur engagement dans les PF de l'enseignant en particulier le PF1 et PF2.

L'évolution de la discussion collective orchestrée par l'enseignant a été également marquée par un conflit commognitif¹ du fait que l'enseignant et les élèves ont utilisé deux discours qui peuvent être qualifiés d'incommensurables, c'est-à-dire, qui diffèrent au niveau des règles qui régissent l'activité mathématique. Le discours des élèves porte sur l'arc géométrique et relève de la géométrie non orientée où l'arc est un ensemble de points du cercle, caractérisé par une mesure positive qui ne dépasse pas le périmètre du cercle. Alors que, le discours de l'enseignant porte plutôt sur l'arc orienté, conçu comme une classe d'équivalence admettant une infinité de mesures qui diffèrent à 2π près. Afin de dépasser ce conflit, l'enseignant s'est également basé sur le rôle de l'outil graphique dynamique en tant qu'outil de médiation sémiotique et discursive. En fait, l'enseignant a fait un retour à l'activité d'enroulement dans la situation Poulie pour justifier les différentes mesures de l'arc orienté. Ce retour illustre le fonctionnement de la situation Poulie en tant qu'outil de médiation sémiotique pour justifier la pluralité des mesures d'un arc orienté. L'enseignant relie les actions concrètes (enroulement de la ficelle) à des concepts abstraits (droite des réels), renforçant ainsi la médiation entre expérience tangible et compréhension théorique. Dans cette perspective le discours de l'enseignant s'est caractérisé par une modification du vocabulaire utilisé pour permettre un passage à une interprétation abstraite de la ficelle enroulée comme droite des réels, ainsi que le passage vers l'utilisation d'un vocabulaire mathématique. À titre d'exemple, l'utilisation du terme « arc orienté » constitue un moment clé dans la discussion qui annonce un changement au niveau de l'objet mathématique en jeu. Cette façon d'utiliser des potentialités sémiotiques et discursives de la situation Poulie a été essentiellement attachée aux PF3 et PF4.

En lien avec le PF5 relatif à la co-construction de l'expression algébrique de la mesure d'un arc orienté, la situation Poulie continue à être utilisée par l'enseignant comme un outil de médiation sémiotique et discursive afin de guider les élèves à la formalisation algébrique de la mesure algébrique d'un arc orienté. En fait, l'enseignant s'est appuyé sur le caractère dynamique et interactif de l'outil graphique pour guider les élèves vers une formalisation mathématique reconnue par la communauté

¹ Sfard (2008) définit le concept de conflit commognitif comme étant « *the encounter between interlocutors who use the same signifiers (words or written symbols) in different ways or perform the same mathematical task according to differing rules* » (p. 161).

qui correspond à l'expression générale de la mesure algébrique de l'arc orienté $IN = 3 + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

VII. CONCLUSION

L'objet de cette étude est d'explorer l'utilisation en classe d'un outil graphique dynamique interactif par l'enseignant, comme un outil de médiation sémiotique et discursive. Les résultats obtenus à travers l'étude de cas présenté dans cet article ont permis de faire apparaître comment l'enseignant a exploité les potentialités sémiotiques et discursives de la situation Poulie pour amener les élèves à construire la signification mathématique de la mesure algébrique d'un arc orienté. En fait, l'enseignant s'est appuyé sur l'aspect dynamique et interactif de la situation Poulie, expérimenté par tous les élèves lors de la phase de travail par binôme, pour guider les élèves à construire la signification mathématique de la mesure algébrique d'un arc orienté qui constitue un concept clé dans la transition de géométrie non orientée vers la géométrie orientée. L'articulation entre les signes contextualisés (signes artefact liés à la manipulation directe avec l'outil graphique), les signes mathématiques et les signes pivots (Bartolini-Bussi et Mariotti, 2008) a permis à l'enseignant de faire le lien entre le contexte empirique et le contexte mathématique afin d'initier chez les élèves un discours mathématique sur la mesure algébrique d'un arc orienté à travers le passage de récits sur la manipulation de l'enroulement dans la situation Poulie vers des récits sur la mesure d'un arc orienté. Cela a été identifié à travers l'étude de l'engagement des élèves dans les projets focaux de l'enseignant.

L'analyse a également révélé l'importance du rôle de l'outil graphique pour gérer le conflit commognitif qui s'est manifesté lors de la discussion qui a été marquée par des retour successifs dans le discours de l'enseignant vers l'expérimentation de l'enroulement de la situation Poulie et les rétroactions fournies, afin d'amener les élèves vers l'interprétation mathématique visée. En fait, l'interprétation numérique de la partie de la ficelle enroulée autour de la poulie a permis d'achever la discussion collective par une co-construction de la formule algébrique de la mesure d'un arc orienté.

Les résultats obtenus permettent de confirmer que l'exploitation de la part de l'enseignant des aspects dynamiques et interactifs d'un outil graphique dans un EGD fournit aux élèves la possibilité de développer à partir de leurs interactions avec cet outil un discours mathématique sur des objets mathématiques abstraits. Les résultats permettent également de souligner l'importance pour l'enseignant d'élaborer ou de choisir des outils graphiques dynamiques interactifs appropriés pouvant être utilisés comme des outils sémiotiques et discursifs permettant de promouvoir le développement d'un discours sur les objets mathématiques abstraits basés sur les rétroactions obtenues. Dans cette perspective, un nouveau travail est nécessaire pour étendre cette recherche à d'autres contextes éducatifs et à d'autres outils technologiques pour valider la généralisabilité des mécanismes identifiés. De plus, les résultats de cette recherche pourront appuyer l'exploration, dans un contexte de formation, des pratiques qu'un enseignant doit développer en lien avec l'utilisation des outils graphiques dynamiques interactifs en classe, en tant qu'outils de médiation sémiotique et discursive.

RÉFÉRENCES

- Antonini, S., Baccaglini-Frank, A. et Lisarelli, G. (2020). From experiences in a dynamic environment to written narratives on functions. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6(1), 1-29.
- Baccaglini-Frank, A. (2021). To tell a story, you need a protagonist: how dynamic interactive mediators can fulfill this role and foster explorative participation to mathematical discourse. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 291-312.

- Bartolini Bussi, M. G. et Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. Dans L. D. English, M. G. Bartolini Bussi, G. A. Jones, R. Lesh et D. Tirosh (dir.), *Handbook of international research in mathematics education* (2^e éd. révisée, p. 720-749). Lawrence Erlbaum Associates
- Genevès, B., Laborde C. et Soury-Lavergne S. (2005). The room of transformations and functions with Cabri-geometry. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, (numero speciale), 11-14.
- Hoyles, C., Noss, R., Vahey, P. et Roschelle, J. (2013). Cornerstone mathematics: Designing digital technology for teacher adaptation and scaling. *ZDM Mathematics Education*, 45, 1057-1070.
<https://doi.org/10.1007/s11858-013-0540-4>
- Khalloufi-Mouha, F. (2009). Étude du processus de construction du signifié de fonction trigonométrique chez des élèves de 2^e année section scientifique [Thèse de doctorat inédite]. Université de Tunis.
- Khalloufi-Mouha, F. (2014). Étude de l'évolution des signes langagiers lors d'une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique. *Spirale-Revue de recherches en éducation*, 54(1), 49-63. https://www.persee.fr/doc/spira_0994-3722_2014_num_54_1_1036
- Khalloufi-Mouha, F. (2022). Une stratégie de réseautage pour une analyse sémiotique et discursive des pratiques langagières de l'enseignant lors d'une discussion collective dans une séance intégrant un environnement informatique. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(1), 150-169. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00201-w>
- Khalloufi-Mouha, F. et Brini, M. (2023). Rôles des interactions enseignant-élèves dans l'intégration d'un logiciel de géométrie dynamique : le cas d'un enseignant du primaire en Tunisie. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, 22, 835-855. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00257-8>
- Khalloufi-Mouha, F. (2024). Evolution of teachers' professional learning when using a technological resource: A case study of a Tunisian primary school teacher. *Educational Studies in Mathematics*, 116, 281-306. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10320-w>
- Lisarelli, G. (2023). Transition tasks for building bridges between dynamic digital representations and cartesian graphs of functions. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 9, 31-55
<https://doi.org/10.1007/s40751-022-00121-2>
- Ng, O. L. (2019). Examining technology-mediated communication using a commognitive lens: The case of touchscreendragging in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17, 1173-1193. <https://doi.org/10.1007/s10763-018-9910-2>
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, development of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.
- Weingarden, M., Lisarelli, G. et Baccaglini-Frank, A. (2024). Exploring mathematical learning opportunities afforded by a balanced scale digital activity. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 10, 382-394. <https://doi.org/10.1007/s40751-024-00147-8>

L'IA DANS L'ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES : DÉFIS ET PERSPECTIVES

DANS L'ANALYSE DES ERREURS

| MOUSSITOU* RONALD R.

Résumé | Cet article explore les apports et les défis de l'intelligence artificielle (IA) dans l'analyse des erreurs en mathématiques. L'IA permet une analyse rapide et précise des erreurs, fournissant des feedbacks immédiats et personnalisés, tout en identifiant les patterns récurrents. Toutefois, des défis subsistent, notamment en matière de formation des enseignants et de potentiels biais algorithmiques. L'étude propose une approche hybride, combinant l'expertise humaine et les capacités de l'IA, pour améliorer l'enseignement.

Mots-clés : intelligence artificielle (IA), analyse des erreurs, enseignement des mathématiques, feedback personnalisé, approche hybride

Abstract | This article explores the contributions and challenges of artificial intelligence (AI) in analyzing errors in mathematics. AI enables rapid and precise error analysis, providing immediate and personalized feedback while identifying recurring patterns. However, challenges remain, particularly in teacher training and potential algorithmic biases. The study proposes a hybrid approach, combining human expertise and AI capabilities to improve teaching.

Keywords: Artificial intelligence (AI), error analysis, mathematics education, personalized feedback, hybrid approach

I. INTRODUCTION ET CONTEXTE

L'évaluation en mathématiques joue un rôle crucial dans le processus éducatif, non seulement en mesurant les compétences des élèves mais aussi en guidant les pratiques enseignantes. Pourtant, les défis associés à l'évaluation sont nombreux et complexes. Les enseignants doivent non seulement identifier les erreurs et les lacunes dans les connaissances des élèves, mais aussi interpréter ces informations pour adapter leur enseignement de manière efficace. Cette tâche devient d'autant plus ardue dans des classes de grande taille où les erreurs peuvent être variées et fréquentes.

Dans ce contexte, l'IA émerge comme un outil prometteur pour transformer l'évaluation en mathématiques. Emprin et Richard (2023) suggèrent que l'IA pourrait transformer l'évaluation en facilitant l'automatisation de la correction des réponses, en offrant des feedbacks rapides et précis, et en permettant une analyse systématique des erreurs. Ces auteurs mettent en avant le potentiel de l'IA pour identifier les obstacles rencontrés par les élèves et pour ajuster les enseignements afin de mieux répondre à leurs besoins spécifiques.

L'IA ne se limite pas à la correction des erreurs ; certaines études montrent qu'elle peut potentiellement analyser le raisonnement des élèves ainsi que les preuves instrumentales qu'ils mobilisent lors de la résolution de problèmes. Par exemple, l'IA comme ALEKS (Falmagne et al., 2013) a été utilisée pour identifier les étapes intermédiaires d'un raisonnement mathématique et adapter le feedback en conséquence. Toutefois, son efficacité varie selon les domaines mathématiques et les types d'erreurs, ce qui nécessite des recherches complémentaires. D'après le ministère de l'Éducation du Québec (2022), l'erreur en mathématiques au secondaire peut être un véritable levier pour l'apprentissage lorsqu'elle est analysée correctement et utilisée pour guider l'enseignement.

* Université du Québec à Chicoutimi (UQAC) – Canada – rrmoussito@etu.uqac.ca

L'objectif de cette étude est de discuter des défis et des perspectives de l'utilisation de l'IA dans l'analyse des erreurs en mathématiques. En explorant ces aspects, nous visons à montrer comment l'IA peut devenir un atout majeur pour les enseignants de mathématiques, améliorant à la fois l'efficacité de l'évaluation et la qualité de l'enseignement.

1. Définition des concepts clés

Afin de clarifier les notions abordées dans cette étude, il est essentiel de définir certains concepts fondamentaux liés à l'évaluation des erreurs en mathématiques et à l'usage de l'intelligence artificielle (IA) dans ce domaine.

- **Évaluation** : L'évaluation est un processus permettant de mesurer la progression des élèves, d'identifier leurs difficultés et d'adapter l'enseignement en conséquence (Black et Wiliam, 1998). Elle peut être formative, lorsqu'elle vise à guider l'apprentissage, ou sommative, lorsqu'elle sert à mesurer les acquis à un moment donné.
- **Erreur en mathématiques** : L'erreur ne se limite pas à une réponse incorrecte ; elle constitue un indicateur du raisonnement de l'élève (Brousseau, 2001). Son analyse permet de mieux comprendre les conceptions sous-jacentes et d'orienter les interventions pédagogiques pour corriger les incompréhensions.
- **Intelligence artificielle (IA) en éducation** : L'IA désigne l'ensemble des technologies capables de traiter et d'analyser des données pour prendre des décisions automatisées (Luckin et al., 2016). En éducation, elle est utilisée pour détecter les erreurs des élèves, adapter le contenu d'apprentissage et proposer un retour personnalisé.
- **Personnalisation de l'apprentissage** : Contrairement à la différenciation, qui ajuste l'enseignement en fonction des groupes d'élèves, la personnalisation, facilitée par l'IA, vise une adaptation individualisée du contenu en fonction des erreurs et du rythme d'apprentissage de chaque élève (Tomlinson, 2001).

Cette précision terminologique établit un cadre conceptuel clair, évitant toute ambiguïté dans l'analyse à venir.

II. PRATIQUES DE L'ÉVALUATION DU POINT DE VUE DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

L'évaluation est envisagée ici comme un levier pour favoriser l'apprentissage et améliorer les pratiques enseignantes en mathématiques (Sayac, 2017). Elle ne se limite pas à mesurer les performances : elle sert aussi à comprendre les difficultés des élèves et à guider les ajustements pédagogiques nécessaires.

1. L'évaluation pour améliorer les pratiques enseignantes

Selon Roditi (2011), un enseignant anticipe, dès la préparation de son cours, non seulement la transmission des savoirs mais aussi leur évaluation. Les résultats obtenus, notamment à travers l'analyse des erreurs, l'aident à repenser ses méthodes, adapter ses contenus, et à mieux répondre aux besoins des élèves.

L'évaluation joue ainsi un rôle de régulation didactique. Elle permet aux enseignants de réfléchir à l'efficacité de leur enseignement et d'ajuster leurs pratiques. En ce sens, elle devient un instrument de développement professionnel, contribuant à améliorer la qualité de l'enseignement et à soutenir les apprentissages en mathématiques (Borasi, 2018).

2. *L'évaluation comme levier pour l'apprentissage en mathématiques*

Selon De Ketele (1989), l'évaluation est le processus qui consiste à recueillir un ensemble d'informations pertinentes, valides et fiables, puis à examiner le degré d'adéquation entre cet ensemble d'informations et un ensemble de critères choisis adéquatement en vue de fonder la prise de décision. De ce fait, une orchestration adéquate de l'enseignement par l'enseignant est donc nécessaire pour transformer les données recueillies à travers l'évaluation en un levier pour l'apprentissage des élèves en mathématiques. Le terme « orchestration » emprunté à Trouche (2009), fait ici référence à la manière dont l'enseignant traite et convertit les informations obtenues pour personnaliser son approche pédagogique en fonction des difficultés et des déficits des élèves. Nous nommerons « orchestration transformative » cette démarche dans notre étude. Ce concept va au-delà de la simple application de remédiations ; il implique une transformation active des pratiques enseignantes basées sur une compréhension profonde des erreurs et des besoins des élèves. L'orchestration transformative vise à convertir les données recueillies à travers l'évaluation en actions pédagogiques concrètes et ciblées, ce qui pourrait permettre à l'enseignant d'optimiser l'apprentissage des élèves. Elle est composée de :

- Collecte et Analyse des Données : Utilisation de diverses méthodes d'évaluation pour recueillir des informations détaillées sur les performances des élèves.
- Identification des Erreurs et des Besoins : Analyse des erreurs pour identifier les difficultés spécifiques et les besoins individuels des élèves.
- Adaptation des Pratiques enseignantes : Modification et personnalisation des méthodes d'enseignement en fonction des données analysées.
- Mise en Œuvre des Interventions : Application de stratégies d'enseignement spécifiques pour remédier aux erreurs et soutenir l'apprentissage.
- Suivi et Réévaluation : Évaluation continue de l'impact des interventions et ajustement des pratiques en conséquence.

III. L'ANALYSE DES ERREURS EN MATHÉMATIQUES

L'analyse des erreurs en mathématiques est un outil essentiel en didactique, car elle éclaire les mécanismes d'apprentissage des élèves et oriente les choix pédagogiques. Selon Brousseau (2011), les erreurs sont des indices révélateurs de la construction des savoirs. En abordant cette analyse, nous nous appuyons sur plusieurs théories et recherches pour éclairer la complexité de ce phénomène et proposer différentes méthodologies pour le traiter.

1. *Nature et typologie des erreurs*

Les erreurs en mathématiques peuvent être liées à une tâche particulière, et leur nature varie selon plusieurs facteurs. Selon la théorie des Situations Didactiques, les erreurs peuvent être classifiées de différentes manières, telles que les erreurs systématiques, les erreurs liées aux conceptions erronées, et les erreurs épisodiques ou persistantes (Brousseau, 2001). Cette classification aide à structurer l'approche pédagogique et à identifier les erreurs qui méritent une attention particulière.

Erreurs systématiques et conceptions erronées

Exemple typique (Brousseau, 2001) : L'élève qui écrit $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - b$ peut le faire pour diverses raisons :

- Il pense réellement que $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ en raison d'une simplification excessive ou d'une confusion avec une autre identité mathématique.

- La difficulté de la substitution d'une racine carrée l'a conduit à oublier les termes croisés.
- Un résultat simple semble conforme à ceux que le professeur attend d'habitude.

Erreurs Ontogénétiques et Épistémologiques

Les erreurs ontogénétiques résultent du développement cognitif de l'élève et de ses conceptions intuitives, tandis que les erreurs épistémologiques sont liées aux obstacles rencontrés dans l'histoire de la construction des savoirs mathématiques (Brousseau, 2001). Ces erreurs sont souvent liées à des conceptions correctes dans un contexte mais qui deviennent inappropriées dans un autre. Par exemple, la multiplication vue comme une addition répétée est correcte pour les nombres naturels, mais elle pose problème lorsqu'on aborde les nombres décimaux.

2. Analyse et remédiation

L'analyse des erreurs vise à identifier les conceptions implicites mobilisées par les élèves. Brousseau (2001) propose trois niveaux d'erreurs :

- **Technique** : erreur dans la mise en œuvre d'une procédure.
- **Technologique** : choix inadapté d'une méthode.
- **Théorique** : méconnaissance des concepts sous-jacents.

Différencier les erreurs individuelles des erreurs récurrentes permet de construire des interventions pédagogiques ciblées.

3. Méthodes d'analyse des erreurs

La didactique des mathématiques mobilise une diversité de méthodes pour comprendre la nature des erreurs :

Analyses Factorielles

Les analyses factorielles permettent de regrouper les erreurs selon des structures communes. Cette méthode statistique identifie des dimensions sous-jacentes, telles que des erreurs de procédure ou des confusions conceptuelles. Elle aide à catégoriser les types d'erreurs les plus fréquents selon les domaines mathématiques étudiés.

Techniques Quantitatives

Les questionnaires, tests de performance ou études longitudinales mesurent l'évolution des compétences et l'effet des remédiations. Ces données permettent de justifier des décisions pédagogiques et d'objectiver les effets des interventions (Borasi, 2018).

Approches Symboliques

Les modèles symboliques représentent les raisonnements des élèves sous forme de règles et d'étapes procédurales. Ils permettent d'analyser avec précision les mécanismes cognitifs derrière les erreurs, comme lors de la résolution d'une équation.

Approches Hybrides

Les approches hybrides combinent des techniques issues de l'intelligence artificielle (comme les réseaux de neurones) avec des modèles symboliques. Elles offrent une analyse fine et automatisée de grandes quantités d'erreurs (Emprin et Richard, 2023).

Techniques Qualitatives

Les entretiens, observations en classe ou études de cas apportent une compréhension riche du vécu et des stratégies des élèves. Elles révèlent des éléments souvent invisibles dans les données chiffrées, tels que la perception de la tâche ou l'attitude face à l'erreur (Brousseau, 2009).

Intégration des Méthodes

La combinaison des méthodes qualitatives et quantitatives, ainsi que des modèles symboliques et hybrides, permet une compréhension globale des erreurs. Un protocole peut ainsi commencer par une analyse statistique, se poursuivre par une enquête qualitative, et aboutir à des outils d'intervention adaptés et évalués.

En didactique des mathématiques, l'erreur est une porte d'entrée vers la compréhension des apprentissages. Son analyse, fondée sur une diversité de méthodes rigoureuses, permet non seulement d'interpréter les difficultés des élèves, mais aussi de concevoir des stratégies pédagogiques pertinentes et efficaces.

IV. LES APPORTS DE L'IA DANS L'ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES : ANALYSE DES ERREURS

L'intelligence artificielle (IA) transforme l'analyse des erreurs en mathématiques, en automatisant la collecte et l'analyse des données des élèves. Elle permet d'identifier rapidement les erreurs récurrentes, de fournir des retours personnalisés et de proposer des pistes d'amélioration adaptées à chaque élève (Emprin et Richard, 2023).

1. *L'IA dans la détection des erreurs récurrentes en mathématiques*

Les algorithmes d'apprentissage automatique et les réseaux de neurones profonds permettent d'identifier des patterns dans les erreurs des élèves et d'en extraire des invariants didactiques (Kumar et al., 2020). Par exemple, des plateformes comme Khan Academy et ALEKS utilisent déjà des modèles prédictifs pour détecter les erreurs typiques des élèves et adapter les exercices en fonction des lacunes détectées (Falmagne et al., 2003). ALEKS (Assessment and Learning in Knowledge Spaces) utilise l'IA pour modéliser les erreurs sous forme de « cartes cognitives ». Ces cartes permettent d'identifier les prérequis manquants et d'ajuster l'apprentissage en conséquence. Par exemple, si un élève fait une erreur sur la factorisation d'un polynôme, ALEKS peut retracer ses erreurs jusqu'à un problème plus fondamental en arithmétique ou en manipulation des fractions (Doignon et Falmagne, 2013).

2. *Approches hybrides pour une analyse plus fine des erreurs*

Les approches hybrides, combinant apprentissage automatique et approches symboliques, sont particulièrement prometteuses car elles tiennent compte des processus cognitifs sous-jacents aux erreurs (Luckin et al., 2016). Par exemple, le projet MathGPT, développé par OpenAI, est un modèle d'IA conçu pour corriger et expliquer les erreurs des élèves en détaillant chaque étape de leur raisonnement. Une étude récente (Brown et al., 2021) a montré que plus de 80 % des erreurs détectées par MathGPT correspondaient aux erreurs que les enseignants auraient eux-mêmes identifiées, notamment les erreurs conceptuelles en algèbre et les mauvaises applications de formules.

Néanmoins, bien que l'IA offre des opportunités considérables, elle présente aussi des défis :

- La validité des résultats : L'IA peut être biaisée par les données d'entraînement et mal interpréter certaines erreurs. Par exemple, certaines IA détectent mal les approches non conventionnelles mais valides utilisées par certains élèves (Holmes et al., 2019).
- L'absence de flexibilité pédagogique : L'IA ne peut pas remplacer la capacité d'adaptation des enseignants, qui tiennent compte des contextes émotionnels et motivationnels des élèves (Selwyn, 2019).
- Le défi de la formation des enseignants : L'intégration de l'IA dans l'éducation nécessite que les enseignants soient formés pour interpréter les analyses produites et les exploiter pédagogiquement (Zawacki-Richter et al., 2019).

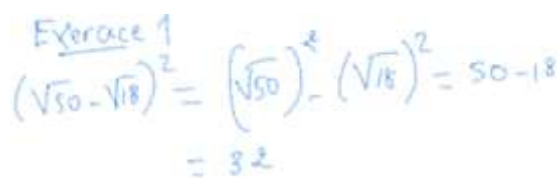
L'IA peut transformer l'analyse des erreurs en mathématiques en identifiant rapidement les schémas récurrents et en fournissant des retours personnalisés. Des IA comme ALEKS et MathGPT montrent déjà des résultats prometteurs. Cependant, des limites subsistent, notamment en lien avec la fiabilité des modèles et la formation des enseignants. Un équilibre entre l'IA et l'expertise humaine est essentiel pour garantir une analyse efficace et adaptée.

V. ÉTUDE DE CAS : ANALYSE D'UNE ERREUR PRÉCISE

L'analyse des erreurs en mathématiques, bien que complexe, est essentielle pour améliorer l'enseignement et l'apprentissage. Cette étude compare deux approches d'analyse d'une erreur courante : celle d'un enseignant et celle d'une IA, en s'appuyant sur un exemple largement répandu tiré de Brousseau (2001). C'est pour cette raison que nous l'avons retenu. L'erreur en question est l'écriture incorrecte de $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - b$.

- Erreur commise par l'élève : $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - b$
- Formule correcte : $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$

Afin d'analyser cette erreur en profondeur, la copie d'un élève l'ayant commise a été présentée à un enseignant de mathématiques du secondaire au Québec. L'objectif était d'observer comment il identifie l'origine de l'erreur et la manière dont il l'interprète :



Exercice 1
 $(\sqrt{50} - \sqrt{18})^2 = (\sqrt{50})^2 - (\sqrt{18})^2 = 50 - 18$
 $= 32$

1. L'analyse de l'enseignant (Victor)

L'analyse de Victor met en lumière une conception erronée de l'élève en lien avec la gestion des connaissances mathématiques. Voici les points clés de son raisonnement :

1. Erreur conceptuelle : L'élève applique une règle incorrecte en supposant que $(a - b)^2 = a^2 - b^2$, ce qui montre une mauvaise assimilation des propriétés mathématiques.
2. Problème de gestion des connaissances : L'élève ne distingue pas les règles établies par la communauté mathématique et développe sa propre logique, qui peut lui sembler cohérente mais qui n'est pas mathématiquement valide.

3. Conception erronée mais logique pour l'élève : L'élève n'a pas encore intégré le fait que les règles mathématiques sont justifiées et non arbitraires. Il construit sa propre compréhension, qui doit être déconstruite et reconstruite à travers l'enseignement.

Victor a proposé l'approche pédagogique suivante :

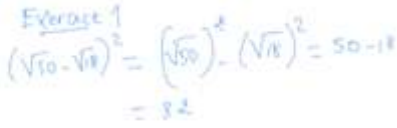
- Rappeler les règles avec des exemples et contre-exemples.
- Encourager l'auto-contrôle pour repérer les erreurs en vérifiant les résultats.

Son analyse témoigne d'une approche réflexive et analytique, visant à comprendre l'origine des erreurs des élèves. Il met en avant l'importance du retour aux fondamentaux, de l'utilisation de contre-exemples et de la validation des résultats. Sa pédagogie proactive cherche à renforcer la compréhension et à encourager les élèves à améliorer leurs compétences mathématiques à travers un processus de réflexion et d'auto-correction.

La démarche de Victor gagnerait en efficacité en intégrant davantage l'auto-évaluation. Encourager les élèves à vérifier leurs réponses et à analyser leurs erreurs par eux-mêmes favoriserait leur autonomie, leur réflexion critique et leur auto-régulation des apprentissages.

2. L'analyse de l'erreur par l'IA

Le prompt utilisé :



Exercice 1
 $(\sqrt{50} - \sqrt{18})^2 = (\sqrt{50})^2 - (\sqrt{18})^2 = 50 - 18 = 32$

L'erreur commise par l'élève dans cet exercice relève d'une mauvaise application des règles algébriques sur l'élevation au carré d'une différence. L'élève semble avoir appliqué à tort la propriété :

$$(a - b)^2 = a^2 - b^2$$

au lieu de la formule correcte du développement d'un carré d'une différence :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Analyse de l'erreur

L'élève considère l'expression $(\sqrt{50} - \sqrt{18})^2$ et la développe comme suit :

$$(\sqrt{50})^2 - (\sqrt{18})^2 = 50 - 18 = 32$$

Cette démarche est incorrecte car elle néglige le terme intermédiaire $-2\sqrt{50} \cdot \sqrt{18}$, qui est essentiel dans l'expansion du carré d'une différence.

Si nous appliquons correctement la règle du développement du carré d'une différence :

$$\begin{aligned} (\sqrt{50} - \sqrt{18})^2 &= (\sqrt{50})^2 - 2\sqrt{50} \cdot \sqrt{18} + (\sqrt{18})^2 \\ &= 50 - 2\sqrt{900} + 18 \\ &= 50 + 18 - 2 \cdot 30 \\ &= 68 - 60 = 8 \end{aligned}$$

Le résultat attendu est donc 8, et non 32.

Origine possible de l'erreur

L'élève a probablement mémorisé de façon incorrecte la règle du carré d'une somme ou d'une différence et l'a assimilée à la distributivité de l'exponentiation sur une soustraction, ce qui est une erreur courante chez les apprenants. Cette confusion peut être renforcée par une familiarité avec la distributivité de l'exponentiation dans certains cas spécifiques, comme pour les produits :

$$(ab)^n = a^n b^n$$

mais qui ne s'applique pas aux sommes ou différences.

Recommandations didactiques

Pour aider l'élève à surmonter cette difficulté, il est essentiel d'adopter une approche progressive et conceptuelle :

1. **Explicitation de la propriété erronée** : Amener l'élève à verbaliser la règle qu'il pense utiliser et l'aider à comprendre pourquoi elle est incorrecte en testant des cas simples (exemple : $(3 - 1)^2$ et $3^2 - 1^2$).

2. **Utilisation de contre-exemples** : Présenter des situations où l'application erronée de la règle conduit à des résultats manifestement faux. Par exemple :

$$(5 - 2)^2 = 3^2 = 9$$

alors que si on applique l'erreur de l'élève :

$$5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$$

ce qui est incorrect.

3. **Développement progressif de $(a - b)^2$** : Montrer comment s'effectue le développement correct et insister sur la présence du terme $-2ab$.

4. **Approche visuelle** : Utiliser des représentations géométriques (aires de carrés et rectangles) pour illustrer que $(a - b)^2$ inclut trois termes et non seulement a^2 et b^2 .

5. **Exercices guidés et autonomes** : Proposer des exercices structurés où l'élève doit d'abord développer des expressions correctes, puis identifier des erreurs similaires à la sienne.

L'analyse de ChatGPT est pertinente, mais l'enseignant pourrait l'enrichir en y ajoutant une dimension plus pédagogique et humaine, tenant compte des stratégies cognitives et des difficultés des élèves.

VI. DISCUSSION ET CONCLUSION

Dans l'analyse des erreurs, les enseignants apportent une compréhension contextuelle et une intuition pédagogique précieuse pour analyser les erreurs des élèves. La relation humaine permet d'aborder les erreurs avec empathie, offrant ainsi un soutien émotionnel et des encouragements adaptés aux besoins individuels des élèves. En revanche, l'IA offre une analyse rapide et systématique des erreurs, permettant un feedback immédiat.

Cependant, chaque approche présente des limitations. L'analyse des erreurs par les enseignants peut être chronophage, surtout dans des classes de grande taille, et il peut y avoir des biais personnels dans l'interprétation des erreurs. De son côté, l'IA dépend de la qualité des algorithmes et des données d'apprentissage, ce qui peut introduire des biais, et manque de l'aspect humain et de la flexibilité pédagogique qu'un enseignant peut offrir.

Pour maximiser les bénéfices de l'analyse des erreurs en mathématiques, une approche hybride combinant les forces de l'IA et des enseignants est recommandée. L'IA peut être utilisée pour effectuer des analyses préliminaires et fournir des feedbacks immédiats, tandis que les enseignants peuvent intervenir pour apporter des explications contextuelles et un soutien émotionnel. Les enseignants devraient être formés à l'utilisation des IA pour enrichir leurs pratiques enseignantes et gagner du temps pour des interactions pédagogiques de qualité.

En conclusion, l'utilisation de l'IA dans l'analyse des erreurs en mathématiques ouvre de nouvelles perspectives pour l'enseignement. En automatisant l'analyse des erreurs et en fournissant des feedbacks personnalisés, l'IA permet aux enseignants de mieux comprendre les difficultés des élèves et d'ajuster leurs stratégies pédagogiques en conséquence. Cependant, il est crucial de reconnaître les défis et les limitations associés à cette technologie, notamment en termes de biais algorithmiques. Pour maximiser les bénéfices de l'IA, il est nécessaire de poursuivre les recherches empiriques et d'intégrer les résultats dans les pratiques enseignantes de manière réfléchie. En fin de compte, l'IA doit être vue comme un outil complémentaire qui, utilisé de concert avec l'expertise humaine, peut transformer l'évaluation et l'enseignement des mathématiques.

RÉFÉRENCES

- Black, P. et Wiliam, D. (1998). Inside the black box: raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan*, 80(2), 139-148.
- Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Bloomsbury Academic.

- Brousseau, G. (2009). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. *Petit x*, (57), 5-30.
- Brown, T., Mann, B., Ryder, N., Subbiah, M., Kaplan, J. D., Dhariwal, P., ... et Amodei, D. (2020). Language models are few-shot learners. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 33, 1877-1901.
- De Ketele, J.-M. (1989). *Méthodologie de l'évaluation des apprentissages*. De Boeck Supérieur.
- Doignon, J.-P. et Falmagne, J.-C. (2013). *Knowledge spaces*. Springer.
- Emprin, F. et Richard, P. (2023). *L'IA et l'évaluation des apprentissages*. Presses universitaires de France.
- Falmagne, J. C., Cosyn, E., Doignon, J. P. et Thiéry, N. (2003, septembre). The assessment of knowledge, in theory and in practice. Dans *IEMC'03 Proceedings, "Managing Technologically Driven Organizations: The Human Side of Innovation and Change"* (p. 609-615). IEEE.
- Holmes, W., Bialik, M. et Fadel, C. (2019). *Artificial intelligence in education promises and implications for teaching and learning*. Center for Curriculum Redesign.
- Luckin, R. et Holmes, W. (2016). *Intelligence unleashed: An argument for AI in education*. UCL Knowledge Lab.
- Ministère de l'Éducation du Québec [MEQ]. (2022). *L'erreur en mathématique au secondaire : un levier pour l'apprentissage*. Gouvernement du Québec.
- Roditi, E. (2011). *Pratiques enseignantes et évaluation*. L'Harmattan.
- Sayac, N. (2017). *L'évaluation en didactique des mathématiques*. Revue des Sciences de l'Éducation.
- Selwyn, N. (2019). *Should robots replace teachers?: AI and the future of education*. John Wiley & Sons.
- Tomlinson, C. A. (2001). *Comment différencier l'enseignement dans les classes à niveaux mixtes*. Ascd.
- Trouche, L. (2009). Penser la gestion didactique des artefacts pour faire et faire faire des mathématiques : histoire d'un cheminement intellectuel. *L'éducateur*, 3, 35-38.
- Zawacki-Richter, O., Marín, V. I., Bond, M. et Gouverneur, F. (2019). Systematic review of research on artificial intelligence applications in higher education—where are the educators? *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 16(1), 1-27.

ÉMERGENCE DE SCHÈMES PROFESSIONNELS DE DEUX FUTURES ENSEIGNANTES AU TRAVERS D'UN COURS D'INVESTIGATION MATHÉMATIQUE AVEC PROGRAMMATION

| ST-CYR* MARIE-FRÉDÉRIC, FOJCIK** MARTYNA K., BUTEAU*** CHANTAL, MULLER****
ERIC ET MGOMBELO***** JOYCE

Résumé | Nous nous intéressons aux enjeux de formation des futur·es enseignant·es de mathématiques dans le cadre d'un cours de mathématique qui inclut des réflexions sur l'expérience personnelle pendant leurs travaux d'investigation mathématique s'appuyant sur la programmation informatique. Dans ce texte, nous explorons la manière dont le cadre théorique de la double genèse instrumentale nous permet d'éclairer le développement professionnel initial de futur·es enseignant·es s'appuyant sur leur expérience personnelle. Pour illustrer ce développement, nous discutons deux schèmes, l'un personnel et l'autre professionnel, et leurs liens dans le cas de deux étudiantes.

Mots-clés : programmation, formation des enseignant·es de mathématiques, double genèse instrumentale

Abstract | We are interested in school mathematics teacher education in the context of a university mathematics content course integrating computer programming, that includes self-reflections on their experience during their programming-based math inquiry projects. We explore how the theoretical framework of the double instrumental genesis can shed light on the initial professional development of future teachers based on their personal experience. To illustrate this development, we discuss two schemes, one personal and the other professional, and their links in the case of two future teachers.

Keywords: Coding, future mathematics teachers training, double instrumental genesis, schemes

I. INTRODUCTION

Actuellement de nombreux curricula, primaires et secondaires, ont introduit la programmation¹ sous différentes formes, dont plusieurs dans le curriculum de mathématiques. Cette introduction récente soulève de nombreuses questions par rapport à la formation des enseignant·es ainsi que des futur·es enseignant·es. En effet, dans plusieurs cas, les enseignant·es n'ont pas ou très peu d'expérience en programmation et/ou dans un contexte mathématique (Mozelius, 2018). Pour répondre à ces besoins de formation, différentes stratégies ont été explorées pour mieux comprendre les enjeux et pour former les enseignant·es (Couderette, 2016 ; Haspekian, 2018 ; Lv et al., 2022) et les futur·es enseignant·es (Buteau et al., 2018 ; Mozelius, 2018 ; Muller et Buteau, 2006 ; Venant, 2023).

Dans la lignée des travaux de notre équipe à l'université Brock et des textes proposés à EMF dans les années antérieures, nous visons à mieux comprendre le potentiel d'un cours de mathématiques intégrant la programmation, destiné aux futur·es enseignant·es, sur le développement initial de compétences professionnelles pour enseigner les mathématiques avec la programmation. Dans ce but,

* Université du Québec à Montréal – Canada – marie-frederick.st-cyr@usherbrooke.ca

** Volda University College – Norway – martyna.fojciak@hivolda.no

*** Brock University – Canada – cbuteau@brocku.ca

**** Brock University – Canada – emuller@brocku.ca

***** Brock University – Canada – jmgombelo@brocku.ca

¹ Nous utilisons programmation pour désigner la programmation informatique tout au long du texte.

nous explorons d'abord dans ce texte comment la double genèse instrumentale (Haspekian, 2018) peut éclairer la transition entre une utilisation personnelle de la programmation pour faire des mathématiques universitaires et une utilisation professionnelle pour soutenir le développement des élèves à utiliser la programmation pour faire des mathématiques dans la classe du primaire et du secondaire.

II. CADRE THÉORIQUE

La double genèse instrumentale (Haspekian, 2011) prend appui sur l'approche instrumentale (Rabardel, 1995). Cette dernière a notamment été utilisée pour l'analyse de l'activité mathématique d'élèves du secondaire avec la calculatrice de calcul symbolique (Guin et al., 2005 ; Trouche, 2004). Dans ce qui suit, nous présentons d'abord l'approche instrumentale en y incluant les notions d'artefact, d'instrument, de genèse instrumentale et de schème. Ensuite, nous distinguons les genèses instrumentales personnelles et professionnelles, pour finalement discuter du lien entre ces deux genèses instrumentales.

1. *L'approche instrumentale*

L'approche instrumentale, s'ancrant dans le domaine de l'ergonomie cognitive (Rabardel, 1995) et dans la théorie de l'activité (Vygotsky, 1978), vise l'étude du processus de transformation, appelé genèse instrumentale, d'un artefact en un instrument par une personne au cours d'une activité (Rabardel, 1995). Cette transformation se fait, par la personne, en développant des schèmes. Nous présentons maintenant les détails.

Un artefact est « toute chose ayant subi une transformation, même minime, d'origine humaine » (Rabardel, 1995, p. 49). Il peut donc s'agir d'un objet matériel ou d'un système symbolique ; dans notre cas, il s'agit d'un langage de programmation. L'artefact est construit pour être utilisé dans une activité ayant un certain but, mais peut être utilisé pour d'autres buts qu'anticipés.

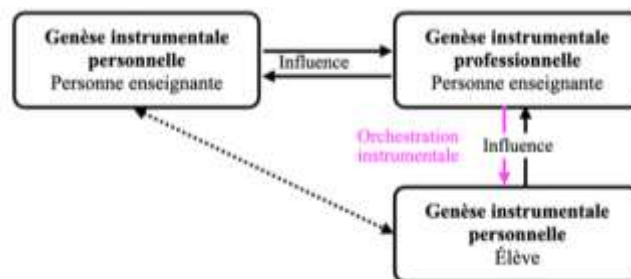
Les schèmes sont une organisation invariante de l'activité de la personne pour une certaine classe de situations. Selon la proximité de la situation avec une classe de situations connue par la personne (c.-à-d. une classe de situations dans laquelle le sujet a développé des schèmes) de nouveaux schèmes, plus ou moins associés à ceux existants, peuvent être créés dans l'activité par celle-ci. Les schèmes, ou plus précisément l'association entre le schème et la situation, nous donnent un modèle théorique de l'apprentissage d'une personne en activité. Afin d'analyser les schèmes, à l'instar de Vergnaud (1998) nous considérons trois de ses composantes : (i) le but de l'activité avec ses sous-buts et les attentes ; (ii) les règles d'action : les gestes posés ; ce que fait la personne (observable) ; et (iii) les invariants opératoires : les connaissances et les croyances de la personne qui guident ses actions (cognitif, doit être exprimé par la personne).

Un instrument est composé d'un artefact et de schèmes ; p. ex. un langage de programmation (p. ex. Python) comme artefact, et *articuler un processus mathématique dans un langage de programmation* (but de l'activité) comme schème. Dans ce cas, une personne pourrait entre autres *commencer par transposer, dans le langage de programmation, ce qu'elle ferait à la main* (règle d'action), sur la base de la croyance selon laquelle *un langage de programmation peut fonctionner de la même manière que l'on travaille à la main* (invariant opératoire) (Buteau et al., 2019). L'instrument est élaboré par la personne pendant son activité ; il n'existe pas d'emblée. Ce processus d'élaboration est appelé genèse instrumentale.

2. La double approche instrumentale

Un même artefact peut être utilisé par une personne dans plusieurs buts, notamment dans un but d'utilisation disciplinaire mathématique ou dans un but professionnel d'enseignement. Ceci mène à deux instruments différents dans des processus appelés respectivement genèse instrumentale personnelle et genèse instrumentale professionnelle (Haspekian, 2017). La double genèse instrumentale prend à la fois en considération ces deux genèses instrumentales en plus de considérer les liens qui les unissent (Haspekian, 2017). Ces deux types de genèses, alignées avec ces deux types de buts, mènent au développement de schèmes que nous qualifions respectivement de schèmes personnels (but disciplinaire — mathématique) et de schèmes professionnels (but lié à l'enseignement — didactique ou pédagogique).

Dans la genèse instrumentale professionnelle, le but d'enseignement peut viser à : (1) soutenir la genèse instrumentale de l'élève ou (2) développer un outil didactique ou pédagogique tel que pour une démonstration au tableau, c'est-à-dire sans que l'élève développe un instrument. Dans notre travail, nous nous intéressons au cas où le but d'enseignement est de soutenir la genèse instrumentale de l'élève afin qu'il développe un instrument personnel semblable à l'instrument personnel, dans un but disciplinaire, de la personne enseignante. À l'instar de Haspekian (2017), nous considérons l'orchestration instrumentale comme faisant partie de la genèse instrumentale professionnelle. Drijvers et al. (2010) décrivent l'orchestration instrumentale comme étant « l'organisation et l'utilisation intentionnelles et systématiques des différents artefacts disponibles [...] afin de guider la genèse instrumentale des élèves » (trad. libre, p. 214-215).



(basée sur Haspekian, 2017, et traduite de Fojcik et al., soumis)

Figure 1 – Double approche instrumentale

Par ailleurs, les genèses instrumentales personnelles et professionnelles sont liées l'une à l'autre. En ce sens, le développement de la genèse instrumentale professionnelle peut prendre appui sur la genèse instrumentale personnelle et vice-versa (Haspekian, 2017). De plus, nous savons qu'au cours du processus de genèse instrumentale de nouveaux schèmes se développent en prenant appui (à différents niveaux) sur des schèmes anciens développés par la personne (Rabardel, 1995). Conséquemment, au cours du processus de genèse instrumentale professionnelle, une personne développe des schèmes professionnels prenant appui sur des schèmes anciens ; ces schèmes peuvent être personnels ou professionnels. Il en est de même pour le développement de schèmes personnels qui peuvent prendre appui sur des schèmes personnels ou professionnels.

Dans le cas de l'utilisation de la programmation pour faire des mathématiques, Haspekian (2017) a étudié le développement de schèmes professionnels chez des enseignant·es en service qui n'avaient pas ou très peu d'expérience en programmation. Dans ce texte, nous nous intéressons à mieux comprendre le développement initial de schèmes professionnels chez des futur·es enseignant·es ayant une expérience en programmation pour faire des mathématiques, mais qui ont peu ou pas d'expérience en enseignement. Prenant appui sur une étude préliminaire (Buteau et al., 2024) et une étude ayant plus

approfondi la genèse professionnelle au regard de l'orchestration instrumentale (Fojcik et al., accepté), nous posons la question : *Comment la double genèse instrumentale éclaire-t-elle le développement initial de schèmes professionnels, de futur·es enseignant·es de mathématiques, à partir de leurs schèmes personnels, dans le cas de la programmation pour faire des mathématiques ?*

III. MÉTHODOLOGIE

Cette recherche exploratoire prend appui sur les cas de deux étudiantes en formation initiale, Nadia et Carolyn (pseudonymes), inscrites au cours « *Mathematics Integrated with Computers and Applications* » (MICA) III*. Dans ces cours MICA I/II/III/III* centrés sur des projets, les étudiant·es utilisent la programmation pour investiguer des situations mathématiques pures ou appliquées dans le cadre de projets individuels (Buteau et al., 2015). Par exemple dans MICA I, les étudiant·es investiguent, graphiquement et numériquement, le comportement du système dynamique discret d'une cubique incorporant deux paramètres. Un autre exemple dans MICA III est l'investigation de modèles d'automate cellulaire de l'évolution d'épidémies, de vaccinations et de leurs coûts — pour des exemples de consignes de projet, voir <https://ctuniversitymath.ca/category/teaching-resources/>). Les cours MICA ont une progression autant dans le niveau mathématique et dans les programmes informatiques à créer que dans l'accompagnement offert en classe. En particulier, le choix de limiter l'accompagnement est explicité au début du cours de MICA III* ; ce qui est généralement déstabilisant pour tous.

Spécifiquement, MICA III* est destiné aux futur·es enseignant·es de mathématiques et vise non seulement à soutenir le développement de compétences pour investiguer des situations mathématiques en s'appuyant sur la programmation, mais aussi pour entamer une réflexion sur leur propre expérience d'apprentissage et le rôle que joue l'environnement du cours pour soutenir cette expérience. Cette réflexion se fait par écrit, guidée par des questions de réflexion en lien avec la littérature didactique et pédagogique proposée dans le cours, à la fin de chacun des cinq projets du cours. Les quatre premiers projets sont des projets d'investigation mathématique semblables à ce qu'elles faisaient dans les deux cours MICA précédents, alors que le projet final consiste à la conception (ou la sélection), l'adaptation et la mise en œuvre d'une tâche mathématique intégrant la programmation destinée à des élèves du primaire ou du secondaire. Lors de ce projet, les personnes étudiantes collaborent avec des enseignant·es du milieu scolaire. Pour la majorité des personnes étudiantes, il s'agit de leur première expérience d'enseignement des mathématiques à l'école.

Les données de l'étude présentée dans ce texte ont été récoltées au fil du cours MICA III* dans une recherche plus large axée sur l'enseignement universitaire et l'apprentissage de l'utilisation de la programmation en tant qu'outil pour les mathématiques, tel que dans le cadre des cours MICA. Les données utilisées pour cette étude proviennent de trois sources : (1) des réponses aux questionnaires pré-cours et post-cours, qui comprenaient des questions relatives à l'expérience d'apprentissage dans le cours, les compétences qu'ils développent, leur futur enseignement des mathématiques intégrant la programmation, etc. ; (2) deux entretiens semi-structurés, par étudiante après le cours, qui visaient à approfondir certaines réponses au questionnaire et à s'enquérir de leur expérience globale dans le cadre des cours MICA ; et (3) de leurs 5 réflexions écrites requises pour le cours. Les entretiens ont été enregistrés et transcrits. Nous avons fait le choix d'analyser les données de Nadia et de Carolyn puisque ces deux étudiantes ont proposé des réflexions particulièrement profondes et différentes l'une de l'autre.

L'analyse des données prend appui sur les travaux préliminaires de l'équipe (Buteau et al., à paraître). Elle consiste principalement à coder les données, associées aux deux étudiantes, par éléments de schèmes (Buteau et al., 2019) pour les genèses instrumentales. Ces éléments de schème ont été identifiés dans les données par un survol et une exploration non systématique de celles-ci. Dans cette analyse exploratoire, nous associons des éléments de schème de la genèse instrumentale professionnelle de Nadia et Carolyn lorsqu'elles établissent explicitement un lien entre leur expérience d'apprentissage ou celle d'autrui en relation avec l'enseignement ou l'environnement d'apprentissage, ou lorsqu'elles commentent explicitement leur futur rôle d'enseignante. Étant donné que Nadia et Carolyn n'ont pas assumé un rôle d'enseignante dans une classe réelle (excepté pour leur projet final de MICA III*), les éléments identifiés proviennent de schèmes « potentiels initiaux » plutôt que de schèmes observés ; ceux-ci devraient être vérifiés dans une étude ultérieure.

IV. RÉSULTATS

Nous notons que plusieurs schèmes sont mobilisés pendant l'activité personnelle d'investigation mathématique appuyée par la programmation (Buteau et al., 2020) et il en va de même pour l'activité professionnelle. Afin d'illustrer l'entrecroisement des genèses personnelles et professionnelles, nous sélectionnons deux schèmes des genèses respectives, de Nadia et Carolyn, dont les éléments sont associés. Nous présentons les résultats d'abord dans le cas de Nadia, puis dans celui de Carolyn, que nous mettons ensuite en relation.

1. Cas de Nadia

Après le quatrième projet, les futur·es enseignant·es ont été invitées à réfléchir et à « *identifier une stratégie "clé" utilisée par la professeure, l'auxiliaire d'enseignement ou un pair pour soutenir la complétion de leur projet et les façons dont cette stratégie a soutenu leur travail ou apprentissage* » ; Nadia a écrit :

Un moment clé... lorsque j'ai éprouvé des difficultés à comprendre la séquence d'ADN des marches normalisées et la manière de programmer le code... [j'ai] demandé à un pair qui... m'a d'abord demandé si je comprenais mathématiquement ce qui était requis et si je pouvais d'abord expliquer... avec des mots ce que je voulais que mon programme fasse. Au début, j'ai eu du mal... et c'est ce qui m'a amené à... réfléchir au fait que le problème était que je ne comprenais pas ce que je voulais que mon programme fasse et que c'est la raison pour laquelle je rencontrais beaucoup d'erreurs/bugs. Au début... on pouvait voir... ma frustration et comment... je disais... on aurait dû nous fournir plus... comment commencer, comment continuer... (Nadia², questionnaire post-entretien)

Nous notons que Nadia mentionne avoir éprouvé des difficultés à progresser avec ses codes mathématiques³ au début du cours MICA III* et vivait de la frustration. À ce moment, elle aurait souhaité que l'enseignante lui donne plus d'information pour l'accompagner à entamer et poursuivre la tâche. Elle dit s'être donc retournée vers ses pairs pour chercher un support ; un support qui lui a permis d'identifier des erreurs dans ses codes mathématiques et de les corriger. « La collaboration est importante et permet d'aider ses pairs et de déboguer plus efficacement, car parfois nous ne voyons pas toujours nos propres erreurs, mais quelqu'un d'autre peut le faire et nous donner des conseils. » (Nadia, questionnaire post-entretien, Q2-62) Elle mentionne qu'au fil des expériences cette aide lui a aussi permis de soutenir son dialogue avec elle-même et de développer des stratégies pour résoudre des problèmes de codes mathématiques auxquelles elle fait face par elle-même. « [A]vec le temps... j'ai

² Tous les extraits ont été traduits depuis l'anglais. Ce ne sera pas précisé dans le texte.

³ Pour éviter les confusions, nous utilisons codes mathématiques pour discuter de programmes informatiques mathématiques.

beaucoup réfléchi en tant qu'apprenant et j'ai dit... j'ai rencontré ce problème, mais voici comment je l'ai résolu. Je n'ai pas eu beaucoup recours à l'aide de mon professeur. » (Nadia, entretien)

Nous interprétons de ces extraits que Nadia a développé un schème personnel (tableau 1 colonne de gauche) pour *articuler des concepts et des procédures mathématiques dans un langage de programmation*. En particulier, ce schème inclut les règles d'action : (1) *je m'explique, dans mes mots, les mathématiques que mon programme doit faire* et (2) *je m'explique, dans mes mots, ce que je veux que mon programme fasse*. Nous interprétons qu'elle justifie ces règles d'action par le fait qu'elle doit être en mesure de s'expliquer les mathématiques et ce que le programme doit faire pour parvenir à bien articuler le programme mathématique (invariant opératoire).

En somme, nous avançons que Nadia semble reconnaître que l'encadrement et l'accompagnement limités, qui lui donnaient initialement la sensation de ne pas avoir suffisamment d'information pour effectuer la tâche, lui ont permis de soutenir son apprentissage (c.-à-d. sa genèse instrumentale personnelle). En effet, Nadia semble projeter son expérience personnelle dans son futur rôle d'enseignante ; elle dit : « Maintenant, je vais être le "[nom de l'instructeur]" de ma classe de 9^e année... ne pas dire aux élèves autant que vous voulez... les guider sur le chemin. » (Nadia, entretien)

De cet extrait, nous interprétons deux règles d'action de Nadia : (1) *je limite l'encadrement proposé dans la tâche* et (2) *je limite l'accompagnement que j'offre aux élèves pendant le cours* dont le but implicite (du schème professionnel potentiel initial ; tableau 1 colonne de droite) serait de *présenter une tâche de mathématiques intégrant la programmation*. Ces règles d'action pourraient s'expliquer par le principe de Nadia (invariant opératoire), que nous inférons, qu'un encadrement et un accompagnement limité et judicieusement ciblé permet de soutenir l'apprentissage des étudiants, y compris articuler des concepts et des procédures mathématiques dans un langage de programmation. Cet invariant opératoire illustre l'entrecroisement d'un schème personnel avec un schème professionnel. Nous avançons que cet entrecroisement prend appui sur une réflexion de Nadia à propos des aspects de l'environnement d'apprentissage de MICA III* qui lui ont permis de développer ce schème personnel. Traduit dans le cadre de l'approche instrumentale, elle porte une réflexion sur les aspects de l'orchestration instrumentale qui ont soutenu sa genèse instrumentale personnelle et qu'elle souhaiterait reproduire dans sa future classe (genèse instrumentale professionnelle).

Tableau 1 – Schèmes personnels et professionnels partiels de Nadia et leur entrecroisement (souligné)

	Schème personnel	Schème professionnel potentiel initial
But de l'activité	<u>Articuler un concept ou une procédure mathématique dans un langage de programmation.</u>	Présenter une tâche de mathématiques intégrant la programmation.
Règles d'action identifiées dans les extraits choisis	Je m'explique, dans mes mots, les mathématiques que mon programme doit faire. Je m'explique, dans mes mots, ce que je veux que mon programme fasse. Je discute avec mes pairs du programme mathématique à développer.	Je limite l'encadrement proposé dans la tâche. Je limite l'accompagnement que j'offre aux élèves pendant le cours.
Invariants opératoires identifiés dans les extraits choisis	Je dois être en mesure de m'expliquer les mathématiques et ce que le programme doit faire pour parvenir à bien articuler le programme mathématique.	Un encadrement et un accompagnement limité et judicieusement ciblé permet de soutenir l'apprentissage des élèves, y compris <u>articuler des concepts et des procédures mathématiques</u>

	Schème personnel	Schème professionnel potentiel initial
	Discuter avec mes pairs me permet de mieux m'expliquer et de mieux comprendre ce que mon programme mathématique doit faire.	<u>dans un langage de programmation (c.-à-d. la genèse instrumentale des élèves ; implicite).</u>

2. Cas de Carolyn

Comme Nadia, Carolyn avait l'impression de ne pas avoir suffisamment d'information pour entamer la tâche en début de cours. Toutefois, contrairement à Nadia, Carolyn est restée avec cette sensation tout au long du cours.

Je trouve qu'on ne m'a pas donné assez d'informations pour que je puisse le faire moi-même et ne pas me sentir complètement dépassée... c'est pourquoi, chaque fois que je commençais à coder, je devais demander au professeur si j'étais sur la bonne voie. (Carolyn, entretien)

Nous interprétons de cet extrait que Carolyn a développé un schème personnel (tableau 2 colonne de gauche) pour *articuler un concept ou une procédure mathématique dans un langage de programmation*, moins élaboré que celui de Nadia. Ce schème inclut la règle d'action : *je demande de l'aide à un pair ou à l'enseignante*. Cette règle d'action pourrait s'expliquer par le principe de Carolyn (invariant opératoire), que nous inférons : *j'ai besoin qu'on me présente les éléments clés (concepts, procédures) de programmation mathématique, essentiels à la tâche, de façon détaillée pour que je puisse débiter la tâche de programmation mathématique*.

En somme, nous avançons que Carolyn semble croire que l'encadrement et l'accompagnement limité qu'elle a reçu dans le cours sont insuffisants. Dans l'extrait suivant, Carolyn semble projeter son expérience personnelle dans son futur rôle d'enseignante :

Et en tant que future enseignante, c'est ce que je ferais... Je le simplifierais un peu plus. Je m'assurerais d'avoir suffisamment de code de base à donner à mes étudiants et je m'assurerais qu'ils connaissent les variables qu'ils sont censés utiliser ou la syntaxe qu'ils sont censés utiliser. (Carolyn, entretien)

Nous interprétons que Carolyn développe un schème professionnel potentiel initial (tableau 2 colonne de droite) de *présenter une tâche de mathématiques intégrant la programmation* incluant la règle d'action *Je détaille les éléments clés de la tâche (p. ex. les variables en jeu, des commandes de programmation utiles)*. Cette règle d'action pourrait s'expliquer par le principe de Carolyn (invariant opératoire), que nous inférons, que *les élèves ont besoin de connaître les variables en jeu et les commandes de programmation utiles pour être en mesure de débiter la tâche incluant l'articulation d'un concept ou d'une procédure mathématique dans un langage de programmation*. À l'instar de Nadia, cet invariant opératoire illustre l'entrecroisement d'un schème personnel avec un schème professionnel.

Tableau 2 – Schèmes personnel et professionnel partiels de Carolyn et leur entrecroisement (souligné)

	Schème personnel	Schème professionnel potentiel initial
But de l'activité	<u>Articuler un concept ou une procédure mathématique dans un langage de programmation.</u>	Présenter une tâche de mathématiques intégrant la programmation.

	Schème personnel	Schème professionnel potentiel initial
Règles d'action identifiées dans les extraits choisis	Je demande de l'aide à un pair ou à l'enseignante.	Je détaille les éléments clés de la tâche (p. ex. les variables en jeu, des commandes de programmation utiles).
Invariants opératoires identifiés dans les extraits choisis	J'ai besoin qu'on me présente les éléments clés des concepts et procédures de programmation mathématique, essentiels à la tâche, de façon bien détaillée pour que je puisse être en mesure de commencer une tâche de programmation mathématique.	Les élèves ont besoin de connaître les variables en jeu et les commandes de programmation utiles pour être en mesure de débiter la tâche incluant l' <u>articulation d'un concept ou d'une procédure mathématique dans un langage de programmation</u> .

V. DISCUSSION

Le cadre théorique de la double genèse instrumentale nous permet de mettre en lumière comment les expériences (voire compétences, c.-à-d. schèmes) personnelles différentes de Nadia et Carolyn semblent avoir mené, dans un entrecroisement similaire, à développer des compétences (c.-à-d. schèmes) professionnelles différentes.

En effet, pour leur schème personnel *articuler un concept ou une procédure mathématique dans un langage de programmation*, Nadia et Carolyn n'ont pas développé les mêmes règles d'action et les mêmes invariants opératoires. D'une part, Carolyn mentionne avoir besoin de consignes plus détaillées pour entamer chacun des projets, alors que Nadia avait soulevé ce besoin en début de cours, mais constate, à la fin du cours, qu'elle n'a pas besoin d'autant d'information qu'elle le croyait. D'ailleurs, nous avançons que le fait d'avoir des consignes moins détaillées des projets a permis à Nadia de développer son schème personnel.

De plus, nous avançons qu'une réflexion de Nadia sur son expérience personnelle (la genèse instrumentale) l'a mené à développer un schème professionnel potentiel initial *présenter aux élèves une tâche de mathématiques intégrant la programmation*, où elle croit qu'il est positif de limiter l'information donnée aux élèves pour soutenir leur apprentissage. De son côté, le schème professionnel potentiel initial de Carolyn prend aussi appui sur sa réflexion faite sur son schème personnel. En effet, elle croit avoir besoin de plus d'information pour entamer la programmation de concepts mathématiques. Elle voudrait répondre à ce besoin dans son futur rôle d'enseignante en *détaillant les éléments clés de la tâche (p. ex. les variables en jeu, des commandes de programmation utiles) pour s'assurer que les élèves puissent débiter la tâche*. Bref, ayant développé des schèmes personnels différents, nous avançons qu'elles ont toutes deux développés des schèmes professionnels distincts s'alignant avec leur schème personnel.

VI. CONCLUSION

Nous avons exploré comment le cadre théorique de la double approche instrumentale peut éclairer la transition entre une utilisation personnelle de la programmation pour faire des mathématiques universitaires et une utilisation professionnelle pour soutenir le développement des élèves à utiliser la programmation pour faire des mathématiques dans la classe du primaire et du secondaire. Les deux cas présentés de futures enseignantes nous ont permis de mettre en lumière comment leurs schèmes personnels et professionnels de mêmes buts étaient interreliés en prenant appui l'un sur l'autre. Notre analyse offre une nuance du concept d'entrecroisement de la théorie par les composantes de schèmes,

ainsi que des exemples concrets provenant d'un contexte différent de celui analysé par Haspekian (2017). Notre analyse a aussi pu mettre en valeur la pertinence d'un cours de contenus mathématiques pour soutenir le développement de schèmes personnels et professionnels de futures enseignantes.

L'exploration effectuée dans cet article suggère qu'encore beaucoup de travail reste à faire dans la compréhension du développement de schèmes personnels et professionnels ainsi que de leur interconnexion, en particulier dans le cas de la programmation pour faire des mathématiques. Entre autres, il serait important d'identifier et de décrire les composantes de schèmes professionnels ciblés (Drijvers et al., 2013), incluant des buts pointus. Dans ce texte, nous avons effectué l'analyse à partir du discours et de réflexions écrites, mais il serait pertinent d'effectuer l'analyse à partir d'une activité pour porter un regard plus précis sur le développement de ces schèmes personnels et professionnels et de leurs liens. Également, nous avons étudié l'émergence de schèmes qui ont été mis à l'épreuve réelle une seule fois dans une classe. La prochaine étape sera de prendre appui sur ce travail pour décrire les schèmes professionnels de manière plus fine (c.-à-d. avec des buts plus pointus) et pour analyser de façon systématique toutes les données de Nadia et Carolyn et éventuellement d'autres personnes participantes.

RÉFÉRENCES

- Buteau, C., Broley, L., Mgombelo, J., Muller, E., Sacristán, A. et Santacruz-Rodriguez, M. (2024, 7-14 juillet). *Future secondary school teachers' learning to use programming as a tool for mathematics: A reflective mathematics content course approach* [Paper presentation]. 15th International Congress on Mathematical Education (ICME15), Sydney, Australia. <https://tinyurl.com/5bw552ub>
- Buteau, C., Muller, E. et Ralph, B. (2015, juin). *Integration of programming in the undergraduate mathematics program at Brock University* [Communication]. Math+Coding Symposium, London Ontario.
- Buteau, C., Muller, E., Sacristan, A. et Mgonbello, J. (2018). Pensée informatique en enseignement des mathématiques post-secondaires : un cadre conceptuel. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMF2018 « Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines », 22-26 octobre 2018, Gennevilliers, Paris* (p. 1640-1648). IREM de Paris. https://emf2018.sciencesconf.org/data/actes_EMF2018.pdf
- Buteau, C., Gueudet, G., Dreise, K., Muller, E., Mgombelo, J. et Sacristán, A. (2020). A student's complex structure of schemes development for authentic programming-based mathematical investigation projects. Dans *Proceedings of INDRUM 2020 Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics, Bizerte, Tunisia* (p. 513-514).
- Buteau, C., Gueudet, G., Muller, E., Mgombelo, J. et Sacristán, A. (2019). University students turning computer programming into an instrument for 'authentic' mathematical work. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(7), 1020-1041. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1648892>
- Couderette, M. (2016). Enseignement de l'algorithmique en classe de secondaire : Une introduction curriculaire problématique. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 21, 267-296.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. et Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213-234. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5>

- Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V. et Trouche, L. (2013). One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 23-49.
- Fojcik, M. K., St-Cyr, M.-F., Buteau, C., Muller, E. et Mgombelo, J. (soumis). Preservice teachers' professional instrumental genesis for integrating programming in the math classroom: the beginning. Dans *Actes du colloque CERME 2025*.
- Guin, D., Ruthven, K. et Trouche, L. (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument*. Springer. <https://doi.org/10.1007/b101602>
- Haspekian, M. (2011). The co-construction of a mathematical and a didactical instrument. Dans M. Pytlak, E. Swoboda et T. Rowland (dir.), *Proceedings of the 7th CERME, University of Rzeszów, Poland* (p. 2298-2307). <https://hal.science/hal-01273866>
- Haspekian, M. (2018). Un cas d'étude avec scratch à l'école primaire : distance et repères. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMF2018 « Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines », 22-26 octobre 2018, Gennevilliers, Paris* (p. 811-819). IREM de Paris. https://emf2018.sciencesconf.org/data/actes_EMF2018.pdf
- Haspekian, M. (2017). Computer science in mathematics new curricula at primary school: New tools, new teaching practices? Dans G. Aldon et J. Trgalová (dir.), *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, 3-6 juillet 2017, École normale supérieure de Lyon, France* (p. 23-32). <https://hal.science/hal-01632970/file/book-ictmt13-en.pdf>
- Lv, L., Zhong, B. et Liu, X. (2022). A literature review on the empirical studies of the integration of mathematics and computational thinking. *Education and Information Technologies*, 28(7), 8171-8193. <https://doi.org/10.1007/s10639-022-11518-2>
- Mozelius, P. (2018). Teaching the teachers to teach programming: on course design and didactic concepts. Dans *11th annual International Conference of Education, Research and Innovation* (Vol. 11, p. 8031-8037). The International Academy of Technology, Education and Development.
- Muller, E. et Buteau, C. (2006). Un nouveau rôle de l'informatique dans la formation initiale des enseignants. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMF2018 « Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines », 22-26 octobre 2018, Gennevilliers, Paris* (p. 1111-1120). IREM de Paris. https://emf2018.sciencesconf.org/data/actes_EMF2018.pdf
- Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies ; approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin. <https://hal.science/hal-01017462>
- Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281-307. <http://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5>
- Venant, F. (2023). Enjeux didactiques dans les genèses instrumentales professionnelles des futurs enseignants de mathématiques au Québec. *Recherches en didactique des mathématiques*, 43(1), 15-46.
- Vergnaud, G. (1998). Toward a cognitive theory of practice. Dans A. Sierpiska et J. Kilpatrick (dir.), *Math education as a research domain: A search for identity* (p. 227-241). Kluwer Academic.
- Vygotsky, L. (1978). *Mind in society*. Harvard University Press.

RENSEIGNER L'ENSEIGNANT·E DE L'ACTIVITÉ DES ÉLÈVES DANS UNE VILLE VIRTUELLE

| COUTAT* SYLVIA, DORIER** JEAN-LUC ET MATRI*** SABRINA

Résumé | SPAGEO est un environnement virtuel développé dans le cadre d'une recherche pluridisciplinaire pour l'apprentissage du repérage dans l'espace dont les résultats ont validé l'intérêt d'un tel environnement en classe. Notre nouvel objectif est maintenant d'adapter son ergonomie pour une utilisation en classe ordinaire avec des enseignant·es ordinaires. Ce texte s'intéresse tout particulièrement aux adaptations qui doivent être faites pour accompagner l'enseignant·e dans son diagnostic de l'activité de l'élève dans un tel environnement.

Mots-clés : environnement virtuel, connaissances spatiales, repérage dans l'espace, diagnostic, classes ordinaires

Abstract | SPAGEO is a virtual environment developed as part of a multidisciplinary research project to teach children spatial orientation, whose results have validated the interest of such an environment in the classroom. Our new goal now is to adapt its ergonomics for use in ordinary classrooms with ordinary teachers. This text focuses in particular on the adaptations that need to be made to support the teacher in diagnosing the student's activity in such an environment.

Keywords: Virtual environment, spatial reasoning, spatial orientation, diagnostic, ordinary classes.

Dans les années 80, des travaux francophones (Berthelot et Salin, 1992, 1999 ; Brousseau, 1983) se sont intéressés à l'enseignement de l'espace à l'école primaire. Plus récemment les travaux de Marchand (2020) complètent et élargissent ces réflexions. Tous pointent la nécessité de considérer les connaissances spatiales dans l'enseignement car essentielles au sein des ambitions géométriques, mathématiques et scientifiques de l'école. Aujourd'hui, ces connaissances ne peuvent être dissociées des technologies disponibles dans le quotidien des élèves (jeux vidéo, GPS,...). Le projet SPAGEO¹ avait pour ambition de questionner l'enseignement du repérage dans le plan et dans l'espace en impliquant un environnement virtuel. Ainsi un environnement d'apprentissage conçu au service de la recherche dans le développement d'une ingénierie didactique a permis de tester une vingtaine de situations d'enseignement chez des élèves de 7 à 10 ans. Une nouvelle réflexion est maintenant menée pour adapter ce produit de la recherche aux besoins de la classe. L'environnement produit un grand nombre de données intéressantes pour le chercheur. Ce texte se focalise particulièrement sur le choix et la forme des données à mettre à disposition de l'enseignant·e et notamment comment ces données permettent de rendre compte synthétiquement de l'activité de l'élève. La présentation de notre réflexion s'exemplifiera sur deux tâches proposées dans l'environnement afin d'illustrer les choix spécifiques opérés.

I. LES OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Avant d'initier une réflexion autour des données qui doivent être mises à disposition de l'enseignant·e, il est important de définir les objectifs spécifiques qui peuvent être associés au repérage

* Université de Genève – Suisse – Sylvia.Coutat@unige.ch

** Université de Genève – Suisse – Jean-Luc.Dorier@unige.ch

*** Université de Genève – Suisse – Sabrina.Matri@unige.ch

¹ Acronyme pour SPatial Abilities and GEOMETRY financé par le Fonds National Suisse (Subside no 100019_188947 Sept 2000 – Aug 2024. <https://tecfa.unige.ch/tecfa/research/spageo/>).

dans le plan et dans l'espace. Pour cela nous nous appuyons sur des travaux de didactiques, mais aussi de psychologie cognitive.

1. *Connaissances spatiales*

En didactique des mathématiques, les connaissances spatiales sont définies par Berthelot et Salin (1992) comme les connaissances qui permettent d'anticiper et de contrôler les effets de ses actions sur l'espace. Ce contrôle passe, entre autres, par la reconnaissance ou la description de lieux ou déplacements (Berthelot et Salin, 1999). Marchand (2020) complète ces travaux en s'appuyant sur des travaux de Clements (1999) et ajoute la construction et la mobilisation d'images mentales dans la mise en relation de la position de différents objets de l'espace.

Pour décrire un chemin des repères sont mobilisés (Argaud et al., 1998). Par exemple, une description du chemin entre la boulangerie et l'école du village pourrait être : « quand je sors de la boulangerie, je tourne à droite puis je tourne dans la deuxième rue à gauche et l'école est sur ma droite. » Les différentes informations sont explicitées par rapport au point de vue de l'émetteur ou l'émettrice qui est au centre du repère. On parlera alors d'un repère subjectif. Il est aussi possible d'utiliser la description suivante : « en sortant de la boulangerie, prendre la direction du fleuriste, au carrefour de la poste, tourner vers l'église, l'école est à côté du parc. » Dans ce cas, les indications sont indépendantes du point de vue de l'auteur·e, elles utilisent des points de références intermédiaires (propre à chaque repère et utilisant les relations entre ces repères) pour définir des positions ou des directions. Dans ce cas, on parlera d'un repère objectif. Enfin il est possible d'indiquer « l'école est au 33 rue Jacques-Dalphin à Carouge. » Dans ce dernier cas, le repère est absolu, il utilise des repères définis comme les noms de rues et les numéros de façades qui sont indépendant des acteurs de la situation et qui restent stables, le changement des noms des rues restant exceptionnel (Charnay et Douaire, 2006).

Ces différents repérages sont travaillés dans les écoles primaires romandes² (CIIP, 2010) avec en premier lieu les repères subjectif et objectif « déterminer sa position ou celle d'un objet »³. Le repère absolu est introduit lors des deux dernières années de l'école primaire « Utilisation d'un système de repérage personnel (plan et espace) ou conventionnel (plan), pour mémoriser et communiquer des positions et des itinéraires. »⁴

2. *Habiletés spatiales*

Dans le cadre du projet SPAGEO, notre collaboration avec des psychologues cognitivistes spécialistes de l'espace a permis de compléter notre paradigme didactique en particulier pour ce qui concerne les représentations mentales. En effet, selon Tolman (1948) lorsqu'un individu explore un environnement, il se construit une représentation interne de l'espace qui se compose entre autre des relations entre les différents éléments de cet espace, ce qu'on appelle à la suite de cet auteur, une carte cognitive. Ce concept de carte cognitive est devenu une référence pour la compréhension de la mémoire spatiale des humains. Selon Golledge (1999) trois types de connaissances accompagnent cette représentation mentale de l'environnement : les connaissances des points de repères, les connaissances des itinéraires et les connaissances de la configuration de l'espace. Les connaissances des points de repères visent à identifier, reconnaître et distinguer des objets de l'environnement pour qu'ils deviennent des points de repères. Une fois ces points de repères identifiés comme tels, ils acquièrent une fonction localisatrice et directionnelle, fonctions essentielles pour le développement des

² La Romandie regroupe tous cantons ou parties de cantons suisses où l'on parle français.

³ <https://portail.ciip.ch/per/learning-objectives/36>

⁴ <https://portail.ciip.ch/per/learning-objectives/40>

connaissances d'itinéraire. En effet les itinéraires sont une succession ordonnée de lieux de décision, identifiables à l'aide de points de repère. Finalement, les connaissances de configuration permettent de situer mentalement les lieux les uns par rapport aux autres et de pouvoir improviser des itinéraires entre ces lieux (sans l'utilisation d'une carte physique par exemple).

Enfin, Chen et Stanney (2002) distinguent différents cadres de référence pour catégoriser les représentations mentales de l'espace. Le cadre de référence égocentré s'appuie sur les relations du sujet avec son environnement dans lequel le sujet est immergé. Dans un cadre de référence allocentré, le sujet est extérieur à l'environnement et a une perception globale de celui-ci (Pennel et al., 2001). Par exemple ce cadre de référence est adopté dans ce que l'on appelle couramment « adopter une vue d'oiseau ». Ces cadres de référence peuvent être associés à des représentations physiques de l'environnement comme une carte qui offre un cadre de référence allocentré d'une ville alors que la photo d'un lieu spécifique offre un cadre égocentré. Il est cependant possible de mobiliser un cadre de référence égocentré dans la vue carte, cela nécessite de se projeter mentalement dans l'environnement. De même il est possible de convoquer un cadre de référence allocentré à partir d'une photo d'un lieu, cela passe par une décentration pour s'appuyer sur une vue « vol d'oiseau » de l'environnement.

II. UN ENVIRONNEMENT VIRTUEL SPÉCIFIQUE

De nos jours, le repérage dans le plan est largement supporté par les technologies autant dans notre quotidien avec les GPS que dans les loisirs et jeux numériques tels que Minecraft ou MarioKart. Un des objectifs du projet SPAGEO a été le développement d'un environnement virtuel pour soutenir l'enseignement des connaissances spatiales. Nous présentons brièvement cet environnement et quelques situations testées dans le cadre du projet. On peut voir aussi Frauchiger, Matri, Coutat et Dorier (2022).

1. *Une ville virtuelle*

SPAGEO est un environnement virtuel composé d'une ville virtuelle et de situations d'apprentissage (Matri, 2024). La ville virtuelle SPAGEO City⁵ est composée d'un centre-ville où les points de repères sont nombreux et variés, et d'un quartier résidentiel où les maisons sont toutes identiques (Annexe 3). Dans le centre-ville, un quartier commercial est composé de maisons vertes, un quartier d'affaires d'immeubles divers, une vieille ville de maisons en bois et maisons rouges, finalement divers locaux d'habitation avec des maisons rouges sont répartis en différents quartier (Diouf, 2021).

Deux vues permettent d'appréhender la ville. La vue première personne (Figure 1) favorise un cadre de référence égocentré. La vue carte (Figure 2) favorise, quant à elle, un cadre de référence allocentré. La vue carte peut être disponible conjointement à la vue 1^{re} personne via une feuille de papier. Il est aussi possible que la vue carte soit accessible uniquement dans l'application, ainsi soit la vue 1^{re} personne est affichée soit la vue carte. Dans ce dernier cas, l'élève est contraint·e de construire des images mentales des relations des différentes éléments de l'environnement pour mettre en relation les deux vues.

2. *Des situations d'enseignement et d'apprentissage*

En reprenant les travaux en didactique des mathématiques et ceux de psychologie sur le repérage spatial, trois connaissances spécifiques peuvent être travaillées dans deux grandes situations fondamentales : les connaissances des points de repères, les connaissances des itinéraires et les

⁵ <https://tecfa.unige.ch/tecfa/research/spageo/spageocity/demo/>

connaissances de configuration et ce, autour de situations impliquant un lieu ou un chemin⁶. Les chemins ou lieux définissent les deux situations fondamentales concernant le repérage dans l'espace se déclinent dans des situations de communication, reproduction ou reconnaissance. Le jeu sur les variables didactiques (spécificité du lieu, type de communication, lieu de changement de direction pour les chemins,...) permet de décliner un ensemble de situations visant les connaissances de points de repères ainsi qu'un ensemble de situations pour les connaissances d'itinéraire.

Dans le cas de situations de recherche de lieu, plusieurs configurations sont possibles. L'élève peut devoir retrouver (à partir d'une photo ou d'une description par exemple) un lieu singulier comme le musée (il n'existe qu'un seul musée dans la ville). D'autres lieux peuvent s'appuyer sur une combinaison points de repères comme la Figure 1 qui présente une maison en bois et une maison rouge.



Figure 1 – Un lieu non singulier

Lorsque le lieu est une combinaison de points de repères, il s'agit alors de les identifier et de les positionner les uns par rapport aux autres. Avec l'exemple de la Figure 1, la maison en bois est située sur la gauche de l'image et la maison rouge sur la droite. Le soleil donne une indication d'orientation (à peu près au sud).

Concernant la situation de reproduction d'un itinéraire, un chemin (Figure 2) est proposé et l'élève doit reproduire ce même chemin dans la ville, le point jaune indiquant le point de départ et le point vert le point d'arrivée.



Figure 2 – Support dans une tâche de reproduction de chemin

Là encore différents choix permettent de décliner cette situation fondamentale en différentes situations d'enseignement. Par exemple l'itinéraire peut être indiqué sur un plan papier (toujours à disposition de l'élève) ou dans l'environnement (l'écran affiche soit le plan soit la ville en vue

⁶ <https://view.genially.com/670787d655a97621a6865de9/presentation-spgeo-demo>

1^{re} personne) et doit être reproduit dans la vue 1^{re} personne. Le chemin peut à l'opposé être indiqué dans la vue 1^{re} personne (par ligne dessinée sur la route) et doit être dessiné sur la carte. Il peut être situé entièrement dans la zone résidentielle ou dans la zone centre-ville. Il est aussi possible que le chemin soit indiqué à l'aide d'un message (textuel ou schématique) ou à travers différents lieux à rejoindre (liste de courses).

Pour chacune de ces situations, l'application enregistre à chaque seconde un ensemble de données très variées (informations de position, d'orientation, de temps, de distance parcourue, de chemin parcouru, de numéro de tentative, de validité,...). Ces données étaient importantes pour le contexte initial de la recherche afin de reconstruire les actions des élèves. Cependant pour chaque analyse, un tri important puis une analyse de ces données ont été nécessaires, ce qui a pris beaucoup de temps et que les enseignant·es ne peuvent donc se permettre

De nombreuses situations d'enseignement découlant de différents choix didactiques ont été testées dans le cadre du projet. Nous nous concentrerons sur deux d'entre elles dans la suite de ce texte, une pour les lieux et une pour les chemins.

III. NOTRE PROBLÉMATIQUE

Les travaux d'analyse dans le cadre expérimental du projet SPAGEO (Bénard Linh Quang et al., 2023 ; Matri, 2024) ont montré que les connaissances spatiales des élèves suivis durant les trois années du projet ont progressé. Fort de ces résultats, l'étape suivante est de pouvoir accompagner au mieux l'intégration de SPAGEO dans la classe. Cela passe par une appropriation de l'environnement par l'enseignant·e mais aussi une adaptation de l'environnement aux pratiques des enseignant·es.

Dans leurs travaux, Abboud-Blanchard, Cazes et Vandebrouck (2013) montrent que lors de séances de classes utilisant les technologies numériques, les interventions des enseignant·es sont en majorité dirigées vers les élèves individuellement, les aides collectives étant plus restreintes voire absentes. Lorsque l'enseignant·e intervient face à un·e élève (ou à un petit groupe d'élèves) elle ou il commence par établir un diagnostic afin d'identifier dans quelle mesure l'élève est proche ou non de la réponse attendue, si des difficultés techniques ou mathématiques sont présentes. Selon Drijvers et al. (2010) cette première étape est rendue plus difficile lorsqu'une technologie numérique est au cœur de la tâche. Pourtant un diagnostic adéquat est un essentiel pour une interaction entre enseignant·e et élève réussie : « La conséquence d'un diagnostic inadéquat est que leur intervention se situe en dehors de la zone de développement proximal de l'élève (Vygotski, 1978), et peut entraver son travail au lieu de le soutenir. » (Abboud, 2024, p. 176). Dans le développement de SPAGEO pour la classe, nous devons donc proposer un outil capable d'accompagner les enseignant·es dans le diagnostic des élèves afin qu'ils produisent une remédiation au plus près de la ZPD de l'élève.

Cela nous amène à notre nouvelle question de recherche : comment accompagner l'enseignant·e dans le « diagnostic sur la réalisation des tâches par les élèves ? » (Abboud, p. 176), pendant la résolution de la tâche mais aussi après. Pour cela nous prenons appui sur les stratégies possibles des élèves pour mettre en évidence les données qui informent sur les connaissances attendues des élèves.

IV. COMMENT RENSEIGNER L'ENSEIGNANT·E

Les éléments mis à disposition de l'enseignant·e sous forme de rapport doivent lui permettre d'établir un diagnostic concernant les connaissances spatiales des élèves. Ces connaissances sont à la base des stratégies investies par les élèves. Il est donc essentiel de définir ces différentes stratégies ainsi que des indicateurs associés qui devront être rassemblées dans le rapport. Ensuite les erreurs possibles des élèves doivent pouvoir être indiquées dans le rapport. Ainsi l'analyse de la stratégie visée et les

erreurs possibles sont la base de notre réflexion sur les données qui doivent être mise à disposition de l'enseignant·e. Comme les connaissances impliquées dans les situations de lieux sont différentes de celles impliquées dans les situations de reproduction de chemin, nous développons un exemple de chaque tâche dans la suite.

1. *Recherche de lieu*

Intéressons-nous dans un premier temps à une tâche pour laquelle l'élève doit retrouver un lieu spécifique dans la ville. La photo de ce lieu est mise à disposition de l'élève (via une feuille ou projetée sur un écran). Comme présenté précédemment, plusieurs cas sont possibles.

Prenons l'exemple d'un lieu qui n'est pas singulier (Figure 1). Dans ce cas, il est peu probable que l'élève localise le bon lieu immédiatement car plusieurs configurations de maisons rouges existent dans la ville. Cependant, la configuration de maisons en bois accolées à des maisons rouges restreint la recherche à un petit quartier de la ville. Une fois ce quartier délimité, il est alors nécessaire d'affiner l'étude des points de repères disponibles. Parmi les points de repères visibles sur la photo, la bouche d'incendie (sur la gauche de la photo) et le panneau stop (sur la droite de la photo) peuvent servir à distinguer ce lieu d'un autre lieu. La relation entre les deux maisons est aussi un point de repère du lieu (maison en bois sur la gauche de la photo et maison rouge sur la droite de la photo) doivent être utilisées pour s'assurer que le lieu correspond effectivement au lieu cherché. Enfin le soleil indique la direction (à peu près le Sud). Concernant le lieu présenté sur la Figure 1, d'autres configurations proches (présentées en annexes 1 et 2) sont disponibles dans la ville. Pour distinguer ces différentes configurations il faut s'appuyer sur le soleil (point de repère global), les éléments environnants (locaux rouges ou verts, le parc,...) ou des points de repères propres aux maisons (fleurs, les poubelles), sachant que pour les trois configurations présentées, toutes possèdent un panneau stop sur la droite.

Au cours de la recherche du lieu par l'élève, différentes informations peuvent être données à l'enseignant·e, mais certaines informations ne seront accessibles qu'une fois la recherche terminée.

Pendant la recherche du lieu par l'élève des informations sont visibles sur l'écran. La première information que l'enseignant·e peut utiliser est la vue 1^{re} personne de l'élève dans la ville, qui fournit des informations sur sa position dans la ville. Cela lui indique si l'élève a su prélever les points de repères de couleurs des maisons pour retrouver sa recherche au bon quartier. Par exemple un élève qui est dans le quartier résidentiel (maisons blanches) ou dans le quartier commercial (maisons vertes) est en dehors du quartier cible. Ensuite, le temps de recherche et la distance parcourue apportent des indices sur la recherche de l'élève. Le nombre de retours au point de départ indique quand l'élève s'est senti·e perdu·e. La Figure 3-A donne un aperçu de l'écran de l'élève avec les différentes informations disponibles.

Lorsque l'enseignant·e reçoit le rapport sur l'élève, il doit pouvoir identifier dans quelle mesure l'élève a effectivement mobilisé certaines connaissances (points de repère, relations entre ces points de repères). La première information est de savoir si l'élève a effectivement trouvé le lieu recherché. Pour cela le rapport donne la photo du lieu validé par l'élève et indique si le lieu est le bon ou non (cela économise l'analyse de la validité du lieu pour l'enseignant·e). Les informations de temps et de distance renseignent l'enseignant·e sur la capacité de l'élève à prendre en compte les points de repère dans sa recherche. L'indication de la longueur du chemin le plus court entre le point de départ et le lieu à trouver donne une indication relativement à la stratégie optimale. La Figure 3-B donne un aperçu du rapport qui pourrait être proposé à l'enseignant·e.



Figure 3 – Informations pour l'enseignant·e pour une tâche de recherche de lieu

Il pourrait être envisageable de mettre à disposition de l'enseignant·e un rapport annexe qui utilise la carte et y indique le point de départ, le lieu cherché et le chemin parcouru par l'élève. Ce rapport annexe pourrait être utilisé par l'enseignant·e pour compléter son diagnostic dans le cas où des élèves sont très loin du lieu cherché (un autre quartier) ou ont parcouru une longue distance pour trouver le bon lieu.

2. *Reproduction d'un chemin dans la ville virtuelle*

Considérons maintenant une tâche de reproduction d'itinéraires. Comme présenté précédemment, de nombreuses situations sont envisageables (le format de l'indication du chemin, le lieu du chemin,...). Prenons comme exemple un chemin qui est indiqué dans l'environnement (sur l'écran) par la carte et qui doit être reproduit dans la ville en vue 1^{re} personne. Pour rappel, les deux vues ne sont pas accessibles simultanément. Cela implique que l'élève doit prélever des informations de la vue carte pour les transférer dans la vue 1^{re} personne. Tous les points de repères ne sont pas présents sur la carte (passages-piétons oui mais signalisation non). Il s'agit alors d'utiliser les points de repères présents pour identifier les lieux de changement de direction et les directions à prendre. En ce qui concerne les directions, l'élève peut utiliser un repère objectif (vers le lac, la boulangerie). Elle ou il peut aussi utiliser un repère subjectif (à ma droite, à ma gauche) mais dans ce cas elle ou il doit utiliser un cadre de référence égocentré associé à la vue carte. Le haut de la carte est orienté vers le nord. Cela implique que dans le cas où le chemin se dirige vers le sud (vers le bas de la carte), lorsque que le tracé sur la carte tourne vers la gauche de la carte (l'ouest), dans la vue 1^{re} personne l'élève doit tourner vers la droite (si on se dirige vers le sud, l'ouest est sur notre droite).

Tout comme la recherche de lieux, lors de la reproduction d'itinéraires, différentes informations peuvent être mises à disposition de l'enseignant·e, pendant la réalisation ainsi que dans le rapport final de production de l'élève.

Pendant la reproduction du chemin par l'élève, l'enseignant·e visualise l'écran et identifie la position de l'élève dans la ville en vue 1^{re} personne. S'il connaît le chemin, il peut savoir si l'élève est effectivement sur le bon chemin ou non. Des informations concernant le temps passé en vue carte, en vue 1^{re} personne ainsi que le nombre de bascules renseignent sur l'étude de la carte et la mise en relation entre les deux vues. Considérons un·e élève qui passe 50 secondes sur la vue carte, puis 1 min 30 sur la vue 1^{re} personne avec aucune bascule et qui reproduit fidèlement le chemin. Cet·te élève est capable de sélectionner et mémoriser les informations dont elle ou il a besoin (lieux de changement de direction et direction) et de les réinvestir dans la vue 1^{re} personne. Dans le rapport disponible pour l'enseignant·e, ces informations sont complétées par le chemin indiqué ainsi que le chemin produit par l'élève (Figure 4).

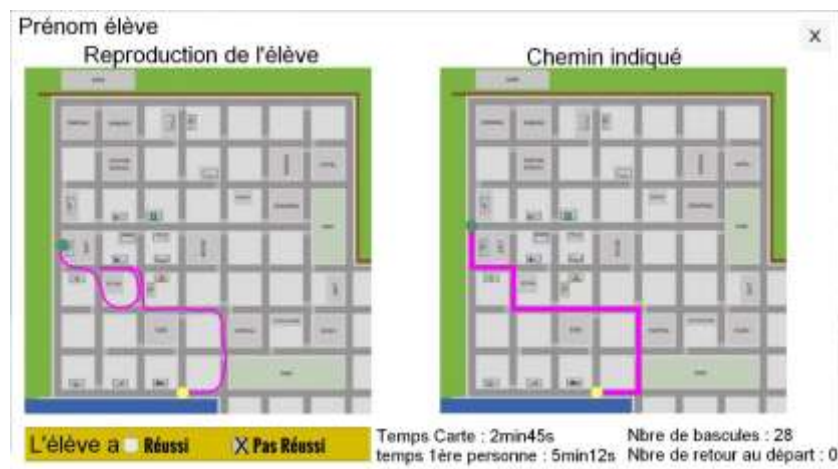


Figure 4 – Rapport de l'enseignant pour une situation de reproduction de chemin

Il est important de donner le chemin effectivement réalisé par l'élève pour que l'enseignant·e puisse visualiser les erreurs produites par l'élève et affiner son diagnostic. Dans l'exemple de la Figure 4, l'élève a réalisé le chemin qui est invalidé car elle ou il a fait un détour. Cependant ce détour montre que l'élève a identifié une erreur (un lieu qui ne convient pas) et a su se corriger (revenir au dernier lieu valide et continuer le chemin) pour finalement atteindre l'arrivée. Dans le cas où un·e élève tourne à droite alors qu'il fallait tourner à gauche, l'enseignant·e pourra distinguer le cas où l'orientation de la carte (haut vers le nord) est la même que l'orientation de la vue 1^{re} personne (face au nord) ou non. En effet, dans le cas où les vues ont des orientations différentes, cela peut indiquer que l'élève a des difficultés à adapter un repère subjectif, associé à un cadre de référence égocentré, à partir d'une carte.

V. CONCLUSION

Le projet interdisciplinaire SPAGEO a permis le développement d'un environnement virtuel associé à différentes situations d'apprentissage. Cet environnement initialement développé pour la recherche doit maintenant s'adapter à un contexte de classe ordinaire. Cette adaptation passe, entre autres, par une mise à disposition pour l'enseignant·e, d'informations relatives à l'activité de l'élève.

Dans ce texte nous avons présenté en quoi l'analyse des stratégies oriente les choix qui doivent être mis à disposition des enseignant·es pour leur permettre d'établir un diagnostic au plus près des connaissances des élèves. Ces analyses étant propres à la tâche proposée, les informations mises à disposition des enseignant·es (sur l'écran pendant la recherche ou dans le rapport) sont ainsi propres à chaque tâche.

Cette nouvelle étape de notre recherche doit aussi prendre en compte les diverses contraintes de l'enseignant·e. Pour cela une collaboration avec les enseignant·es pour tester les situations ainsi que les données mises à disposition est essentielle. Cela permettra aussi d'initier la forme et le contenu des formations qui seront proposées aux enseignant·es pour un accompagnement dans la prise en main et l'intégration de SPAGEO dans les classes.

RÉFÉRENCES

- Abboud, M. (2024). L'enseignant de mathématiques aux temps des technologies numériques : Un cadre théorique adaptant la double approche pour étudier son activité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (Numéro spécial), 165-188. <https://doi.org/10.46298/rdm.1291>
- Abboud-Blanchard, M., Cazes, C. et Vandebrouck, F. (2013). Théorie de l'activité et double approche : genèses d'usage de bases d'exercices en ligne. Dans J.-B. Lagrange (dir.), *Les technologies numériques pour l'enseignement : usages dispositifs et genèses* (p. 37-54). Octarès.
- Argaud, H.-C., Maillard, M., Castry, N., Valesa, M.-H., Porte, E., Charras, M. et Castry, A. (1998). Placer des jetons. *Grand N*, (63), 9-23.
- Bénard Linh Quang, S., Berney, S., Maurer, R. et Bétrancourt, M. (2023, juin 26). *Utilisation d'un environnement virtuel en classe, quels effets sur les représentations spatiales des élèves de la 4P à la 6P (7-11 ans) ?* [Communication]. Colloque Piaget-RIPSYDEVE, Genève, Suisse.
- Berthelot, R. et Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Université de Bordeaux.
- Berthelot, R. et Salin, M.-H. (1999). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N*, (65), 37-59.
- Brousseau, G. (1983). Étude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. Dans *Actes du Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Université Joseph Fourier, Grenoble* (vol. 45, p. 183-226).
- Charnay, R. et Douaire, J. (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes, au cycle 3*. Hatier.
- Chen, J. et Stanney, K. (2002). A theoretical model of wayfinding in a virtual environment: Proposed strategies for navigational aiding. *Presence: Teleoperators and Virtual Environments*, 8(6), 671-685.
- Conférence intercantonale instruction publique et culture Suisse romande et Tessin [CIIP]. (2010). *Plan d'études romand*. <http://www.plandetudes.ch>
- Diouf, F.-M. (2021). *Development of an application to compare routes in a virtual environment. Illustrating routes as sequence of images* [Mémoire de master, Université de Genève]. <https://tecfa.unige.ch/tecfa/maltt/memoire/Diouf2021.pdf>
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. et Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool : Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics Education*, 75, 213-234. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5>
- Frauchiger, T., Matri, S., Coutat, S. et Dorier, J.-L. (2022, 12-16 décembre). *Typologie de messages écrits pour communiquer un trajet dans une ville virtuelle* [Communication]. Colloque Espace mathématique francophone (EMF2022), Cotonou, Bénin.
- Golledge, R. G. (1999). *Wayfinding behavior: Cognitive mapping and other spatial processes*. JHU press.
- Marchand, P. (2020). Quelques assises pour valoriser le développement des connaissances spatiales à l'école primaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 40(2), 135-178.
- Matri, S. (2024). *Enseigner et apprendre le repérage dans l'espace à l'aide d'une ville virtuelle pour des élèves de 7 à 10 ans à Genève* [Thèse de doctorat, Université de Genève]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-04743115>

Pennel, I., Coello, Y. et Orliaguet, J.-P. (2001). Les relations perception-actions face aux nouvelles technologies : Adaptation et apprentissage en situation de télémanipulation. Dans Y. Coello et J. Honoré (dir.), *Percevoir, s'orienter et agir dans l'espace : approche pluridisciplinaire des relations perception-action*. Solal.

Tolman, E. C. (1948). Cognitive maps in rats and men. *Psychological Review*, 55(4), 189-208.
<https://doi.org/10.1037/h0061626>

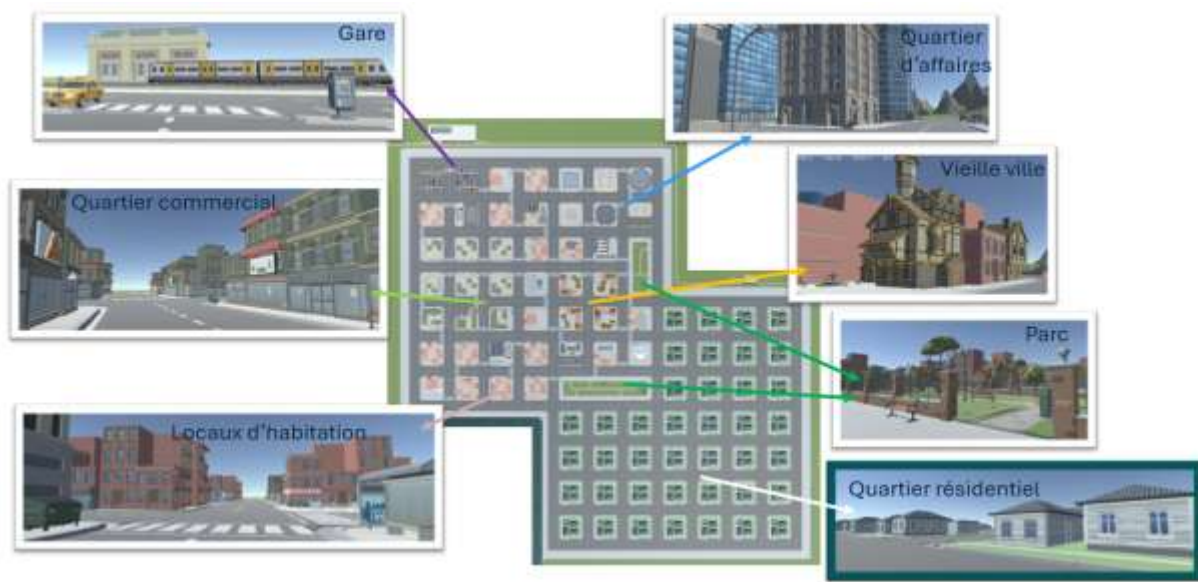
ANNEXE 1



ANNEXE 2



ANNEXE 3



APPORTS DE MODÈLES DIDACTIQUES POUR CONCEVOIR DES PARCOURS ADAPTATIFS DANS UN ENVIRONNEMENT NUMÉRIQUE

| GRUGEON-ALLYS* BRIGITTE, LESNES** ELANN, JOLIVET*** SÉBASTIEN ET
VANDEBROUCK**** FABRICE

Résumé | Nous présentons un projet associant chercheurs en didactique, en informatique et entreprises. MindMath est une plateforme numérique d'entraînement en algèbre et en géométrie proposant aux élèves de collège des parcours d'exercices adaptatifs et des rétroactions pertinentes au regard de leur activité. Nous expliciterons la place de la didactique des mathématiques dans la conception d'une telle plateforme et plus précisément comment elle permet de prendre en compte les enjeux épistémologiques, curriculaires et cognitifs pour l'apprentissage des contenus en jeu.

Mots-clés : EIAH, modèles didactiques, algèbre, géométrie

Abstract | We present a project that brings together researchers in education, IT and companies. MindMath is a digital training platform for algebra and geometry that offers secondary school students adaptive exercise paths and feedback relevant to their activity. We will explain the role of mathematics didactics in the design of such a platform and, more specifically, how it enables epistemological, curricular and cognitive issues to be taken into account when learning the content involved.

Keywords: Digital learning environment, didactic models, algebra, geometry

I. INTRODUCTION

Cette communication vise à présenter le travail de conception qui a eu lieu dans le cadre du projet MindMath associant des chercheurs en didactique et en informatique et des entreprises. Au travers de notre cas d'étude Mindmath, nous explorons divers aspects liés à la conception d'une plateforme numérique d'entraînement aux mathématiques, ici en algèbre et en géométrie au collège (ce qui correspond aux *grades* 6 à 9).

À l'entrée au collège, des élèves se retrouvent parfois en difficultés en mathématiques et les enseignants doivent gérer une grande hétérogénéité des apprentissages. L'environnement numérique MindMath, fondé sur les apports cumulés de la didactique et de l'informatique, dont l'intelligence artificielle, vise la régulation des apprentissages des élèves et n'a pas pour but premier l'introduction de nouveaux savoirs. La conception de la plateforme MindMath se situe ainsi dans la continuité des recherches menées autour du logiciel de diagnostic *Pépîte* en algèbre (Grugeon, 1997 ; Grugeon-Allys *et al.*, 2012 ; Grugeon-Allys *et al.*, 2023). L'enjeu de ces recherches est de proposer des exercices adaptés en fonction des besoins d'apprentissage d'élèves à un niveau scolaire donné du collège. La plateforme MindMath s'appuie donc sur des fondements didactiques. Ceux-ci sont à l'origine des modèles didactiques qui permettent de concevoir des exercices, de les organiser en parcours d'apprentissage et de prévoir le contenu et la décision de rétroactions adaptatives. Ce sont ces modèles didactiques, implémentables dans la plateforme numérique, que nous allons définir et décrire dans cette communication. Nous aborderons seulement en conclusion la façon dont ces modèles peuvent être

* LDAR, Univ Paris Est Creteil, F-94010 Creteil – France – brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

** LDAR, Univ Rouen Normandie, F-76000 Rouen – France – elann.lesnes@univ-rouen.fr

*** IUFE et TECFA, Université de Genève – Suisse – sebastien.jolivet@unige.ch

**** LDAR, Université Paris Cité, F-75013 Paris – France – vandebro@u-paris.fr

exploités par l'IA pour adapter les rétroactions et les parcours d'apprentissages aux besoins d'apprentissages des élèves.

II. ÉLÉMENTS THÉORIQUES

Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) dans lequel toute activité humaine peut être décrite à partir de tâches t qui relèvent de types de tâches T et qui sont résolues par au moins une technique τ , justifiée par un discours rationnel appuyé sur des savoirs et des justifications, appelé technologie θ , lui-même justifié par une théorie Θ . Ces éléments forment une praxéologie $[T; \tau; \theta; \Theta]$ dite ponctuelle. Dans l'enseignement, les praxéologies ponctuelles (OMP) ne vivent pas seules, elles s'agrègent autour d'une même technologie pour former une praxéologie locale (OML). Ces praxéologies locales peuvent à leur tour s'agréger autour d'une même théorie pour former une praxéologie régionale (OMR). Enfin, les praxéologies régionales peuvent s'agréger en une praxéologie globale (OMG), par exemple l'algèbre ou la géométrie. L'ensemble des praxéologies globales forment une discipline, ici, les mathématiques.

Dans la réalité de la classe, du point de vue cognitif, l'élève est confronté à des tâches t et de son point de vue d'élève, reconnaître qu'une tâche t relève de tel type de tâche T ou se résout en convoquant telle ou telle technique τ est crucial. Ainsi, nous enrichissons les modèles construits dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique afin de pouvoir articuler les aspects institutionnels et épistémologiques avec les aspects cognitifs des domaines de l'algèbre et de la géométrie au cycle 4 (correspondant aux *grades* 7 à 9).

1. *Modélisation didactique du savoir*

Un élève apprend dans une institution dont les programmes fixent l'activité mathématique attendue qui peut être décrite avec la théorie anthropologique du didactique en termes de praxéologies, en particulier de savoirs et de techniques et technologies visés. De plus, un élève de collège a étudié dans plusieurs classes avec différents enseignants et a développé une activité mathématique relativement aux programmes rencontrés. Pour situer l'activité mathématique d'un élève par rapport à celle attendue à un niveau scolaire donné, dans une institution donnée, nous prenons appui sur une praxéologie de référence (Bosch et Gascón, 2005). C'est ce que nous désignerons comme un Modèle Praxéologique de Référence (MPR).

Un MPR décrit les aspects épistémologiques des objets de savoir d'un domaine mathématique et les praxéologies associées à un rapport idoine au savoir visé relativement aux institutions considérées. Dans notre recherche, nous construisons un MPR pour chacun des domaines pris en compte dans la plateforme MindMath (algèbre et géométrie pour les différents niveaux scolaires du cycle 4) mais nous enrichissons les aspects curriculaire et épistémologiques des objets de savoir à partir de résultats de travaux issus d'approches cognitive et sémiotique.

Pour ce faire, nous commençons par décomposer un domaine de savoir en praxéologies régionales et locales. Pour l'algèbre, nous nous appuyons en particulier sur le processus d'algébrisation défini par Munzón (2010). En collège, le domaine algébrique est structuré à partir de deux praxéologies régionales relatives aux expressions algébriques (Pilet, 2015) et aux équations (Sirejacob, 2017). Chaque praxéologie régionale est structurée en quatre praxéologies locales, appelées *Modélisation*, *Représentation*, *Preuve* et *Calcul*, chacune comprenant une ou plusieurs praxéologies ponctuelles (voir figure 1 pour un MPR du domaine algébrique).

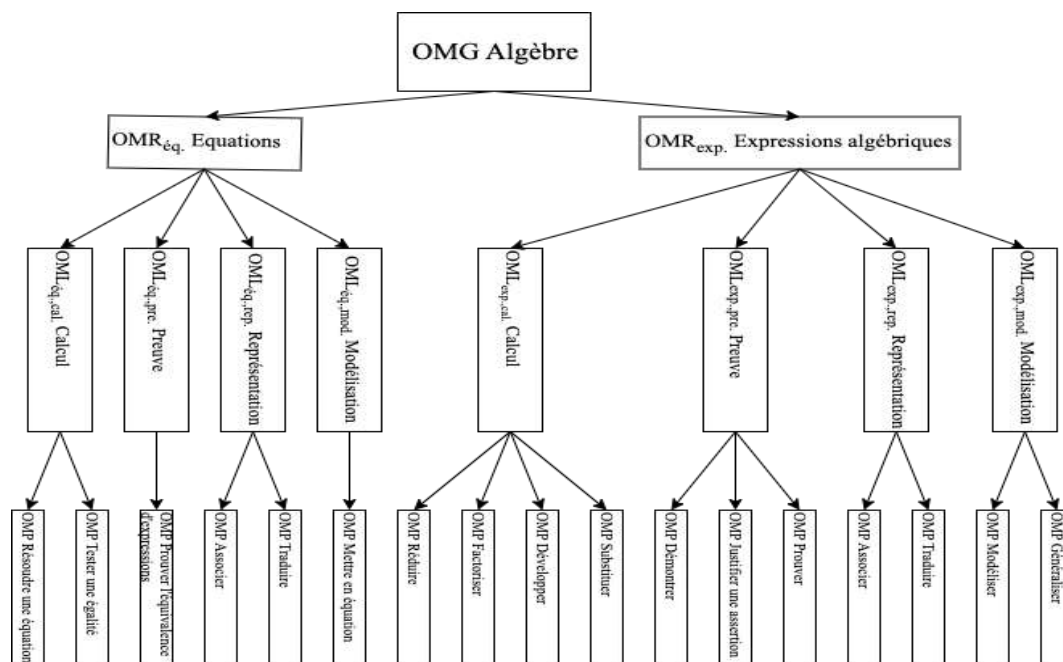


Figure 1 – Modélisation du savoir du domaine algébrique au moyen d'un Modèle Praxéologique de Référence

2. Modélisation didactique de l'élève

Dans une institution donnée, à un temps donné, l'élève peut être confronté à un décalage entre son activité mathématique réelle et celle attendue dans cette institution. Nous définissons ainsi les besoins d'apprentissage comme « ce qui est nécessaire de travailler pour faire évoluer son rapport personnel actuel vers un rapport personnel idoine au regard des attendus de l'institution » (Jolivet, *et al.*, 2021, p. 125). Les besoins d'apprentissage rendent compte du différentiel entre l'état des connaissances de l'élève et les savoirs attendus dans l'institution. Ce qui est à travailler renvoie à des tâches du domaine qui permettent à l'élève de faire évoluer son activité mathématique.

Pour caractériser les tâches du point de vue de l'élève et de ses connaissances nous convoquons des outils cognitifs développés par Robert (2008), notamment en terme de disponibilité des connaissances et de complexité des tâches : entre tâches qui mettent uniquement en jeu des applications directes de connaissances disponibles chez les élèves, peu complexes, à des tâches qui nécessitent des reconnaissances, de l'organisation, et en particulier le convocation d'autres types de tâches pour leur résolution (Castela, 2008).

Reprenant le travail de Grugeon-Allys (2016) sur les modes technologico-théoriques, nous définissons la notion de mode de justification. Un mode de justification est une façon de caractériser l'état des connaissances disponibles de l'élève à un moment donné de son parcours. Pour le déterminer, nous nous appuyons sur les savoirs et les raisonnements mis en œuvre de façon dominante par l'élève (et donc qui justifient ses démarches) dans la résolution des tâches relevant d'une praxéologie locale ou régionale donnée. Nous définissons ainsi des modes de justification *a priori* pour une praxéologie donnée et à un niveau scolaire donné : un mode ancien, un mode en cours de construction et un mode attendu.

En algèbre, nous prenons spécifiquement en compte la double rupture épistémologique entre arithmétique et algèbre, à la fois du point de vue des objets en jeu mais aussi des raisonnements attendus (Vergnaud, 1990). Nous définissons les trois modes de justification que nous caractérisons dans le Tableau 1.

Tableau 1 – Modes de justification en algèbre à la fin du cycle 4

Mode de justification	Mode ancien (arithmétique)	Mode en construction (algébrique de base)	Mode attendu (algébrique)
Repère scolaire	Cycle 3 (<i>grades</i> 4-6)	Début cycle 4 (<i>grades</i> 7 - 8)	Fin cycle 4 (<i>grades</i> 8 - 9)
Praxéologie Modélisation	Démarche arithmétique Lettres comme étiquettes, signe « égal » comme annonce de résultat	Lettres évaluées, variables dans expressions générales élémentaires	Modélisation via expressions, formules (variables), mise en équations (inconnues) Signe « égal » relation d'équivalence
Praxéologie Preuve	Preuve par l'exemple	Généralisation, Programmes de calcul	Preuve algébrique
Praxéologie Représentation	Incohérence entre l'énoncé et la représentation proposée par l'élève (graphique ou écritures numériques abréviatives)	Cohérence entre énoncé et écritures algébriques avec congruence sémiotique	Cohérence entre énoncé et écritures algébriques avec ou même sans congruence sémiotique
Praxéologie Calcul	Calcul arithmétique (erreur : concaténation)	Substitution, distributivité simple pour développer (application directe)	Équivalence d'expressions, Distributivité simple, pour développer, factoriser, distributivité double

Dans la plateforme MindMath, le modèle didactique de l'élève est ainsi constitué d'un n-uplets de modes de justification : un mode pour chacune des praxéologies locales définies pour un domaine de savoir. Par exemple, considérons le profil des élèves avec le quadruplet de modes de justification [Modélisation ; Preuve ; Représentation ; Calcul] et l'énoncé suivant :

« un élève affirme à un autre élève : “Tu trouveras toujours le même résultat si tu prends un nombre, tu ajoutes 4 à ce nombre, tu multiplies le résultat par 3, tu soustrais le triple du nombre de départ et enfin, tu divises le résultat par 2”. Cette affirmation est-elle vraie pour n'importe quel nombre ? Justifie ta réponse. »

Voici trois réponses d'élèves et les profils associés :

Tableau 2 – Réponses d'élèves et profil algébrique associé

Élève	Réponse	Profil algébrique
E1	$\frac{(x+4) \times 3 - 3x}{2} = \frac{3x + 12 - 3x}{2} = \frac{12}{2} = 6$	[attendu ; attendu ; attendu ; attendu]
E2	$x + 4 \times 3 - 3x = 4x + 12$ (preuve algébrique mais écriture linéaire globale non parenthésée)	[attendu ; en construction ; ancien ; en construction]
E3	Avec 3, $3 + 4 = 7 \times 3 = 21$; $21 - 3 \times 3 = 12$; $\frac{12}{2} = 6$ (écriture pas à pas séparée)	[ancien ; ancien ; ancien ; ancien]

III. QUESTION DE RECHERCHE ET HYPOTHÈSE

Nous nous demandons en quoi les modèles didactiques du savoir et de l'élève, que nous venons de présenter, permettent de définir des parcours d'exercices adaptés aux besoins d'apprentissage d'élèves

en algèbre et en géométrie à un niveau scolaire donné et de les implémenter dans un environnement numérique.

Nous faisons l'hypothèse qu'à partir des modèles du savoir et de l'élève et en prenant en compte différentes approches (épistémologique, institutionnelle et cognitive), nous pourrions définir des conditions didactiques pour concevoir les modèles didactiques des tâches et des parcours d'apprentissage. Ceux-ci permettront de générer informatiquement les rétroactions locales sur les exercices et les parcours d'exercices en lien avec les besoins d'apprentissage des élèves.

IV. MODÈLES DIDACTIQUES CONSTRUITS POUR LA PLATEFORME MINDMATH

1. *Modélisation didactique des tâches*

Nous avons défini les modèles didactiques du savoir et de l'élève, or sur la plateforme, les élèves résolvent des tâches, organisées en parcours, dans lesquelles sont mis en jeu les savoirs. Pour aller plus loin dans la modélisation et l'implémentation sur la plateforme nous avons maintenant besoin de modèles didactiques de tâches et de modèles didactiques de parcours.

Adoptant une approche multidimensionnelle comme plus haut, Grapin et Grugeon-Allys (2018) caractérisent didactiquement une tâche par : les savoirs en jeu, sa conformité au curriculum, sa complexité, la ou les technique(s) permettant de la réaliser ainsi que les justifications associées, en particulier celles attendues à un niveau institutionnel donné. Une telle caractérisation permet, en appui sur les modèles didactiques du savoir et de l'élève, de positionner les tâches les unes par rapport aux autres au regard des programmes et d'identifier a priori les justifications erronées ainsi que les classes d'erreurs.

Rappelons que le modèle didactique du domaine de savoir défini plus haut est structuré en praxéologies régionales et locales. Afin d'implémenter dans la plateforme le modèle didactique des tâches, nous nous plaçons dans le cadre développé par Chaachoua (2018) puis Chaachoua *et al.* (2019) et qui étend le cadre de la TAD : T4TEL.

Nous utilisons en particulier la notion de générateur de types de tâches définis par $GT = [\text{Verbe d'action}, \text{Complément fixe} ; \text{Système de variables}]$. Par exemple, $GT1 = [\text{résoudre}, \text{une équation du } 1^{\text{er}} \text{ degré} ; VT1, VT2]$ avec $VT1$ la structure de l'équation et $VT2$ le nombre de solutions de l'équation (aucune, une, une infinité). Chacune des praxéologies locales est donc décomposée en générateurs de types de tâches. Nous définissons ensuite des types de tâches en affectant des valeurs aux variables de type de tâches (VT), ce qui rend compte de l'agrégation de différentes technologies dans les praxéologies locales et régionales. Dans le cas présenté, les structures d'équations du premier degré travaillées au collège sont les suivantes : équations de la forme $ax + b = c$ ($a \neq 0$) ou de la forme $ax + b = cx + d$ ($a - c \neq 0$), équation de la forme $P(x) = Q(x)$ (avec $P(x)$ et $Q(x)$ expressions du premier degré) se ramenant à $ax + b = cx + d$, équations de la forme $P(x) = Q(x)$ (avec $P(x)$ et $Q(x)$ expressions du second degré et $\text{degré}(P - Q) = 1$).

Pour construire et caractériser des tâches à partir de ces types de tâches, nous faisons évoluer le modèle T4TEL en introduisant des variables de tâches (Jolivet et al., 2021). Les variables de tâches et leurs valeurs ont ainsi une double fonction : caractériser la portée de certaines techniques (VtP) et caractériser la complexité des tâches (VtC). En instanciant les variables de tâches VtP et VtC , nous définissons des familles de tâches. Une famille de tâches est un ensemble de tâches défini par le choix

des valeurs des variables, ces tâches étant considérées comme semblables à l'aléatoire de génération près. C'est le niveau de granularité le plus fin.

En reprenant le générateur de types de tâches GT1 déjà défini, nous construisons plusieurs familles de tâches. Pour ceci, nousinstancions la variable VtP « nature des solutions » (entière, décimale, rationnelle) et les variables $VtC1$ « nature des coefficients » ($N ; \mathbb{Z} ; D ; \mathbb{Q}$) et $VtC2$ « complexité de la réécriture » (aucune réécriture, développement, réduction, factorisation).

A partir du générateur GT1=[résoudre, une équation du 1^{er} degré ; VT1 : $ax + b = cx + d$, VT2 : 1 solution ($a - c \neq 0$)], nous définissons différentes familles de tâches, par exemple :

- Famille de tâches $Ft\_1 = \{ \text{forme de l'équation } P(x) = Q(x) \text{ avec } d^{\circ}(P), d^{\circ}(Q) < 2, \text{ forme réduite } ax + b = cx + d \text{ et } a - c \neq 0 ; \text{ nombre de solutions : } 1 ; \text{ nature des solutions : } \mathbb{Q} \setminus D ; \text{ nature des coefficients : } \mathbb{Z} ; \text{ complexité de la réécriture : réécriture nécessaire} \}$
- Famille de tâches $Ft\_2 = \{ \text{forme de l'équation } P(x) = Q(x) \text{ avec } d^{\circ}(P) = d^{\circ}(Q) = 2 \text{ et } d^{\circ}(P - Q) = 1 ; \text{ nombre de solutions : } 1 ; \text{ nature des solutions : } \mathbb{Q} \setminus D ; \text{ nature des coefficients : } \mathbb{Z} ; \text{ complexité de la réécriture : développement et réduction seulement} \}$

2. Modélisation didactique des parcours

Pour répondre à un objectif d'apprentissage donné, nous définissons un parcours d'apprentissage comme une suite organisée de tâches prenant en compte les modes de justification des élèves. Nous caractérisons des exercices adaptés à cet objectif et aux besoins d'apprentissage des élèves en jouant sur les valeurs de variables de types de tâches et de tâches.

Afin de créer des parcours d'apprentissage, nous définissons d'abord des tâches cibles correspondant aux objectifs des programmes et dont la réussite est visée. Le reste du parcours s'adapte au mode de justification de l'élève relativement à la ou les praxéologie(s) locale(s) en jeu dans le parcours. Ainsi, si le mode de justification de l'élève relève du mode ancien, on pourra lui proposer des tâches pouvant d'abord être résolues par une technique ancienne avant de lui proposer des tâches « pivot » pour négocier la rupture vers les techniques attendues à son niveau scolaire, puis les tâches cibles. Pour un élève dont le mode de justification relèverait déjà de ce qui est attendu, il est possible de proposer directement les tâches cibles puis des tâches plus complexes, faisant intervenir d'autres praxéologies par exemple.

V. ADAPTATION À LA GÉOMÉTRIE

Comme nous l'avons vu, la plateforme MindMath propose aussi un entraînement en géométrie. Or, au cours du cycle 3, les programmes scolaires déclarent vouloir faire passer les élèves d'une géométrie « instrumentée » orientée par la perception ou les instruments à une géométrie « raisonnée » guidée par le raisonnement sur les propriétés. Les propriétés et objets géométriques changent alors de statut au collège sans que ce changement soit forcément explicité (Lesnes-Cuisiniez, 2021). Comme en algèbre, la non prise en compte de cette double rupture épistémologique (liée aux propriétés et aux objets géométriques mobilisés) entre une géométrie « instrumentée » et une géométrie « raisonnée », peut amener des élèves à construire des rapports à la géométrie différents de ceux attendus.

Dans le cadre du projet MindMath, nous avons donc également développé les modèles présentés auparavant en géométrie. Ainsi, pour le modèle du savoir, le MPR de la géométrie est, lui aussi, décomposé en praxéologies régionales : l'une relative aux figures géométriques, l'autre relative aux solides géométriques. Celles-ci sont décomposées en praxéologies locales. Pour l'OMR relative aux

figures géométriques, on obtient : *Construire une figure, Prouver une propriété relative à des figures, Représenter par une figure, Calculer une grandeur géométrique, Modéliser par une figure* (Lesnes-Cuisiniez, 2021).

Pour le modèle de l'élève, nous nous sommes en particulier intéressés à la praxéologie locale de construction de figures, dans le contexte d'un logiciel de géométrie dynamique puisque MindMath est une plateforme numérique. À partir de travaux en didactique des mathématiques, nous avons construit des indicateurs à repérer dans les productions des élèves pour déterminer le mode de justification dont ils relèvent lorsqu'ils résolvent une tâche de cette praxéologie locale (Tableau 2).

Tableau 2 – Modes de justification en géométrie à la fin du cycle 4 pour la praxéologie locale « construire une figure »

Critère	Mode ancien	Mode incomplet en construction	Mode attendu
Repère scolaire	Cycle 3 (grades 4-6)	6 ^e –5 ^e (grades 6-7)	Fin cycle 4 (grades 8-9)
Type de construction	Au jugé	Construction molle (Laborde, 2005)	Construction robuste
Outils utilisés pour la construction	Outils de dessin	Utilisation combinatoire d'outils de construction	Utilisation réfléchie d'outils de construction
Schéma codé			Utilisation d'un schéma codé
Présence et nature du raisonnement	Pas de raisonnement construit	Raisonnement construit pour valider uniquement	Raisonnement préalable
Validation de la construction	Pas de validation, validation perceptive ou par les instruments de tracé	Validation par le déplacement	Validation par les propriétés
Propriétés mobilisées	Pas de propriétés ou propriétés spatio-graphiques	Propriétés erronées ou utilisées hors de leur domaine de validité	Propriétés géométriques bien utilisées
Structure déductive du raisonnement	Argumentation incorrecte ou par juxtaposition	Argumentation incomplète (îlots deductifs)	Raisonnement deductif correct, démonstration

Pour le modèle des tâches, nous avons décomposé la praxéologie locale de construction de figures en générateurs de types de tâches. Ceux-ci ont été identifiés de manière à couvrir les constructions possibles au collège. Par exemple, nous avons défini le générateur de types de tâches GT2=[construire, un triangle ; VT1, VT2] avec VT1 la nature du triangle à construire et VT2 les données de l'énoncé (deux côtés et un angle, un côté et deux angles, etc.). Une fois les types de tâches produits, comme en algèbre, nous définissons des variables de tâches VtP (VtP1 : éléments de la figure déjà construits, VtP2 : instruments à disposition dans le milieu) et VtC (VtC1 : nombre de propriétés minimum à mobiliser dans la résolution, VtC2 : registre de représentation de l'énoncé et désignation du triangle).

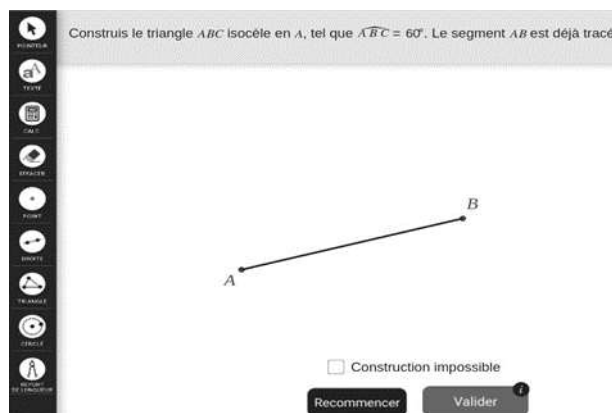


Figure 2 – Exercice « construis le triangle ABC »

Ainsi, nous pouvons produire des familles de tâches en instanciant les variables VtP et VtC, et, à partir de ces familles de tâches, générer des tâches. Par exemple, la tâche présentée sur la figure 2 a été générée à partir du générateur GT2 par les valeurs de variables {VT1 : triangle équilatéral ; VT2 : un côté et un angle sur ce côté ; VtP1 : un côté non-base ; VtP2 : report de longueur (pas de rapporteur) ; VtC1 : 4 ; VtC2 : langage naturel, triangle désigné comme « isocèle »}.

Enfin, les parcours d'apprentissage sont construits de la même façon qu'en algèbre en jouant sur les variables de types de tâches et de tâches pour s'adapter au mode de justification de l'élève.

VI. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans notre travail de conception et notre approche multidimensionnelle, nous avons introduit, au-delà des variables de type de tâches de T4TEL, les variables de tâches, VtP et VtC, pour respectivement faire évoluer les justifications en jeu en lien avec la portée de la technique et enrichir les techniques et technologies mobilisées en lien avec la complexité de la tâche.

Notre travail a permis de rendre compte de la pertinence de l'approche multidimensionnelle pour modéliser et calculer les parcours d'apprentissage sur MindMath en prenant en compte le rapport des élèves au savoir. Dans le cadre d'une plateforme d'apprentissage, l'exploitation des modèles basés sur l'expertise didactique soulève plusieurs défis. Tout d'abord comme toute modélisation de la réalité, ils donnent nécessairement lieu à des simplifications, et d'autre part, même dans le cadre d'une approche multidimensionnelle, ils ne peuvent embrasser pleinement la complexité de l'activité mise en œuvre par un apprenant. Ils ne sont pas donc pas pleinement prescriptifs sur les décisions à prendre dans une situation donnée, et aussi ils sont coûteux à produire. D'un autre côté des solutions d'IA sont de plus en plus déployées pour proposer des solutions d'adaptive learning et elles peuvent prendre en compte un grand nombre de paramètres, faire émerger des phénomènes non anticipés ou décrits par les modèles didactiques (Emprin et Richard, 2023). Mais elles rencontrent aussi diverses difficultés, notamment le problème de l'initialisation des algorithmes qui nécessitent un grand nombre de données.

Une piste, qui a été explorée dans le cadre du projet est de faire travailler en complémentarité l'expertise humaine et les modèles didactiques avec les potentialités de l'IA en exploitant une IA symbolique qui intègre les modèles didactiques, notamment pour initialiser les algorithmes, et d'autre part une IA numérique qui va être en mesure d'apprendre au fur et à mesure que les données sont produites.

Dans le projet MindMath cette approche s'est concrétisée autour de la décision des rétroactions à proposer aux élèves. Un modèle de description des rétroactions, reprenant les modèles et cadres

didactiques, a été développé en collaboration entre informaticiens et didacticiens. En complément, quelques hypothèses ont été formulées sur l'adéquation de différents types de rétroactions, décrites par le modèle, avec des situations prototypiques basées notamment sur le mode de justification de l'apprenant. On obtient ainsi un écosystème cohérent entre les exercices, les rétroactions et l'apprenant, qui sont décrits à l'aide de moyens communs. Ces éléments, issus de l'expertise humaine, servent à alimenter et faciliter l'initialisation d'un algorithme de décision des rétroactions dans la plateforme. Plusieurs éléments relatifs à cette approche sont développés dans (Jolivet *et al.*, 2022). L'étape suivante du travail est de pouvoir mettre en œuvre à grande échelle ces éléments, de manière à identifier les résultats produits par l'algorithme d'IA et à les analyser par le prisme des modèles didactiques.

RÉFÉRENCES

- Bosch, M. et Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier et C. Margolinas (dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques. Cours de la 12^e école d'été de didactique des mathématiques CORPS (ISERE), 20-29 août 2003* (p. 107-122). La pensée sauvage.
- Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherche en didactique des mathématiques*, 28(2), 135-182.
- Chaachoua, H. (2018). T4TEL, un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. Dans J. Pilet et C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018, Université Paris Diderot* (p. 8-25). IREM de Paris.
- Chaachoua, H., Bessot, A., Romo, A. et Castela, C. (2019). Developments and functionalities in the praxeological model. Dans M. Bosch, Y. Chevallard, F. Javier Garcia et J. Monaghan (dir.), *Working with the anthropological theory of the didactic: A comprehensive casebook* (p. 41-60). Routledge.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.
- Emprin, F. et Richard, P. R. (2023). Intelligence artificielle et didactique des mathématiques : état des lieux et questionnements. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, (28), 131-181.
<https://doi.org/10.4000/adsc.3286>
- Grapin, N. et Grugeon-Allys, B. (2018). Approches psychométrique et didactique de la validité d'une évaluation externe en mathématiques : quelles complémentarités et quelles divergences ? *Mesure et évaluation en éducation*, 41(2), 37-66. <https://doi.org/10.7202/1059172ar>
- Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(2), 167-209.
- Grugeon-Allys, B. (2016). Modéliser le profil diagnostique des élèves dans un domaine mathématique et l'exploiter pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en classe : une approche didactique multidimensionnelle. *e-JIREF*, 2(2), 63-88.
- Grugeon-Allys, B., Chenevotot-Quentin, F. et Pilet, J. (2023). Apports de modèles didactiques pour concevoir des parcours adaptatifs dans un environnement numérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 43(3), 285-325.

- Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevotot-Quentin, F. et Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (Numéro spécial), 137-162.
- Jolivet, S, Lesnes-Cuisiniez, E. et Grugeon-Allys, B. (2021). Conception d'une plateforme d'apprentissage en ligne en algèbre et en géométrie : prise en compte et apports de modèles didactiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (26), 117-156.
<https://doi.org/10.4000/adsc.1060>
- Jolivet, S., Yessad, A., Muratet, M., Lesnes, E., Grugeon-Allys, B. et Luengo, V. (2022). Rétroactions dans un environnement numérique d'apprentissage : Modèle de description et décision. *Sticef*, 29(2), 87-123. <https://doi.org/10.23709/STICEF.29.2.4>
- Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions : two sides of the use of dynamic geometry environments. Dans *Proceedings of the 10th Asian technology conference in mathematics*, 12-16 décembre 2005, Cheong-Ju, Corée du Sud (p. 22–36). ATCM.
- Lesnes-Cuisiniez, E. (2021). *Modélisation didactique de parcours d'apprentissage dans un ELAH pour l'entrée dans le raisonnement géométrique au cycle 4, en appui sur les problèmes de construction de figures planes* [Thèse de doctorat, Université de Paris].
- Munzón, N. R. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* [Dissertation doctorale, Universitat Autònoma de Barcelona].
- Pilet, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35(3), 271-312.
- Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. Dans F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 45-52). Octarès.
- Sirejacob, S. (2017). *Le rôle de l'enseignant dans l'organisation de l'étude personnelle hors la classe de collégiens : le cas des équations du premier degré à une inconnue* [Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot].
- Vandebrouck, F. (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octarès.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133-170. https://www.gerard-vergnaud.org/texts/gvergnaud_1990_theorie-champs-conceptuels_recherche-didactique-mathematiques-10-2-3.pdf

**GT9 | LIENS ENTRE
PRATIQUES
D'ENSEIGNEMENT ET
APPRENTISSAGES**

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL 9

LIENS ENTRE PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGES

| ALLARD* CÉCILE, PILET** JULIA ET ROBERT*** VIRGINIE

I. PRÉSENTATION DU GT9

Ce groupe de travail s'intéresse aux perspectives que la recherche en didactique des mathématiques peut éclairer quant aux liens entre les pratiques enseignantes, déclarées ou effectives, et les apprentissages des élèves, potentiels ou effectifs, en mathématiques. Lors des précédents colloques EMF (Atta et al., 2018 ; Kamga et al., 2022), ce thème a été abordé avec deux points de vue : les effets des pratiques enseignantes sur les apprentissages des élèves, mais aussi l'influence de l'activité des élèves sur les pratiques enseignantes. Ces deux points de vue sont restés au cœur des intérêts du GT9 pour EMF 2025. De manière spécifique, dans son appel de communication le GT9 de 2025 avait comme objectif d'aborder les questions suivantes :

- Dans une visée comparative, comment la prise en compte des spécificités institutionnelles, socio-culturelles des pays, en perpétuelle mutation, influence-t-elle les recherches portant sur les rapports entre les pratiques enseignantes et les apprentissages qui en découlent ?
- Quels sont les spécificités et les apports des recherches qualitatives et quantitatives pour l'étude des rapports entre pratiques enseignantes et apprentissages ? Quelle est leur complémentarité ? Leur faisabilité ? Dans quelle mesure ces recherches nous permettent-elles de faire les liens avec les apprentissages effectifs des élèves ?
- Quels sont les cadres et outils méthodologiques pour évaluer les effets du travail collaboratif sur les élèves ou même sur les enseignants eux-mêmes ?

Pour EMF 2025, le GT9 a mis l'accent sur la façon dont les liens entre les pratiques enseignantes et les apprentissages effectifs des élèves sont établis selon différents angles comme le travail collaboratif entre enseignants ou élèves ou la caractérisation de « profils » de pratiques enseignantes ou d'apprentissage des élèves et ce, dans des recherches tant quantitatives que qualitatives. Les contributeurs et contributrices ont également été encouragés à exposer leurs ancrages épistémologiques et théoriques afin d'éclairer sur la diversité des méthodologies utilisées dans les recherches du groupe de travail.

Dans une perspective de partage d'expertises internationales, le GT9 s'intéresse aux effets du contexte sur les pratiques enseignantes comme : les cultures d'enseignement, les attentes institutionnelles, la composition des classes (le nombre d'élèves dans la classe, les classes mixtes ou non mixtes, socialement défavorisées, mixtes ou favorisées, etc.), les modalités de travail (classe inversée, flexible, etc.) ou bien encore les supports (avec ou sans manipulation, avec tableau noir ou sans tableau, etc.). Bien que des communications n'aient pas portées spécifiquement sur ces questions lors de l'édition 2025 de l'EMF, ces enjeux ont été nommés à plusieurs reprises pendant les échanges

* Univ Paris Est Creteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010Creteil – France – cecile.allard@u-pec.fr

** Univ Paris Est Creteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010Creteil – France – julia.pilet@u-pec.fr

*** Université de Sherbrooke – Canada – Virginie.Robert2@usherbrooke.ca

entre les personnes participantes. Par ailleurs, pour pouvoir comparer les pratiques enseignantes selon les cultures d'enseignement des pays et certaines caractéristiques de leurs formes scolaires ou de leurs programmes d'enseignement, des enregistrements vidéo de situations de classes ont été présentés pendant le colloque et discutés. Ceci a donné lieu à des échanges riches sur l'influence des institutions, des pratiques enseignantes et des ressources sur les apprentissages des élèves.

Lors du GT9 de EMF 2022, de nombreux échanges avaient porté sur les aspects méthodologiques et en particulier sur les limites et les avantages des interprétations réalisées à la suite de recherches qualitatives et quantitatives. Ces discussions avaient mis en lumière l'importance du contexte d'enseignement et des conditions dans lesquelles la problématique a été formulée, sur les données recueillies et les résultats obtenus. Puisque le GT9 d'EMF 2025 regroupait des recherches qualitatives et quantitatives des échanges ont permis d'aborder des questions comme : À quel moment peut-on qualifier une enquête « d'enquête à grande échelle ? ; Quels sont les aides ou les freins pour avoir la possibilité de travailler sur des échantillons représentatifs d'enseignants ? Quels sont les enjeux méthodologiques rencontrés dans les recherches qualitatives et les recherches collaboratives et comment transmettre les résultats de ces dernières à grande échelle ? À travers ces discussions, il a aussi été question du partage des résultats de la recherche en tenant compte de la variété de contextes scolaires et de cultures. En somme, les différentes communications et les discussions du GT9 ont permis de poursuivre la réflexion sur les liens entre les pratiques enseignantes et les apprentissages des élèves en mathématiques.

Nous commençons par présenter la façon dont les liens entre pratiques d'enseignement et apprentissage des élèves ont été abordés dans les contributions. Puis nous présentons la modalité d'échanges autour d'extraits de vidéos de classe que nous avons proposée aux participants. Enfin nous concluons par des perspectives.

II. LES LIENS ENTRE PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGES ABORDÉS DANS LES CONTRIBUTIONS

Au total, onze contributions ont été discutées à EMF 2025 sous la forme de dix communications et d'une affiche. Quatre nationalités étaient représentées : Canada, France, Suisse et Tunisie. Nous avons regroupé les communications en quatre catégories selon la façon dont les liens entre enseignement et apprentissages sont abordés mais aussi selon les modalités dans lesquelles ceux-ci étaient analysés.

1. Analyse des apprentissages effectifs des élèves sur une année scolaire et mise en lien avec les pratiques enseignantes

Deux contributions (Chanudet et al. ; Gugeon-Allys et Pilet) ont porté sur les apprentissages effectifs des élèves et leur mise en relation avec les pratiques enseignantes. Ces deux contributions visent à établir des liens entre les pratiques d'enseignement et les apprentissages des élèves à partir d'études à grande échelle. Elles font suite aux résultats des enquêtes françaises Pratiques d'enseignement spécifique aux contenus (Praesco) premier et second degré qui avaient dressé un panorama des pratiques déclarées des enseignants de mathématiques de la dernière année de l'enseignement primaire (classe de CM2) et de secondaire inférieur (classe de 3^e de collège). Ces résultats avaient fait l'objet de deux communications à EMF 2022. L'analyse des pratiques déclarées des enseignants, notamment la caractérisation de groupes d'enseignants ayant des pratiques proches, permettait de questionner les apprentissages potentiels des élèves. Pour EMF 2025, c'est l'inverse qui

a été exploré en analysant les apprentissages effectifs des élèves pour les mettre en relation avec les groupes de pratiques des enseignants identifiés dans Praesco.

Les deux études portent sur les performances des élèves entre le début et la fin de l'année à un test afin de dresser un portrait des apprentissages des élèves et d'étudier son évolution au cours de l'année scolaire. L'enjeu est de mettre en relation cette évolution avec les pratiques des enseignants de ces élèves.

Dans l'étude du premier degré (**Chanudet et al.**), 935 élèves ont passé un test en début puis en fin d'année portant sur plusieurs contenus. Une première analyse des tris à plats des réponses des élèves met en évidence que l'évolution des apprentissages des élèves diffère selon les contenus. Une seconde analyse propose de grouper les élèves selon leurs résultats aux tests et de faire le lien avec le groupe de pratiques auquel l'enseignant se rattache.

Dans l'étude du second degré (**Grugeon-Allys et Pilet**), 454 élèves de 25 classes ont passé un test sur l'algèbre en début puis en fin d'année. Les réponses sont interprétées suivant un modèle praxéologique de référence de l'algèbre et des niveaux de justifications définis *a priori*. Des analyses factorielles identifient trois groupes d'élèves ayant des apprentissages proches en algèbre et montrent une grande variabilité dans l'évolution des apprentissages construits en cours d'année. Ces évolutions sont mises en relation avec la composition des classes auxquelles les élèves appartiennent. Les variations importantes mises en avant interrogent les relations éventuelles avec les pratiques enseignantes.

Ces deux études de grande ampleur restent exploratoires car les liens avec les pratiques enseignantes sont encore à établir ou à confirmer, en particulier avec les groupes de pratiques établis dans Praesco.

2. *Caractérisation de profils de pratiques d'enseignement sur des contenus particuliers et analyse des effets sur les apprentissages des élèves*

Quatre communications étudient l'influence sur les apprentissages des élèves au regard de profils de pratiques d'enseignement sur des contenus particuliers (Goulet et al. ; Ludier ; Tempier et Kiwan-Zacka ; Allouti et al.). Elles s'appuient sur des échantillons plus restreints que ceux des deux communications précédentes et sur des méthodologies plus qualitatives.

Goulet et al. ont distingué deux profils de pratiques d'enseignement sur la résolution de problèmes pour en évaluer les effets sur le rendement à résoudre différents types de problèmes des élèves de sixième année du primaire au Québec. L'étude trouve son origine dans le contexte québécois et interroge si une pratique orientée vers la réussite de situations-problèmes de type ministériel permet de former les élèves à devenir de bons solutionneurs de problèmes.

La communication de **Ludier** porte sur l'utilisation du jeu éducatif de calcul mental Mathador dans des classes de primaire en France. Elle examine l'influence des pratiques pédagogiques des enseignants sur les procédures mathématiques des élèves utilisant ce jeu. Les résultats montrent que les enseignants centrés sur la performance favorisent des stratégies de surface, tandis que ceux orientés vers l'apprentissage encouragent l'acquisition de connaissances plus profondes.

De leur côté, **Tempier et Kiwan-Zacka** mettent en regard les caractéristiques des exercices proposés sur l'enseignement de l'ordre des décimaux avec les connaissances des élèves en 5^e année de primaire en France. Ils ont mené une étude de cas auprès de deux enseignantes visant à documenter les caractéristiques des exercices proposés : types de tâches travaillés, niveaux de mise en fonctionnement des connaissances en jeu, niveau de complexité et caractère objet ou outil. Ils discutent

des effets possibles de ces caractéristiques sur les apprentissages des élèves, compte-tenu de leurs connaissances initiales sur les décimaux évaluées avant d'aborder la séquence.

Enfin **Allouti et al.** ont présenté une grille d'analyse visant à caractériser la pratique « exemplaire » d'un enseignant en mathématiques au secondaire au Québec. Elles prévoient de la mettre à l'épreuve pour analyser la pratique reconnue comme exemplaire d'une enseignante pour sa séquence d'enseignement de la fonction quadratique dans une classe de 4^e année secondaire (élèves de 15-16 ans).

3. Collaboration entre enseignants et élèves et débats au sein de la classe

Trois communications traitent de la collaboration entre enseignants et élèves et les débats au sein de la classe (Allard et Mamede ; Robert et Garneau ; Favier).

D'abord, **Allard et Mamede** montrent comment le travail collaboratif avec des enseignants de maternelle sur le jeu dit « des bandes » a conduit à identifier des conditions favorables au processus d'institutionnalisation en classe maternelle (5-6 ans) de France. Après plusieurs années de suivi des enseignants et des élèves, elles mettent en lumière que la dimension collective des apprentissages est en mesure de réduire les inégalités scolaires.

Ensuite, **Robert et Garneau** revisitent les résultats de la recherche doctorale de Robert pour mettre en lumière la manière dont la dimension socio-affective de l'activité d'enseignement-apprentissage influence tant le déploiement de la pensée fonctionnelle que les pratiques enseignantes. Elles montrent le rôle de l'éthique communautaire dans l'activité d'enseignement-apprentissage et ses effets sur les pratiques enseignantes et potentiellement les apprentissages des élèves. Elles soulignent qu'une mauvaise éthique communautaire au sein d'une équipe peut empêcher le débat d'idées mathématiques et donc potentiellement nuire au développement de la pensée mathématique.

Finalement, **Favier** s'intéresse à la nature des aides suggérées par les enseignants pour aider les élèves dans le contexte de la résolution de problèmes et plus particulièrement de problèmes d'essais et ajustements. Sa communication est dans la lignée de celle présentée à la précédente édition d'EMF. Dans le cadre d'une formation initiale et continue de l'enseignement primaire du canton de Genève, il donne accès aux enseignants au travail privé de certains élèves et leur demande d'envisager des aides. Il ressort une grande diversité parmi les régulations envisagées par les enseignants.

4. Conception de situations d'enseignement pour faire évoluer certaines pratiques d'enseignement et favoriser les apprentissages des élèves

Trois contributions (Michot ; Labrosse ; Mrabet et Ouni) partent de limites reconnues de certains choix d'enseignement, tant dans les pratiques que dans les manuels scolaires, pour concevoir et tester des choix alternatifs, appuyés par des analyses didactiques sur les apprentissages des élèves.

Ainsi, **Michot** a conçu une situation d'enseignement pour développer le raisonnement des élèves de 6^e année du primaire au Québec sur le cas particulier de l'étude du cerf-volant. Prenant appui sur un cadre conceptuel de la définition en mathématique, elle envisage les pratiques enseignantes qui peuvent être développées autour de cette activité ainsi que les apprentissages potentiels des élèves.

Labrosse développe quant à lui les apports de situations d'enseignement engageant la communication dans les apprentissages algébriques d'élèves de 2^e année du secondaire au Québec. Il montre que le jeu sur certaines variables didactiques sont des leviers pour favoriser des interactions sur le raisonnement plutôt que sur les réponses et engagent à communiquer. L'analyse qualitative met en

évidence des effets positifs sur les apprentissages des élèves mais aussi un levier pour faire évoluer les pratiques enseignantes.

Enfin, **Mrabet et Ouni** interrogent les choix relatifs à l'enseignement de certains problèmes de proportionnalité. Ils montrent, sur un échantillon très réduit, que l'introduction aux élèves d'une nouvelle catégorisation de certains problèmes de proportionnalité améliore la réussite à ces problèmes ce qui ouvre des perspectives pour le développement de nouvelles pratiques d'enseignement.

III. LE PARTAGE D'EXTRAITS DE VIDÉO DE CLASSE

Les échanges au précédent EMF avaient fait émerger le besoin de situer les pratiques d'enseignement dans des contextes pour pouvoir cerner tous les enjeux des recherches présentées dans les communications. C'est pourquoi nous avons proposé aux participants de partager de courts (5 minutes) extraits de vidéos de classe et d'en discuter collectivement. Trois plages de 25 minutes ont ainsi permis de présenter trois extraits de vidéos, un au Québec, un en Suisse et un en France de premier et de second degré. Le visionnement de la vidéo était accompagné d'éléments de contexte : âge des élèves, date et raisons de la captation vidéo, description de la tâche proposée aux élèves, utilisation éventuelle de cette vidéo dans une publication ou une formation. Les participants devaient réagir pour dire ce qui étaient spécifiques ou génériques dans cette vidéo au contexte régional, national ou international. Les participants ont formulé des retours positifs sur ce nouveau dispositif. Celui-ci aura permis aux participants de partager, de comparer, d'identifier des conditions et contraintes de travail des enseignants et des élèves dans les contextes des différentes vidéos. Étant donné son succès, ce dispositif semble être pertinent à reconduire.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce bilan nous avons regroupé les contributions en quatre catégories selon la façon dont elles abordaient les liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages. Le panorama ainsi décrit du GT9 ne peut toutefois rendre compte de toute la diversité des thématiques qui ont été au cœur des échanges pendant ce colloque.

Cette édition du GT9 permis de travailler sur des niveaux scolaires de premier et second degré, sur des contenus mathématiques divers, sur des échantillons variés (cas cliniques, qualitatif, quantitatif). Lors d'établir le bilan du groupe, il est ressorti que les recherches présentées étaient en majorité des recherches en cours qui nécessitent un temps long. Plusieurs communications ont d'ailleurs abordé des résultats qui n'étaient pas établis au moment de la rédaction des textes. Notons que pour plusieurs communications, il ressort que pour tisser des liens entre les pratiques et les apprentissages, il est nécessaire d'évaluer les apprentissages des élèves à travers des évaluations valides didactiquement. C'est un aspect méthodologique crucial qui pourrait être approfondi dans une autre édition du GT9.

Pour les prochains EMF, il nous semble important de garder une continuité dans la thématique du GT9. Le groupe a apprécié que trois communications (Chanudet et al. ; Grugeon-Allys et Pilet ; Favier) s'inscrivent dans la continuité des échanges menés au GT9 lors d'EMF 2022. Il est probable que d'autres communications auraient également pu s'y rattacher si une plus grande participation des pays d'Afrique avait été possible. Les aspects théoriques et méthodologiques de l'étude des liens entre pratiques et apprentissages étant complexes, il nous semble important de poursuivre cet axe de travail sur les prochains GT9. Il serait intéressant d'arriver à initier des recherches comparatives entre pays, car les conditions d'enseignement, les éléments culturels et sociétaux reviennent souvent dans les échanges. À ce sujet, la modalité de travail initiée dans ce GT9, autour d'extraits de vidéo de classe,

indépendants des communications, mérite d'être reconduire étant donné les retours positifs reçus et sa potentialité pour comparer à la fois les contextes et les cultures.

RÉFÉRENCES

- Atta, G., Coutat, S. et Pilet, J. (2018). Liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages. Dans M. Aboud (dir.), *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone, octobre 2018, Genevilliers, Paris* (p. 929-933). IREM de Paris.
- Kamga, A., Mopondi, A. et Pilet, J. (2023). Bilan du groupe de travail no 9 : Liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages. Dans A. C. Adihou (dir.), *Actes du 8^e colloque Espace Mathématique Francophone (EMF2022), 12-16 décembre 2022, Cotonou, Bénin*. Les éditions de l'Université de Sherbrooke. <https://doi.org/10.17118/11143/22504>

ANNEXE

LISTE DES CONTRIBUTIONS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

- Allard, C. et Mamede, M. – *Le jeu des bandes : une ressource collaborative pour l'école Maternelle*.
- Allouti, S., Saboya, M. et Jeannotte, D. – *Caractérisation d'une pratique dite « exemplaire » en mathématiques au secondaire : proposition d'une grille d'analyse*.
- Chanudet, M., Fanjat, J., Mettouchi, M. et Roditi, É. – *Une analyse quantitative des apprentissages mathématiques des élèves : vers une mise en relation avec les pratiques d'enseignement*.
- Favier, S. – *Caractérisation de la nature des aides suggérées par les enseignant·es en résolution de problèmes : le cas des problèmes de type essais et ajustements*.
- Goulet, M.-P., Forest, M.-P. et Vervondel, É. – *Des pratiques d'enseignement de la résolution de problèmes qui se distinguent : quels impacts sur l'habileté des élèves de sixième année du primaire (11-12 ans) à résoudre des situations-problèmes mathématiques ?*
- Grugeon-Allys, B et Pilet, J. – *Caractériser et suivre les apprentissages des élèves en algèbre au collège en lien avec leur appartenance à une classe*.
- Labrosse, P. – *Situations engageant un travail de communication en algèbre en 2^e secondaire : des apports pour l'élève comme pour l'enseignant ?*
- Ludier, I. – *Impact de l'enseignant sur les procédures des élèves dans un jeu*.
- Michot, S. – *La construction de la définition du cerf-volant : une pratique enseignante pour développer le raisonnement chez des élèves de 6^e année du primaire au Québec*.
- Mrabet, S. et Ouni, M. W. – *Catégorisation de quelques problèmes de proportionnalité*.
- Robert, V. et Garneau, A. – *L'éthique communautaire : son rôle sur le déploiement de la pensée fonctionnelle et sur les pratiques enseignantes dans une activité d'enseignement-apprentissage*.
- Tempier, F. et Kiwan-Zacka, M. – *Caractéristiques des exercices proposés dans deux classes de fin d'école primaire au regard des connaissances des élèves*.

UNE ANALYSE QUANTITATIVE DES APPRENTISSAGES MATHÉMATIQUES DES ÉLÈVES : VERS UNE MISE EN RELATION AVEC LES PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT

| CHANUDET* MAUD, FANJAT** JULIETTE, METTOUCHI*** MICHA ET RODITI**** ÉRIC

Résumé | Dans la continuité de la recherche PRAESCO, nous présentons une recherche portant sur les apprentissages d'élèves de CM2 dans différents domaines mathématiques, et visant, *in fine*, à mettre en relation ces apprentissages avec l'enseignement reçu. Nous nous focalisons sur la méthodologie élaborée pour étudier les apprentissages des élèves en fonction de différents éléments tels que les contenus mathématiques, les connaissances initiales des élèves relatives à ces contenus ou encore de potentiels effet-classelés en particulier au contexte d'enseignement ou aux pratiques de l'enseignant de la classe.

Mots-clés : Apprentissages, évaluation, méthodologie, pratiques enseignantes, école primaire

Abstract | Following the PRAESCO research, we present a study of the learning of CM2-students in various mathematical domains, with the aim of relating this learning to the teaching they received. We focus on the methodology developed to study students' learning, in relation to the mathematical content involved and to their initial knowledge. In addition, we examine the potential impact of the classroom environment on this learning, including its inter-student variability and its relationship to the content being studied.

Keywords: Student learning, assessment, methodology, teaching practices, primary school

I. INTRODUCTION

Dans une première enquête (Allard et al., 2022), nommée PRAESCO (PRAtiques Enseignantes Spécifiques aux Contenus), conduite en France sur un échantillon représentatif de plus de 1 300 enseignants de CM2 (élèves de 10 ans), notre équipe a documenté les pratiques d'enseignement des mathématiques à ce niveau scolaire. Nous avons mené une seconde recherche auprès d'un millier d'élèves de CM2 issus de 50 classes ; celle-ci visait à identifier leurs apprentissages mathématiques dans le domaine numérique au cours d'une année scolaire (Allard et al., 2023). Dans cette recherche, ces apprentissages sont repérés à l'aune de l'évolution des performances des élèves entre le début et la fin de l'année scolaire.

Nous nous focalisons ici sur la présentation de la méthodologie élaborée pour analyser la configuration des apprentissages en fonction des contenus mathématiques (le domaine associé, leur niveau de mise en fonctionnement, etc.) et des connaissances initiales relatives à ces contenus. Nous cherchons également à déterminer et à analyser – en fonction des contenus – un éventuel effet classe ou contexte sur ces apprentissages ainsi que la variabilité inter-élèves de ces apprentissages au sein de l'échantillon comme au sein d'une même classe.

* DiMaGe, Université de Genève – Suisse – maud.chanudet@unige.ch

** EDA, Université Paris Cité – France – juliette.fanjat@u-paris.fr

*** ICT, Université Paris Cité – France – micha.mettouchi@gmail.com

**** EDA, Université Paris Cité – France – eric.roditi@u-paris.fr

Les analyses étant en cours avant le colloque EMF de Montréal, la présentation rapportée dans les actes s'est concentrée essentiellement sur le travail méthodologique effectué dans le cadre de cette recherche, même si nous indiquons en conclusions quelques premiers résultats issus des analyses.

II. PRÉSENTATION GÉNÉRALE DE LA RECHERCHE

Dans cette recherche¹, les connaissances mathématiques des élèves de CM2 ont été recueillies à l'aide d'un questionnaire (format papier, questions à réponses ouvertes) composé d'exercices portant principalement sur trois contenus : la numération des nombres entiers ; les nombres décimaux et leur comparaison ; la division et les problèmes numériques. Le questionnaire a été élaboré en prenant appui sur la recherche en didactique des mathématiques relative à ces contenus. Citons en particulier les travaux de Tempier (2020) pour la numération, de Roditi (2007) pour les nombres décimaux, de Vergnaud (2003) pour la division et de Houdement (2011) pour la résolution de problèmes. Dans une académie (unité géographique et administrative) volontaire pour participer à cette recherche, un millier d'élèves (1 013 exactement) ont été interrogés, répartis dans une cinquantaine de classes (49 exactement) comprenant des élèves de CM2. Cette académie a été sollicitée pour sa variété de contextes d'enseignement : urbains, ruraux, publics, privés, en éducation prioritaire ou non. La longueur du questionnaire (19 exercices correspondant à 58 questions élémentaires, ou items) a conduit à le proposer via deux sessions de cinquante minutes environ chacune.

Les élèves ont été interrogés à deux reprises : une première fois en octobre 2018 et une seconde fois en juin 2019, et ce, sur le même questionnaire. Les seuls éléments qui ont été changés entre les deux sessions l'ont été afin de ne pas perturber les élèves qui pourraient accorder un sens particulier aux éléments associés, tels que les noms des personnages en jeu dans les problèmes par exemple. Nous assimilons donc les apprentissages des élèves à l'évolution de leurs performances entre le début et la fin de l'année scolaire, c'est-à-dire à la différence de leurs résultats entre octobre et juin.

En parallèle, et malgré des difficultés de récupération des données *a posteriori*, les enseignants des classes interrogées ont été invités à répondre au questionnaire conçu dans le cadre de l'enquête nationale PRAESCO² ; notre objectif étant de pouvoir *in fine* mettre en lien les apprentissages des élèves de CM2 et les contextes de l'enseignement dispensé, dont les pratiques des enseignants.

Pour rappel, en juin 2019, un échantillon aléatoire de 1 317 enseignants ayant la charge d'élèves de CM2, représentatif de la population nationale (secteurs public et privé sous contrat), ont répondu à un questionnaire sur leurs pratiques d'enseignement des mathématiques. Ce questionnaire à destination des enseignants était à réponses fermées, avec 234 items proposés, et il nécessitait 50 minutes environ pour y répondre. Il comportait trois parties. La première interrogeait le parcours professionnel des enseignants, leur contexte d'enseignement, les formations suivies, etc. La deuxième portait sur leur enseignement des mathématiques sans référence à un domaine particulier (durée des préparations et des évaluations, satisfactions et insatisfactions ressenties dans l'enseignement des mathématiques, origines de ces satisfactions et insatisfactions ; importance accordée à certains contenus, etc.). La troisième enfin visait à questionner l'enseignement des contenus mathématiques précis listés précédemment (choix des situations d'enseignement et d'évaluation, repérage des difficultés des élèves

¹ Recherche menée avec Cécile Allard, Frédérick Tempier et la collaboration de Pascale Masselot et Marie-Lise Peltier, deux chercheurs honoraires en didactique des mathématiques.

² L'enquête PRAESCO (Pratiques enseignantes spécifiques aux contenus) est une enquête menée en partenariat avec la DEPP (Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance) qui est une direction du ministère de l'Éducation nationale. La première enquête a eu lieu en 2019, les résultats ont été publiés en 2021 et 2022 (Allard et al., 2021, 2022).

et ajustements mis en place pour faire face à ces difficultés). Les analyses menées ont permis, entre autres, d'identifier (grâce à une classification ascendante hiérarchique – CAH) cinq groupes d'enseignants caractérisés par des pratiques statistiquement homogènes. Par exemple, le groupe le plus représenté en termes d'effectif (26 % des répondants) se caractérise par l'expression de davantage de difficultés vis-à-vis des mathématiques et de leur enseignement par rapport à l'ensemble des enseignants interrogés, tandis que le deuxième groupe (22 % des répondants) se distingue du fait de choix didactiques affirmés pour un enseignement des mathématiques où les élèves construisent activement leurs connaissances (voir Allard et al., 2022) pour une caractérisation détaillée de chacun des cinq groupes). Dans cette nouvelle enquête, nous nous interrogeons en particulier sur le lien éventuel entre les apprentissages des élèves d'une classe et le groupe d'enseignants auquel celui de cette classe appartient. Avant de mener cette étude, il convient d'analyser les apprentissages des élèves, d'une part globalement en identifiant les contenus sur lesquels les élèves progressent de manière différentielle, et d'autre part selon la classe dans laquelle ils ont été scolarisés – les variabilités intra-classe et inter-classes –, etc.

Nous présentons ci-après la méthodologie d'analyse quantitative élaborée pour tenter de répondre aux questions que nous nous posons sur les apprentissages des élèves et sur de potentiels effets différenciés des contextes et des pratiques d'enseignement sur ces apprentissages, et ce en fonction de différents éléments tels que les contenus mathématiques ou les connaissances initiales des élèves relatives à ces contenus. Rappelons que notre propos est ici essentiellement méthodologique, nous ne présentons pas encore de résultats. Des traitements préalables des données ont été nécessaires, commençons par les expliciter.

III. TRAITEMENTS PRÉALABLES DES DONNÉES

1. *Trois codages des items et des réponses aux items*

Trois traitements préalables ont été effectués. Nous avons codé les items du questionnaire à l'aide de mots-clés que nous avons appelé « descripteurs ». Pour chacun des items, nous avons aussi regroupé les réponses d'élèves très diverses en un nombre restreint de « modalités » de réponse à l'item. Enfin, ces modalités ont, elles aussi, été codées par d'autres mots-clés que nous avons appelé « indicateurs ». Détaillons ces trois traitements.

Concernant le codage des items, les descripteurs caractérisent notamment le domaine mathématique en jeu (par exemple la numération ou la résolution de problèmes), la nature des nombres impliqués (entiers, décimaux), le caractère original ou usuel de la question ainsi que le rôle joué par les concepts en jeu (outil ou objet au sens de Douady, 1984), et enfin le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (Roditi et Salles, 2015). Les questions adressées aux élèves ont été conçues avec une double volonté : centrer l'évaluation sur les contenus mathématiques spécifiquement interrogés dans le questionnaire destiné à rendre compte des pratiques des enseignants, et diversifier le niveau d'exigence sollicité pour la mise en œuvre des connaissances relatives à ces contenus. Le codage par les descripteurs permet ainsi, d'une part de rendre compte des choix effectués par les didacticiens concepteurs du questionnaire et d'autre part, par un traitement statistique ultérieur, de croiser les connaissances mathématiques évaluées et les scores des élèves en fonction des contextes d'enseignement.

Concernant le regroupement et la classification des réponses d'élèves en différentes modalités de réponse, nous nous sommes basés sur une analyse *a priori* des réponses possibles que nous avons complétée par une analyse des réponses effectives des élèves. Les réponses non anticipées dans l'analyse préalable ont été intégrées aux catégories de réponses possibles, voire nous ont amenés à les

redéfinir. C'est ainsi que, pour chacun des items, nous avons construit des modalités de réponses en regroupant, au sein d'une même modalité, les réponses qui nous semblaient relever d'une même « logique » déterminée *a priori* et/ou *a posteriori*. Dans le but d'aider à l'identification de certaines caractéristiques des modalités de réponses indépendantes des contenus et donc des items, nous avons choisi de leur associer des codes numériques communs. Ainsi, les modalités qui relèvent de logiques distinctes mais qui correspondent à des réponses considérées comme exactes possèdent un code à deux chiffres commençant par 1 (modalités « 10 » ou « 11 », etc.). Celles qui relèvent de logiques distinctes mais qui traduisent des réponses totalement erronées sont affectées d'un code à deux chiffres commençant par 7 (modalités « 70 » ou « 71 », etc.). D'autres codes caractérisent les réponses partiellement correctes, avec ou sans partie erronées. Nous avons aussi créé une modalité « a » qui correspond à l'absence de réponse à l'item, une modalité « & » de non-lisibilité de la réponse et une modalité « 9 » correspondant à l'ensemble des réponses erronées d'élèves pour lesquelles nous n'avons pas réussi à identifier de logique sous-jacente.

Des indicateurs ont ensuite été attribués aux modalités de réponses pour chacun des items dans le but d'expliciter puis de quantifier les liens existants entre des modalités de réponses à plusieurs items, ces items pouvant porter (comme nous allons le voir ci-dessous) sur des savoirs mathématiques différents. Ainsi, chaque indicateur rend compte, malgré la variété des items sur lesquels il porte, de types de connaissances analogues d'élèves, celles-ci pouvant être correctes ou erronées.

Pour illustrer ces outils méthodologiques que sont les descripteurs des items, les modalités de réponses aux items, et les indicateurs sur ces modalités, attardons-nous sur l'item suivant qui fait partie d'un exercice comportant 4 items, et qui demande aux élèves d'écrire un nombre en chiffres à partir d'une de ses décompositions.

Écris en chiffres :

5 unités 14 dixièmes :

2. Descripteurs associés à l'item « Écris en chiffre : 5 unités 14 dixièmes »

Cet item correspond aux cinq descripteurs suivants. Il s'agit d'une tâche de « numération », portant sur le domaine numérique « nombres décimaux », qui sont ici interrogés dans leur dimension « objet », et qui est « peu fréquente » parmi les tâches généralement proposées aux élèves. La réussite à cet item nécessite un « niveau élevé » de mise en fonctionnement des connaissances, en raison de la nécessaire conversion des 14 dixièmes. Il s'agit en effet, pour les élèves, de tenir compte simultanément des aspects positionnel et décimal de notre système de numération.

3. Exemples de modalités de réponses à l'item « Écris en chiffre : 5 unités 14 dixièmes »

Nous présentons ci-dessous quelques-unes des modalités de réponse à l'item étudié, dans le but d'illustrer le travail méthodologique visant à passer des réponses d'élèves – très nombreuses (69 réponses différentes pour cet item) – aux modalités de réponse – moins nombreuses (9 pour cet item).

La réponse 6,4 est bien sûr la réponse exacte et correspond à la modalité « réponse exacte », codée « 10 », pour laquelle on peut supposer que les élèves la produisant ont compris les unités de numération pour leur aspect positionnel autant que décimal. Nous avons regroupé sous une même modalité, codée « 50 », les réponses partiellement correctes avec partie erronée pour lesquelles les élèves n'ont réussi à respecter que l'une des deux informations « 5 unités » ou « 14 dixièmes ». Nous retrouvons ainsi sous

cette modalité la réponse 5,14 ainsi que les réponses 1,45 et 51,4. Ainsi, dans la réponse 5,14, qui représente 23 % de l'ensemble des réponses obtenues en début d'année et 87 % des réponses associées à cette modalité, seule l'information « 5 unités » est correctement traduite. Dans les deux autres réponses 1,45 et 51,4, seule l'information « 14 dixièmes » est correctement traduite. En effet, les deux réponses comportent 1,4 mais dans la réponse 1,45 le chiffre 5 apparaît dans la position des centièmes tandis que dans la réponse 51,4 il apparaît dans la position des dizaines. La réponse 145 correspond à elle seule à une autre modalité de réponses partiellement correctes avec partie erronée que l'on associe à une confusion entre dixièmes et dizaines. Un indicateur a d'ailleurs été créé pour ce type de confusion (...ièmes et ...aines) qu'on retrouve dans les réponses à différents items.

Les trois modalités précédentes correspondent à des réponses pour lesquelles une logique peut être explicitée. Ce n'est pas le cas pour la modalité codée « 9 » qui, pour rappel, correspond à l'ensemble des réponses erronées pour lesquelles nous n'avons pas réussi à identifier de logique sous-jacente ; citons par exemple les réponses 5,04 ou 25 ou encore 514 100 pour l'item présenté ci-dessus.

4. *Exemples d'indicateurs associés aux modalités de réponses à l'item « Écris en chiffre : 5 unités 14 dixièmes »*

Décrivons maintenant l'un des indicateurs retenus pour des modalités de réponse présentées ci-dessus ; un autre indicateur que celui évoqué brièvement « confusion... ièmes et aines ».

Il s'agit de l'indicateur « traits de surface », qui correspond aux modalités pour lesquelles les logiques sous-jacentes aux réponses produites par les élèves apparaissent se limiter à la seule prise en compte d'éléments saillants de l'énoncé, sans que ces derniers soient mis en lien avec des savoirs mathématiques du niveau d'élèves de CM1 ou CM2. En contextualisant cet indicateur à cet item, nous tentons de mettre en lumière les contraintes et difficultés que pose la perspective d'un traitement quantitatif des données recueillies.

L'indicateur « traits de surface » correspond bien à la réponse erronée 5,14. Celle-ci qualifie en effet la procédure d'un élève qui écrirait le nombre indiqué dans l'énoncé (5 unités 14 dixièmes) en recopiant d'une part le nombre d'unités, et d'autre part le nombre de dixièmes en séparant ces deux nombres par une virgule. Un indicateur n'est cependant pas attribué à une réponse, il l'est à une modalité de réponse, c'est-à-dire à un ensemble de réponses.

Ainsi, l'indicateur « trait de surface » n'a pas été attribué à la seule réponse 5,14, mais à la modalité comportant cette réponse, c'est-à-dire aux réponses 5,14, 1,45 et 51,4. Nous avons bien conscience que l'indicateur correspond moins précisément aux réponses 1,45 et 51,4. Nous avons pourtant choisi de l'associer à la modalité tout entière pour deux raisons. Une première raison liée au sens de l'indicateur : les élèves qui répondent 1,45 ou 51,4 prennent bien en compte les 14 dixièmes, mais cherchent aussi à écrire le nombre en juxtaposant seulement les signes de l'énoncé (5, 1 et 4). Une seconde raison liée à notre méthodologie quantitative : comme précisé plus haut, la réponse 5,14 est de loin la plus représentée dans cette modalité (87 % des réponses obtenues en début d'année et qui sont associées à cette modalité).

Poursuivons l'argumentation méthodologique pour interroger le choix de la modalité de réponse. Nous aurions aussi pu faire le choix de garder seulement 5,14 comme réponse de la modalité. Nous aurions alors été amenés à regrouper les deux réponses 1,45 et 51,4 en une même autre modalité de réponses partiellement correcte avec partie erronée. Cette modalité aurait cependant eu un effectif trop faible pour apporter une information dans une analyse quantitative. Il aurait fallu finalement associer ces deux réponses à la modalité rassemblant celles pour lesquelles nous n'avons pas réussi à identifier

de logique sous-jacente (modalité codée « 9 »). Nous aurions perdu alors la possibilité de conserver l'information (par l'attribution d'un indicateur dédié) portant sur des difficultés liées à l'exigence conjointe de conversion d'unités de numération et d'une écriture numérique à virgule ; cette information caractérisant aussi la réponse 5,14. Outre le fait qu'il s'agisse de réponses partiellement correctes comportant une partie erronée, ces différents arguments justifient, selon nous, le choix de regrouper les réponses 5,14 ; 1,45 et 51,4 dans une même modalité.

On le comprend, le choix des modalités et des indicateurs résultent de la volonté de produire des interprétations didactiques relatives aux réponses d'élèves. Le traitement quantitatif de ces réponses (cohérence, représentativité, effectif, etc.) nous impose toutefois quelques compromis quant à la définition même de ces modalités et des indicateurs.

IV. ANALYSE DES DONNÉES

Pour chacun des 1 013 élèves, nous avons recueilli ses réponses aux 58 items du questionnaire, et cela à deux moments de l'année scolaire : au début (mois d'octobre) et à la fin (mois de juin). Ainsi, pour chaque élève et chaque item, nous disposons de sa réponse en début d'année et de sa réponse en fin d'année. La très grande quantité de données recueillies nous a conduits à utiliser le logiciel d'analyse statistique R dont notamment le *package* FactoMineR. Le travail d'analyse étant en cours, nous livrons ici quelques indications sur les analyses effectuées ou projetées sans pouvoir encore livrer les résultats obtenus.

Nous avons élaboré un plan d'analyse pour rendre compte, en mobilisant des procédures analogues, des connaissances acquises des élèves en début et en fin d'année ainsi que des progrès réalisés. Nous détaillons ci-dessous ce plan d'analyse. Indiquons que pour bénéficier au mieux des analyses statistiques, nous avons dû nous limiter aux élèves pour lesquels nous disposions des réponses complètes en début et en fin d'année ; nous avons perdu au total 78 élèves et nos résultats concernant les apprentissages des élèves portent finalement sur un effectif de 935 élèves.

1. *Tri à plat : les réponses des élèves, variabilité en fonction des contenus*

Le premier travail a consisté à effectuer un tri à plat des réponses des élèves. Du fait de leur importante diversité, nous avons travaillé sur les modalités de réponses et non sur les réponses directement. Parallèlement, pour effectuer des analyses portant sur un groupe d'items correspondant à un même descripteur, nous avons dû renoncer à traiter toutes les modalités de réponses aux items car elles étaient trop variables d'un item à l'autre, y compris parmi celles correspondant à des items codés avec le même descripteur. Pour les 935 élèves conservés dans l'analyse, et pour chacun des items du questionnaire, nous avons retenu parallèlement trois groupes de modalités : celle des réponses exactes, celle des réponses erronées ou illisibles, et celle des non-réponses.

Ces résultats éclairent les connaissances des élèves en début et en fin d'année, qui sont très variables selon les contenus et les items (voir Allard et al., 2023 pour plus de détails).

Globalement, nous observons, en octobre, une réussite moyenne sur l'ensemble du questionnaire de 41 %, avec un minimum de 5 % de réussite pour l'élève le plus faible et un maximum de 95 % pour l'élève le plus performant. L'écart-type associé à cette moyenne de 41 % est de 17 points de pourcentage (pp). Nous observons, en juin, une réussite moyenne de 60 %, avec un minimum de 9 % et un maximum de 100 %. L'écart-type associé à cette moyenne est de 22 pp.

La différence entre octobre et juin est donc en moyenne de 19 pp, l'écart-type est de 14 pp. Comme le montrent ces résultats, de nombreuses questions posées en début d'année étaient déjà accessibles à

des élèves de ce niveau scolaire, l'année scolaire ayant en outre conduit à des apprentissages substantiels : le passage de 41 % à 60 % de réussite moyenne traduit le fait qu'en moyenne, pour l'ensemble des élèves, un tiers des questions échouées en début d'année sont réussies en fin d'année.

Cette évolution n'est pas homogène selon les contenus interrogés. Les progrès sont faibles pour les items impliquant les nombres entiers (la réussite était déjà assez forte en début d'année), forts pour ceux relatifs aux fractions et décimaux (la réussite était assez faible en début d'année) et moyens pour la résolution de problèmes numériques appréhendée globalement (la réussite étant aussi assez moyenne en début d'année, bien que les problèmes proposés puissent se résoudre avec les acquis de fin de CM1 si l'on se réfère aux programmes scolaires) avec un recul sensible des non-réponses.

Nous ne disposons pas encore des résultats concernant les items associés au même indicateur. L'obtention des résultats nécessite en effet un traitement supplémentaire pour garantir que les items pour lesquels les modalités de réponses ont été *a priori* associées à un même indicateur forment bien, statistiquement, un ensemble cohérent d'items du point de vue des réussites ou des erreurs produites. Des coefficients statistiques permettent d'évaluer cette cohérence (l'alpha de Cronbach par exemple) et la corrélation de la fréquence des réponses adéquates à l'indicateur pour un item avec celle au groupe d'items constitués (le coefficient de corrélation bisérial *r.bis* par exemple). Ces évaluations statistiques de cohérence interne permettront de stabiliser les items pour lesquels certaines modalités relèvent d'un même indicateur (on peut penser à l'indicateur « traits de surface » par exemple qui a été présenté plus haut).

2. *Tris croisés : constituer des groupes d'élèves pour effectuer des comparaisons*

Le tri à plat envisagé concerne les réponses de l'ensemble des élèves aux différents items et groupes d'items correspondant à un même descripteur, ainsi que l'examen de la fréquence des réponses correspondant à nos indicateurs (comme le fait d'être sensible aux traits de surface). Nous avons aussi souhaité effectuer un tri croisé pour examiner la variabilité des fréquences de ces réponses selon différents groupes d'élèves, ces groupes étant déterminées par des paramètres externes aux résultats obtenus au questionnaire – ou au contraire internes à ces résultats.

Nous avons ainsi constitué des groupes d'élèves selon différents paramètres externes comme le genre (fille ou garçon), l'indice de position sociale de l'école fréquentée (qui donne une indication sur l'origine sociale des élèves de cette école), le milieu rural ou urbain dans lequel l'école est implantée, le type d'école (privée, publique hors éducation prioritaire, ou publique en éducation prioritaire), l'ancienneté de l'enseignant en charge de la classe, et enfin le groupe de pratiques auquel l'enseignant se rattache (les cinq groupes mis au jour par l'enquête PRAESCO).

Nous avons également cherché à savoir à quels items ou groupes d'items les élèves répondaient ou non, correctement ou non, suivant leurs résultats globaux au questionnaire qui leur a été soumis. Il nous a fallu pour cela constituer ces groupes *a posteriori* à partir des résultats obtenus. Deux approches différentes ont été adoptées. La première visait simplement à constituer des groupes de niveau global, déterminé en fonction des scores de réussite. Nous avons à cet effet, en nous référant à la moyenne et à l'écart-type des scores de réussite, distingué trois groupes suivant le niveau de réussite global : le groupe à forte réussite (élèves dont le score est supérieur à la moyenne plus 80 % d'écart-type), le groupe à réussite moyenne (score compris entre la moyenne plus ou moins 80 % d'écart-type), et le groupe à faible réussite (score inférieur à la moyenne moins 80 % d'écart-type). La seconde approche avait pour objectif de constituer des groupes en considérant toutes les modalités de réponses et pas seulement la réussite. Cela nous a conduits à développer des traitements statistiques afin de déterminer des groupes d'élèves avec d'une part une cohérence intra-groupe optimale (les élèves d'un même

groupe répondent manière similaire au questionnaire) et d'autre part une divergence inter-groupe maximale (les élèves de deux groupes différents produisent des réponses globalement très différentes au questionnaire). Sans qu'il soit possible de les détailler ici, précisons que ces traitements reposent sur une ACM (analyse des correspondances multiples) puis une CAH (classification ascendante hiérarchique).

Ces méthodes sont classiques. Toutefois, la difficulté que nous avons rencontrée consistait à traiter, non pas les réponses des élèves à un questionnaire, mais à deux questionnaires, et donc à envisager conjointement les trois variables que constituent les réponses en début d'année, les réponses en fin d'année et les progrès réalisés entre les deux. Il est encore trop tôt pour développer ici comment nous sommes parvenus à effectuer ce travail, toutes les réponses aux questions rencontrées n'ont pas encore été élaborées.

V. CONCLUSION PROVISOIRE

Cette recherche poursuit l'enquête PRAESCO interrogeant les enseignants sur leurs pratiques à propos de certains contenus mathématiques en classe de CM2. Elle vise à développer une approche quantitative sur les apprentissages des élèves, en lien avec l'enseignement reçu ; en conséquence, le questionnaire soumis aux élèves porte précisément sur ces contenus enseignés à ce niveau scolaire. Notre recherche se caractérise par un appui sur les résultats issus de travaux qualitatifs nombreux et conséquents en didactique des mathématiques. Ces travaux portent à la fois sur les tâches proposées aux élèves (analyse didactique des connaissances à mobiliser pour réaliser les tâches, niveaux de mise en fonctionnement de ces connaissances, dialectique outil/objet, etc.) et sur les modalités de réponses à ces tâches (analyse des réponses des élèves – correctes ou non – en fonction des obstacles didactiques, des connaissances sur les conceptions et les règles implicites construites par les élèves, etc.).

L'approche quantitative vise à dresser un portrait des apprentissages des élèves dans lequel des liens apparaissent entre les connaissances effectivement construites sur certains contenus mathématiques, d'autres pour lesquels les constructions sont encore en cours, et d'autres enfin pour lesquels les élèves rencontrent des difficultés majeures. Cette approche conduit également à des croisements entre apprentissages et contexte d'enseignement (établissement public ou privé, éducation prioritaire ou non, niveau social moyen des élèves de l'établissement, etc.). Croiser apprentissage et pratiques d'enseignement est en effet bien ce que nous recherchons à terme.

Cette communication vise ainsi à développer les choix méthodologiques effectués, en mettant en lumière les questions et difficultés rencontrées, afin de délimiter la portée et les limites des résultats d'une telle recherche.

RÉFÉRENCES

- Allard, C., Chanudet, M., Roditi, E. et Tempier, F. (2023). Identifier les apprentissages des élèves de CM2 : premiers résultats et perspectives. Dans *Actes du 49^e colloque COPIRELEM, 13–15 juin 2023, Marseille* (p. 942-954). <https://www.copirelem.fr/wordpress/wp-content/uploads/2024/11/Actes-MARSEILLE-2023.pdf>
- Allard, C., Masselot, P., Peltier-Barbier, M.-L., Roditi, E., Solnon, A. et Tempier, F. (2021, février). *Premiers résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, Praesco, en classe de CM2 en 2019* (Note d'information 21.10). Direction de l'évaluation de la prospective et de la performance [Depp]. <https://www.education.gouv.fr/media/74631/download>

- Allard, C., Masselot, P., Peltier-Barbier, M.-L., Roditi, E., Solnon, A., Tempier, F. et Charpentier, A. (2022, octobre). *Résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, PRAESCO, en classe de CM2 en 2019* (Document de travail n° 2022.E05). Direction de l'évaluation de la prospective et de la performance [Depp]. <https://www.education.gouv.fr/media/118634/download>
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire* [Thèse de doctorat, Université Paris VII]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-01250665v1>
- Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 16, 67-96. <https://bibnum.publimath.fr/IST/IST11005.pdf>
- Roditi, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 12, 55-81. <https://shs.hal.science/halshs-00349764v1/document>
- Roditi, E. et Salles, F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques. *Education et Formations*, (86-87), 235-257.
- Tempier, F. (2020). Les grands nombres au cycle 3 : de nouvelles pistes de travail. *Grand N*, (105), 75-99.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. Dans R. Lesh et M. Landau (dir.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (p. 127-174). Academic Press.

CARACTÉRISER ET SUIVRE LES APPRENTISSAGES DES ÉLÈVES EN ALGÈBRE AU COLLÈGE EN LIEN AVEC LEUR APPARTENANCE À UNE CLASSE

| GRUGEON-ALLYS* BRIGITTE ET PILET** JULIA

Résumé | Cette communication porte sur l'évolution des apprentissages algébriques d'une cohorte de près de cinq cents élèves français entre le début et la fin de la dernière année du collège (classe de troisième, 14-15 ans). Les évolutions sont mises en relation avec la composition des classes auxquelles les élèves appartiennent. Les variations importantes mises en avant interrogent les relations éventuelles avec les pratiques enseignantes.

Mots-clés : apprentissages, algèbre, évaluation, étude à grande échelle, praxéologies

Abstract | This paper looks at the evolution of algebraic learning in a cohort of nearly five hundred French students between the beginning and end of the last year of middle-school (14-15 years). The evolutions are related to the composition of the classes to which the students belong. The major variations highlighted raise questions about possible links with teaching practices.

Keywords: Learning, algebra, assessment, large-scale studies, praxeologies

I. POURQUOI UNE TELLE ÉTUDE ?

Cette communication s'inscrit dans des recherches visant à établir des liens entre les pratiques d'enseignement et les apprentissages des élèves à partir d'études à grande échelle. Lors du précédent GT9 à EMF 2022, nous (Pilet et al., 2024) avons présenté les principaux résultats de l'enquête française PRAtiques d'Enseignement Spécifique aux Contenus (Praesco) second degré qui avait dressé un panorama des pratiques déclarées des enseignants de mathématiques de la dernière année de l'enseignement secondaire inférieur (classe de 3^e de collège). Dans la continuité, nous présentons ici une étude exploratoire à grande échelle qui porte sur l'évolution, sur un an, des apprentissages algébriques d'une cohorte de près de cinq cents élèves français de même niveau scolaire que Praesco. Les évolutions sont mises en relation avec la composition des classes auxquelles les élèves appartiennent.

Partant du processus de transposition didactique (Chevallard et Joshua, 1991), nous considérons qu'un élève apprend dans plusieurs classes successives, avec des enseignants dont les pratiques sont souvent différentes, notamment dans l'enseignement de l'algèbre, ce qui peut avoir des implications sur ses apprentissages. En début de classe de troisième, les élèves ont étudié l'algèbre pendant deux ans. Ils ont donc déjà développé une activité algébrique qui peut être différente d'un élève à l'autre et plus ou moins adaptée à la suite de leur scolarité. Un enseignant de début de troisième peut donc être confronté à une hétérogénéité importante des connaissances de ses élèves en algèbre et être amené à faire des choix pour les faire progresser.

De plus, certains chercheurs (Bressoux, 2012 ; Nye et al., 2004) s'intéressent à l'effet potentiel de l'environnement de la classe sur l'apprentissage des élèves. L'effet de classe est lié à la composition de la classe, en particulier, le nombre d'élèves, le niveau scolaire moyen des élèves et à l'hétérogénéité qui

* Univ Paris Est Creteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010Creteil – France – brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

** Univ Paris Est Creteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010Creteil – France – julia.pilet@u-pec.fr

en résulte ainsi qu'aux pratiques de l'enseignant de la classe. Pour contribuer à la compréhension des mécanismes sous-jacents aux apprentissages des élèves, nous cherchons à caractériser, d'une part, les connaissances que les élèves construisent en algèbre au cours de l'année scolaire de troisième et, d'autre part, l'évolution de ces connaissances en fonction de l'appartenance à une classe.

II. APPORTS THÉORIQUES

Nous nous inscrivons dans la continuité des recherches menées en France depuis les années 1990 (Grugeon, 1997) sur l'évaluation des élèves en algèbre et sur la régulation de l'enseignement. Nous utilisons l'évaluation automatisée *Pépité* (Grugeon-Allys et al., 2023) qui vise à étudier le raisonnement des élèves de manière holistique, à partir d'une étude épistémologique et institutionnelle enrichie d'une étude cognitive. Elle repère la réussite aux tâches évaluatives et caractérise les savoirs et raisonnements construits par les élèves en référence à ceux attendus par les programmes en 3^e et aux niveaux scolaires précédents. Elle associe les réponses incorrectes des élèves à des types d'erreurs répertoriés *a priori*. Les études antérieures utilisant *Pépité*, principalement qualitatives, ont mis en évidence des schémas récurrents dans les niveaux de justification des élèves en algèbre. L'étude quantitative présentée dans cette contribution s'inscrit dans cette continuité et l'examine sur un large échantillon d'élèves.

Nous nous plaçons dans la théorie anthropologique de la didactique (TAD) (Chevallard, 1999), qui repose sur l'hypothèse que les objets mathématiques n'existent pas en soi mais émergent des pratiques des enseignants à travers les activités mathématiques qu'ils développent dans leurs classes et qui peuvent différer d'un enseignant à l'autre. En TAD, toute activité humaine est modélisée sous un modèle unique, appelé *praxéologies*, en termes de types de tâches, de techniques utilisées pour résoudre ces tâches d'un type donné, des savoirs et des raisonnements permettant de justifier les techniques, et de théories qui les justifient. Les praxéologies ne sont pas isolées mais structurées les unes par rapport aux autres. Elles s'agrègent en particulier en praxéologies locales autour justifications communes.

À partir d'une synthèse de recherches en didactique de l'algèbre, nous avons défini un modèle de référence de l'algèbre élémentaire (Grugeon-Allys et al., 2023) structuré en cinq praxéologies mathématiques locales : *Modéliser (M)*, *Prouver (P)*, *Représenter (R)*, *Calculer numériquement (CN)*, *Calculer algébriquement (CA)*. Le tableau 1 indique le nombre d'items de *Pépité* pour chacune.

Tableau 1 – Nombre d'items de l'évaluation *Pépité* par praxéologie locale

Praxéologies locales	Nombre d'items	Item du test
Calculer numériquement	3 / 24	1.1 / 1.2 / 1.3
Calculer algébriquement	7 / 24	5.1 / 5.2 / 5.3 / 7.1 / 7.2 / 7.3 / 10.3
Modéliser	3	3.1 / 10.1 / 10.2
Prouver	7 / 24	2.1 / 2.2 / 2.3 / 4.1 / 4.2 / 4.3 / 6
Représenter	4 / 24	3.2 / 8.1 / 8.2 / 9

Les figures 1 et 2 illustrent deux exercices de *Pépité* relevant de deux praxéologies distinctes. Les tableaux 2 et 3 en donnent les analyses *a priori* distinguant des techniques relevant de niveaux de justification distincts et dont le codage est présenté dans le paragraphe suivant.

Exercice 1 : Reconnaître des égalités correctes.				
Coche les égalités correctes				
1.1	☐ $10^3 \times 10^2 = 10^6$	☐ $10^3 \times 10^2 = 10^5$	☐ $10^3 + 10^2 = 10^5$	☐ $10^3 \times 10^2 = 10^{32}$
1.2	☐ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$	☐ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6}$	☐ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$	☐ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$
1.3	☐ $2 + 3 \times 4 = 14$	☐ $3 \times 4 + 2 = 14$	☐ $3 + 2 \times 4 = 20$	☐ $2 + 3 \times 4 = 20$

Figure 1 – Énoncé de l'exercice 1 de l'évaluation Pépîte relevant du calcul numérique

Tableau 2 – Analyse a priori de l'item 1.2 de l'exercice 1

Fraction choisie	Analyse a priori de l'item 1.2	Code
3/5	Addition des numérateurs et des dénominateurs	V3 CN_Ancien
3/6	Addition des numérateurs et produit des dénominateurs	V3 CN_En-Construction
5/6	Règle incorrecte pour réduire au même dénominateur	V3 CN_En-Construction
7/6	Correct	V1 CN_Idoine

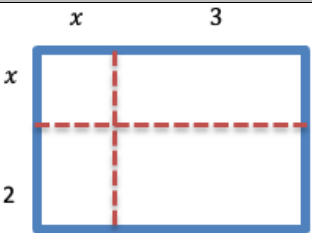
Exercice 3 : Déterminer et reconnaître l'aire d'un rectangle		
L'élève voit l'item 3.2 après avoir répondu à l'item 3.1.		
	3.1/ Détermine l'aire du grand rectangle (bleu) pour toutes valeurs de x	
	Brouillon	Résultat
3.2/ Choisis la ou les expression(s) donnant l'aire du grand rectangle (bleu)		
☐ $(x + 2)(x + 3)$ ☐ $x + 2 \times x + 3$ ☐ $2(2x + 5)$ ☐ $2x(x + 3)$ ☐ $x + 2(x + 3)$ ☐ $x^2 + 5x + 6$		

Figure 2 – Énoncé de l'exercice 3 de l'évaluation Pépîte relevant de la représentation et du calcul algébrique

Tableau 3 – Analyse a priori de l'item 3.1 de l'exercice 3

Solutions	Analyse a priori de l'item 3.1	Code
$(x + 2)(x + 3)$	Utilisation de la définition de l'aire d'un rectangle (avec commutativité)	V1, CA_ Idoine, R_ Idoine
$x^2 + 5x + 6$	Expression développée de l'aire	V1, CA_ Idoine, R_ Idoine
$x + 2(x + 3)$	Utilisation de la définition de l'aire d'un rectangle mais sans parenthèses pour un des facteurs	V3, CA_En-construction, R_ En-construction
$x + 2 \times x + 3$	Utilisation de la définition de l'aire d'un rectangle mais sans parenthèses	V3, CA_ En-construction, R_ En-construction
$2(x + 3 + x + 2)$	Confusion entre aire et périmètre	V3, CA_ En-construction, R_ En-construction
$2x \times 3x$; $5x^2$; $6x^2$	Traduction abrégée	V3, CA_ Ancien, R_ Ancien

Pour distinguer les savoirs et les justifications utilisés par les élèves dans les items de chaque praxéologie locale, nous définissons *a priori* quatre niveaux de justification hiérarchisés (Grugeon-Allys, 2016 ; Grugeon-Allys et al., 2023) et relatifs aux praxéologies locales de référence (voir Annexe) :

- *Idoine* : justification algébrique idoine avec formulation des propriétés des savoirs attendus,
- *Faiblement idoine* : justification algébrique idoine sans formulation des propriétés des savoirs attendus,
- *En construction* : justification algébrique idoine sur des tâches d'application directe mais justification incomplète ou inadaptée sur des tâches plus complexes qui laisse vivre des règles formelles erronées ou utilisées en dehors de leur domaine de validité. Les savoirs attendus ainsi que l'agrégation des différentes praxéologies sont en construction.
- *Ancien* : justification *via* l'arithmétique du primaire laissant vivre des erreurs liées à une non-négociation de la rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre.

Ils permettent une analyse macroscopique de tous les items de *Pépité* avec le même codage afin de dépasser une analyse microscopique tâche par tâche. On peut alors identifier les savoirs et les justifications que chaque élève utilise majoritairement sur l'ensemble des items relevant de la même praxéologie locale. Les niveaux sont utilisés pour coder les réponses des élèves aux items comme illustré dans les tableaux 2 et 3. Nous considérons qu'un item est réussi si la réponse relève d'un niveau de justification idoine ou faiblement idoine, attendu en troisième.

Dans cette étude, nous interprétons les apprentissages des élèves en algèbre par des praxéologies dites *appprises* qui ne sont pas toujours mathématiquement adéquates. Elles sont décrites par un pourcentage¹ de réussite (et d'échec) aux items de *Pépité* et par un pourcentage relatif à chaque niveau de justification pour chacune des cinq praxéologies locales (donc 20 au total)².

Le nombre potentiel de praxéologies apprises est donc important, mais il y a certainement des praxéologies apprises d'élèves qui sont similaires, en particulier avec des pourcentages proches sur les mêmes niveaux de justification sur plusieurs praxéologies locales (par exemple des pourcentages élevés de niveau *Idoine* sur plusieurs praxéologies locales). Par conséquent, nos questions de recherche sont les suivantes : existe-t-il des élèves avec des praxéologies apprises similaires ? Nous voulons savoir quelles praxéologies locales et quels niveaux de justification caractérisent le mieux ces similitudes et si elles varient entre le début et la fin de l'année.

III. MÉTHODOLOGIE

La Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance (DEPP) a pris en charge la construction de l'échantillon et la passation du test. Nous n'avons échangé ni avec les enseignants ni avec les élèves. L'enquête était prévue sur 771 élèves de 36 classes de troisième devant passer *Pépité* une fois en début d'année et une fois en fin d'année. Après nettoyage des données³, les analyses portent sur 25 classes et 454 élèves qui ont répondu au test de début d'année (test 1) puis de fin d'année (test 2). Les réponses des élèves ont été analysées et codées suivant les praxéologies locales du modèle de référence de l'algèbre et les niveaux définis précédemment. Ces codes définissent des variables

¹ La somme du pourcentage de réussite avec celui d'échec ne fait pas nécessairement 100 % puisque les items non traités par l'élève et les réponses non analysées par le logiciel *Pépité* ne sont pas considérés.

² Chaque item met en jeu une ou plusieurs praxéologies. Pour chacune, la réponse de l'élève est codée « 1 » sur le niveau de justification qu'elle met en jeu, « 0 » sur les autres niveaux. Le pourcentage est calculé à partir de la sommation des « 1 » pour chaque niveau de justification sur chaque praxéologie, sur l'ensemble des réponses de l'élève.

³ Nous avons vérifié la passation des deux tests et gardé les classes de plus de 15 élèves ayant passé les deux tests.

statistiques structurant les bases de données. Nous utilisons des analyses descriptives multivariées de type analyses en composantes principales (ACP) et des classifications ascendantes hiérarchiques (CAH) pour déterminer des groupes d'élèves et les variables (niveaux technologiques sur chaque praxéologie locale) qui les déterminent le mieux. Une ACP identifie les dimensions les plus pertinentes d'un ensemble de données pour obtenir une vue d'ensemble des similitudes entre les individus, ici les élèves. Elle consiste à construire de nouvelles variables, les composantes principales, qui déterminent un ou plusieurs plans factoriels. Ces derniers maximisent l'information du nuage de points-individus qui y sont représentés. Cela nous permet de situer les élèves entre eux (proximité ou éloignement). À la suite de cette analyse, une CAH identifie des groupes d'élèves ayant des praxéologies apprises proches. Nous présentons ci-dessous quelques résultats et renvoyons à Grugeon-Allys et Pilet (2024) pour plus de détails.

IV. VARIATION DES APPRENTISSAGES DES ÉLÈVES SUR UNE ANNÉE SCOLAIRE

1. Groupes d'élèves au test de début d'année (test 1)

Nous identifions des groupes d'élèves ayant des caractéristiques d'apprentissage communes. L'ACP identifie un premier plan factoriel (62 % de l'information) avec six variables concernées : *Réussite*, *Échec*, *Calculer Numériquement_Faiblement_Idoine*, *Calculer Numériquement_En-Construction_Ancien*, *Calculer Algébriquement_Idoine* et *Représenter Adéquat_Faiblement_Idoine*. Il met en relation les niveaux de justification *Idoine* ou *Ancien* des praxéologies *Calculer Algébriquement* et *Représenter* et ceux de *Calculer Numériquement*. La CAH a conduit ensuite à l'identification de trois groupes d'élèves nommés EI-A1 (26 %), EI-B1 (39 %), EI-C1 (35 %) et dont les variables qui les caractérisent le mieux sont décrites dans la figure 3.

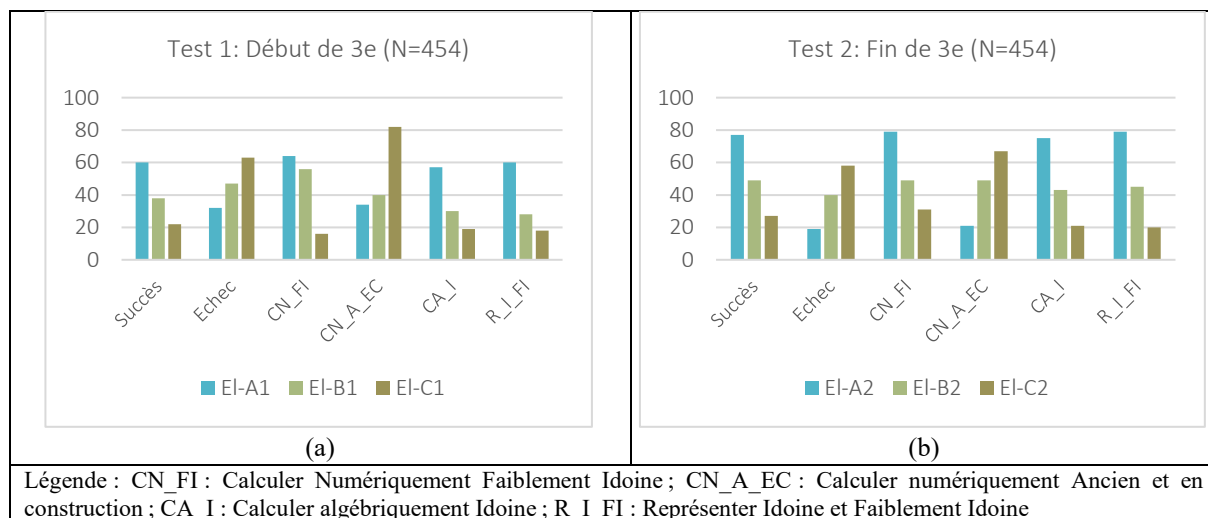


Figure 3 – Pourcentages des variables contribuant au premier plan factoriel du Test 1(a) et du Test 2 (b)

Le groupe EI-A1 se caractérise par un pourcentage moyen de *réussite* (60 %) double de celui d'*échec* (32 %), et par des pourcentages moyens sur les niveaux de justification *Idoine* ou *Faiblement_Idoine* relatifs aux trois praxéologies locales *Calculer Numériquement*, *Calculer Algébriquement* et *Représenter* proches de 60 %. Les élèves de EI-A1 commencent l'année scolaire avec des pratiques algébriques déjà bien établies.

Le groupe EL-B1 se caractérise par un pourcentage moyen de *réussite* (38 %) inférieur à celui d'*échec* (47 %), et par des pourcentages moyens sur les niveaux de justification *Idoine* ou *Faiblement_ Idoine* proches de 30 % sur *Calculer Algébriquement* et *Représenter*. Pour *Calculer Numériquement*, le pourcentage moyen sur le niveau de justification *Faiblement_ Idoine* (56 %) est le plus élevé par rapport celui des autres praxéologies et est supérieur à *En_Construction* et *Ancien* (40 %). Les élèves de EL-B1 commencent l'année en ayant construit un point d'appui sur le calcul numérique pour évoluer vers des pratiques algébriques.

Le groupe EL-C1 se caractérise par un pourcentage moyen de *réussite* (22 %) qui est le tiers de celui d'*échec* (63 %), et par des pourcentages moyens sur les niveaux de justification *Idoine* ou *Faiblement_ Idoine* relatifs aux trois praxéologies locales *Calculer Numériquement*, *Calculer Algébriquement* et *Représenter* inférieurs à 20 %. Le calcul numérique n'est pas un point d'appui pour ces élèves (82 % pour les niveaux *En_Construction* ou *Ancien* contre 16 % pour le niveau *Faiblement_ Idoine*). Les élèves de EL-C1 commencent l'année bien en dessous des attentes du collège.

2. Groupes d'élèves au test de fin d'année (Test 2)

Nous avons effectué la même analyse pour le test 2. Les variables qui contribuent le mieux au plan factoriel sont les mêmes (Figure 3). Elles conduisent à trois groupes, EL-A2 (25 %), EL-B2 (35 %), EL-C2 (40 %).

Les groupes du test 1 et du test 2 sont comparables sur l'ensemble des variables (Figure 3), mais avec des variations plus ou moins marquées pour certaines variables selon les groupes. Le pourcentage de *réussite* au test 2 est plus élevé qu'au test 1 pour chaque groupe (16 points de plus pour EL-A2, 11 pour EL-B2 et 5 pour EL-C2). Les élèves de EL-C2 progressent en *Calculer Numériquement*, le pourcentage moyen en *Faiblement_ Idoine* ayant presque doublé bien qu'il reste très faible (31 %). Mais les élèves de EL-C2 ne progressent pas sur le niveau *Idoine* pour la praxéologie *Calculer Algébriquement*, ni sur le niveau *Faiblement_ Idoine* pour la praxéologie *Représenter*. Le calcul numérique n'est toujours pas un point d'appui.

3. Variation sur l'année scolaire

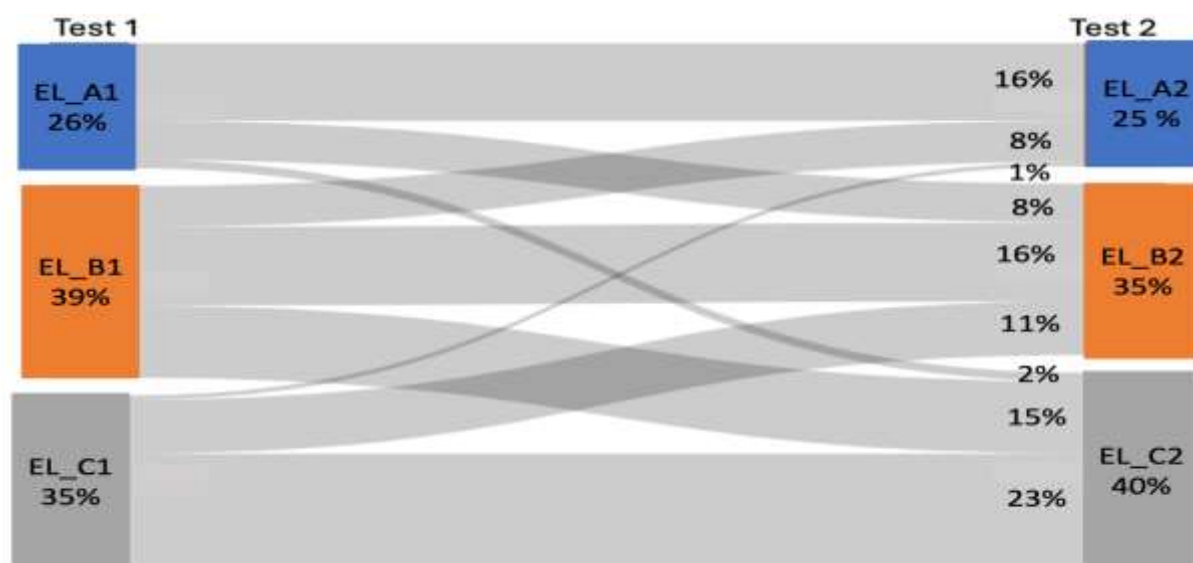


Figure 4 – Fluctuation de l'appartenance aux groupes entre le test 1 et le test 2

La composition des groupes varie légèrement entre les deux tests. El-C2 compte un peu plus d'élèves que El-C1 (environ 40 % contre 35 %) et mais c'est l'inverse pour El-B2 et El-B1 (35 % contre 39 %).

L'appartenance des élèves aux groupes évolue entre les tests 1 et 2 comme représenté dans le diagramme de la figure 4. Le pourcentage des élèves ayant progressé sans changer de groupe est de 45 % (16 % de El-A1 à El-A2, 16 % de El-B1 à El-B2 et 23 % de El-C1 à El-C2). Pour ces élèves, il n'y a pas eu de progrès majeurs relativement aux niveaux de justification qu'ils utilisent pour résoudre des problèmes algébriques. Le pourcentage des élèves ayant progressé en changeant de groupe est de 20 % (8 % de El-B1 à El-A2, 1 % de El-C1 à El-A2, 11 % de El-C1 à El-B2). À la fin de l'année, ces élèves ont acquis des praxéologies plus proches de ce qui est attendu en fin de troisième. Mais environ 25 % des élèves ont régressé et, à la fin de l'année, appartiennent à des groupes qui ont construit des praxéologies éloignées de ce qui est attendu (8 % de El-A1 à El-B2, 15 % de El-B1 à S El-C2 et 2 % de El-A1 à El-C2).

Les praxéologies apprises par les élèves se répartissent en trois groupes au début et à la fin de l'année, avec des caractéristiques similaires. Ils sont cohérents en termes d'apprentissage en ce qui concerne les niveaux *Idoine* et/ou *Faiblement_ Idoine* des praxéologies locales représentatives *Calculer-Numériquement*, *Calculer-Algébriquement*, *Représenter* : pourcentage supérieur à 50 % pour El-A1 et El-A2, pourcentage entre 30 et 50 % pour El-B1 et El-B2, pourcentage inférieur à 30 % pour El-C1 et El-C2 (Figure 3). À la lumière de ces résultats, nous associons chaque groupe à une dominante décrite par le même niveau de justification sur ces trois praxéologies locales : *Idoine* et/ou *Faiblement_ Idoine* pour El-A1 et El-A2, *En construction* pour El-B1 et El-B2 et *Ancien* pour El-C1 et El-C2. De plus, nous constatons que les praxéologies *Modéliser* et *Prouver* ne sont pas représentatives dans la caractérisation des groupes, ce qui soulève des questions sur la place attribuée à ces praxéologies dans l'enseignement effectif actuel de l'algèbre en France.

Entre le début et la fin de l'année scolaire, malgré un taux de réussite plus élevé au test 2, les proportions d'élèves dans chaque groupe restent assez proches : un quart des élèves (El-A1 et El-A2) ont acquis les praxéologies attendues en fin de collège, entre 35 et 40 % des élèves (El-C1 et El-C2) gardent des praxéologies anciennes, entre 39 et 35 % des élèves (El-B1 et El-B2) ont des praxéologies en cours de construction. Cependant, certains élèves changent de groupe avec 20 % de progrès et 25 % de régression. Le calcul numérique est déterminant entre les groupes El-C1 et El-B2. Ces résultats sont comparables à ceux trouvés dans les travaux utilisant *Pépité*, mais ils sont plus riches car ils indiquent ce qui est le plus représentatif des praxéologies apprises des élèves.

V. VARIATION DES APPRENTISSAGES AU SEIN DE CHAQUE CLASSE

La composition d'une classe peut différer d'une autre, en fonction des praxéologies apprises des élèves qui composent la classe. En effet, il peut y avoir plus ou moins d'élèves avec des praxéologies idoines, anciennes ou en cours de construction, ce qui n'offre pas les mêmes conditions d'apprentissage aux élèves.

Afin d'étudier les liens entre la composition des classes au Test 1 et l'évolution des apprentissages des élèves, la figure 5 montre la variation de la distribution des élèves entre les deux tests au sein de chaque classe, en distinguant les élèves qui progressent sans changer de groupe (El-A1 à El -A2, El -B1 à El -B2, El-C1 à El -C2), avec changement de groupe (El-B1 à El-A2, El-C1 à El-B2, El-C1 à El-A2), et ceux qui régressent (El-A1 à El-B2, El-A1 à El-C2, El-B1 à El-C2).

Toutes les classes progressent, mais toutes n'affichent pas la même variation en termes d'apprentissage des élèves. En particulier, il y a des différences importantes d'une classe à l'autre entre les pourcentages d'élèves qui progressent en changeant de groupe. Seules deux classes n'ont aucun élève qui régresse (n° 1710604 et n° 2307079).

Toutefois, une nouvelle donnée vient interroger ces résultats. Le pourcentage d'élèves présents aux deux tests varie entre 52 et 100 % selon les classes. Nous n'avons donc pas toutes les données par classe et nous nous interrogeons sur les praxéologies apprises des élèves qui n'étaient pas présents aux deux tests. Une évolution de la méthodologie serait nécessaire pour objectiver la variation des apprentissages au sein de chaque classe.

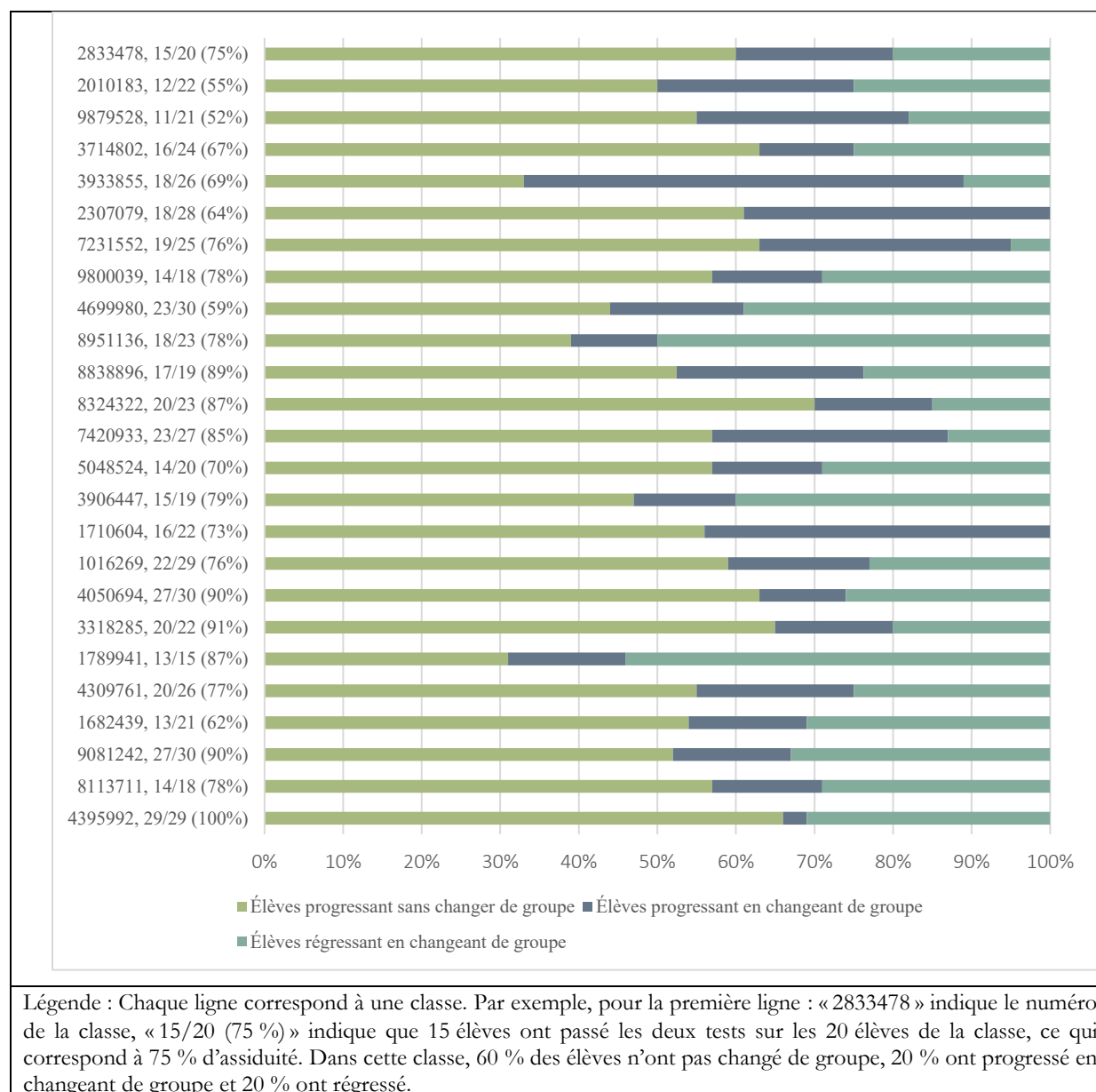


Figure 5 – Pour chaque classe (N=25), le pourcentage d'élèves progressant ou non entre les deux tests et pourcentage de présence aux deux tests

VI. CONCLUSION

L'originalité de cette étude statistique à grande échelle réside dans ses fondements didactiques, en particulier la caractérisation de l'algèbre élémentaire par cinq praxéologies locales et la hiérarchisation des savoirs et raisonnements des élèves par quatre niveaux technologiques. Ce modèle de référence de l'algèbre élémentaire structure les bases de données. Il a permis de définir des élèves similaires en termes d'apprentissage et d'étudier leur variation pendant une année. Les analyses statistiques utilisées, ACP et CAH, reflètent la qualité et la pertinence du codage des données. Elles sont mutuellement cohérentes et interprétables par rapport au modèle de référence, par exemple en ce qui concerne la description des groupes d'élèves.

De plus, mener une telle étude à grande échelle nécessite un soutien important des institutions scolaires, ici du rectorat de l'académie de Limoges, pour contacter les enseignants et les convaincre à participer sans qu'ils se sentent évalués. Même avec ce soutien, de nombreux élèves n'ont pas passé le deuxième test. Sur ce point, notre étude révèle une limite méthodologique concernant la prise en compte de l'absentéisme des élèves. Limiter cet absentéisme s'avère être une condition indispensable pour étudier la dépendance éventuelle entre l'évolution des apprentissages des élèves et l'effet classe.

Outre la composition de la classe, nous avons commencé à prendre en compte les choix et pratiques pédagogiques des enseignants qui peuvent influencer la variation des praxéologies apprises par les élèves. L'étude Praesco⁴ second degré a montré qu'il existe quatre groupes différents de pratiques d'enseignement. Elles dépendent notamment du fait que les enseignants mettent l'accent sur la résolution de problèmes algébriques ou sur l'aspect technique du calcul algébrique et qu'ils prennent en compte ou non les productions des élèves.

Une première analyse exploratoire croise les résultats au test de fin d'année de 426 élèves de 23 classes et les réponses à l'enquête Praesco des 23 enseignants correspondants sur une question à choix multiples concernant l'organisation de l'enseignement de l'algèbre. L'enseignant doit indiquer s'il termine en classe de troisième sa séquence sur les « Expressions algébriques » par « Factoriser des expressions littérales », ou par « Prouver des propriétés ou montrer que des expressions littérales sont équivalentes » ou par « Produire des expressions ». L'analyse s'appuie sur le test de comparaison d'espérance et le modèle Anova. Elle met en évidence que le taux de réussite moyen diffère de façon significative (p -valeurs $< 5\%$) selon, par ordre croissant, que les enseignants terminent par Factoriser, par Produire ou par Prouver. Les enseignants qui déclarent privilégier l'aspect *outil* de l'algèbre en travaillant la production d'expressions littérales ou la preuve ont des élèves qui réussissent mieux que ceux qui déclarent privilégier l'aspect technique du calcul.

Remerciements

Nous remercions la Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP) du ministère de l'Éducation nationale français et l'académie de Limoges pour leur aide à la collecte des données ainsi que Muhammad Zubair Emritte, qui a réalisé les analyses statistiques lors de son stage de fin d'études à l'Université Paris Cité.

⁴ Note d'information DEPP-B4 21.11 (2021) <https://www.education.gouv.fr/media/74626/download> et document qui l'accompagne : 2021-E02 <https://www.education.gouv.fr/media/74607/download>

RÉFÉRENCES

- Bressoux, P. (2012) L'influence des pratiques enseignantes sur les acquisitions scolaires des élèves. *Regards Croisés sur l'Économie*, 12(2), 208-217. <https://doi.org/10.3917/rce.012.0208>
- Chevallard, Y. et Johsua, M.-A. (1991). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques*, 19(2), 221-265.
- Grugeon, B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 49-96.
- Grugeon-Allys, B. (2016). Évaluer en mathématiques : une approche didactique et épistémologique. Dans P. Detroz, M. Crahay et A. Fagnant (dir.), *L'évaluation à la lumière des contextes et des disciplines* (p. 63-90). De Boeck.
- Grugeon-Allys, B., Chenevotot-Quentin, F. et Pilet, J. (2023). Apports de modèles didactiques pour concevoir des parcours adaptatifs dans un environnement numérique. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 43(3), 285-325.
- Grugeon-Allys, B. et Pilet, J. (2024). The algebraic learning of middle school students' evolution during a school year: a statistical large-scale study based on results in mathematics didactics. *Educational Studies in Mathematics*, 117, 533-564. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10347-z>
- Nye, B., Konstantopoulos, S. et Hedges, L. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 26(3), 237-257. <https://doi.org/10.3102/01623737026003237>
- Pilet, J., Coppé, S., Grugeon-Allys, B. et Horoks, J. (2024). Une étude à grande échelle des pratiques déclarées des enseignants du secondaire français. Dans A. Adihou (dir.), *Actes du 8^e colloque EMF2022, 12-16 décembre 2022, Cotonou, Bénin* (p. 734-746). Les éditions de l'Université de Sherbrooke.

ANNEXE
CARACTÉRISATION DES NIVEAUX DE JUSTIFICATION SELON LES PRAXÉOLOGIES
MATHÉMATIQUES RELATIVES À L'ALGÈBRE

Praxéologie	Niveau de justification	Description en référence aux niveaux de l'institution scolaire
Modéliser	Idoine	M_TS Usage des lettres pour produire des expressions littérales complexes, des formules cohérentes aux relations entre grandeurs.
	Faiblement idoine	M_S Usage des lettres pour produire des expressions littérales (premier degré avec parenthèses), des formules cohérentes aux relations entre grandeur.
	En construction	M_F Usage des lettres pour produire des expressions littérales simples (premier degré sans parenthèses) qui sont souvent incorrectes dans des cas plus complexes
	Ancien	M_I Pas ou peu d'usage des lettres ou de façon abrégative. Usage de démarches arithmétiques
Prouver	Idoine	P_TS Usage de justification algébrique correcte (notamment le contre-exemple)
	Faiblement idoine	P_S Usage de justification algébrique correcte
	En construction	P_F Usage de justification algébrique erronée ou mobilisant des arguments d'ordre légal
	Ancien	P_I Usage d'exemples pour prouver
Représenter	Idoine	R_TS Traduction correcte avec prise en charge d'une reformulation pour des expressions littérales complexes
	Faiblement idoine	R_S Traduction correcte avec prise en charge d'une reformulation pour des expressions simples du premier degré
	En construction	R_F Traduction correcte dans des cas simples (sans reformulation) sinon erreur de traduction (écriture en ligne pas à pas, égalité comme annonce de résultat)
	Ancien	R_I Traduction incorrecte avec des écritures abrégatives
Calculer algébriquement	Idoine	CA_TS Substitution correcte, usage correct des propriétés, dont les priorités opératoires, et réécriture d'expressions littérales complexes.
	Faiblement idoine	CA_S Substitution correcte, usage correct des propriétés, dont les priorités opératoires, et réécriture d'expressions littérales simples.
	En construction	CA_F Prise en compte des priorités opératoires dans des calculs simples ($ax+b$) et des erreurs sur le calcul littéral ($ax(b+c) \rightarrow axb+c$)
	Ancien	CA_I Pas de prise en compte des priorités opératoires et réécriture incorrects de type concaténation ($a+b \rightarrow ab, a^n \rightarrow na,,$)
Calculer numériquement	Idoine	CN_TS Usage correct des propriétés et des parenthèses pour tous les nombres dans des expressions simples
	Faiblement idoine	CN_S Usage correct des propriétés et des parenthèses pour tous les nombres dans des expressions simples
	En construction	CN_F Prise en compte des priorités opératoires dans des calculs simples
	Ancien	CN_I Pas de prise en compte des priorités opératoires

DES PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT DE LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES QUI SE DISTINGUENT : QUELS IMPACTS SUR L'HABILETÉ DES ÉLÈVES DE SIXIÈME ANNÉE DU PRIMAIRE (11-12 ANS) À RÉSOUDRE DES SITUATIONS- PROBLÈMES MATHÉMATIQUES ? | GOULET* MARIE-PIER, FOREST** MARIE-PIER ET VERVONDEL*** ÉMILIE

Résumé | Au Québec, l'épreuve ministérielle en mathématiques est devenue la référence pour plusieurs personnes enseignantes du primaire afin de développer et d'évaluer la compétence de leurs élèves à résoudre une situation-problème (SP). Une telle pratique orientée vers la réussite de SP de type ministériel permet-elle de former les élèves à devenir de bons solutionneurs de problèmes ? Cette étude vise à comparer deux pratiques d'enseignement de la résolution de problèmes pour en évaluer les effets sur le rendement à résoudre différents types de SP, ministériel ou non, des élèves de sixième année du primaire.

Mots-clés : enseignement primaire, résolution de situations-problèmes mathématiques, problème, compétence, pratique d'enseignement

Abstract | In Quebec, the ministerial exam in mathematics has become the reference for many elementary school teachers to develop and evaluate their students' skills in solving a situational problem. Does such practice oriented towards the success of a ministerial-type problem allow students to become good problem solvers? This study aims to compare two problem-solving teaching practices to assess their effects on sixth graders' performance in solving different types of situational problems, whether ministerial or otherwise.

Keywords: Elementary education, mathematical problem solving, situational problem, competence, teaching practice

I. CONTEXTE

« Résoudre une SP mathématique » est l'une des trois compétences disciplinaires en mathématiques à développer au primaire au Québec (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport [MELS], 2006a). Pour ce faire, l'élève doit parvenir à développer et à mettre en relation les cinq composantes de la compétence : 1) décoder les éléments de la SP ; 2) modéliser la SP ; 3) appliquer différentes stratégies en vue d'élaborer une solution ; 4) valider la solution et 5) partager l'information relative à la solution (MELS, 2006a). Outre les évaluations réalisées en cours d'année scolaire par la personne enseignante, cette compétence est évaluée par le ministère de l'Éducation lors d'une épreuve obligatoire réalisée par tous les élèves québécois à la fin de leur parcours primaire (sixième année, 11-12 ans). Le type de tâche utilisé est une SP présentée sous la forme écrite, dont plusieurs contraintes sont à respecter et plusieurs démarches sont possibles. Sa résolution nécessite à la fois la mobilisation de différents concepts et processus ainsi que la mobilisation des cinq composantes de la compétence (MELS, 2006b). Conséquemment, la SP est longue en termes de consignes et d'étapes à réaliser, d'où l'appellation « tâche complexe » qui lui est souvent conférée. La tâche est généralement présentée sur deux pages pleines, tel qu'illustré dans la figure 1.

* Université du Québec à Trois-Rivières – Canada – marie-pier.goulet@uqtr.ca

** Université du Québec à Trois-Rivières – Canada – marie-pier.forest@uqtr.ca

*** Université du Québec à Trois-Rivières – Canada – emilie.vervondel@uqtr.ca

Selon une analyse historique de la résolution de problèmes menée par Lajoie et Bednarz (2016) au regard de la nature et des caractéristiques des SP utilisées en contexte québécois, « la complexité [des tâches comme celle présentée dans la figure 1] se traduit par différents choix sous-tendant la construction de la situation : plusieurs concepts en jeu, plusieurs données, plusieurs contraintes, divers modes de représentation, un énoncé très long » (p. 15). Toujours selon ces autrices, pour l'élève, cette complexité relève davantage de la gestion des nombreuses données et contraintes alors que dans les travaux en didactique des mathématiques, la complexité est plutôt de nature conceptuelle (Brousseau, 1976 ; Douady, 1987 ; Pallascio, 2005). À cet égard, Lajoie et Bednarz (2016) expliquent que :

On voit là apparaître [...] une rupture avec la notion de situation-problème telle que reprise par les didacticiens des mathématiques et la conceptualisation qui sous-tend celle-ci. Implicite, dans son rôle attaché à la construction de connaissances nouvelles, elle [la SP] met en effet en jeu une certaine complexité mais qui n'est pas de même nature que celle que nous avons mise en évidence antérieurement. Un retour sur les travaux de Brousseau permet de voir plus à fond cette complexité (implicite), de nature fort différente de celle qui précède (p. 20).

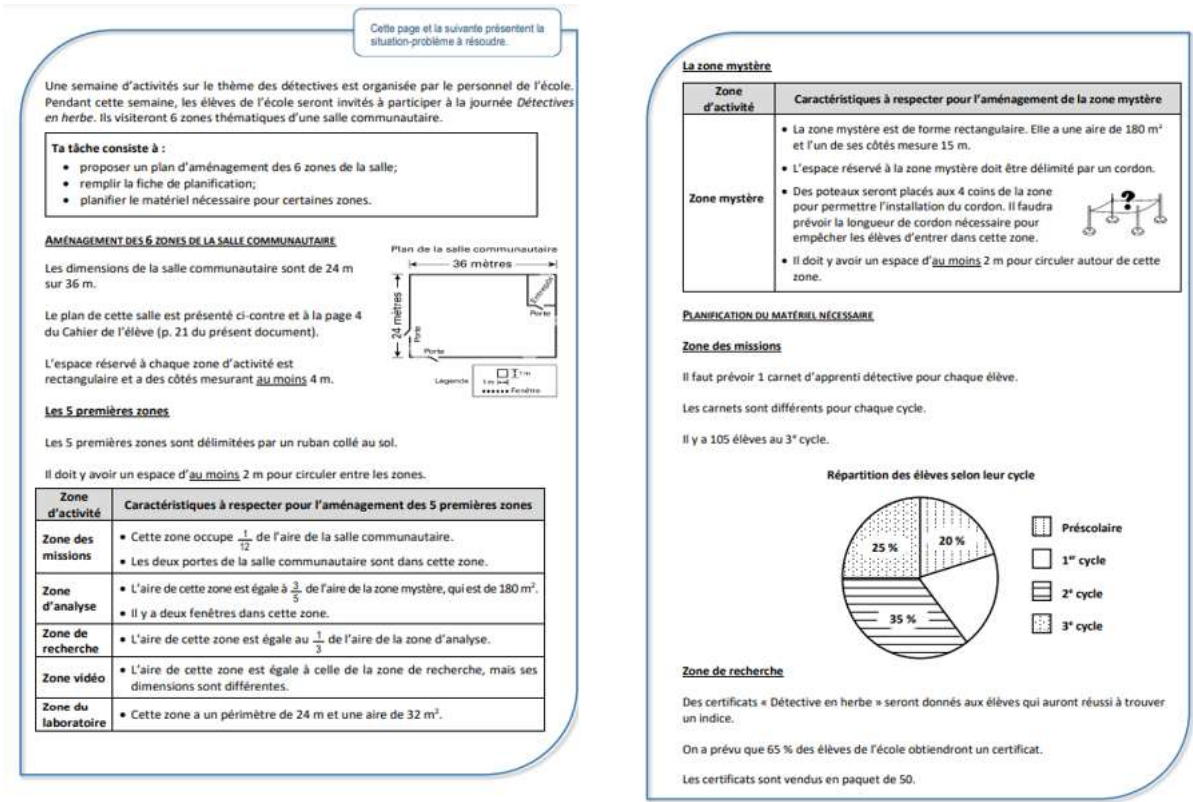


Figure 1 – Exemple d'une SP ministérielle (MEQ, 2023, p. 16-17)

Bien que cette idée de construction de nouvelles connaissances à travers une SP soit soutenue par plusieurs chercheurs et chercheuses en didactique des mathématiques, elle ne figure pas parmi les caractéristiques d'une SP telle que définie dans le PFEQ du primaire (Lajoie et Bednarz, 2016). Pour cette raison, le terme SP sera utilisé dans ce texte pour décrire plus largement une situation visant un objectif ne pouvant pas être atteint d'emblée, mais exigeant plutôt de l'élève qu'il s'engage dans un véritable processus de recherche (MELS, 2006a).

II. PROBLÉMATIQUE ET CADRE DE RÉFÉRENCE

Afin de décrire succinctement la problématique de notre étude, trois constats généraux seront décrits : 1) les contraintes évaluatives associées à l'activité de résolution de problèmes au Québec ; 2) les conceptions des personnes enseignantes du primaire en lien avec la SP et 3) les représentations des élèves par rapport à la compétence « résoudre une SP mathématique ».

1. *Les contraintes évaluatives associées à l'activité de résolution de problèmes au Québec*

Sachant que tous les élèves sont évalués à la fin de leur primaire, et ce à l'aide d'une épreuve unique visant à juger de leur compétence à résoudre une SP mathématique, les personnes enseignantes ressentent nécessairement le besoin de préparer leurs élèves à cette épreuve. Si celle-ci a lieu seulement à la fin de la 6^e année, la préparation, elle, débute dès la 1^{re} année du primaire (6-7 ans). En effet, une pratique courante consiste à proposer aux élèves, plusieurs fois par année, des tâches similaires à celle du ministère. D'ailleurs, dans plusieurs centres de services scolaires, des équipes de conseillers et conseillères pédagogiques ont élaboré des SP s'apparentant à la tâche ministérielle, et ce, pour tous les cycles du primaire (6-12 ans). Un tel travail permet une grande accessibilité à ce type de tâche pour les personnes enseignantes. Dans le même ordre d'idées, un ouvrage intitulé « Je me prépare aux examens du ministère en mathématiques – es-tu prêt à passer le test ? » (Barry et al., 2022) a été publié récemment. Les personnes autrices présentent l'ouvrage comme un recueil de SP « du type de celles proposées par le ministère de l'éducation du Québec » (Barry et al., 2022, p. 11) destiné principalement aux personnes enseignantes du 3^e cycle du primaire afin de préparer leurs élèves à l'examen ministériel. Ces ressources mettent en évidence les efforts et le temps consacrés à la réussite de cette épreuve durant le parcours scolaire des élèves. À ce sujet, Lessard et ses collègues (2020) soulignent l'influence qu'une culture d'évaluation, instaurée par un système scolaire, peut avoir sur les conceptions et les pratiques des personnes enseignantes. Plus précisément, elles expliquent que « la forte prégnance et la notoriété octroyée aux évaluations, notamment du ministère de l'Éducation, contribuent à l'émergence et à la surreprésentation de l'objectif évaluatif poursuivi par l'activité [de résolution de problèmes] » (Lessard et al., 2020, p. 29).

De tels propos laissent croire qu'au Québec, la pratique serait davantage orientée vers l'évaluation (ou la préparation à l'évaluation) de SP que vers le développement de la compétence elle-même. Cette visée évaluative décrite par Lessard et al. (2020) conduit à utiliser l'activité de résolution de problèmes dans le but de « mobiliser les concepts et processus mathématiques appris » (Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur [MEES], 2019, p. 16). D'ailleurs, l'activité de résolution de problèmes mathématiques telle qu'utilisée couramment dans les classes consisterait à proposer des SP dans une visée d'application et/ou d'évaluation de savoirs enseignés préalablement (Forest, à venir ; Lessard et al., 2020 ; MEES, 2019 ; Savard et Polotskaia, 2014). Or, bien que la capacité à réinvestir des apprentissages antérieurs en contexte de résolution de SP est en soi une finalité, ces situations peuvent également servir de point de départ à de nouveaux apprentissages (Brousseau, 1998 ; Demonty et Fagnant, 2012 ; MEES, 2019 ; Seeley, 2016 ; Takahashi, 2021). Tel qu'abordé brièvement précédemment, cette idée rejoint l'une des caractéristiques fondamentales d'une SP telle que définie dans plusieurs travaux en didactique des mathématiques (Brousseau, 1983 ; Douady, 1987 ; Theis et al., 2012), à savoir « la présence d'un obstacle à franchir, associé [...] explicitement à la construction de connaissances nouvelles » (Lajoie et Bednarz, 2016, p. 19). Brousseau (1998) explique que la constitution du sens « implique une interaction constante de l'élève avec des situations problématiques

[...] où il engage des connaissances antérieures, les soumet à révision, les modifie, les complète ou les rejette pour former des conceptions nouvelles » (p. 120).¹

Cette conception de la SP est en cohérence avec ce que le MEES (2019) appelle l'enseignement-apprentissage de la mathématique *par* la résolution de problèmes. Puisque l'élève apprend à travers la résolution de la SP, « le problème précède l'explication notionnelle, au lieu de lui succéder » (Pallascio, 2005, p. 32). Toutefois, cette conception de la SP en tant que moyen pour construire de nouvelles connaissances ne semble pas être partagée par la majorité des personnes enseignantes du primaire.

2. *Les conceptions des personnes enseignantes du primaire en lien avec la SP*

Pour plusieurs personnes enseignantes du primaire, la SP est une tâche complexe faisant intervenir différentes contraintes (Theis et al., 2012), pour laquelle la démarche à mettre en œuvre comporte plusieurs étapes et nécessite la mobilisation de plusieurs concepts et processus appris préalablement (Lessard et al., 2020). L'identification de caractéristiques permettant de définir une SP semble venir d'un besoin, chez les personnes enseignantes, de distinguer clairement les tâches qui permettent de travailler la compétence 1 « résoudre une SP mathématique » de celles étant davantage liées à la compétence 2 « raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques ». Des documents de travail circulant dans les écoles font d'ailleurs état de cette distinction. À titre d'exemple, le document « Précisions sur l'évaluation en mathématique au primaire » du centre de services scolaire de Montréal (CSSDM, 2019) propose des caractéristiques propres aux tâches ciblant les compétences 1 et 2, tel qu'illustré dans le tableau 1.

Tableau 1 – Caractéristiques liées aux tâches relevant des compétences 1 et 2

Compétence 1 Résoudre une SP	Une SP est caractérisée par les éléments suivants : ▪ La tâche présente un but à atteindre, une tâche à réaliser ou une solution à trouver. ▪ Elle est organisée autour d'obstacles à franchir. ▪ La démarche, comportant plusieurs étapes, n'est pas immédiatement évidente. ▪ Elle suppose un raisonnement, une recherche, un processus de questionnement et permet la mise en place de plusieurs stratégies dans un processus dynamique (anticipations, retours en arrière et jugement critique). ▪ La tâche exige le choix et la combinaison non apprise d'un nombre significatif de concepts et processus. ▪ Les consignes ne donnent pas d'indications ni sur la démarche ni sur les savoirs essentiels à exploiter. ▪ La tâche est contextualisée. ▪ La tâche inclut une préoccupation à l'égard de la réflexion métacognitive.
Compétence 2 Raisonner à l'aide de concepts et processus mathématiques	Une situation d'application est caractérisée par les éléments suivants : ▪ La tâche vis l'application d'un ou de quelques concepts, processus, stratégies. ▪ Les consignes mènent vers une démarche comportant peu d'étapes. ▪ Elle présente souvent une solution unique.

(Source : CSSDM, 2019, p. 2-3).

Plusieurs éléments dans ce tableau permettent de comprendre ce en quoi consiste la résolution d'une SP. Notons par exemple l'idée d'obstacle, de solution non évidente, de questionnement et de processus dynamique (retours en arrière). Or, dans certains cas, l'emploi du caractère gras sur des mots

¹ Même si les idées d'obstacle et d'acquisition de connaissances nouvelles avancées par Brousseau (1983) sont abordées dans ce texte, le cadre théorique de cette étude ne relève pas de la théorie des situations didactiques (TSD) de Brousseau (1998).

en particulier fait en sorte que l'accent est plutôt mis sur des caractéristiques telles que le nombre d'étapes ou le nombre de contraintes, qui peuvent être qualifiées de plus opérationnelles. Par exemple, pour la troisième caractéristique « La démarche, comportant **plusieurs étapes**, n'est pas immédiatement évidente », il semble que le fondement même de ce qu'est une SP est mis de côté (la démarche ou solution n'est pas immédiatement évidente) pour mettre en lumière une caractéristique qui en soi n'est pas fondée pour définir une SP (comporter plusieurs étapes).

Cette conception de ce qu'est une SP chez les personnes enseignantes semble orienter leur pratique, notamment en ce qui a trait au choix des problèmes proposés aux élèves. Conséquemment, les élèves à qui l'on propose principalement des SP choisies en fonction du nombre d'étapes et de concepts et processus mathématiques à mobiliser accumulent une expérience scolaire particulière les amenant à se créer une représentation de ce qu'il faut être capable d'accomplir pour être jugé bon ou bonne en résolution de problèmes.

3. Les représentations des élèves par rapport à la compétence « résoudre une SP »

Selon Gonzalez (2023), pour plusieurs élèves, être bon ou bonne en résolution de problèmes mathématiques signifie résoudre des problèmes en utilisant des méthodes ou des procédures mémorisées, sans avoir besoin d'aide. Imaginons un instant qu'un élève soit naturellement créatif et curieux et qu'il ait comme réflexe d'essayer diverses stratégies lorsqu'il rencontre une SP. Si cet enfant est dans une classe dans laquelle la personne enseignante utilise principalement des SP pour lesquelles il doit appliquer des méthodes ou des concepts/processus précis ayant été enseignés, il pourrait en venir à penser, au fil du temps, qu'il n'est pas compétent, puisque sa créativité et sa curiosité ne sont pas valorisées, voire même contre-indiquées par la culture de la classe. Pourtant, cet élève possède des aptitudes essentielles pour résoudre des SP qui représentent un réel défi pour lui. Plusieurs questions se posent alors : qu'est-ce qu'un élève compétent en résolution de SP, au-delà de son rendement aux différentes tâches mathématiques auxquelles il est soumis ? Quelles aptitudes souhaitons-nous que les élèves développent au regard de la résolution de problèmes ?

Dans le cadre de cette étude, nous avons défini l'élève compétent en résolution de SP à l'aide de cinq aptitudes :

1. C'est un élève qui prend des risques (Liljedahl, 2024).
2. C'est un élève qui persévère (Liljedahl, 2018, 2024).
3. C'est un élève qui collabore (Pruner, 2023; Schoenfeld, 1985 ; Turcotte, 2020).
4. C'est un élève qui fait preuve de flexibilité (MEES, 2019).
5. C'est un élève qui arrive à donner du sens au problème (MEES, 2019).

III. PROBLÈME DE RECHERCHE

1. La formation des élèves en résolution de SP mathématiques

La tendance des personnes enseignantes à utiliser les SP dans une visée de mobilisation de savoirs enseignés à des fins évaluatives nous amène à soulever la question de la formation des élèves. En effet, la pratique étant fortement orientée vers la réussite des élèves à l'épreuve ministérielle, il y a lieu de se demander quels types de solutionneurs les élèves sont-ils formés à devenir ? Qu'en est-il de leur compétence à résoudre des problèmes, au-delà des tâches ministérielles ? Au Québec, l'existence d'une tension entre les pratiques d'apprentissage et d'évaluation liées à la compétence à résoudre des SP mathématiques est soulevée par certaines personnes (DeBlois et al., 2016 ; Lessard et al., 2020). DeBlois et ses collègues (2016) expliquent que « les enseignants sentent la nécessité de devoir choisir

entre une adhésion aux mesures évaluatives ministérielles et le développement de leur propre système d'évaluation » (p. 53), qui lui s'intéresse davantage à l'apprentissage de l'élève. Comment peut-on alors réduire cette tension entre la réussite et l'apprentissage des élèves au regard de cette compétence ? Un premier élément de réponse se situe à notre avis du côté de la formation des personnes enseignantes. Une prise de conscience et une compréhension relative au fait que le développement de la compétence à résoudre une SP mathématique ne puisse être uniquement attribuable à la réussite (ou à l'échec) d'une tâche de type ministériel est essentielle. Nous y voyons là un besoin de développement professionnel au regard de l'activité de résolution de problèmes, plus précisément en ce qui a trait aux différentes intentions accordées à cette activité et aux types de tâches pouvant être utilisées.

2. *Une alternative pour développer la compétence à résoudre des SP mathématiques*

Tel qu'argumenté précédemment, les tâches de type ministériel (telle que la figure 1) ne peuvent à elles seules permettre le développement de la compétence à résoudre des SP. D'ailleurs, dans le programme du secondaire (MELS, 2006b), il est mentionné que pour aider l'élève à progresser dans le développement de ses compétences, la personne enseignante devrait proposer, au cours du processus d'apprentissage, une alternance entre des situations complexes (comme les tâches ministérielles) et des situations plus simples. Autrement dit, il n'est pas recommandé de toujours utiliser les SP qui exigent de recourir aux cinq composantes simultanément, comme c'est le cas lorsque l'on propose aux élèves des SP de type ministériel. D'ailleurs, il a été mis en évidence que lorsque des élèves du primaire rencontrent des difficultés face à la résolution d'une tâche complexe faisant intervenir l'ensemble des composantes de la compétence, les personnes enseignantes ont tendance à décomposer la tâche en sous-problèmes dans le but de permettre aux élèves d'appliquer les procédures requises (Demonty et Fagnant, 2014). Le risque qu'une telle intervention ne suffise pas au développement des compétences visées est soulevé par Bonnery (2007), alors que Julo (2002) soutient que la personne enseignante est dans un tel cas amené à penser le problème pour l'élève. Conséquemment, une telle pratique conduit l'élève « à ne travailler que les aspects procéduraux de la démarche » (Demonty et Fagnant, 2014, p. 177). À ce sujet, Bonnery (2007) soulève la possibilité qu'en aidant les élèves à réaliser les tâches, il est possible de tomber dans le piège de l'illusion du développement de compétence, alors qu'en réalité, les élèves peuvent ne pas avoir atteint les apprentissages visés. En somme, le fait de proposer des tâches variées visant le développement d'une ou de quelques composantes de la compétence à la fois, plutôt que l'ensemble des composantes simultanément, semble donc être une alternative intéressante trouvant des appuis dans les documents ministériels et les recherches.

Concernant l'accessibilité de ces tâches, il est possible de se tourner vers les travaux de personnes ayant développé différents types de tâches pouvant servir au développement de la compétence « résoudre une SP mathématique ». On peut penser aux « Mathématiques en trois temps » de Dan Meyer, au « Splat » de Steve Wyborney ou encore au « Menu Math » de Nat Banting. D'ailleurs, le site Internet « Apprendre et évaluer autrement en mathématique » développé par le récit MST propose une variété de problèmes permettant de travailler cette compétence en ciblant une ou quelques composantes à la fois. Ces problèmes sont reconnus pour être « non routiniers ». Un problème non routinier nécessite davantage que l'utilisation d'un ensemble de procédures ou de connaissances apprises (ou étudiées), comme ce serait le cas lors de la résolution d'un problème routinier (Charnay, 1992 ; Selden et al., 1999). Il s'agit plutôt d'un problème qui amène les élèves à « créer une combinaison nouvelle de stratégies afin de résoudre la tâche » (Dufour et Jeannotte, 2013, p. 30). Pruner (2023) ajoute à ces définitions un élément distinctif entre les problèmes routiniers et non routiniers en affirmant que dans un problème routinier, l'application d'une ressource mémorisée suffit pour résoudre le problème, alors que dans un problème non routinier, ces ressources mémorisées servent

plutôt à faire avancer la résolution du problème, sans pour autant être suffisantes pour le résoudre. L'accès à des tâches variées, distinctes de celle proposée lors de l'évaluation ministérielle, offre une opportunité réaliste de travailler autrement la compétence des élèves à résoudre des SP.

IV. OBJECTIFS DE RECHERCHE

Le contexte québécois dans lequel les élèves du primaire progressent soulève la question de leur formation et de leur compétence à résoudre des SP lorsque ces dernières ne correspondent pas au cadre fourni par le ministère. Dans cette étude, nous proposons de comparer l'effet de deux pratiques d'enseignement de la résolution de SP : l'une orientée principalement vers l'utilisation de problèmes non routiniers présentés dans des contextes variés (causeries mathématiques, menu math, maths en trois temps, etc.) et l'autre orientée principalement vers l'utilisation de problèmes routiniers présentés dans un contexte de réinvestissement. Un deuxième élément différenciant les deux pratiques est lié à la fréquence d'utilisation de tâches de type ministériel à chaque étape de l'année scolaire : dans un cas, l'utilisation est unique alors que dans l'autre, elle est multiple. Ces éléments distinguant les deux pratiques sont résumés dans le tableau 2 sous les appellations « profil A » et « profil B ».

Tableau 2 – Description des profils de pratiques d'enseignement de la résolution de SP

Profil A	Profil B
Utilisation majoritaire de problèmes non routiniers dans des contextes variés pour travailler le développement de la compétence à résoudre des SP mathématiques	Utilisation majoritaire de problèmes routiniers dans un contexte de réinvestissement des concepts et processus mathématiques appris pour travailler le développement de la compétence à résoudre des SP mathématiques
Utilisation unique de tâches de type ministériel (à chaque étape)	Utilisation multiple de tâches de type ministériel (à chaque étape)

À la lumière de ces deux profils, nos objectifs de recherche sont les suivants :

- **Objectif 1 :** Comparer deux profils de pratiques d'enseignement de la résolution de SP en évaluant leurs effets sur le rendement des élèves à résoudre des SP de type ministériel ou non.
- **Objectif 2 :** Étudier les représentations initiales des élèves sur ce que veut dire « être bon ou bonne en résolution de SP² » et les retombées des profils A et B au regard de celles-ci.
- **Objectif 3 :** Identifier les défis et les pistes de solutions à la mise en place d'une pratique d'enseignement de la résolution de SP orientée vers une utilisation de problèmes non routiniers dans des contextes variés (profil A).
- **Objectif 4 :** Examiner les retombées perçues par les personnes enseignantes du profil A en lien avec les attitudes et les stratégies déployées par leurs élèves en résolution de SP.

V. CHOIX MÉTHODOLOGIQUES

1. Devis et sélection des classes participantes

Un devis mixte a été privilégié afin d'atteindre les objectifs de recherche (Fortin et Gagnon, 2022). Dans la suite de ce texte, seuls les deux premiers objectifs seront discutés. La phase quantitative s'inscrit

² Il est à noter que l'expression être bon ou bonne en « résolution de problèmes » a été utilisée auprès des élèves puisque cette terminologie est davantage employée dans le milieu de la pratique que celle de SP.

dans les devis quasi expérimentaux avec covariable. Ce type de devis permet de vérifier statistiquement les différences entre deux groupes d'élèves : un groupe dont la personne enseignante privilégie une pratique d'enseignement telle que définie selon le profil A et un groupe pour le profil B (voir tableau 2 ci-haut).

Au total, 11 personnes enseignantes et leurs élèves de 6^e année participent à l'étude : six classes s'inscrivent dans le profil A ($n = 119$ élèves) et cinq classes s'inscrivent dans le profil B ($n = 104$). Les personnes enseignantes ont été sélectionnées à l'aide d'un questionnaire de recrutement dont les questions étaient en lien avec leur vision de l'activité de résolution de problèmes et leurs pratiques d'enseignement de la résolution de SP. Leur profil a ensuite été confirmé grâce au journal de bord consigné tout au long de l'année scolaire.

2. Déroulement de la collecte de données et analyse des données

Concrètement, une première prise de mesure a été effectuée en septembre 2024 dans l'ensemble des classes participantes. Lors d'une visite de 90 minutes, les élèves ont complété deux questionnaires : 1) un questionnaire d'opinion sur ce que signifie être bon ou bonne en résolution de SP mathématiques et 2) un test général de résolution de problèmes comprenant trois problèmes écrits routiniers et trois problèmes écrits non routiniers. Ces deux tests, qui ont servi à déterminer le rendement général des élèves en résolution de problèmes et leurs représentations initiales, agiront comme covariables lors des analyses.

Une deuxième prise de mesure a eu lieu en mai et en juin 2025 afin de collecter des données en lien avec nos deux variables dépendantes (posttest). Ce posttest sert donc à déterminer le rendement des élèves 1) lors de la résolution de SP en adéquation avec les aptitudes d'un bon solutionneur et 2) lors de la résolution de la SP ministérielle. Pour ce faire, un test incluant sept SP pour lesquelles les élèves doivent faire preuve de flexibilité, de persévérance, de compréhension ou encore oser prendre des risques a été administré en mai alors que les résultats obtenus par les élèves à l'épreuve obligatoire du ministère en lien avec la compétence 1 « résoudre une SP mathématique » ont été transmis à la chercheuse principale en juin. De plus, le même questionnaire d'opinion administré lors du test de début d'année a été soumis à nouveau aux élèves. Les données recueillies nous permettent de déterminer l'effet du profil d'enseignement (A ou B) sur le rendement des élèves lors de la résolution de ces deux types de SP, tout en contrôlant l'effet de la covariable (rendement général en résolution de problèmes de type routiniers et non routiniers). Plus précisément, des analyses de covariance (ANCOVA) permettent de comparer les moyennes obtenues au posttest une fois ajustées selon le test de début d'année (covariable). La variable liée à la représentation des élèves par rapport à la compétence « résoudre des SP mathématiques » est quant à elle principalement étudiée à l'aide d'analyses descriptives.

Finalement, toutes les personnes enseignantes (profils A et B) se sont engagées à compléter un journal de bord de façon hebdomadaire afin de garder des traces des types de problèmes et des contextes privilégiés pour travailler la compétence 1 « résoudre une SP mathématique » et du nombre d'heures par semaine destiné au développement de cette compétence. Ces traces écrites pourront servir de données complémentaires pour interpréter les résultats quantitatifs.

VI. RÉSULTATS ET CONCLUSION

Considérant que la collecte de donnée s'est terminée en juin 2025 lorsque les épreuves ministérielles ont eu lieu, seuls les résultats sur les représentations initiales des élèves (objectif 2) ont été présentés au colloque en mai. Si nous faisons l'exercice de nous projeter dans le temps, nous croyons que les

résultats obtenus serviront à appuyer, à l'aide de données scientifiques, une alternative à la pratique actuelle qui est davantage orientée vers la formation des élèves dans une visée de réussite académique pour plutôt proposer une façon de former les élèves à devenir de bons solutionneurs de problèmes, sans nuire à leur réussite à l'épreuve ministérielle. Notre motivation à mener ce projet est de faire en sorte que les élèves aient du plaisir à résoudre des problèmes et se sentent compétents à le faire. Nous voulons aussi que les personnes enseignantes y prennent plaisir et aident les élèves à développer de réelles habiletés de résolution de problèmes.

RÉFÉRENCES

- Association des promoteurs de l'avancement de la mathématique à l'élémentaire [APAME]. (1988a). *Mathémathlon 6^e année* [Banque de problèmes]. APAME.
- Association des promoteurs de l'avancement de la mathématique à l'élémentaire [APAME]. (1988b). *Mathémathlon 5^e année* [Banque de problèmes]. APAME.
- Barry, S., Boivin, M., St-Pierre, C. et Houle-Minier, É. (2023). *Je me prépare aux examens du ministère en mathématiques : es-tu prêt à passer le test ?* JFD.
- Bergeron, C., Bergeron C. L. et Sauvageau, K. (2014). *Caméléon – Classe branchée. Cahier d'apprentissage B, 5^e année*. CEC.
- Bonnery, S. (2007). *Comprendre l'échec scolaire. Élèves en difficultés et dispositifs pédagogiques*. La Dispute.
- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Dans *Comptes rendus de la XXXVIII^e rencontre de la CIEAEM, 28 août 1976, Louvain-la-Neuve* (p. 101–117).
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165–198.
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.
- Centre de services scolaire de Montréal. (2019). *Précisions sur l'évaluation en mathématique au primaire*. <https://cybersavoir.csdm.qc.ca/123/files/2019/09/Document-Précision-Evaluation.pdf>
- Charnay, R. (1992). Problème ouvert, problème pour chercher. *Grand N*, (51), 77-83.
- DeBlois, L., Barma, S. et Lavallée, S. (2016). L'enseignement ayant comme visée la compétence à résoudre des problèmes mathématiques : quels enjeux ? *Éducation et francophonie*, 44(2), 40-67. <https://doi.org/10.7202/1039021ar>
- Demonty, I. et Fagnant, A. (2012). Les différentes fonctions de la résolution de problèmes sont-elles présentes dans l'enseignement primaire en Communauté française de Belgique ? Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Actes du colloque EMF2012 « Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle », 3-7 février 2012, Université de Genève, Suisse* (p. 1752-1760). <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>
- Demonty, I. et Fagnant, A. (2014). Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe. *Éducation et francophonie*, 42(2), 173-189. <https://doi.org/10.7202/1027912ar>
- Douady, R. (1987). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5–31.

- Dufour, S. et Jeannotte, D. (2013). La tâche non routinière sous l'angle du contrôle : un exemple en calcul différentiel. *Bulletin AMQ*, 53(4), 29-43.
- Forest, M.-P. (à venir). *Enseignement des mathématiques par la résolution de problèmes : pratiques déclarées et conditions favorisant sa mise en œuvre à l'école primaire* [Thèse de doctorat, Université du Québec à Rimouski].
- Fortin, M.-F. et Gagnon, J. (2022). *Fondements et étapes du processus de recherche : méthodes quantitatives et qualitatives* (4^e éd.). Chenelière Éducation.
- Gonzalez, L. (2023). *Bad at math? Dismantling harmful beliefs that hinder equitable mathematics education*. Corwin Mathematics.
- Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, (69), 31-52.
- Lajoie, C. et Bednarz, N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du XXI^e siècle au Québec : rupture ou continuité ? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 16(1), 1-27. <https://doi.org/10.1080/14926156.2014.993443>
- Lessard, G., Deschênes, G., Anwandter Cuellar, N., Bergeron, J. et Leroux, M. (2020). La situation-problème mathématique à l'école primaire : ce que les conceptions d'enseignantes nous révèlent. *Revue des sciences de l'éducation*, 46(3), 7-37. <https://doi.org/10.7202/1075986ar>
- Liljedahl, P. (2018). On the edges of flow: Student problem-solving behavior. Dans N. Amado, S. Carreira et K. Jones (dir.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving: A focus on technology, creativity and affect* (p. 505-524). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9_22
- Liljedahl, P. (2024). *La classe collabo-réflexive en mathématiques : 14 pratiques pédagogiques pour optimiser l'apprentissage* (F. Ouellet, trad.). Chenelière Éducation.
- Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport [MELS]. (2006a). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire. Enseignement primaire*. Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport [MELS]. (2006b). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire. Deuxième cycle. Mathématiques*. Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation du Québec [MEQ]. (2023). *Guide à l'intention des parents. Épreuve obligatoire. Mathématique. 6^e année du primaire*. Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement Supérieur [MEES]. (2019). *Référentiel d'intervention en mathématique*. Gouvernement du Québec.
- Pallascio, R. (2005). Les situations-problèmes : un concept central du nouveau programme de mathématiques. *Vie pédagogique*, (136), 32-35.
- Pruner, M. J. (2023). *Complexity and collaborative problem solving* [Thèse de doctorat, Simon Fraser University].
- Ruf, I. (2025). Les problèmes de recherche au cycle 2 : que proposent les enseignant.es à leurs élèves ? *Revue de mathématiques pour l'école*, (242), 19-40. <https://doi.org/10.26034/vd.rm.2024.5959>
- Savard, A. et Polotskaia, E. (2014). Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire. *Éducation et francophonie*, 42(2), 138-157. <https://doi.org/10.7202/1027910ar>
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press inc.

- Seeley, C. L. (2016). *Making sense of math. How to help every student become a mathematical thinker and problem solver*. ASCD Arias.
- Selden, A., Selden, J., Hauk, S. et Mason, A. (1999). *Do calculus students eventually learn to solve non-routine problems?* Tennessee Technological University.
- Small, M. (2014). *Bonnes questions. L'enseignement différencié des mathématiques*. Modulo.
- Small, M., Kubota-Zarivnij, K. et Lin, A. (2014). *À pas de géant, vers une meilleure compréhension des maths*. Modulo.
- Sullivan, P. et Lilburn, P. (2010). *Activités ouvertes en mathématiques. 600 bonnes questions pour développer la compréhension en mathématiques*. Chenelière Éducation.
- Takahashi, A. (2021). *Teaching mathematics through problem-solving: A pedagogical approach from Japan*. Routledge.
- Theis, L., Mary, C. et Squalli, H. (2012). Quelles fonctions et usages des problèmes chez des enseignants du secondaire ? Dans J. Proulx, D. Voyer, A. Roy et V. Martin (dir.), *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec « La recherche sur la résolution de problèmes en mathématiques : au-delà d'une compétence, au-delà des constats », 23-25 mai 2012, Université Laval, Québec* (p. 155-162).
- Turcotte, B. (2020). *Le développement de la compétence à résoudre des problèmes en mathématique et le développement d'habiletés sociales* [Mémoire de maîtrise, Université Laval]. Corpus ULaval.
<https://corpus.ulaval.ca/entities/publication/c47ff5e0-acbc-4b4b-a589-5b3a5ee9a02a>

IMPACT DE L'ENSEIGNANT SUR LES PROCÉDURES DES ÉLÈVES DANS UN JEU

| LUDIER* ISABELLE

Résumé | Cette présentation examine l'influence des pratiques pédagogiques des enseignants sur les procédures mathématiques des élèves utilisant le jeu éducatif Mathador. Les résultats montrent que les enseignants centrés sur la performance favorisent des stratégies de surface, tandis que ceux orientés vers l'apprentissage encouragent l'acquisition de connaissances plus profondes. L'intégration du jeu dans l'enseignement dépend des intentions pédagogiques.

Mots-clés : pratiques pédagogiques, jeu, procédures élèves

Abstract | This presentation examines the influence of teachers' pedagogical practices on the mathematical procedures of students using the educational game Mathador. The results show that performance-focused teachers tend to promote surface-level strategies, while those who prioritize learning encourage the acquisition of deeper knowledge. The integration of the game into teaching is dependent on the teachers' pedagogical intentions.

Keywords: Pedagogical practices, game, student procedures

L'influence de l'enseignant sur les apprentissages des élèves est un sujet fondamental, notamment dans le cadre de l'étude de l'efficacité de l'enseignement. Comme le souligne Rogalski (2007, p.6), un enseignant de mathématiques efficace ne se mesure pas uniquement au « pourcentage d'élèves capables de résoudre des équations algébriques de premier degré à la fin de l'année scolaire ». En effet, les résultats des élèves dépendent également de leur niveau initial et de l'ensemble de leurs acquis antérieurs. Cette complexité rend difficile l'évaluation de l'efficacité pédagogique en raison de la diversité des conditions de départ et des objectifs d'apprentissage visés.

Par ailleurs, l'enseignement par le jeu est fortement recommandé dans les programmes éducatifs actuels, soulignant l'importance de la motivation des élèves dans leurs apprentissages. Une question importante est de savoir si les élèves exploitent pleinement les possibilités mathématiques offertes par le jeu et comment les enseignants peuvent faciliter cette rencontre. Le jeu « Mathador », développé en France, largement utilisé dans les classes françaises a servi de support à cette étude. Ce choix présente un intérêt du fait que les procédures dans le jeu ne font pas partie d'un enseignement traditionnel, ce qui place tous les élèves sur un pied d'égalité quant aux conditions de départ.

Dans ma thèse soutenue en 2022, j'ai démontré que les élèves utilisent principalement des connaissances mathématiques minimales pour résoudre les tâches proposées par ce jeu. Poursuivant mes recherches, mon travail s'est orienté vers l'étude de l'influence des pratiques des enseignants sur les procédures utilisées par les élèves dans le cadre du jeu Mathador. Cette analyse vise à comprendre comment les différentes approches pédagogiques et didactiques peuvent moduler les stratégies et les compétences mathématiques mobilisées par les élèves, contribuant ainsi à une meilleure compréhension de l'efficacité de l'enseignement par le jeu.

* CYU Université et Ldar – France – isabelle.ludier@cyu.fr

I. MÉTHODOLOGIE

1. *Le logiciel Mathador*

Le logiciel Mathador propose aux élèves des tirages de nombres avec un objectif de construire un nombre cible en utilisant les quatre opérations de base. Chaque opération est associée à un score : 1 point pour une addition ou une multiplication, 2 points pour une soustraction et 3 points pour une division. L'utilisation des quatre opérations dans le même calcul rapporte 13 points. Par exemple, avec le tirage 1-1-6-4-7 $\rightarrow$ 18, différentes solutions peuvent être trouvées, chacune rapportant un score différent selon les opérations utilisées.



Figure 1 – Tirage 1-1-4-6-7 $\rightarrow$ 18

2. *Cadre théorique et problématique*

Cette étude s'appuie sur l'articulation de deux analyses développées dans ma thèse : la première porte sur les procédures des élèves dans le jeu Mathador, et la seconde sur les pratiques des enseignants utilisant ce jeu. Ce dispositif méthodologique a été conçu pour croiser des données quantitatives et qualitatives, offrant ainsi une vision complète des interactions entre pratiques enseignantes et procédures des élèves.

La première analyse débute par une analyse a priori des différentes procédures possibles dans le jeu Mathador. Ces procédures ont été classées en fonction des connaissances nécessaires à leur mise en œuvre, en s'inspirant des travaux de Butlen (2007) sur le calcul mental. Cette analyse a permis de créer un ensemble d'indicateurs pour coder et analyser les procédures utilisées par les élèves. Les data de jeu (traces de l'activité des élèves) représentent plusieurs centaines de milliers de calculs. En identifiant les procédures et les connaissances mobilisées par les élèves, cette approche offre un cadre structuré pour évaluer les compétences mathématiques mises en œuvre lors des activités de jeu.

La seconde analyse porte sur les pratiques des enseignants, étudiées dans le cadre de la double approche et en s'appuyant sur le concept de « i-genre » développé par Butlen (2009). Les trois « i-genres » identifiés reflètent des routines pédagogiques distinctes, influençant directement les stratégies pédagogiques des enseignants. Les deux premiers « i-genres » privilégient des approches individualisées, centrées sur un découpage des tâches, avec peu ou pas de problèmes engageant l'élève dans une réelle recherche. En revanche, le troisième « i-genre » se distingue par l'introduction de problèmes consistants, impliquant une recherche autonome de la part des élèves, suivie de phases collectives de synthèse, d'institutionnalisation et d'activités de réinvestissement. En complément, le concept de double genèse instrumentale (Tapan, 2006 ; Venant, 2015) apporte un éclairage différent sur les pratiques des enseignants en lien avec l'outil Mathador. Pour intégrer un outil comme Mathador dans leur enseignement, les enseignants doivent développer une double compétence : une instrumentation technique, leur permettant de maîtriser le logiciel pour résoudre eux-mêmes des tâches

mathématiques, et une instrumentation didactique, leur permettant de le transformer en un support pédagogique adapté aux apprentissages des élèves.

Cette articulation entre les logiques pédagogiques des enseignants et leur appropriation technique et didactique de l'outil soulève une question centrale : comment ces choix influencent-ils les comportements des élèves face au jeu Mathador ? Cette problématique guide notre étude, en examinant l'impact des pratiques enseignantes sur les procédures et les apprentissages des élèves.

3. *Méthodologie des analyses*

Les pratiques de 9 enseignants (sur une ou deux années) ont été analysées pour un total de 40 séances. Ces enseignants ont été sélectionnés par des partenaires du projet, en veillant à inclure des profils variés (zones favorisées et défavorisées). Les données ont été collectées par le biais d'enregistrements vidéo et d'observations directes des séances, combinant des sessions avec le logiciel Mathador et des activités sans support numérique. La première séance de l'année a été particulièrement étudiée afin de comprendre quelles connaissances étaient dispensées par les enseignants : connaissances portant sur les règles du jeu, les procédures mathématiques nécessaires, ou encore les compétences liées à l'utilisation du logiciel. Deux autres types de séances autour du logiciel ont été observées : des séances où les élèves utilisent le logiciel et d'autres séances, plus rarement observées, créées autour du logiciel où l'enseignant tire les nombres outils et la cible avec des dés ou encore écrit le tirage au tableau.

Cette analyse des pratiques des enseignants avec le jeu Mathador a permis de mettre en évidence trois logiques distinctes d'enseignants, définies comme des approches pédagogiques reflétant leurs priorités : maximisation du score (logique de joueur), exploration indépendante (logique numérique), ou approfondissement des connaissances mathématiques (logique d'apprentissage).

Suite aux deux analyses préliminaires, les trois enseignants les plus représentatifs de ces trois logiques identifiées ont été sélectionnés. Les données des élèves de ces enseignants ont ensuite été analysées avec les indicateurs précédemment codés pour évaluer l'impact des différentes pratiques pédagogiques sur les procédures utilisées par les élèves dans le jeu Mathador.

Dans le paragraphe suivant, je vais exposer les principaux résultats obtenus dans ma thèse concernant les procédures utilisées par les élèves. Je détaillerai également les différentes logiques d'enseignants observées et leur influence sur les procédures des élèves.

II. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1. *Résultats de l'analyse a priori et des data de jeu*

L'analyse a priori des tâches proposées par le logiciel a montré qu'il n'y avait pas de corrélation entre le score dans le jeu et les connaissances mobilisées par les élèves pour résoudre la tâche proposée, ainsi que la possibilité d'utiliser des stratégies de surface pour augmenter le score. Nous explicitons ces résultats avec le tirage $1 - 1 - 4 - 6 - 7 \rightarrow 18$ servant de tirage de référence. Huit chemins permettent de le résoudre :

- Un chemin additif (A) ne mobilisant que des additions et des soustractions, par exemple en effectuant $4 + 6 + 7 + 1$. Cette solution donne un score de 3 points. En effectuant une division par « 1 » à n'importe quelle étape, le score est augmenté de 3 points, sans pour autant utiliser de nouvelles connaissances (autres que multiplier ou diviser par « 1 ») : c'est une stratégie de surface.

- Le chemin en « 6x4 » (Multiplicatif Simple) qui est obtenu en multipliant deux nombres outils, par exemple : $6 \times 4 - 7 + 1$. En effectuant une division par « 1 », un coup Mathador (utilisation des quatre opérations dans le même calcul, il donne un score de 13 points) est obtenu.
- Le chemin en « 6x3 » (Multiplicatif Complexe abréviation (MC)) qui demande de construire le nombre 3 : par exemple en effectuant $(4 - 1) \times 6$.
- Le chemin en « 7x2 » (MC) qui demande de construire le nombre 2 : par exemple en effectuant $(1 + 1) \times 7 + 4$. Cette solution apporte 3 points dans le jeu.
- Le chemin en « 2x9 » (MC) qui demande la création des deux nombres 2 et 9 : par exemple $(6 - 4) \times (7 + 1 + 1)$.
- Les chemins en « 5x5 » : $(4 + 1) \times (6 - 1) - 7$ et en « 3 x8 » : $(4 - 1) \times (7 + 1) - 6$ (MC) qui demandent la création de deux nombres.

Ces chemins ont été hiérarchisés en fonction de leur coût en connaissances, ce qui donne une échelle différente de celle obtenue en classant ces chemins en fonction du score qu'ils procurent dans le jeu. Cette analyse a également mis en évidence la possibilité pour l'élève d'utiliser trois niveaux de connaissances pour résoudre un même tirage. Ces différents niveaux ont été définis en référence à la typologie de Robert (1998) – adapté dans le cadre de cet outil numérique-.

Une connaissance est **activée** lorsque l'élève est amené à la fréquenter et ceci qu'elle fasse ou non partie de ses connaissances préalables. Par exemple, le chemin en « 6x4 » active des connaissances, l'élève multiplie deux nombres outils et le calculateur intégré au logiciel lui fournit le résultat.

Une connaissance est **convoquée** lorsqu'un indice implicite permet de l'inciter à l'utiliser. Par exemple, avec le chemin en « 6x3 », l'élève peut faire le lien entre le nombre cible 18 et le nombre outil 6.

Une connaissance est **disponible** lorsqu'elle est utilisée spontanément. Par exemple, pour emprunter le chemin en « 2x9 » l'élève doit connaître la décomposition multiplicative $18 = 2 \times 9$ pour construire les nombres 2 et 9.

Une conclusion intermédiaire est que le score dans le jeu ne favorise pas l'utilisation des connaissances les plus riches. Cette analyse a priori et cette typologie de connaissances ont également permis de construire des indicateurs permettant d'analyser les données de jeu. Les analyses des données (2 fichiers de 200 000 tirages) ont montré que pour ce tirage plus de 80 % des élèves utilisent des connaissances basiques basées sur les structures additives ou du niveau de connaissances relevant de l'activation en multipliant deux nombres outils.

2. Résultats portant sur les pratiques des enseignants

Trois types de connaissances, correspondant aux trois composantes du jeu Mathador, sont nécessaires à la genèse instrumentale des élèves et des enseignants : les connaissances portant sur les règles du jeu, les connaissances informatiques, et les connaissances mathématiques. Cependant, les enseignants ne disposaient pas des procédures de résolution des tirages, les niveaux de connaissance n'étaient pas explicités ; l'enseignant était donc obligé par lui-même de se faire une représentation des diverses procédures de résolution dans le jeu.

Aucun enseignant observé n'a proposé une synthèse sur les différentes manières de résoudre les tâches. Les conseils les plus fréquemment donnés se limitaient à des recommandations générales, telles

que « multiplier deux grands nombres » ou « essayer de faire une division » ou encore des recommandations portant sur la manière d'augmenter le score.

Les analyses effectuées dans le cadre de la double approche ont montré trois logiques d'enseignants.

Logique de joueur

Cette approche met l'accent sur le score, aussi bien lors du jeu en ligne que durant les phases d'institutionnalisation. Les enseignants adoptant cette logique se concentrent sur l'explicitation de stratégies de surface destinées à maximiser le score sans pour autant inciter à l'utilisation de nouvelles procédures de calcul. Par exemple, l'enseignant J. donne le tirage 3, 1, 5, 4, 8 $\rightarrow$ 11 et demande aux élèves de le résoudre en deux temps : d'abord rapidement, puis en prenant plus de temps pour augmenter le score. Lors de la première phase, deux solutions sont trouvées : « $8+3$ » et « $(8+3) / 1$ », indiquant que la division par 1 est automatisée pour ces élèves. Pendant la deuxième phase, deux coups Mathador sont produits : « $(8+3) \times (5-4)$ », une sophistication de la combinaison additive précédente, et « $(3 \times 5 - 8) + 4 / 1$ », obtenue par la multiplication de deux nombres outils. L'enseignant encourage les élèves en soulignant ces stratégies superficielles : « Ah, excellent ! Il aurait pu me dire quoi ? Il n'y a pas longtemps il m'aurait dit 14 fois 1, il a pensé à diviser, c'est bien. » ou « Souvent on part de la même base et puis on modifie la fin. »

Logique d'apprentissage

Cette approche privilégie l'acquisition de connaissances, notamment en lien avec le calcul mental. Par exemple, l'enseignant A. propose le tirage 2, 3, 5, 8, 17 $\rightarrow$ 50 et commence par inscrire le nombre cible au tableau avant de donner les nombres outils, invitant les élèves à explorer différentes décompositions du nombre cible. Lors de la mise en commun, il ne se focalise pas sur le score mais sur les stratégies utilisées, comme une solution nécessitant la création d'un facteur, issue d'une décomposition multiplicative de 50 : « $(17 + 8) \times 2$ ». L'enseignant interroge l'élève sur sa démarche et l'invite à réfléchir sur d'autres méthodes, telles que « 5 fois 10 » comme une « manière simple d'obtenir le résultat ». Un élève propose alors « $(2 + 8) \times 5$ », qui était la solution recherchée par l'enseignant.

Logique de confiance dans le numérique

Dans cette approche, les enseignants se reposent entièrement sur le logiciel pour les apprentissages, sans interaction directe avec les élèves concernant le score ou les procédures de calcul. Aucune séance spécifique n'est dédiée à Mathador sans le logiciel, l'élève doit effectuer seul le lien avec les apprentissages. Ce type de logique, caractérisé par une absence d'intervention directe de l'enseignant, constitue une référence pour analyser et comprendre les procédures spontanées des élèves.

III. ANALYSE DE L'INFLUENCE DE L'ENSEIGNANT SUR LES PROCÉDURES DES ÉLÈVES

1. Méthodologie

Parmi les trois enseignants les plus représentatifs des trois logiques, deux interviennent en classe de 6^e, tandis que le troisième enseigne en CM1/CM2. Nous avons fait ce choix, malgré la différence de niveau car dans notre panel A. était le seul à montrer une logique d'apprentissage marquée.

- **J.** (logique de joueur), enseignant de 6^e, avec 22 élèves et 4 542 tirages.
- **N.** (logique de confiance dans le numérique), enseignant de 6^e, avec 40 élèves (de deux classes) et 6 694 tirages.

- **A.** (logique d'apprentissage), enseignant de CM1/CM2, avec 28 élèves et 9 100 tirages.

L'analyse des procédures des élèves a permis d'explorer deux aspects principaux : le côté « joueur » des élèves et le côté « apprentissage ».

Le côté « joueur » a été évalué en observant plusieurs indicateurs : le pourcentage de coups Mathador, le score moyen, l'utilisation du multiplicateur x1, l'utilisation de la division par 1, ainsi que le nombre de retours (situations où l'élève reprend son coup, les calculs étant pris en charge par l'ordinateur).

Pour le côté « apprentissage », les indicateurs retenus sont le pourcentage de décompositions multiplicatives des nombres cibles, ainsi que le pourcentage des décompositions multiplicatives du nombre cible utilisées par les élèves dans les différentes procédures.

2. Résultats

Analyse des indicateurs relatifs au comportement de « joueur »

Les indicateurs relatifs au comportement « joueur » des élèves ont donné les résultats suivants :

Tableau 1 – Résultats relatifs au côté « joueur ».

	Coups Mathador (%)	score moyen	x1 %	Div1 %	% utilisation de 1	N/N %	Back %
N.	5,8	9,2	5,6	13,0	16,7	0,3	71,3
J.	15,9	11,0	15,9	33,4	37,0	6,3	127,1
A.	6,1	9,4	3,8	16,6	18,8	3,8	66,3

Les pourcentages sont exprimés en fonction du nombre de calculs effectués par les élèves de chacun des enseignants. « Coups Mathador » correspond au pourcentage de coups Mathador ; « x 1 » correspond au pourcentage de multiplications par 1 effectuées, « div 1 » correspond au pourcentage de divisions par 1 effectuées ; « Utilisation de 1 » correspond au pourcentage d'utilisation du nombre 1 avec une multiplication ou une division ; « N/N » correspond au pourcentage d'utilisation de la division d'un nombre par lui-même ; « Back » correspond au pourcentage d'utilisation de la touche retour qui efface le dernier calcul.

Ces résultats montrent que le côté « joueur » est particulièrement prononcé chez les élèves de l'enseignant J. Tous les indicateurs révèlent une forte recherche du score, ce qui se traduit par un nombre plus important de coups Mathador et un score moyen plus élevé que dans les classes des deux autres enseignants (qui ont des résultats relativement similaires concernant le score moyen, le nombre de coups Mathador, le pourcentage d'utilisation du nombre 1 et l'utilisation de la touche « back »). L'utilisation répétée du nombre 1, souvent utilisé plusieurs fois dans un même calcul, est notable chez les élèves de J., car elle permet d'augmenter le score. Ces élèves créent fréquemment ce nombre 1 pour l'utiliser dans leurs calculs.

De plus, le pourcentage de reprises de calculs (« back ») est deux fois plus élevé dans la classe de J. que dans celle de A., ce qui suggère une utilisation plus intensive de la fonction de calculatrice pour tester différentes solutions. Ces résultats indiquent que les élèves de J. sont particulièrement orientés vers des stratégies qui maximisent le score.

Analyse des Indicateurs Relatifs aux Procédures

Les indicateurs relatifs aux apprentissages des élèves ont donné les résultats suivants :

Tableau 2 – Résultats « côté apprentissages ».

	A	MS	MD	MC	MDC	MI	Rien
N.	58,1	31,8	1,8	6,0	0,4	0,7	1,2
J.	52,9	28,0	8,3	6,0	1,6	1,6	1,5
A.	51,1	30,9	2,8	10,4	0,4	0,8	3,6

Légende : A : procédure additive; MS multiplicative simple avec une multiplication; MD : multiplicative simple (opération division) ; MC multiplicative complexe (au moins un nombre est créé afin d'effectuer une multiplication); MDC (au moins un nombre est créé afin d'effectuer une division); MI somme ou différence de produits ou de quotients ; « Rien » correspond aux situations où le nombre cible est un nombre outil, obligeant l'élève à effectuer un calcul minimal pour valider le résultat. Les résultats sont exprimés en pourcentages. Pour chaque enseignant la référence est le nombre de calculs effectués par ses élèves.

Les élèves de N. effectuent majoritairement des procédures basiques de type A et MS, comparativement à ceux de J. et A. En revanche, les élèves de J. réalisent davantage de divisions. Deux raisons peuvent expliquer cela :

Ils utilisent plus fréquemment la fonction « back » pour rechercher des résultats, et plus de 90 % de ces calculs suivent le schéma $a \times b = c$ puis c / d , ce qui correspond à l'une des rares procédures explicitement enseignées, à savoir « multiplier par un grand nombre puis diviser ». En analysant plus finement les résultats, près d'un tiers des calculs réalisés par les élèves de J. suivent le schéma a / b , puis le résultat est multiplié par b , ce qui est une autre stratégie de type « joueur ».

Le taux de procédures complexes est similaire chez N. et J., mais il est plus élevé chez les élèves de A. Cela peut s'expliquer par une plus grande recherche de décompositions multiplicatives du nombre cible, observée en classe. Ce phénomène est corroboré par le taux de décompositions multiplicatives supérieur chez les élèves de A., comme le montrent les données suivantes :

Tableau 3 – Taux de décompositions multiplicatives

	décompositions multiplicatives du nombre cible
N.	4,2 %
J.	6,1 %
A.	8,5 %

Le pourcentage de « rien » dans le tableau dépend principalement des caractéristiques du tirage et du niveau de jeu auquel les élèves sont confrontés. Dans ma thèse (Ludier, 2022), j'ai montré que les échelles du score et des apprentissages ne sont pas corrélées. Les élèves de A. jouent sur des niveaux de jeu inférieurs à ceux des autres enseignants, ce qui influence la fréquence du « rien » observée dans les résultats.

Ces résultats indiquent que les pratiques pédagogiques influencent non seulement le choix des procédures de résolution, mais aussi le niveau des connaissances mathématiques mobilisées par les élèves.

IV. CONCLUSION

Nous reconnaissons les limites de cette étude, notamment en ce qui concerne l'échantillon restreint d'enseignants et d'élèves, ainsi que les différences de niveaux scolaires : les élèves de A. sont plus jeunes que ceux des deux autres enseignants. Il est raisonnable de supposer que les procédures utilisées diffèrent en fonction de l'âge. Cependant, les résultats montrent que, contrairement à nos attentes, les élèves plus jeunes mobilisent des procédures plus complexes. Nous formulons l'hypothèse que ce résultat est directement lié aux choix pédagogiques des enseignants, qui influencent les procédures adoptées par leurs élèves. Par ailleurs, il serait pertinent d'élargir l'analyse à d'autres jeux pour vérifier si les trois logiques identifiées se retrouvent dans des contextes différents, ce qui permettrait de généraliser les conclusions.

Néanmoins, l'analyse de l'influence des pratiques enseignantes sur les procédures des élèves dans le cadre du jeu Mathador met en lumière des dynamiques pédagogiques et didactiques contrastées. L'effet de l'enseignant apparaît particulièrement saillant sur les indicateurs de type « joueur », plus aisément accessibles et directement associés à une logique de performance. Ainsi, les pratiques centrées sur le score, telles que celles observées chez l'enseignant J, tendent à favoriser le recours à des stratégies de surface, peu coûteuses en connaissances mathématiques. À l'inverse, les pratiques pédagogiques orientées vers les apprentissages, comme celles de l'enseignant A, encouragent des démarches plus élaborées, notamment l'exploration de décompositions multiplicatives du nombre cible, susceptibles de renforcer la structuration des savoirs. Néanmoins, pour les indicateurs relatifs aux apprentissages, les écarts observés sont moins prononcés : les connaissances préalables des élèves constituent un facteur limitant.

Cette étude souligne l'importance du rôle de l'enseignant dans la médiation des apprentissages, même dans un contexte où les outils numériques occupent une place prépondérante. Le jeu, en tant qu'outil pédagogique, offre un potentiel considérable pour motiver les élèves et rendre l'apprentissage des mathématiques plus ludique et accessible. Cependant, l'efficacité de cette approche dépend en grande partie des intentions pédagogiques et des interventions de l'enseignant. En d'autres termes, ce n'est pas l'outil en lui-même qui garantit l'apprentissage, mais la manière dont il est intégré et utilisé dans un cadre pédagogique réfléchi.

Les enseignants devraient être conscients des effets de leurs pratiques sur les processus cognitifs des élèves et s'efforcer de promouvoir des approches qui vont au-delà de la simple recherche du score, ceci pourrait être intégré à une formation continue des enseignants sur la thématique des jeux en mathématiques.

RÉFÉRENCES

- Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique*. Presses universitaires Franche-Comté.
- Butlen, D., Charles-Pezard, M. et Masselot, P. (2009). Pratiques de professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques à des élèves issus de milieux socialement très défavorisés, entre contraintes et marges de manœuvre. Dans A. Kuzniak et M. Sokhna (dir.), *Actes du colloque EMF2009 « Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et formation », 6-10 avril 2009, Dakar, Sénégal* (p. 1084-1095).
https://emf.unige.ch/application/files/8114/5329/9584/EMF2009_GT8_Butlen.pdf
- Ludier, I. (2022). *Évolution des connaissances en calcul mental des élèves du cycle trois et influence d'une pratique régulière du logiciel Mathador sur les apprentissages* [Thèse de doctorat, CY Cergy Paris Université].

- Rogalski, J. (2007). Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant. Dans *Actes du XXVI^e colloque COPIRELEM « La professionnalisation des enseignants de l'éducation de base : les recrutements sans formation initiale », 11-15 juin 2007, Sèvres, France* (p. 45-66).
- Tapan, M. S. (2006). *Différents types de savoirs mis en œuvre dans la formation initiale d'enseignants de mathématiques à l'intégration de technologies de géométrie dynamique* [Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier-Grenoble II].
- Venant, F. (2015). *Instrumentation didactique des futurs enseignants de mathématiques : exemple de la co-variation*.
<https://archipel.uqam.ca/10862/1/VenantCEIEAM.pdf>

CARACTÉRISTIQUES DES EXERCICES PROPOSÉS DANS DEUX CLASSES DE FIN D'ÉCOLE PRIMAIRE AU REGARD DES CONNAISSANCES DES ÉLÈVES

| TEMPIER* FRÉDÉRIC ET KIWAN-ZACKA** MICHELLA

Résumé | Cette étude interroge les exercices proposés lors de l'enseignement de l'ordre des décimaux en 5^e primaire (élèves de 10-11 ans) en France. Nous avons mené une étude de cas auprès de classes visant à documenter le lien entre les connaissances initiales des élèves (avant la séquence) et les caractéristiques des exercices proposés (types de tâches travaillés, niveaux de mise en fonctionnement des connaissances en jeu, niveau de connaissance et caractère objet ou outil). Dans la conclusion nous interrogeons les effets de ces caractéristiques sur les apprentissages possibles des élèves.

Mots-clés : exercices, connaissances, mise en fonctionnement des connaissances, décimaux

Abstract | This study analyses the exercises proposed for teaching the order of decimals in the fifth year of primary school. A case study was conducted with two teachers to document the link between the student's initial knowledge (prior to the sequence) and the characteristics of the exercises proposed, including the types of tasks completed, the levels of application of the knowledge involved, the level of knowledge and the object or tool nature. In the conclusion, the effects of these characteristics on potential students' learning are questioned.

Keywords: Exercises, knowledge, activation of knowledge, decimals

I. INTRODUCTION

Dans l'apprentissage des mathématiques la résolution d'exercices est un passage incontournable qui permet d'approfondir la compréhension et la familiarisation d'une connaissance nouvelle, même dans le cadre d'une pratique routinière (Esmanjaud-Genestoux, 2006). Des exercices plus complexes peuvent permettre, quant à eux, une mise en fonctionnement de ces connaissances nécessitant de les adapter et de prendre des initiatives (Robert, 2008). Ils peuvent également être un point d'appui pour la conceptualisation dans le cas d'ensembles d'exercices organisés (Watson et Mason, 2006). Dans les classes une partie du travail mathématique est consacrée à la résolution d'exercices, quelle que soit la démarche d'enseignement mise en œuvre : explication-application ou observation-compréhension-application ou problème-compréhension-application (Rey, 2001). Dans l'enseignement et la formation des enseignants, il nous semble que le choix des situations d'introduction de nouvelles notions est davantage interrogé que celui des exercices, malgré la place qu'occupe la résolution d'exercices dans les classes. Ils peuvent paraître comme des « objets banals, moins intéressants ; ils demeurent pourtant incontournables » (Esmanjaud-Genestoux, 2006). Lorsque les professeurs de CM2 utilisent des ressources pour préparer leur classe, c'est principalement pour chercher des exercices à proposer en classe (Allard et al., 2022). Plus précisément, 72 % d'entre eux en recherchent fréquemment (« souvent » ou « très souvent »). Parmi les ressources qu'ils consultent, les manuels scolaires restent celles qui semblent privilégiées : les professeurs déclarent s'appuyer fréquemment sur un (pour 53 % d'entre eux) ou plusieurs manuels (pour 45 % d'entre eux) lors de leur préparation (*ibid.*).

* LDAR, CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, Univ. Lille, Univ Rouen – France – frederick.templier@cyu.fr

** LDAR, Université Paris-Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ. Lille, Univ Rouen – France – michella.zacka@u-pec.fr

Cette recherche vise à questionner les caractéristiques des exercices proposés dans les classes. Pour cela nous avons choisi de nous intéresser au thème de l'ordre des décimaux dans une étude de cas auprès de deux classes de 5^e primaire en France (élèves de 10-11 ans). Les « exercices » considérés dans cette étude correspondent aux tâches proposées après l'introduction d'une notion et la synthèse (le cours à retenir). Il peut s'agir d'exercices d'application, d'entraînement, mais aussi de problèmes, de « défis », de préparation à l'évaluation, etc.

II. CADRE THÉORIQUE ET OUTILS D'ANALYSE

Nous utilisons le cadre de la théorie de l'activité en didactique des mathématiques (Robert, 2008 ; Abboud-Blanchard, Rogalski, Robert et Vandebrout, 2017 ; Chesnais, 2021) où l'activité d'un sujet est considérée comme tout ce qu'il développe lors de la réalisation de la tâche. Elle est provoquée par les tâches rencontrées et elle est source de l'apprentissage du sujet.

« On ne peut [...] parler de conceptualisation que si la connaissance visée est disponible pour résoudre un certain nombre de tâches, y compris nécessitant des adaptations non indiquées. Pour y arriver, le moyen est alors un choix de tâches suffisamment variées en termes d'adaptations — associé à des déroulements qui laissent une “part suffisante” de ces adaptations à la charge des élèves » (Chesnais, 2021, p. 58)

Robert (2008) fait une distinction entre une utilisation simple et isolée d'une connaissance « et le fait qu'elle nécessite une (ou des) adaptation(s) c'est-à-dire s'il faut l'appliquer d'une manière différente ou dans un contexte différent de celui dans lequel elle a été d'abord travaillée » (Chesnais, 2021, p. 57).

1. *Différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances dans les exercices*

Pour analyser les exercices, nous nous appuyons sur les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances (NMFC) de Robert (1998, 2008) et de Roditi et Salles (2015) : le niveau technique, le niveau des connaissances mobilisables, le niveau des connaissances disponibles et celui de la compréhension qualitative d'un concept.

Dans le niveau technique les connaissances sont mises en fonctionnement de manière simple et isolée, sans adaptation à mettre en œuvre, dans des exercices d'application immédiate. Par exemple, dans l'exercice 6 de l'annexe 1, les élèves ont à appliquer une procédure d'intercalation d'un décimal entre deux décimaux sans mettre en œuvre d'adaptations par rapport à ce qu'ils ont déjà appris à faire.

Le *niveau des connaissances mobilisables* concerne les exercices qui mettent en jeu des adaptations des connaissances : changement de point de vue, de cadre, de registre, introduction d'étapes de résolution, introduction d'intermédiaires, etc. (Robert, 2008). Par exemple, dans l'exercice 13 de l'annexe 1, les élèves vont être amenés, d'une part, à prendre en compte les premiers chiffres du nombre à compléter et de ceux qui l'encadrent pour en déduire qu'il y a un 0 au rang des centièmes, d'autre part, à s'organiser pour trouver toutes les possibilités (un chiffre entre 6 et 9 au rang des millièmes).

Le *niveau des connaissances disponibles* demande à l'élève de savoir résoudre un exercice sans indication, donc en reconnaissant lui-même les connaissances à utiliser. Ce niveau peut aussi être lié au caractère « inédit » de l'exercice proposé (Grapin et Sayac, 2015) et peuvent s'apparenter à certains des exercices des évaluations internationales, comme celle de PISA par exemple (OECD, 2009).

Enfin, le niveau de la *compréhension qualitative d'un concept* (Roditi et Salles, 2015) concerne les exercices où les élèves doivent témoigner d'une compréhension de ce concept sans avoir à le mettre en œuvre.

2. Exercices-objet et exercices-outil

En nous appuyant sur les travaux de Douady (1986) et de Roditi et Salles (2015), nous faisons une distinction entre les dimensions objet et outil des connaissances. Nous distinguons ainsi les exercices-objet où la connaissance mise en jeu n'est pas à utiliser pour résoudre un problème (il s'agit des exercices classiques d'entraînement hors contexte, comme « comparer 3,5 et 3,31 ») des exercices-outil (ou problèmes) où la connaissance est utilisée pour résoudre un problème (en contexte ou hors contexte). Les deux exercices de l'annexe 1 sont des exemples d'exercices-objet, tandis que ceux de l'annexe 2 sont des exercices-outil relevant des mêmes NMFC que ceux de l'annexe 1 (*technique* pour le premier et *connaissances mobilisables* pour le second).

En couplant les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances et la dimension objet ou outil des exercices on obtient les catégories d'analyse suivantes :

Exercice-objet			Exercice-outil		
Technique	Mobilisable	Compréhension	Technique	Mobilisable	Disponible

3. Catégorisation des exercices selon les types de tâches

Les exercices comprennent une ou plusieurs tâches (au sens de la théorie de l'activité), chacune portant sur un type de tâches (Chevallard, 1992) relevant de l'ordre sur les décimaux : comparer deux nombres décimaux, ranger des nombres décimaux dans l'ordre croissant ou décroissant, intercaler un nombre décimal entre deux nombres donnés, encadrer un nombre décimal par deux nombres entiers ou décimaux et arrondir un nombre donné à l'unité, au dixième ou au centième près (ce dernier type de tâches n'est pas attendu des programmes français actuels).

Dans un même exercice avec plusieurs questions, il peut y avoir plusieurs types de tâches en jeu (par exemple une tâche de comparaison et une tâche de rangement). Notre unité d'analyse des exercices correspond donc aux tâches relatives aux sous-questions des exercices, que nous appelons items. Par exemple, dans l'exercice 6 de l'annexe 1, il y a quatre items (ou tâches) d'un exercice d'intercalation.

4. Niveaux de connaissance des exercices

Les valeurs numériques utilisées dans les tâches sur l'ordre des décimaux influent sur l'activité mathématique de l'élève. Autrement dit, pour réaliser une tâche donnée, l'élève peut mobiliser des connaissances différentes, erronées ou pas, selon les valeurs numériques données. Par exemple, l'élève peut réussir la comparaison de 4,12 et 4,25, en s'appuyant sur des connaissances sur les nombres entiers : $12 < 25$, donc $4,12 < 4,25$. Mais ce raisonnement ne lui permettra pas de réussir la comparaison de 4,12 et 4,5 où il doit mobiliser des connaissances sur les nombres décimaux. Ainsi, en analysant le choix des valeurs numériques des tâches, nous définissons quatre niveaux de connaissances à utiliser par l'élève pour réaliser la tâche. Au niveau 0, la tâche peut être réalisée par la mise en œuvre de connaissances sur les entiers. Le traitement d'un nombre décimal comme deux entiers séparés par une virgule conduit à un résultat correct (comme dans le cas de l'exemple ci-dessus sur la comparaison de 4,12 et 4,25). Au niveau 1, la tâche peut être réalisée par la mise en œuvre *a minima* de connaissances superficielles sur les décimaux. L'élève peut s'appuyer sur certains indices de surface dans l'énoncé le conduisant à un résultat correct. Par exemple, pour comparer 8,7 et 8,08, l'élève peut s'appuyer sur la présence du 0 au début de la partie décimale pour considérer que 8,08 est inférieur à 8,7. Au niveau 2, la tâche peut être réalisée par la mise en œuvre *a minima* de règles ou de techniques apprises sur les décimaux. Par exemple, pour comparer 4,12 et 4,5, le traitement d'un décimal comme deux

entiers séparés par une virgule conduit à un résultat erroné ; la mise en œuvre d'une technique sur les décimaux semble nécessaire pour réaliser la tâche. Au niveau 3, la tâche peut être réalisée par la mise en œuvre de connaissances sur les décimaux¹. Elle nécessite des adaptations de règles ou de techniques apprises sur les décimaux. Par exemple, pour intercaler un nombre entre 4 et 4,1, l'élève peut réaliser la tâche en se ramenant à intercaler un nombre entre 4,00 et 4,10.

III. QUESTION DE RECHERCHE ET MÉTHODOLOGIE

Nous menons une étude de cas dans deux classes de 5^e primaire en France lors de la séquence portant sur l'ordre des décimaux, dans lesquelles les prérequis des élèves sont de niveaux différents. Notre objectif est d'interroger la relation entre les caractéristiques des exercices proposés dans les deux classes (les types de tâches travaillés, les NMFC en jeu, le caractère objet ou outil des exercices et leur niveau de connaissance) et les connaissances des élèves avant la séquence. Nous avons observé six enseignants au cours de notre expérimentation. Pour cette étude nous avons retenu deux classes A et B dont les enseignantes ont des pratiques différentes, tout en ayant une certaine expérience et expertise, reconnue par l'institution. Mme A accueille des étudiants en formation initiale depuis un an dans sa classe, elle a passé la certification pour devenir formatrice l'année précédente de notre expérimentation et elle l'a obtenu l'année suivante. Mme B accueille des étudiants depuis plusieurs années et a obtenu la certification de formatrice l'année précédant l'expérimentation. En nous appuyant sur la notion de dispositif didactique (Rey, 2001) nos observations laissent penser que la pratique de Mme A relèverait plutôt d'un dispositif de type « observation-compréhension-application » alors que pour Mme B il s'agirait plutôt d'un dispositif de type « problème-compréhension-application ».

Tableau 1 – caractéristiques de deux contextes d'expérimentation

Classe	Enseignante	Expérience	Milieu social de l'école	Nombre de séances observées	Dispositif didactique
A	Mme A	20 ans (dont 15 ans en CM2)	Mixte	4	Plutôt « observation-compréhension-application »
B	Mme B	Environ 30 ans (principalement en CM2)	Plutôt favorisé	4	Plutôt « problème-compréhension-application »

Dans la classe A les élèves ont un manuel scolaire dont nous avons déjà analysé les caractéristiques des exercices proposés sur l'ordre des décimaux dans Kiwan-Zacka et Tempier (soumis). Mme B, de son côté, choisit ses exercices dans des ressources variées.

Les enseignantes ont fait passer une évaluation (que nous leur avons donnée) à leurs élèves avant la mise en œuvre de la séquence sur l'ordre. Cette évaluation est composée de 5 exercices (13 items au total) de niveau de mise en fonctionnement technique sur les types de tâches de comparaison, rangement, intercalation et repérage sur une droite graduée. Les exercices se répartissent ainsi selon leur niveau de connaissance : 4 exercices de niveau 0, 3 exercices de niveau 1, 3 exercices de niveau 2,

¹ Pour les tâches de comparaison, nous n'avons pas identifié de niveau 3. Les tâches de rangement pouvant être interprétées comme des tâches mettant en jeu en jeu plusieurs comparaisons (qui demandent donc de s'organiser), nous considérons qu'un rangement mettant en jeu des comparaisons de niveau au plus n ($0 \leq n \leq 2$) relève du niveau $n+1$ (du fait de l'organisation des comparaisons à mettre en œuvre). Ainsi un rangement mettant en jeu au moins une comparaison de niveau 2 sera considéré de niveau 3.

3 exercices de niveau 3. Grâce à cette évaluation, nous souhaitons recueillir des informations sur les prérequis des élèves concernant l'ordre des décimaux, et interroger ainsi la relation entre les exercices proposés et les connaissances des élèves avant la séquence.

Nous analysons les exercices proposés à l'ensemble des élèves de la classe (nous excluons par exemple ceux proposés seulement aux élèves les plus rapides) selon un point de vue global puis selon les NMFC. Pour recueillir les exercices proposés dans les classes, nous sommes allés observer les enseignants pendant les séances sur l'ordre des décimaux. Certains moments où des exercices ont été proposés (sur des parties de séances) n'ont pas été observés mais les enseignants nous ont donné les documents de travail des élèves afin de recueillir les exercices travaillés. Nous avons élaboré un tableau synthétique (annexe 3) du déroulement des séances qui précise les durées des moments d'introduction, de synthèse et d'exercices dans les séances observées, le nombre d'items travaillés dans les moments d'exercices et les types de tâches en jeu. Pour le point de vue global nous analysons la répartition des exercices dans la séquence proposée (nombre d'exercices, temps passé sur les exercices) ainsi que la répartition selon les types de tâche et selon le NMFC (technique, mobilisable, compréhension/disponible).

Pour étudier notre question relative aux connaissances sur l'ordre des décimaux en jeu dans les exercices proposés, nous analysons, pour les items de chaque exercice, le (ou les) type(s) de tâches en jeu et en déduisons la part du travail effectué sur chaque type de tâche. Par exemple la place donnée à l'intercalation dans les différents exercices nous renseigne sur les possibilités de travail sur la densité. Nous analysons également le niveau de connaissance de chaque item ce qui nous permet d'identifier la répartition totale de chaque niveau de connaissance mais aussi la répartition par type de tâche. Nous caractérisons chacun des items avec ce codage :

Tableau 2 – codage des items

NMFC	Technique								Mobilisable								Compréhension/Disponible							
Objet/Outil	Objet				Outil				Objet				Outil				Objet				Outil			
Connaissance	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

L'étude des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances est quant à elle réalisée selon les trois niveaux déjà explicités. Pour chacun des niveaux nous calculons la part des exercices qui relèvent de chacune des deux dimensions objet et outil et nous indiquons la répartition des exercices selon les quatre niveaux de connaissance.

IV. RÉSULTATS

1. Résultats des élèves à l'évaluation initiale

Les résultats de l'évaluation qui a eu lieu avant la séquence sont donnés dans le tableau 3 selon la réussite globale et selon le niveau de connaissance des exercices.

Tableau 3 – résultats des élèves au test passé avant la séquence selon le niveau de connaissance des items

		Classe A	Classe B
Réussite globale		49 %	77 %
Connaissance	Niveau 0	86 %	92 %
	Niveau 1	58 %	81 %
	Niveau 2	29 %	71 %
	Niveau 3	13 %	60 %

Relativement aux résultats des 6 classes observées au cours de notre expérimentation (49,6 % de réussite en moyenne et un écart-type de 16 points de pourcentage), la classe de Mme A peut être qualifiée de niveau initial « moyen » alors que celle de Mme B de niveau « fort ». Les différences entre les deux classes sont notamment marquées par les différences de réussite aux niveaux 2 (29 % vs 71 %) et 3 (13 % vs 60 %) de connaissance. Nous faisons l'hypothèse que les connaissances des élèves sur les décimaux sont suffisamment solides dans la classe de Mme B pour permettre aux élèves de traiter des tâches de comparaison, rangement et intercalation qu'ils n'ont pas travaillées cette année.

2. Point de vue global sur les exercices proposés dans les deux classes

Le tableau synthétique du déroulement des séances en annexe 3 montre que les deux enseignantes consacrent un temps important à la résolution d'exercices. Dans les séances observées, 76,1 % du temps de la séquence dans la classe de Mme A et 53,8 % dans la classe de Mme B sont consacrés à la résolution d'exercices. Nous faisons l'hypothèse que cette différence est liée à la différence de dispositif didactique dans les deux classes : Mme B consacre un temps plus important aux tâches d'introduction que Mme A. Cependant Mme B propose beaucoup d'exercices en dehors des séances observées dans des moments plus courts d'entraînement, ce qui fait qu'au total elle propose plus d'items (288) que Mme A (198). Mme A, quant à elle, propose aussi des exercices en dehors des séances observées, lors de moments qualifiés de « rituels » en début de journée.

Enfin, le tableau 4 laisse apparaître une similarité dans la progression des types de tâches proposée : d'abord la comparaison et le rangement, puis l'intercalation et enfin l'encadrement et l'arrondi. Cette progression correspond à celle que nous avons observée dans notre étude de manuels sur l'ordre des décimaux (Kiwani-Zacka et Tempier, soumis). Les deux enseignantes proposent également des exercices sur la droite graduée (« DG ») pendant la séquence, ainsi que d'autres types de tâches (« AUT »), principalement liés au passage d'une écriture d'un décimal à une autre (lien entre écriture décimale, écriture en unités de numération et écriture fractionnaire).

Tableau 4 – répartition des types de tâches dans les deux classes

	Classe A	Classe B
Comparer	128 (66 %)	117 (41 %)
Ranger	10 (5 %)	15 (5 %)
Intercaler	5 (3 %)	45 (16 %)
Encadrer	8 (4 %)	74 (26 %)
Arrondir	47 (24 %)	37 (13 %)

Dans la classe de Mme A, la tâche de comparaison constitue deux tiers des items proposés (tableau 4), alors que d'autres types de tâches sont très peu travaillés (23 items seulement pour intercaler, encadrer et ranger). Dans la classe de Mme B, même si la comparaison est le type de tâche le plus travaillé, les autres types de tâches sont aussi proposés (de 15 et 74 items). On peut noter que le nombre important d'items de comparaison est en partie lié à l'usage d'un jeu de cartes (bataille) dans la classe de Mme B et d'une fiche à colorier avec beaucoup de nombres dans la classe de Mme A.

Tableau 5 – répartition des types de tâches dans les deux classes

	Classe A	Classe B
Technique	195 (98 %)	219 (76 %)
Mobilisable	3 (2 %)	69 (24 %)
Compréhension/disponible	0 (0 %)	0 (0 %)

Dans les deux classes c'est le niveau technique qui est principalement travaillé (tableau 5) : 98 % des exercices dans la classe A et plus de trois quarts dans la classe B. Aucun exercice de niveau compréhension (exercices-objet) ou disponible (exercices-outil) n'a été proposé aux élèves. Nous n'avons pas d'informations qui nous permettent de dire si de tels exercices ont été travaillés après la séquence sur l'ordre des décimaux.

3. Les exercices relevant du NMFC technique

Les deux enseignantes proposent presque exclusivement des exercices-objet (tableau 6) pour travailler le niveau technique (aucun problème dans la classe A et seulement 2 dans la classe B).

Tableau 6 – caractéristiques des exercices de NMFC techniques

	Classe A	Classe B
Objet	195 (100 %)	217 (99 %)
Outil	0 (0 %)	2 (1 %)

Connaissance	Classe A	Classe B
0	111 (57 %)	43 (20 %)
1	5 (3 %)	40 (18 %)
2	32 (16 %)	104 (47 %)
3	34 (17 %)	30 (14 %)

Les deux classes se différencient par le niveau de connaissance des exercices proposés : majoritairement de niveau 0 dans la classe de Mme A (donc que des connaissances sur les entiers peuvent permettre de résoudre), alors que dans la classe de Mme B la moitié sont de niveau 2 (donc mettent en jeu les connaissances visées sur les décimaux).

4. Les exercices relevant du NMFC mobilisable

Parmi les exercices de niveau mobilisable proposés dans la classe B, un seul relève de l'aspect outil (tableau 7). Les exercices proposés à ce niveau de mise en fonctionnement des connaissances ont un niveau de connaissance plus faible que ceux proposés au niveau technique (aucun de niveau 3 et plus de deux tiers aux niveaux 0 ou 1). Autrement dit, quand le NMFC augmente, le choix des nombres proposés fait que les connaissances à mobiliser sont de niveau de connaissance plus faibles.

Tableau 7 – Caractéristiques des exercices de NMFC mobilisable

	Classe A	Classe B
Objet	3 (100 %)	68 (99 %)
Outil	0 (0 %)	1 (1 %)

Connaissance	Classe A	Classe B
0	2 (67 %)	31 (45 %)
1	1 (33 %)	16 (23 %)
2	0 (0 %)	21 (30 %)
3	0 (0 %)	0 (0 %)

Dans le manuel utilisé dans la classe A il y a quelques exercices de niveau « mobilisable » mais, soit Mme A ne les propose pas, soit elle les réserve aux élèves les plus rapides seulement. Par exemple, un exercice de comparaison de NMFC mobilisable a été proposé lors de la première séance seulement aux élèves les plus rapides ; nous ne l'avons donc pas pris en compte dans nos analyses. Nous notons également que dans ce manuel il y a quelques exercices-outil (problèmes) qui ne sont pas proposés aux élèves.

V. CONCLUSION ET DISCUSSION SUR LES LIENS ENTRE LES CONNAISSANCES INITIALES DES ÉLÈVES ET LES CARACTÉRISTIQUES DES EXERCICES PROPOSÉS

Malgré des dispositifs didactiques et un niveau de classe différents, les caractéristiques des exercices proposés présentent certaines similarités : une part très importante de la séquence est consacrée aux exercices, la même progression de types de tâches est proposée, les exercices relèvent principalement du NMFC technique et ce sont presque exclusivement des exercices-objet qui sont proposés quel que soit le NMFC en jeu. Les différences observées concernent surtout le niveau de connaissance des items proposés qui sont majoritairement : de niveau 0 dans la classe A et de niveau 2 ou 3 dans la classe B. L'importance accordée au niveau technique pourrait s'expliquer par la place prépondérante des exercices d'application directe dans les manuels scolaires français sur l'ordre des décimaux (Kiwan-Zacka et Tempier, soumis).

Nous allons maintenant discuter les liens entre les connaissances initiales des élèves (relevées à l'évaluation proposée avant la séquence) et les caractéristiques des exercices proposés dans les deux classes. Dans la classe A (niveau initial « moyen »), les élèves rencontrent des difficultés dans la résolution des tâches de niveaux de connaissance 2 et 3. Les exercices proposés dans cette classe relèvent presque exclusivement du niveau technique (98 %) et plus de la moitié d'entre eux sont de niveau 0 de connaissance. On peut alors interroger l'effet possible sur l'apprentissage des élèves : est-ce suffisant pour leur permettre de progresser par rapport à leurs connaissances initiales et réussir des tâches de connaissance 2 après la séquence ? La rareté des exercices de niveau mobilisable ne risque-t-elle pas de limiter les acquis des élèves au seul développement d'une maîtrise technique ? Dans la classe B, l'évaluation initiale nous montre que les élèves savent déjà, pour beaucoup d'entre eux, résoudre des exercices sur l'ordre des décimaux (même de niveau de connaissance 2 pour plus de deux tiers d'entre eux). L'enseignante de cette classe propose, elle aussi, un grand nombre d'exercices techniques mais aussi des exercices nécessitant des adaptations. Cette répétition d'exercices techniques pourrait permettre de renforcer les acquis des élèves et permettre à ceux qui étaient repérés en difficulté à l'évaluation initiale de maîtriser une technique. On peut toutefois interroger le poids de ces exercices par rapport à ceux mettant en jeu une adaptation, étant donné le profil de la classe. Les exercices de niveau mobilisable ont, quant à eux, souvent un niveau de connaissance faible : cela pourrait alors réduire l'intérêt des adaptations à mettre en œuvre. Par ailleurs, l'absence du niveau « intermédiaire » pourrait limiter l'apprentissage de capacités de prise d'initiative chez les élèves dans l'utilisation de leurs

connaissances, dans une classe où beaucoup d'élèves maîtrisent déjà beaucoup de connaissances visées dans la séquence dès l'évaluation initiale.

Voilà autant de questions posées par cette étude sur les liens entre les connaissances des élèves et les exercices qui leur sont proposés. Des réponses pourraient être apportées par une étude complémentaire des acquis des élèves après cette séquence, ce qui constitue une perspective de notre travail. Enfin, cette recherche pose également des questions sur la façon dont ces exercices sont effectivement travaillés dans les classes. Par exemple, est-ce que les mises en œuvre proposées en classe permettent-elles d'exploiter ou au contraire limitent-elles les potentialités des exercices proposés ? Cela rejoint des questions souvent abordées dans les recherches utilisant la théorie de l'activité, mais que nous envisageons de spécifier avec nos outils d'analyse des exercices.

RÉFÉRENCES

- Abboud-Blanchard, M., Rogalski, J., Robert, A. et Vandebrouck, F. (2017, mai). *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, n° 18. Pour une théorie de l'activité en didactique des mathématiques. Un résumé des fondements partagés des développements récents et des perspectives. IREM de Paris. <https://hal.science/hal-02111634v1/document>
- Allard, C., Masselot, P., Peltier-Barbier, M.-L., Roditi, E., Solnon, A., Tempier, F. et Charpentier, A. (2022). *Résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, PRAESCO, en classe de CM2 en 2019* [Document de travail] (n°22.E05). DEPP.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chesnais, A. (2021). Comment un ancrage didactique en théorie de l'activité amène à repenser le point de vue de l'élève. Dans H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, L. Coulange, G. Cirade, P. Job, A.-C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider et F. Vandebrouck (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure. XX^e école d'été du didactique des mathématiques, 13-19 octobre 2020, Autrans* (vol. 1, p. 49-79). La pensée sauvage.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Esmanjaud-Genestoux, F. (2006). Le travail personnel au collègue. Partie 2 : Le professeur accompagne le travail personnel des élèves. *Petit x*, (70), 48-72.
- Kiwan-Zacka, M. et Tempier, F. (2024, 4-6 juin). Interroger le choix des exercices dans les manuels : le cas de l'ordre des décimaux en CM2 [Communication]. *50^e colloque de la COPIRELEM, Bonneuil Sur Marne*.
- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2009). *Learning mathematics for life. A view perspective from PISA*. OECD
- Rey, B. (2001). Manuels scolaires et dispositifs didactiques. Dans Y. Lenoir, B. Rey, G.-R. Roy et J. Lebrun (dir.), *Le manuel scolaire et l'intervention éducative : regards critiques sur ses apports et ses limites* (p. 25-40). Éditions du CRP.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.

- Robert, A. (2008). Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. Dans F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 45-57). Octarès.
- Roditi, E. et Salles, F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques. *Éducation & formations*, (86-87), 235-255.
- Sayac, N. et Grapin, N. (2015). Évaluation externe et didactique des mathématiques : un regard croisé. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35(1), 101–126.
- Watson, A. et Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(2), 91-111.

ANNEXE 1

EXEMPLES D'EXERCICES-OBJET EXTRAITS DE MANUELS

6 Recopie et complète avec un nombre décimal qui convient.

$29,5 < 29,6 < 29,7$

a. $1,25 < \dots < 1,26$ c. $12,59 < \dots < 12,61$

b. $7,255 < \dots < 7,265$ d. $28,1 < \dots < 28,2$

13 Trouve toutes les façons possibles de compléter l'inégalité.

$7,205 < 7,2 \bullet \bullet < 7,21$

L'exercice 6 est extrait de Maths Explicites CM2 (Hachette), le 13 de Cap Maths CM2 (Hatier).

ANNEXE 2

EXEMPLES D'EXERCICES-OUTIL EXTRAITS DE MANUELS

10 PROBLEME Après 5 minutes de course, Kim a parcouru 1,4 km, Léna 1,075 km et Marion 1,150 km. Range ces trois sportives de la 1^{re} à la 3^e.



8 Donne le classement de cette épreuve de 100 m féminin.

Concurrentes	Lina	Gloria	Murielle	Myriam	Allison	Tiana
Temps	11 s	10,94 s	11 s et 1 centième	11,1 s	10,87 s	10 s et 9 dixièmes

L'exercice 10 est extrait de Vivre les maths CM2 (Nathan), le 8 de Cap Maths CM2 (Hatier).

ANNEXE 3

TABLEAU SYNTHÉTIQUE DE LA SÉQUENCE SUR L'ORDRE DES DÉCIMAUX MENÉE DANS CHAQUE CLASSE

Classe	Type de séance	Séance observée ?	Moment didactique	Durée (en min.)	Nombre d'items (exercices)	Type de tâches*
A	Séance entière	O	Introduction	15		C
			Exercices	36	12	C/R/I
	Entraînement	N	Exercices		99	C
	Entraînement	N	Exercices		2	R
	Séance entière	O	Synthèse	5		C
			Exercices	37	36	C/R/I/DG/AUT
	Entraînement	N	Exercices		3	R
	Séance entière	O	Introduction	13		E
			Exercices	22	8	E
			Introduction	6		A
			Exercices	14	4	A
	Entraînement	N	Exercices		6	A
	Séance entière	O	Exercices	21	11	A
			Synthèse	6		E/A
			Exercices	13	27	A/DG
B	Séance entière	O	Introduction	30		C/R
			Synthèse	2		C
			Exercices	31	26	C/R
	Séance entière	O	Exercices	11	25	C
			Synthèse	11		C
			Exercices	22	26	C/R
			Introduction	26		DG
			Exercices	17	16	DG
	Séance entière	O	Exercices	43	32	DG
			Introduction	17		I
			Exercices	8	20	I
	Exercices maison	N	Exercices	-	14	C/R
	Entraînement	N	Exercices	-	23	C/R/DG/AUT
	Entraînement	N	Exercices	-	28	C/R/DG
	Séance entière	O	Synthèse	10		DG/E/A
			Introduction	36		E/A
			Exercices	22	54	E/A/I/AUT
	Entraînement	N	Exercices	-	38	E/AUT
	Entraînement	N	Exercices	-	60	E/I/A/AUT

CARACTÉRISATION D'UNE PRATIQUE DITE « EXEMPLAIRE » EN MATHÉMATIQUES AU SECONDAIRE : PROPOSITION D'UNE GRILLE D'ANALYSE

| ALLOUTI* SARRA, SABOYA** MIREILLE ET JEANNOTTE*** DORIS

Résumé | Notre recherche poursuit l'objectif de mieux comprendre ce qui caractérise une pratique « exemplaire » en enseignement des mathématiques. Cette appellation, bien que courante chez les acteurs du milieu scolaire, est absente des travaux de recherches. S'appuyant sur des travaux ancrés dans le cadre de la double approche, nous avons élaboré une grille d'analyse permettant de caractériser la pratique d'une enseignante reconnue comme exemplaire par ses pairs. Ce texte présente les quatre axes de la grille.

Mots-clés : Pratique enseignante, pratique exemplaire, double approche, didactique des mathématiques, enseignement secondaire

Abstract | Our research aims to better understand what characterizes an 'exemplary' teaching practice in mathematics education. While this term is commonly used by practitioners in the field, it is absent from research literature. Based on studies grounded in the framework of the double approach, we have developed an analytical grid to characterize the practice of a teacher recognized as exemplary by her peers. This text presents the four axes of the grid.

Keywords: Teaching practice, exemplary practice, dual approach, mathematics didactics, secondary education

I. CONTEXTE DE L'ÉTUDE

Dans le milieu scolaire québécois, il est courant d'entendre qu'un enseignant a une « pratique exemplaire ». Cette reconnaissance repose largement sur sa réputation au sein de l'école : il est perçu comme un modèle, et l'on dira qu'il est un exemple à suivre, qu'il fait de belles choses avec ses élèves. Ces enseignants sont également mis en avant par leurs pairs, par des conseillers pédagogiques ou encore dans les médias scolaires et locaux, où leurs projets pédagogiques sont valorisés. Les recherches en didactique des mathématiques ne font pas mention de « pratique exemplaire » mais elles suggèrent que certaines approches spécifiques sont à privilégier pour soutenir l'apprentissage. Il s'agit par exemple d'instaurer une culture de collaboration, d'utiliser l'erreur comme levier d'apprentissage et de favoriser des interactions où l'enseignant guide les élèves par des questions, des relances et des discussions favorisant leur raisonnement (Bednarz, 1998 ; Boaler, 2000 ; Goos, 2004 ; Proulx et Bednarz, 2009 ; Bednarz et al., 2019 ; Liljedahl, 2020). Mais quelles sont les caractéristiques d'une pratique exemplaire ainsi reconnue par le milieu scolaire ? Afin d'explorer cette question, nous avons élaboré une grille d'analyse s'appuyant sur le cadre de la double approche (Robert et Rogalski, 2002), visant à décrire et comprendre la pratique d'une enseignante reconnue comme exemplaire par ses pairs et ayant accepté de participer à cette étude. Ce texte présente les quatre axes de la grille appuyés par leurs fondements théoriques. La grille découlant de ces axes ne peut être présentée dans ce texte par manque de place, elle fera l'objet d'une affiche.

* Université du Québec à Montréal – Canada – allouti.sarra@courrier.uqam.ca

** Université du Québec à Montréal – Canada – saboya.mireille@uqam.ca

*** Université du Québec à Montréal – Canada – jeannotte.doris@uqam.ca

II. UNE LECTURE DE LA PRATIQUE ENSEIGNANTE À TRAVERS LA DOUBLE APPROCHE

Afin de saisir la complexité d'une pratique enseignante, nous nous appuyons sur le cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert et Rogalski, 2002), qui l'envisage comme un système global où interagissent diverses composantes interdépendantes. Dans ce cadre, la « pratique enseignante » renvoie à :

« tout ce que l'enseignant ou l'enseignante met en œuvre avant, pendant et après la classe (conceptions activées au moment de la préparation des séances, connaissances diverses, discours mathématique et non mathématique pendant la classe, gestes spécifiques, corrections de productions d'élèves, etc.) ». (p. 506)

Les chercheuses identifient cinq composantes permettant d'analyser l'ensemble de la pratique d'un enseignant. Les composantes cognitives et médiatives (dimension didactique) concernent la planification des contenus et les interactions en classe, tandis que les composantes personnelles, sociales et institutionnelles (dimension ergonomique) renvoient à la vision de l'enseignant, son environnement professionnel et les cadres et exigences institutionnels. Les composantes institutionnelles et sociales peuvent être considérées à certains égards comme des contraintes. Par exemple, les évaluations ministérielles (composante institutionnelle) et certaines dynamiques avec les collègues (composante sociale), qui peuvent nécessiter des ajustements ou des compromis comme dans le choix du matériel pédagogique pour harmoniser les pratiques à l'échelle d'un établissement.

Une caractéristique essentielle qui ressort des travaux s'appuyant sur la double approche est que les pratiques d'un enseignant expérimenté sont stables (Robert, 2007 ; Pariès, Robert et Rogalski, 2008 ; Roditi, 2011 ; Robert et Rogalski, 2015). Dans notre grille, nous cherchons à prendre en considération cette stabilité à trois niveaux d'analyse : global, local et micro (Rogalski et Robert, 2015). Le niveau global correspond aux projets pédagogiques et aux orientations à long terme de l'enseignant. Le niveau local concerne la gestion quotidienne des cours et la mise en œuvre des contenus. Le niveau micro porte sur les automatismes et les routines caractéristiques des pratiques en classe. En outre, les pratiques enseignantes sont cohérentes (Robert et Rogalski, 2002 ; Bednarz et Perrin-Glorian, 2003 ; Roditi, 2011 ; Mangiante-Orsola, 2023), c'est-à-dire qu'elles suivent une logique sous-jacente guidant les choix didactiques et pédagogiques. Cette cohérence traduit le pourquoi des décisions prises dans et hors de la classe, un aspect essentiel que nous cherchons à mettre en évidence. Ainsi, en mobilisant le cadre de la double approche, cette grille permet une analyse approfondie et systémique de la pratique d'un enseignant.

III. PRÉSENTATION ET OPÉRATIONNALISATION DES AXES DE LA GRILLE D'ANALYSE

Notre grille regroupe plusieurs éléments observables permettant d'analyser une pratique enseignante dans sa globalité. Bien que structurée en quatre axes, basés sur les cinq composantes de la double approche, elle ne segmente pas artificiellement la pratique, car ces axes sont profondément interconnectés et s'influencent mutuellement. Son utilisation repose sur une démarche dynamique, qui suit le travail réel de l'enseignant. L'analyse débute par l'axe 1 (planification et structuration des contenus mathématiques) et l'axe 2 (organisation du travail et des interactions en classe) à travers les documents de cours, les entretiens et les observations en classe. Ensuite, les axes 3 et 4 (vision de l'enseignant et contraintes/facilitateurs) sont explorés à travers les entretiens et l'analyse des attentes ministérielles, des programmes scolaires, afin de mieux comprendre les fondements des choix de l'enseignant. L'analyse ne s'arrête toutefois pas là : en effectuant plusieurs allers-retours entre les axes, nous affinons progressivement l'interprétation des choix faits par l'enseignant, tant dans la planification

que dans le déroulement des cours. Entre parenthèses, sont indiquées les composantes sollicitées pour chaque axe, la principale étant soulignée.

1. La planification et structuration des contenus mathématiques (composante cognitive, médiative, institutionnelle, personnelle, sociale) : cet axe vise à comprendre comment l'enseignant planifie son enseignement à court et long terme, en tenant compte des modalités des cours, des mathématiques en jeu et des erreurs attendues. Il s'agit de retracer l'itinéraire cognitif prévu pour les élèves par l'enseignant. L'analyse des tâches s'appuie sur la didactique des mathématiques propre aux concepts en jeu ainsi que sur la catégorisation des tâches proposée par Pariès (2004), qui distingue trois types de tâches correspondant aux trois niveaux de fonctionnement des connaissances définis par Robert (1998). Les tâches simples et isolées (niveau technique) reposent sur l'application immédiate d'une règle ou d'une propriété. Les tâches simples (niveau des connaissances mobilisables) nécessitent une reconnaissance pour appliquer un résultat. Enfin, les tâches complexes (niveau des connaissances disponibles) impliquent un raisonnement en plusieurs étapes, où l'élève doit choisir et adapter les concepts et processus mathématiques pertinents.

2. L'organisation du travail et des interactions en classe (composante médiative, cognitive, personnelle) : cet axe analyse la répartition des rôles en classe, les formes d'organisation du travail et les interactions entre les acteurs de la classe (enseignants, élèves). Le discours de l'enseignant est analysé sous deux angles : les fonctions du discours et les buts illocutoires, tels que définis par Pariès et al. (2008). Les fonctions du discours, réparties en fonctions cognitives (ex. distribution des tâches, structuration, justification) et fonctions d'enrôlement (ex. engagement, encouragement, mobilisation de l'attention), permettent de comprendre comment l'enseignant soutient l'activité des élèves. Les buts illocutoires, inspirés de la théorie des actes de langage (Gilly et al., 1999), révèlent les intentions sous-jacentes des interventions de l'enseignant. Pariès (2004) les regroupe en deux catégories : ceux qui cherchent à mettre l'élève en activité (directif, commissif/directif) et ceux qui indiquent ce que l'enseignant prend en charge (assertif, déclaratif, commissif, expressif). Enfin, les aides apportés aux élèves sont catégorisés selon deux types : les aides procédurales et les aides constructives (Pariès, 2004 ; Pariès et al., 2008). Les aides procédurales guident l'élève en fournissant des instructions supplémentaires, en divisant la tâche en étapes ou en l'orientant vers une méthode de résolution. Les aides constructives, quant à elles, stimulent la réflexion sans modifier la tâche, en proposant un récapitulatif ou une synthèse pour aider l'élève sans lui donner directement la réponse ou la méthode à suivre.

3. La vision de l'enseignement-apprentissage (EA) des mathématiques de l'enseignant (composante personnelle, cognitive) : cet axe s'intéresse à la perception qu'a l'enseignant de son rôle et de l'E-A des mathématiques, en lien avec son parcours, ses valeurs et sa formation. La perception et le rôle de l'erreur dans l'E-A pour l'enseignant est également analysée.

4. Les contraintes et facilitateurs (composantes institutionnelle, sociale, personnelle) : cet axe examine les contraintes institutionnelles et sociales qui influencent la pratique enseignante, ainsi que les facilitateurs qui soutiennent son action.

IV. CONCLUSION

Ces quatre axes souhaitent offrir un cadre structuré pour mieux comprendre comment une enseignante reconnue comme exemplaire exerce son métier. L'objectif n'est pas de définir un modèle unique de pratique exemplaire ni d'évaluer l'exemplarité d'une pratique enseignante. La grille sera mise à l'épreuve lors de l'analyse de la pratique d'une enseignante observée pendant trois semaines en classe, avec des enregistrements vidéo, des entretiens réalisés avant, pendant et après les observations, ainsi

que l'analyse des supports pédagogiques (notes de cours, exercices, évaluations...). Au cours de l'analyse, il est possible que des éléments émergents s'ajoutent à la grille initialement élaborée. En effet, l'analyse des pratiques en temps réel révélera certainement des éléments non anticipés dans sa conception initiale. C'est la grille initiale qui sera présentée dans l'affiche.

RÉFÉRENCES

- Bednarz, N., Maheux, J.-F., Bacon, L., Saboya, M., Lajoie, C. et Thibault, M. (2019). Regards de chercheurs-conseillers pédagogiques sur les interactions en contexte de résolution de problèmes mathématiques en classe. *Éducation et francophonie*, 47(3), 140-162.
- Bednarz, N. (1998). Evolution of classroom culture in mathematics, teacher education and reflection on action. Dans F. Seeger, J. Voigt et U. Waschescio (dir.), *The culture of the mathematics classroom* (p. 50-75). Cambridge University Press.
- Bednarz, N. et Perrin-Glorian, M.-J. (2003). Formation à l'enseignement des mathématiques et développement de compétences professionnelles : articulation entre formation mathématique, didactique et pratique. Dans *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone (EMF2003), 19-23 décembre 2003, Tozeur, Tunisie*. Éditions CNP.
https://emf.unige.ch/application/files/6014/5459/4120/EMF2003_Conference_Bednarz.pdf
- Bednarz, N., Gattuso, L. et Mary, C. (1995). Formation à l'intervention d'un futur enseignant en mathématiques au secondaire. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec (AMQ)*, 35(1), 17-30.
- Boaler, J. (2000). *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*. Greenwood Publishing Group.
- Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(4), 258-291.
- Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwinpress.
- Mangiante-Orsola, C. (2023). Une étude de la cohérence en germe dans les pratiques de professeurs des écoles en formation initiale puis débutants. *Recherches en didactique des mathématiques*, 38(1), 1-15.
- Pariès, M., Robert, A. et Rogalski, J. (2008). Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du Second degré. *Educational Studies in Mathematics*, 68(1), 55-80.
- Pariès, M. (2004). Comparaison de pratiques d'enseignements de mathématiques relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 24(2.3), 251-284.
- Proulx, J. et Bednarz, N. (2009). Quelle formation mathématique pour les futurs enseignants du secondaire ? Un éclairage fondé sur une analyse des recherches. Dans A. Kuzniak et M. Sokhna (dir.), *Actes du colloque EMF2009 « Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et formation », 6-10 avril 2009, Dakar, Sénégal* (p. 129-142).
<https://www.researchgate.net/publication/338083424>
- Robert, A. (1998). Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.

- Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.
- Robert, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse des inférences en formation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(3), 271-312.
<https://revue-rdm.com/2007/stabilite-des-pratiques-des/>
- Roditi, É. (2011). *Recherches sur les pratiques enseignantes en mathématiques : apports d'une intégration de diverses approches et perspectives* [Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7].
- Rogalski, J. et Robert, A. (2015). De l'analyse de l'activité de l'enseignant à la formation des formateurs. Le cas de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire. *Raisons Éducatives*, 19, 95-114.

LE JEU DES BANDES : UNE RESSOURCE COLLABORATIVE POUR L'ÉCOLE MATERNELLE

| ALLARD* CÉCILE

Résumé | L'objectif de cet article est de montrer comment le travail collaboratif avec des enseignants nous a amené à identifier les conditions favorables au processus d'institutionnalisation en classe maternelle (5-6 ans). Au terme de cette recherche qui a débuté en 2019, nous sommes en mesure de montrer comment la dimension collective des apprentissages associée est en mesure de réduire les inégalités scolaires.

Mots-clés : travail collaboratif, construction du nombre, maternelle, situation problèmes, institutionnalisation

Abstract | The aim of this article is to show how collaborative work with teachers has led us to identify the conditions favourable to the institutionalisation process in nursery classes (5-6-year-olds). At the end of this research, which began in 2019, we are able to show how the collective dimension of learning, combined with collective reflection, is able to reduce inequalities at school.

Keywords: Collaborative work, number building, nursery school, problem situations, institutionalisation

I. INTRODUCTION

L'objectif de cet article est de montrer comment le travail collaboratif avec des enseignants nous a amenées à identifier les conditions favorables au processus d'institutionnalisation en classe maternelle (5-6 ans). Le travail au sein du LéA 2 Tem¹ (2019-2023) puis du LéA ECRAINUM² (2023-2026) et du groupe IREM Maths en Mater³ (2020-2026) se développe avec une équipe de 20 enseignants d'école élémentaire, dont 6 enseignantes de maternelle exerçant en Réseau d'Éducation Prioritaire Renforcée⁴. Notre recherche vise à comprendre comment réduire les inégalités scolaires selon l'hypothèse qu'une des clés réside dans un processus d'institutionnalisation dont les étapes sont identifiables et non « improvisées » (Allard, 2015). Le travail collaboratif avec les enseignantes du LéA ECRAINUM s'est construit sur un temps long et en parallèle du groupe IREM Maths en Mater. Nous appliquons dans nos collectifs les quatre principes développés dans Allard, Horoks et Pilet (2022) dont les deux principaux sont : installer un climat de confiance, co-élaborer en produisant une ressource

Nous allons, dans une première partie, présenter notre cadre théorique. Puis, nous montrerons comment le travail collaboratif a participé à la création d'une nouvelle situation didactique. Enfin nous montrerons comment la force du travail collaboratif participe à la création d'un cercle vertueux susceptible de réduire certains écarts entre les élèves issus de milieux favorisés et défavorisés.

* LDAR, UPEC – France – cecile.allard@u-pec.fr

¹ LéA 2 TEM : LéA 2 territoires en mathématiques. <https://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/anciens-lea/2tem-reseau-decoles-de-champigny-94-et-beynes-78>

² LéA Ecrire raisonner avec les nombres. <https://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/ecrire-et-raisonner-avec-les-nombres-ecrainum>

³ <https://irem.u-paris.fr/maths-en-mater>

⁴ REP+ : réseau d'éducation prioritaire renforcée. Les REP regroupent les collèges et les écoles rencontrant des difficultés sociales plus significatives que celles des collèges et écoles situés hors éducation prioritaire. - Les REP+ concernent les quartiers ou secteurs isolés qui connaissent les plus grandes concentrations de difficultés du territoire

II. CADRE THÉORIQUE

1. *Réduire les inégalités en proposant un contenu consistant*

L'entrée dans le travail collaboratif porte sur la reprise et l'analyse des situations proposées par l'équipe d'enseignants et de chercheurs du COREM⁵ (1973-1998) pilotée par Guy et Nadine Brousseau pour des élèves de Grande Section⁶ (5-6 ans).

Nous rappelons que la théorie des situations didactiques en mathématiques (TSD) (Brousseau, 1998)⁷ s'est construite selon l'hypothèse que l'élève construit des connaissances en se confrontant à des situations problématiques qui lui renvoient de l'information sur ses actions, ce qui lui permet d'adapter ses connaissances et ses actions pour les situations ultérieures (Hersant, 2022, p. 5). La TSD s'est également construite en tenant compte de la dimension collective et culturelle des apprentissages en ciblant un élève type dit « générique » ce qui est souvent source de difficultés lorsque les enseignants de REP+ mettent en place les situations créées.

La TSD a développé cinq situations pour assurer des conditions favorables à l'émergence d'une nouvelle notion : la dévolution, les situations d'action, les situations de formulation, les situations de validation et l'institutionnalisation. La dévolution et l'institutionnalisation étant davantage du côté de l'enseignant. Il choisit les situations, pense et prépare le milieu dans lequel les élèves vont agir, chercher, formuler et organise son enseignement pour exposer les connaissances et faire les liens entre connaissances anciennes et nouvelles. Margolinas (2021, p. 5) à ce propos explique

« Par exemple, à l'école maternelle, le professeur qui souhaite construire le savoir “cardinal d'une collection finie montrée” en s'appuyant sur une séquence de situations que nous appellerons “séquence voiture-garage” (Briand et al., 2004) doit d'abord construire avec les élèves un enjeu relatif à une collection de voitures et une collection de garages : pouvoir faire la correspondance terme à terme entre une collection de voitures et une collection de garages sans qu'il reste une voiture sans garage ou un garage sans voiture. Ce faisant il construit un milieu matériel (en référence à la structuration du milieu, voir Brousseau [1986b] et Margolinas [2004]) et un enjeu qui pourront rester stables alors que les situations vont changer (situations d'action, de formulation, de validation et divers changements de variables), ce qui va produire une évolution des connaissances ».

Le collectif auquel nous appartenons et au sein duquel nous travaillons est constitué d'enseignantes expérimentées, formées, soucieuses de réduire les inégalités scolaires. Travaillant en REP+, elles cherchent à s'éloigner d'une vision essentialiste des « élèves de REP+ ». Elles indiquent vouloir maintenir un niveau d'exigence scolaire élevé, en réfléchissant sur ce qui est nécessaire d'enseigner pour que les élèves apprennent. Pour autant, leur détermination est mise à rude épreuve à l'annonce des résultats des évaluations nationales d'entrée en CP, les résultats ne reflètent pas d'après elles ce que leurs élèves savent faire.

Les trois premières années de notre travail collaboratif, les enseignantes ont été formées à mettre en place ces cinq situations dont nous faisons l'hypothèse qu'elles sont des conditions pour assurer des apprentissages en mathématiques et par conséquent améliorer les résultats des évaluations nationales. Lors de ces trois premières années, nous avons repris l'ensemble des situations élaborées au COREM⁸ en ayant une vigilance particulière sur la validation et l'institutionnalisation. Nous avons

⁵ Centre pour l'Observation et la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

⁶ <http://ddm.joel.briand.free.fr/>

⁷ <https://ardm.eu/qui-sommes-nous-who-are-we-quienes-somos/guy-brousseau/>

⁸ Corem : COREM : Centre pour l'Observation et la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (archives vidéos du COREM disponibles sur <http://visa.ens-lyon.fr/visa>, archives « papier » disponibles au *Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas Guy Brousseau*, <http://www.imac.uji.es/CRDM/>)

également mis l'accent sur le rôle de l'écrit pour mémoriser ou garder une trace de l'activité, puis de l'écrit pour « penser » afin de réduire l'impact de la matérialité des apprentissages (Hersant, 2022)

Parallèlement, nous élaborons une nouvelle situation d'apprentissage, le jeu des 3 bandes, qui visait également la construction du nombre à l'école. Les différents temps de regroupement portent également sur l'étude de courts moments de classe, dans lesquels nous cherchons à débusquer ce qui résiste aux élèves ce qui paraît difficile aux enseignants.

2. *La construction du nombre à l'école maternelle : une première approche des mathématiques*

La construction du nombre à l'école maternelle est l'objet de l'enseignement et de l'apprentissage des élèves sur les trois années du cycle 1. Hersant (2022) pose la question des conditions pour faire des mathématiques à l'école maternelle. Elle rappelle que c'est

« le lieu de la première rencontre des élèves avec l'école et, en particulier avec les apprentissages mathématiques. [...] cette école est parfois aussi déjà un lieu de création des premières inégalités scolaires, y compris dans les apprentissages mathématiques ».

Par ailleurs, Hersant (*ibid.*) ajoute que les objectifs des programmes français sont si généraux qu'ils n'aident pas à anticiper ce que l'on peut dire aux élèves pour les aider en cours d'activité, ni à prévoir ce que l'on peut dire, de façon réaliste, à un élève de maternelle sur ce qu'il est en train d'apprendre et qui pourra lui être utile pour les situations ultérieures.

Au regard de l'antériorité de ces travaux, nous devons dans le LéA ECRAINUM et dans le groupe IREM « Maths en Mater » prendre en considération les difficultés à formuler des savoirs à l'issu de tâches réalisées avec du matériel : la décontextualisation est alors très difficile à cause de la matérialité des apprentissages et du jeune âge des élèves. Alors, nous comprenons d'autant mieux le besoin des enseignants de choisir des situations concrètes, car elles semblent faciliter les formulations des savoirs, même si elles sont souvent trop contextualisées. Des phrases comme « tu as mis trois voitures bleues et trois voitures jaunes, il y a autant de voitures sur chaque parking, il y en a la même chose, la même quantité, c'est pareil ! » semblent plus faciles à formuler, plus proche du langage « naturel » que « tu as mis la même quantité, le même nombre d'objets dans chaque collection ». Pour construire le nombre à l'école, les élèves sont amenés à constituer des collections. D'un point de vue institutionnel, l'enseignement des entiers naturels est présenté – au moins depuis les programmes de 1947 – à partir de collections d'objets. Robert (1972, p. 17) souligne que « les objets de l'ensemble doivent être distincts, qu'ils n'ont pas à être tous pareils, de même nature, et qu'il est souhaitable d'utiliser des ensembles d'objets bien différents et point trop intéressants affectivement. ». De plus, la tâche, présente dans les programmes, qui consiste à construire deux ou trois collections ayant autant d'objets nécessite de construire des collections équipotentes pour lesquelles ni la nature des objets ni la répartition de ces objets ne sont des critères pertinents.

D'un point de vue mathématique, construire les entiers naturels,

« c'est mesurer cet objet "collection", mais "la collection" n'est pas un objet matériel. C'est en soi un objet de la structure mathématique et le domaine de ces objets est ce qui permet d'assigner une structure d'espace mesurable. Nous dirons que si le sujet ne dispose pas de moyen de déterminer l'objet "collection", il ne peut en concevoir un mesurage ». (Briand, 1999, p. 12).

C'est pourquoi des tensions peuvent exister entre la compréhension du concept et les moyens matériels mis en œuvre.

La suite de l'article montre comment, grâce au travail collaboratif, nous avons pu mettre au point une situation-problème selon des cycles itératifs en accompagnant les enseignants dans leurs formulations de consignes, d'explications ou bien d'expositions de connaissances.

III. CO-CONSTRUIRE UNE NOUVELLE SITUATION : POINT DE DÉPART DE LA COLLABORATION

Un des moyens pour assurer qu'il y ait un travail effectif entre chercheurs et enseignants est d'élaborer ensemble une ressource, ici une nouvelle situation visant la construction du nombre. Nous avons présenté aux enseignantes comment nous pouvions travailler selon des cycles itératifs sur plusieurs années en testant et ajustant les propositions dans plusieurs classes. Il fallait alors déterminer une première tâche à explorer. Nous⁹ avons retenu la proposition d'une d'entre elles. Celle-ci avait pour rituel de demander aux élèves de sa classe de se placer sur les 3 bancs du « coin regroupement » de manière à ce qu'il y ait autant d'élèves sur chaque banc. Dans cette tâche, l'enseignante ne maîtrisait pas le nombre d'élèves présents, se posait alors la question du reste (élève(s) sans place assise), quand le nombre d'élèves n'était pas un multiple de 3. De plus, l'enseignante se confrontait à des résistances d'élèves qui ne souhaitaient pas s'asseoir à côté d'un camarade ou pas au milieu d'un banc... Mais ce problème correspond à des critères qui sont souvent mis en avant par les enseignants : c'est un problème concret, qui relève de la vie courante de la classe, plus à même de donner du sens aux apprentissages mathématiques. Résoudre ce problème implique pour de jeunes élèves (5-6 ans) de longs temps de concertation qui dépassent les enjeux mathématiques.

L'analyse des difficultés des élèves par l'enseignante a conduit le collectif à préférer laisser de côté le critère « vie courante de la classe » et à proposer une situation équivalente avec des bandes de papier, qui sont comme des « bancs », et des voitures pour réduire la dimension émotionnelle du placement des élèves. Nous avons assez rapidement abandonné les petites voitures car les élèves voulaient ranger par exemple les voitures rouges sur les parkings rouges et n'utilisaient pas les voitures qui n'avaient pas un parking avec la couleur correspondante. L'abandon rapide du « problème de la vie courante », source de malentendus, associé à une tâche qui a un intérêt dans la construction du nombre, a contribué à établir un premier consensus au sein du groupe.

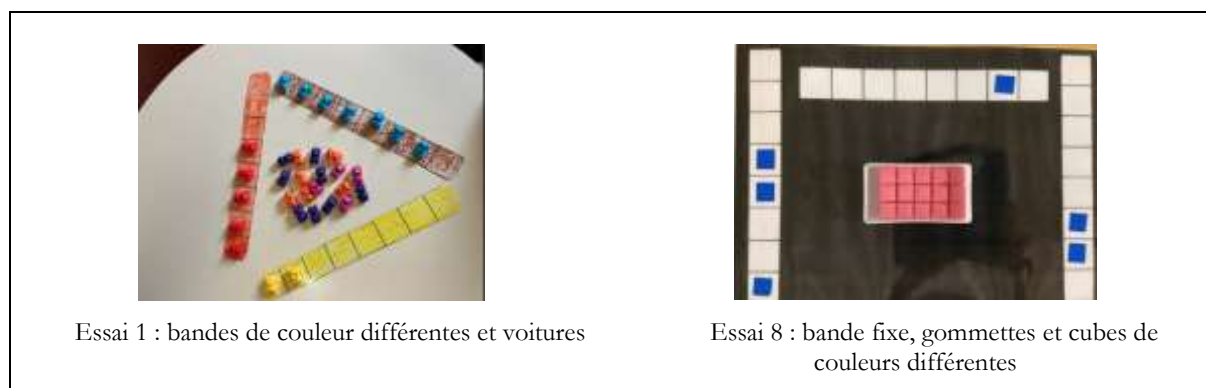


Figure 1 – Évolution du choix du matériel dans le jeu des trois bandes

Du point de vue des apprentissages mathématiques, nous voyons des potentialités offertes par ce jeu pour la construction du nombre. En effet, pour partager équitablement une collection en trois sous-collections, deux procédures sont envisageables :

⁹ « Nous » indique les chercheuses et les enseignantes, nous sommes un collectif genré féminin.

- Une procédure de distribution puis une comparaison terme à terme de tous les éléments des sous-collections ;
- Une procédure de dénombrement et de comparaison des cardinaux.

D'autres variables rendent ce jeu évolutif : présence ou non d'un reste, partage déjà amorcé et il s'agit alors de prendre en compte ce qui a été distribué et de poursuivre le partage...

Ainsi, ce problème entraîne les élèves à résoudre un premier problème de partage en appui sur des procédures en cours de construction. Nos pistes de travail se sont alors précisées.

1. Dévolution et situation d'action : ajuster les choix didactiques

En nous appuyant sur les propos de Margolinas (2021), nous rappelons les conditions pour qu'une situation soit une situation d'action : « Toute situation qui implique de prendre des décisions en relation avec un milieu et un enjeu est une situation d'action, en ce sens ». La situation problème que nous avons créée implique des prises de décisions en relation avec le milieu et un enjeu, c'est ce que nous allons illustrer ci-dessous.

Les six enseignantes de notre collectif sont suffisamment expérimentées pour assurer une paix scolaire (Pézard, 2010) pilotée par les apprentissages ce qui assurent que tous les élèves s'engagent dans la tâche¹⁰.

Le milieu favorable à la dévolution et à la situation d'action a été discuté et nous nous sommes accordées sur : la présentation en collectif du matériel sur une petite table, sur le contexte (des parkings et des voitures sur la mesure de la collection (plus que 15 voitures), sur le nombre de places de parking (8 par bandes) et sur la consigne « avoir autant de voitures dans chaque parking ». Ces choix sont le résultat d'un consensus, les discussions les plus vives portant sur « Faut-il donner un contexte de la vie courante ? », sur l'utilisation des couleurs pour désigner les bandes, sur les couleurs des voitures, sur la quantité de voitures à partager et sur la mobilité des bandes. Nous avons choisi des bandes amovibles pour favoriser la correspondance terme à terme et rendre alors possible la validation. Malgré plusieurs essais les élèves n'utilisaient pas la mobilité des bandes pour comparer « visuellement » ou utiliser la « longueur » des cases pleines. Un de nos premiers étonnements réside dans le fait que les élèves répondent non à la question « Ya-t-il autant de voitures sur chaque bande ? » même lorsque il y avait la même quantité de voitures sur chaque bande (Tableau 2 ci-dessous)

Après de longues discussions, nous analysons leurs réponses ainsi : le mot autant est souvent utilisé comme synonyme de pareil, voire « même chose », or les voitures ne sont pas identiques et ne sont pas pareilles. Le collectif prend alors davantage en compte l'importance de préciser, même pour de jeunes élèves, le langage mobilisé. Ainsi, des formulations comme « autant d'objets, la même quantité voire le même nombre » seront privilégiées plutôt que « pareilles, la même chose »

¹⁰ Lors de nos observations sur 3 ans et dans 6 classes, nous n'avons jamais observé d'élèves qui ne s'engagent pas dans la tâche.



Les élèves répondent non à la question « y a-t-il autant de voitures sur chaque bande ? »



Les élèves répondent non à la question « y a-t-il autant de voitures sur chaque bande ? »

Figure 2 – les premiers essais du jeu des bandes : bandes amovibles

2. *Analyse de la mise au point de la situation à partir de l'observation de la situation d'action : modification des variables de la tâche*

Les élèves ont procédé aux premiers partages. Nous nous attendions à des formulations comme « Il y a autant de voitures sur la bande bleue que sur la bande rouge ». Mais les bandes colorées ont induit les élèves à faire coïncider la couleur du parking et celle des voitures. C'est pourquoi nous avons d'abord proposé des voitures de couleurs différentes que les bandes. Nous avons discuté de la pertinence de proposer des bandes blanches et des objets tous identiques pour éviter de faire ces écueils mais face à cet obstacle qui résistait, nous avons préféré travailler sur cette difficulté persistante. Une autre procédure guidée par les couleurs a émergé : regrouper des voitures d'une même couleur, indépendamment de la quantité. Les élèves explicitaient ainsi leur choix, ils ont mis « les mêmes voitures sur chaque parking ». Le terme « même » souligne ici le critère auquel ils étaient attentifs. Nous avons une fois de plus la preuve que les élèves donnaient à « autant que » le sens de « avoir la même caractéristique physique ». Nous avons alors échangé sur le poids de la matérialité dans nos situations et sur les difficultés à faire comprendre aux élèves le sens d'une relation entre des collections avec des mots du langage ordinaire. Les enseignantes ont alors pris conscience de l'influence de ce qu'elles disent sur les procédures des élèves et de l'importance d'anticiper – même lors des phases d'action – ce qui peut être formulé pour guider ou freiner (malgré elles !) leurs élèves.



Photographie 1 – Voitures rouges sur parking rouge, voitures jaunes sur bande jaune, voitures bleu turquoise sur bande marron. Les autres, non distribuées.

3. *La situation d'action modifiée : des contraintes à expliciter davantage*

Nous avons également été témoins de stratégies gagnantes pour les élèves alors qu'elles ne participaient pas, selon nous, à la construction du nombre comme :

- remplir toutes les cases quand le nombre de jetons le permet.
- Se limiter à des petites quantités (de 1 à 3 jetons) placées de la même façon sur les bandes.

Ces stratégies, bien que minoritaires, nous ont conduites à proposer moins de jetons que de cases (moins de 24) et de positionner des gommettes (qui sont à considérer comme des jetons) pour éviter une comparaison pilotée par la disposition spatiale plutôt que par le dénombrement.

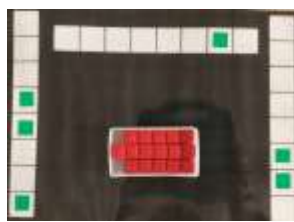
La consigne se précise et devient : « Vous devez placer autant de cubes, la même quantité sur chaque bande » et précise « attention vous devez placer le plus de cubes possibles ». Une fois cette situation largement travaillée en classe, le collectif s'accorde également sur ce qu'il y a à institutionnaliser en pointant ce qu'il y a à apprendre et ce qui n'est pas essentiel : « pour réussir, il faut qu'il y ait autant de cubes, le même nombre de cubes, ce qui compte c'est la quantité ce n'est pas la couleur des objets ou des bandes ».

L'activité des 3 bandes amovibles de couleur a donc été conservée dans la suite du projet comme préliminaire à la situation du jeu des trois bandes. La situation construite du jeu des trois bandes a pour objectif d'utiliser les différentes fonctions du nombre (dénombrer, comparer, anticiper) toute l'année en jouant sur les variables didactiques suivantes :

- Les bandes amovibles ou collées
- La disposition des gommettes (image 2)
- Le nombre de bandes (3 et 4 jusque 6 bandes et 24 pions, 6 bandes 30 pions)
- Résultat d'un partage avec reste ou pas (image 1)
- Le nombre de couleurs
- Le nombre de pions (et qu'il soit inférieur aux nombres de cases pour éviter le remplissage).
- Le partage pris en charge par les élèves ou bien déjà réalisé et il faut ajuster (image 3)



Cas 1 : sans gommette et 12 jetons (pas de reste)



Cas 2 : Gommettes (6) placées et 16 jetons, reste égal à 1



Cas 3 : Gommettes et cubes placées : déplacer des jetons pour qu'il y ait autant de pions sur chaque bande

Figure 3 – les situations d'action analysées en regroupement

Les observations en classe et les nombreuses vidéos ont participé à l'identification de procédures et des connaissances à mobiliser pour réussir la tâche. Nous décrivons ici les procédures les plus courantes.

Dans le cas 1, assez peu d'élèves distribuaient un à un les jetons sur chacune des 3 bandes. La plupart d'entre eux posent la même quantité (3 ou 4) sur chaque bande¹¹, puis complètent. Ils comptent et recomptent chacune des collections. Le rôle de la mémoire ici n'est pas négligeable puisqu'ils doivent retenir la mesure de la quantité pour la bande 1, puis la 2 (comparer), puis la 3. Les élèves sont très persévérants et comptent et recomptent jusqu'à épuisement des cubes jaunes.

¹¹ Attention, les cubes ne sont pas proposés « rangés » mais en vrac, la photographie a été faite pour l'article et nous avons laissé les cubes bien rangés !

Dans le cas 2, deux procédures principales avec des variantes :

- L'une consiste d'abord à rééquilibrer chacune des bandes soit en ayant 3 pions sur chaque bande mais aussi 4 (si l'enfant pense qu'il faut distribuer des pions sur chaque bande), puis la procédure du cas 1 émerge. La présence d'un reste est gérée soit en le posant sur une bande (donc il n'y en a pas autant), soit en le cachant (!), soit en demandant à l'enseignant si c'est possible.
- L'autre consiste à distribuer des cubes en remplissant les trous entre les gommettes, si bien qu'ici, puisqu'il y a 5 pions sur la bande de gauche, les élèves mettent 5 pions sur la bande de droite puis 5 sur la bande du haut. Ils comptent (ou pas) et ajustent avec le reste des cubes à placer.

Dans le cas 3, les pions sont déjà placés comme après un essai réalisé par un élève. La tâche consiste à déplacer des pions pour répondre à la question analogue « *déplacez les pions pour qu'il y ait autant de jetons sur chaque bande* ». Une contrainte supplémentaire a été ajoutée : le nombre de déplacements des pions est limité, ici, à trois. Cette variante va davantage orienter le travail vers la validation.

Les enseignantes proposent alors toute l'année le jeu des 3 bandes en jouant sur les cas et les variables didactiques.

4. *Situations de formulation et d'institutionnalisation : formuler des connaissances pour justifier ou pour expliciter sa démarche, exposer des connaissances.*

Dans les classes maternelles ordinaires, en France, les enseignants demandent, dans le meilleur des cas, à leurs élèves, ce qu'ils ont appris lors de leurs ateliers. Les élèves répondent souvent en exposant ce qu'ils ont fait. À la question qu'avez-vous appris en jouant au jeu des bandes, les élèves de l'année 1 (3 ans) répondent « on a joué avec des pions, on a perdu ou on a gagné », ou bien « on a appris à compter ». Leurs réponses ne sont pas étonnantes...

Margolinas (2021) cite Brousseau (1998, p. 59) qui explique :

« Au sujet de l'institutionnalisation, l'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle. (ibid., p. 60) L'élève ne distingue pas d'emblée, dans la situation qu'il vit, ce qui est d'essence a-didactique et ce qui est d'origine didactique. Il ne distingue pas aisément, nous l'avons montré, dans les connaissances qu'il rencontre en situation, celles qui sont visées par le professeur et celles qui ne le sont pas ».

L'un des enjeux du processus d'institutionnalisation est de s'appuyer sur l'activité des élèves pour produire des textes contribuant à une formulation des savoirs par les élèves lors d'autres activités, décrivant alors un cercle vertueux : les élèves produisent des connaissances en acte, l'enseignant pointe les connaissances visées, écarte les malentendus, les élèves identifient les savoirs qui seront alors réinvestis, tout d'abord dans des situations proches.

Afin de favoriser ce cercle vertueux, nous avons eu l'idée d'utiliser de courts films d'élèves lors de la situation d'action, ou des photos des résultats d'une action. C'est ainsi que Luca est amené à commenter la production d'un des ses camarades et de la corriger sans pour autant déplacer des pions. Lors de la situation de formulation, Luca reprend des termes utilisés lors des différentes phases d'institutionnalisation.



Photographie 2 – Luca au tableau : illustration

Dans l'extrait suivant qui reprend les échanges entre un élève et son enseignante, nous avons noté en gras tous les mots que Luca reprenait de phases antérieures. Luca dénombre les pions de chaque bande, mémorise les quantités et les compare. Il est ensuite capable, avec le soutien de son enseignante, de mettre des mots sur ses procédures. Il avait également noté que son enseignante proposait plusieurs formulations « 5 c'est plus que 6 et 6 c'est moins que 5, 6 c'est un de plus que 5. », il est probable qu'il utilise ces formulations qui correspondent au déroulement de sa pensée. Enfin, il valide son résultat en rappelant qu'après le déplacement, il y a la même quantité sur chaque bande.

- **Florence** : A-t-on autant de pions sur chaque bande ?
- **Luca** : (dénombre les pions) Un, deux, trois quatre cinq (bande de droite). Un deux trois quatre (bande du haut) Un deux trois quatre cinq six (bande de gauche). Quand je mets mon doigt sur du rouge, ça fait du rouge sur mon doigt.
- **Florence** : donc il y en a 5, 4 et 6. La question est « est ce qu'il y en a assez sur chaque bande »
- **Luca** : non,
- **Florence** : fais-moi une phrase
- **Luca** : Non il n'y **en a pas autant sur chaque bande.**
- Il y en six ici, moins ici, et moins ici (en montrant les bandes), **cinq c'est moins que six.**
- **Florence** : Alors comment vas-tu faire ?
- **Luca** Attends ce n'est pas ce que je voulais dire 5 **c'est plus petit que 6**, 4 **c'est plus petit que 6** et 6 **c'est plus grand que 4.**
- **Florence** : Alors qu'est-ce qu'on pourrait faire pour en avoir autant sur chaque bande ?
- **Luca** : On enlève n'importe lequel de ces pions (en montrant la bande 6).
- Florence d'accord, qu'est-ce qu'on fait avec ce pion ?
- On le met sur cette bande (en montrant la bande du 4) et ça fera **autant** sur chaque bande. 5 ici, 5 ici et 5 ici.
- **Transcription 1** : échanges entre Luca et son enseignante lors d'une situation de formulation.

IV. MISE EN RELATION ENTRE MODALITÉS DE TRAVAIL COLLABORATIF ET LES RÉSULTATS

Les résultats auxquels nous sommes parvenues dans cette recherche sont intrinsèquement liés aux conditions du travail collaboratif. Trois facteurs caractérisent le travail mené : une analyse de l'activité des élèves à partir d'observations et de captations vidéos, un appui sur les productions des élèves pour identifier des axes de travail en lien avec les pratiques enseignantes, la possibilité d'un travail sur du temps long (ici 5 ans). En effet, la réalisation des mêmes séances dans les différentes classes, sur plusieurs années consécutives, a été un levier important pour objectiver aussi bien la récurrence des processus observés que les variations sur lesquelles ont joué les enseignantes pour les dépasser. Il a été possible, collectivement, de construire et tester nos hypothèses sans frein et ainsi de proposer des tâches robustes et d'oser des institutionnalisations sur les savoirs plutôt que sur des savoirs être ou savoir-faire.

V. CONCLUSION

Depuis 2018, nous nous attachons à proposer des tâches pour lesquelles les réponses des élèves ne sont pas immédiates. Nous avons dû discuter et expliquer souvent aux enseignantes certaines des situations proposées par l'équipe entourant Brousseau. Plusieurs décennies après leurs élaborations, ces situations et celles que nous avons créées sont des leviers forts pour que les élèves apprennent. Certaines données révèlent que ces apprentissages constituent bien des moyens de réduire les inégalités scolaires.

Les résultats obtenus par les élèves du LéA ECRAINUM aux évaluations nationales à l'entrée du CP indiquaient en effet une très forte progression entre 2022-2023 et 2023-2024 et 2024-2025 (les cohortes qui étaient en grande section de maternelle les années précédentes), confirmée par le point d'étape au mi-CP (annexe 1) notamment pour l'item « résolution de problèmes ». Bien qu'en REP+, les élèves ont obtenu de meilleurs résultats que la moyenne nationale, tous milieux confondus. Même si nous pouvons être critiques envers les évaluations nationales, les résultats indiquent une réelle réduction des inégalités d'apprentissage. Et cette réduction induit, à son tour, de nouveaux effets sur les pratiques, dans un cercle vertueux. En effet, les enseignantes de CP ayant accueilli la cohorte des GS de notre étude témoignent d'un ensemble de caractéristiques nouvelles de ces élèves, comme une plus grande facilité à rentrer dans les situations de résolution de problèmes ou à argumenter pour comparer leurs procédures. Elles déclarent, en outre, que cela les amène à proposer des tâches complexes qu'elles auraient évitées les années précédentes, et qu'elles prennent conscience de l'importance des phases d'institutionnalisation inscrites dans un processus. Ce travail collaboratif piloté par une analyse des activités des élèves a convaincu le collectif de la nécessité d'être formé à exposer des connaissances aux élèves et à proposer des situations de formulations selon des cycles itératifs.

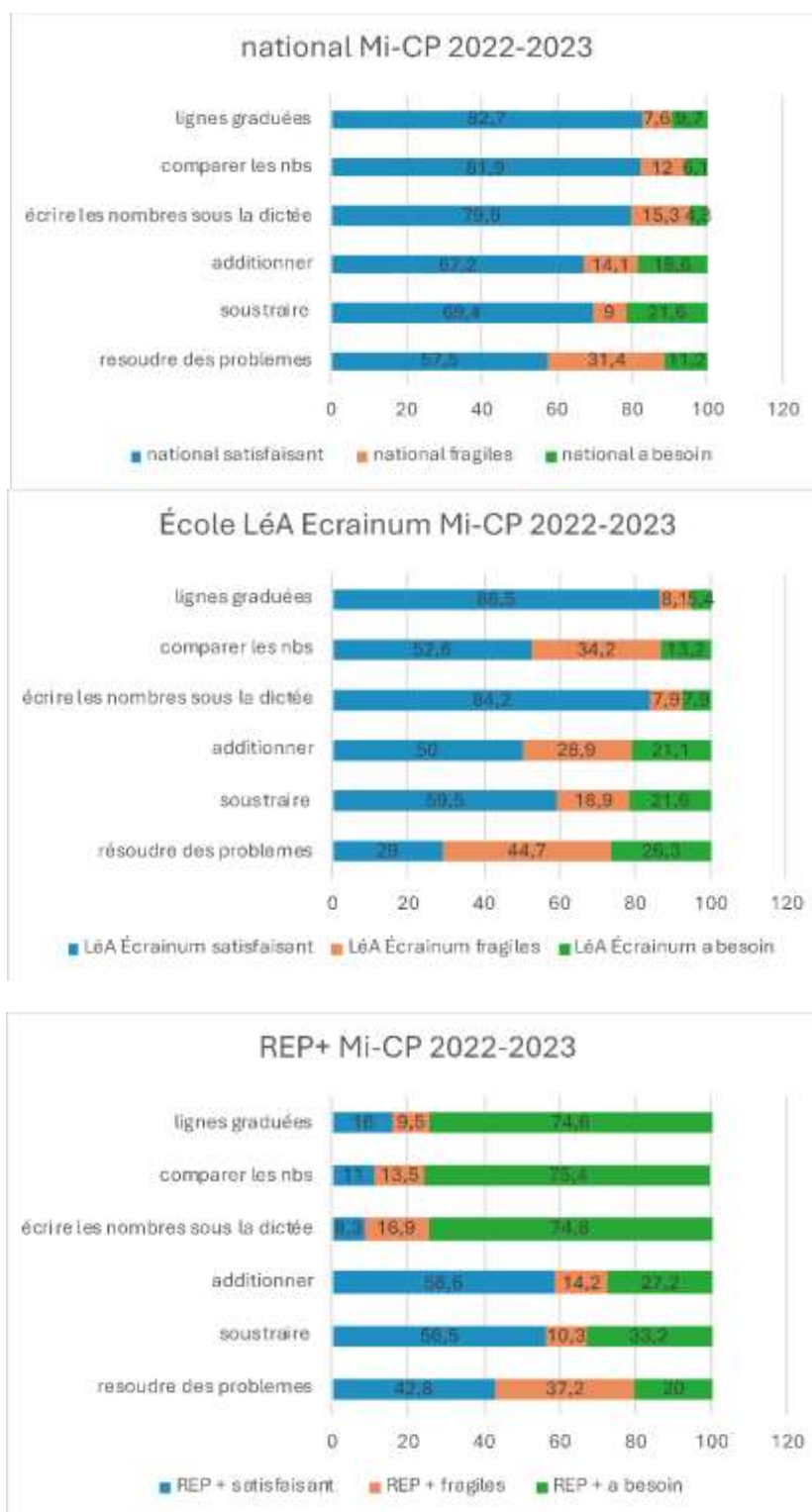
RÉFÉRENCES

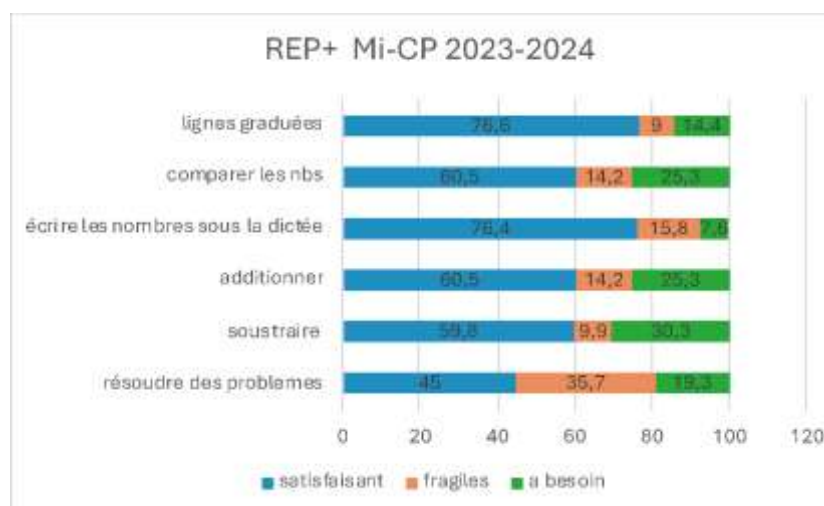
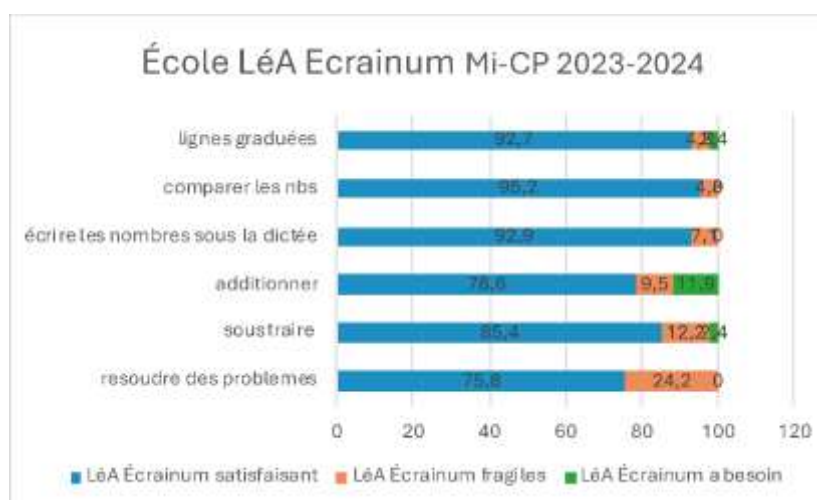
- Allard, C. (2015). *Étude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire. Le cas de l'enseignement des fractions* [Thèse de doctorat, Université de Paris VII]. HAL theses.
<https://hal.science/tel-01249807>
- Allard, C., Horoks, J. et Pilet, J. (2022). Principes de travail collaboratif entre chercheur·e·s et enseignant·e·s. Le cas du LéA RMG. *Éducation & Didactique*, 16(1), 49-66.
<https://doi.org/10.4000/educationdidactique.9644>

- Allard, C. et Mamede, M. (2023). Étude des conditions nécessaires pour favoriser l'exercice de la vigilance didactique des formateurs en formation initiale ciblée sur les liens entre apports théoriques et pratiques en classe ». *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 1, 341-376.
<https://doi.org/10.4000/adsc.1949>
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.
- Hersant, M. (2022). Faire des mathématiques à l'école maternelle. À quelles conditions ? ». *Grand N*, (110), 4-16. <https://hal.science/hal-03787269v1/document>
- Laparra, M. et Margolinas, C. (2016). *Les premiers apprentissages scolaires à la loupe. Des liens entre énumération, oralité et littératie*. De Boeck.
- Mamede, M. et Allard, C. (2023). Étude des pratiques d'enseignantes débutantes à l'école maternelle en mathématiques. Difficultés d'apprentissage ou d'enseignement. Dans H. Durler et P. Losego (dir.), *Former aux inégalités scolaires. Pratiques et recommandations pour la formation des enseignant·e·s* (p. 241-269). Alphil.
- Margolinas, C.(2021). Construire des points de vue d'élèves : des défis théoriques et méthodologiques pour la recherche en didactique des mathématiques. Dans H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, L. Coulange, G. Cirade, P. Job, A.-C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider, et F. Vandebrouck (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : Le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure. XXe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 19-48). La pensée sauvage.
- Robert, M. (1972). Réflexion sur le programme rénové. Dans M. Glaymann (dir.), *La mathématique à l'école élémentaire* (p. 10-42). APMEP.

ANNEXE 1

COMPARATIF DES RÉSULTATS DES ÉVALUATIONS DE MATHÉMATIQUES DE MI-CP (POINT D'ÉTAPE) : NATIONAUX, REP+ ET ÉCOLE LÉA ÉCRAINUM





L'ÉTHIQUE COMMUNAUTAIRE : SON RÔLE SUR LE DÉPLOIEMENT DE LA PENSÉE FONCTIONNELLE ET SUR LES PRATIQUES ENSEIGNANTES DANS UNE ACTIVITÉ D'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE

| ROBERT* VIRGINIE ET GARNEAU** AUDREY

Résumé | En nous appuyant sur la théorie de l'objectivation de Radford (2011, 2021), et en portant un nouveau regard sur des données de la recherche doctorale de Robert (2024), nous explorons le rôle du développement de l'éthique communautaire sur le déploiement de la pensée fonctionnelle dans l'activité d'enseignement-apprentissage. Nous mettons notamment en lumière la manière dont l'éthique communautaire pourrait être exploitée par les personnes enseignantes pour favoriser le développement d'une pensée commune.

Mots-clés : éthique communautaire, pensée fonctionnelle, enseignement-apprentissage, théorie de l'objectivation

Abstract | Drawing on Radford's theory of objectification (2011, 2021) and taking a fresh look at data from Robert's doctoral research (2024), we explore the role of the development of communitarian ethics in the emergence of functional thinking within teaching-learning activities and teaching practices. We particularly highlight how communitarian ethics could be leveraged by teachers to foster the development of functional thinking.

Keywords: Communitarian ethics in mathematics, functional thinking, teaching and learning activity, theory of objectification

I. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

L'article qui suit vise à mettre en valeur l'un des résultats de la recherche doctorale de Robert¹ (2024) tout en le retravaillant au prisme de la thématique de ce groupe de travail. Concrètement, nous posons un nouveau regard sur les résultats de la recherche qui portait sur l'émergence et le déploiement de la pensée fonctionnelle dans l'activité d'enseignement-apprentissage pour mettre en lumière la manière dont la dimension socio-affective de cette activité influence tant le déploiement de la pensée fonctionnelle que les pratiques enseignantes. Or, avant de pouvoir porter ce regard nouveau, il importe de situer la recherche sur les plans de la problématique, du cadre de référence et de la méthodologie utilisés. Mentionnons aussi que de manière à ne pas dénaturer la thèse, nous ne présentons pas un cadre théorique relatif aux pratiques enseignantes ; nous émettons plutôt des réflexions plus générales en lien avec l'éthique communautaire et la manière dont les pratiques enseignantes pourraient être influencées par les résultats de la thèse à cet effet.

Un objectif spécifique de la thèse de Robert (2024) consistait à documenter le rôle de la dimension affective dans le déploiement de la pensée fonctionnelle. Cette pensée y est considérée comme l'une des différentes formes de la pensée mathématique et elle est définie plus spécifiquement comme des manières particulières d'agir et de réfléchir dans une activité qui implique une ou plusieurs relations fonctionnelles. À ce jour, les recherches réalisées soulèvent l'importance de la pensée fonctionnelle notamment puisque son développement précoce, c'est-à-dire dès les premières années du primaire,

* Université de Sherbrooke – Canada – virginie.Robert2@usherbrooke.ca

** Université Laval – Canada – audrey.Garneau.1@ulaval.ca

¹ La thèse est disponible en libre accès : Savoirs UdeS. <http://hdl.handle.net/11143/21653>. Elle a été encadrée par Hassane Squalli, Patricia Marchand et David Benoit.

aurait plusieurs avantages, dont celui de diminuer les difficultés que les élèves rencontrent lors de leurs premiers apprentissages officiels du concept de fonction (Blanton et al., 2015 ; Stephens et al., 2017 ; Robert, 2018 ; Pinto et Cañadas, 2021). Des études ont d'ailleurs montré qu'à la suite de leur participation à une séquence d'enseignement-apprentissage, même les élèves de la maternelle pouvaient mobiliser des raisonnements issus de la pensée fonctionnelle (notamment Blanton et al., 2015). Les difficultés que présentent les élèves en lien avec le concept de fonction tel qu'il se présente dans les programmes semblent donc être liées à un manque d'expériences en lien avec les relations fonctionnelles (Carraher et Schliemann, 2008 ; Stephens et al., 2017 ; Pinto et Cañadas, 2021). Par ailleurs, les personnes enseignantes ont un rôle crucial à jouer pour provoquer le développement de la pensée fonctionnelle tant dans le choix des activités d'enseignement-apprentissage que dans leur manière de piloter ces activités. En effet, pour pouvoir provoquer le développement de cette forme de pensée mathématique, elles doivent d'abord être en mesure de reconnaître ses principales manières d'agir et de réfléchir soit : raisonner, conceptualiser et représenter (Robert, 2024). Ceci signifie ainsi que les personnes enseignantes doivent être sensibles à la manifestation des processus de développement des raisonnements, de la conceptualisation et de la mobilisation de différents registres de représentation pendant l'activité.

À travers la réalisation des activités et de leur analyse, il s'est rapidement avéré que l'effet des interactions sociales qui émergent pendant l'activité d'enseignement-apprentissage était un élément indispensable à prendre en considération pour comprendre le mouvement et l'évolution de la pensée fonctionnelle (Robert, 2024). En effet, comme le souligne Radford (2023), la singularité des individus et leurs interactions avec d'autres impliquent nécessairement le déploiement d'une multiplicité de manières de penser et d'agir mathématiquement, de prises de position et de remises en question d'idées exprimées qui renvoient à des enjeux de pouvoir et donc à des enjeux éthiques dans l'activité d'enseignement-apprentissage (Radford, 2023). Dans la thèse, l'éthique communautaire (qui sera définie dans le cadre de référence) est apparue comme étant un élément d'analyse incontournable puisqu'elle jouait un rôle déterminant dans l'activité d'enseignement-apprentissage. Or, comme les tâches sélectionnées et leur implantation n'avaient pas pour objectif de développer cette éthique communautaire, cela nous amène à questionner les effets d'une prise en considération de l'éthique communautaire en amont des activités d'enseignement-apprentissage sur l'activité et donc le déploiement de la pensée fonctionnelle. En croisant ces réflexions à la thématique de ce groupe de travail, l'objectif de cet article est de mettre en valeur et de revisiter plus spécifiquement le rôle de l'éthique communautaire dans l'activité d'enseignement-apprentissage visant le déploiement de la pensée fonctionnelle en portant un regard plus spécifique sur les impacts que celle-ci pourrait avoir sur les pratiques enseignantes.

II. CADRE DE RÉFÉRENCE

Les ancrages théoriques de la thèse et de cet article sont ceux que nous fournit la théorie de l'objectivation (TO) de Radford (2011, 2021). La TO s'inscrit dans le paradigme socioculturel de l'éducation dans lequel l'apprentissage, au sens général, est considéré comme un processus culturel, social et historique qui surpasse l'acquisition de savoirs au sens où il vise la formation d'individus critiques, réflexifs et éthiques. Certains concepts de sens commun vus sous l'angle de la TO nous apparaissent essentiels à présenter pour bien saisir ce que Radford entend par éthique communautaire.

D'abord, il faut savoir que l'activité est le point d'ancrage de la théorie de l'objectivation (Radford, 2021). Elle doit être conçue comme un système dynamique complexe qui se révèle dans le temps et dans l'espace et qui est mis en mouvement par l'énergie des sujets qui s'y engagent. C'est à travers l'activité que les savoirs, n'étant jusqu'alors que de pures possibilités, apparaissent et se matérialisent.

Dans un contexte scolaire, nous parlons plus spécifiquement de l'activité d'enseignement-apprentissage dans laquelle tous les participants s'affirment dans la production d'une œuvre commune et se réalisent en tant qu'humains (Radford, 2021). Pour bien rendre compte des spécificités de l'activité d'enseignement-apprentissage, Radford (2020) l'arrime au concept de travail conjoint qui relève du fait de voir l'enseignement et l'apprentissage comme une seule et même activité, c'est-à-dire une activité que l'enseignant et les élèves mettent en œuvre conjointement. L'activité d'enseignement-apprentissage ne doit donc pas se limiter à la simple rencontre avec le savoir, mais plutôt amener les sujets à s'engager dans une rencontre active, créative et critique avec ce savoir. Enfin, les élèves et la personne enseignante sont désignés par le terme de sujet dans la TO et ils doivent être considérés comme des entités en mouvement et en perpétuel développement, indissociables de leur culture et du monde social. C'est en effet par la relation qu'il entretient avec le monde et tout ce qui le constitue que l'humain en arrive à développer sa compréhension de celui-ci. C'est donc dire que les élèves et les personnes enseignantes ne sont pas des sujets épistémiques ou encore des sujets psychologiques ; ce sont des sujets singuliers, sensibles, en constante transformation.

Ce tour d'horizon de certains concepts de la TO nous amène à pouvoir définir le concept d'éthique communautaire qui nous intéresse plus spécifiquement dans cet article en lien avec les résultats qui seront présentés plus loin. Concrètement, selon Radford (2019), dans le cours de l'activité d'enseignement-apprentissage, il est impératif que les sujets respectent une éthique dite communautaire qui renvoie à une conception de la salle de classe comme un espace public de débat qui est établi entre les élèves et la personne enseignante. Celle-ci est composée de trois aspects essentiels : la responsabilité, le soin de l'autre (aussi appelé solidarité) et l'engagement au travail conjoint. La responsabilité signifie de répondre à l'autre, de prendre position et de chercher à éliminer l'espace existant entre soi et les autres. Le soin de l'autre constitue plutôt le souci des autres et l'empathie. Finalement, l'engagement dans l'activité d'enseignement-apprentissage signifie que l'élève s'active et persévère afin de participer à la vie de la classe et qu'elle ou il s'engage dans les discussions de groupe. Cet engagement se traduit parfois simplement par une volonté de comprendre et de contribuer à l'activité (Radford, 2021).

Bien que la pensée fonctionnelle ne soit pas centrale pour cet article, il nous apparaissait tout de même pertinent de la circonscrire brièvement puisque nous discutons notamment des pratiques enseignantes et de leurs effets potentiels sur le déploiement de cette forme de pensée mathématique. Pour documenter le déploiement de la pensée fonctionnelle dans l'activité d'enseignement-apprentissage, Robert (2024) s'est intéressée à la manière dont se déploient ses trois principales manières d'agir et de réfléchir dans des activités mettant en jeu une ou plusieurs relations fonctionnelles, c'est-à-dire « raisonner », « conceptualiser » et « représenter ». Cette manière de traiter la pensée s'appuie sur une conception non mentaliste de la pensée (Radford, 2011) qui va au-delà de l'individu puisqu'en son sens anthropologique, elle correspond à une forme sociale de réflexions et d'actions générées par la pratique sociale à travers l'histoire. La pensée subjective, elle, correspond à l'actualisation à travers l'activité de la pensée anthropologique qui doit acquérir des singularités à travers l'activité pour se révéler à la conscience. C'est cette pensée subjective qui émerge et se déploie dans l'activité d'enseignement-apprentissage qui a été documentée et à laquelle nous faisons référence dans le cadre de cet article.

III. MÉTHODOLOGIE

Dans cette recherche, il est important de savoir que c'est la chercheuse qui a pris le rôle d'enseignante-chercheuse pour le pilotage de l'activité. Elle s'est ainsi engagée dans un travail conjoint avec les élèves dans l'optique de provoquer le déploiement de leur pensée fonctionnelle alors que l'enseignante régulière du groupe se préoccupait davantage de la gestion des comportements. Notons

d'emblée que ceci a nécessairement eu des effets sur les activités d'enseignement-apprentissage puisque la présence de la chercheuse vient bousculer la culture de la classe. Or, comme les objectifs de la thèse n'abordaient pas la formation de personnes enseignantes, mais voulaient plutôt documenter la pensée fonctionnelle qui se déploie en quelque activité, la chercheuse est considérée comme un sujet de la classe qui travaille conjointement avec les élèves dans l'objectif de développer une pensée commune au même titre qu'une personne enseignante régulière.

L'échantillonnage de la thèse a été fait sous la base de l'accessibilité des groupes, donnant lieu à un échantillon de convenance qui s'établit sans aucun critère explicite à partir de groupes déjà existants (Lefrançois, 1991, cité dans Lenoir et al., 2012). La recherche a donc été réalisée auprès d'un échantillon de deux groupes d'élèves (incluant l'enseignante qui était la même pour les deux groupes) de première année du secondaire en contexte québécois (élèves âgés de 12 et 13 ans). Le choix de l'année scolaire des élèves relève du fait que le concept de fonction n'apparaît comme objet explicite d'apprentissage qu'à la troisième année du secondaire (élèves de 14 et 15 ans) dans le programme de formation de l'école québécoise et que la chercheuse voulait rendre compte du déploiement de la pensée fonctionnelle avant que le concept de fonction n'ait fait l'objet d'un apprentissage formel en contexte d'enseignement secondaire. La première année du secondaire offrait donc des conditions propices pour mener à bien la recherche. Pendant l'activité, les élèves étaient regroupés en équipes de 3 à 5 élèves de manière à favoriser les échanges entre pairs. Une consigne avait aussi été donnée au sujet de la nécessité d'enclencher des discussions sur les différentes idées et les élèves devaient s'entendre pour proposer une seule réponse par équipe aux différentes questions des tâches.

1. Le devis méthodologique

Le devis de recherche de la thèse est composé de 3 étapes qui joignent les indications méthodologiques de Radford (2015) pour les deux premières étapes et les séances d'autoconfrontations simples et collectives telles que décrites par Benoit (2022) pour la troisième. Concrètement, les étapes du devis méthodologique étaient les suivantes : (1) anticipation et configuration de l'activité ; (2) implantation ; (3) autoconfrontations simples ou croisées à partir des hypothèses formulées par la personne chercheuse au sujet de l'activité des sujets. Nous adoptons la définition de Benoit (2022) qui définit l'autoconfrontation simple comme consistant à « mettre une personne face aux traces de son activité » (p. 129). Lorsque les autoconfrontations ont été menées auprès de plusieurs élèves en même temps, elles sont appelées des autoconfrontations collectives. Le but de celles-ci était de confronter les élèves à des extraits vidéos et à leurs traces écrites exposant leur activité pour qu'elles et ils puissent décrire ce qui se passait dans les extraits. Au total, ce sont 11 élèves qui ont été rencontrés de manière individuelle ou en équipe deux semaines après la réalisation des activités en classe.

2. Les tâches² et leur pilotage

Inspirée notamment des travaux de Carlson (1998) et de Passaro (2015), la tâche des bouteilles visait à modéliser la hauteur de l'eau en fonction du temps pour le remplissage de bouteilles de divers formats à débit constant. La tâche était divisée en 4 sous-tâches qui ont été présentées pendant l'activité d'enseignement-apprentissage à la suite du visionnement de trois extraits vidéo permettant la visualisation du phénomène en question. Pour la moitié des sous-tâches, de multiples espaces de réponse ont été prévus sous la forme de « tentative » pour amener les élèves à remettre en doute leurs représentations et à les améliorer d'une tentative à l'autre. La tâche du mouvement est une tâche

² Un descriptif détaillé des tâches ne sera pas intégré dans cet article parce qu'elles sont secondaires au sujet qui nous intéresse ici. Une personne lectrice qui souhaite avoir le descriptif complet peut se référer à la thèse.

inspirée des travaux de Passaro et al. (2019, 2023) et Radford (2021). Avec celle-ci, l'auteure de la thèse voulait impliquer tout le corps dans le déploiement de la pensée fonctionnelle. Dans cette optique, la tâche du mouvement est une tâche dans laquelle les élèves devaient reproduire un déplacement dont le graphique est projeté à l'avant de la classe en se déplaçant devant un capteur *Go ! Motion*³ qui modélise en temps réel la position de l'élève en fonction du temps.

En ce qui concerne le pilotage, il est important de savoir que les tâches ont été configurées de manière à mettre en place des conditions didactiques qui favorisent la rencontre entre l'objet de l'activité et les élèves : ici la pensée fonctionnelle. Le pilotage des deux tâches a donné lieu à deux activités d'enseignement-apprentissage d'une durée de 60 minutes. Les tâches étaient présentées sans aucune visée évaluative et donc que ce n'est pas la bonne réponse qui était attendue. Les élèves étaient invités à travailler ensemble et à débattre, sans qu'une explicitation de ce que veut dire « travailler ensemble » ne soit donnée. Ceci signifie donc qu'un enseignement préalable des comportements qui sont attendus en contexte de débat et de collaboration n'avait pas été fait préalablement. Toutefois, comme les élèves évoluent en contexte scolaire depuis quelques années, nous pouvions nous attendre à ce qu'une certaine forme d'éthique communautaire existe avant notre passage en classe due à leur expérience d'élèves.

3. *Le devis d'analyse*

Un devis d'analyse multisémiotique a été créé pour la thèse. Dans celui-ci les pistes provenant de la TO ont été mises en commun avec le modèle d'analyse pour le développement des idées mathématiques de Powell, Francisco et Maher (2003). Les 8 étapes du devis étaient : (1) Visionnement attentif des enregistrements ; (2) Description des enregistrements ; (3) Identification des unités d'analyse ; (4) Transcription des unités d'analyse ; (5) Analyse multisémiotique et codage partiel des unités d'analyse ; (6) Élaboration d'hypothèses sur l'émergence et le déploiement de la pensée fonctionnelle à l'intérieur des unités d'analyse ciblées qui ont été soumises aux séances d'autoconfrontation simple et croisée ; (7) Analyse multisémiotique et codage final des unités d'analyse ; (8) Rédaction des résultats relatifs aux trois objectifs de la thèse. Dans le cadre de cet article, nous avons repris les unités d'analyse qui avaient été identifiées dans la recherche principale (étapes 3, 4 et 5 du devis) et qui permettaient de bien mettre en valeur l'éthique communautaire. À partir de ces unités d'analyse, nous avons porté un nouveau regard sur la manière dont celle-ci peut influencer les pratiques enseignantes. Concrètement, nous avons repris des extraits relatifs aux différentes dynamiques entre les membres des équipes qui avaient été identifiées par Robert (2024) pour en dégager une influence potentielle sur les pratiques. À cet effet, mentionnons que selon Robert (2024), une éthique communautaire bien établie, qui se manifeste notamment par une dynamique positive d'entraide, se présentait dans certaines équipes. Celle-ci favorisait le dialogue sur les idées mathématiques et les obstacles rencontrés étaient traités dans une perspective de résolution par les différents membres de l'équipe. D'un autre côté, une éthique communautaire lacunaire était présente dans certaines équipes. Dans ces dernières, différents conflits, comme des conflits de personnalités, venaient faire obstacle au débat et au partage des idées, ce qui faisait en sorte que le déploiement de la pensée fonctionnelle était considérablement moindre. Soulignons finalement que toutes les dynamiques entre les équipes n'ont pas été observées systématiquement, de sorte que le portrait présenté ne prétend pas être exhaustif quant à l'état de l'éthique communautaire dans la classe.

³ Le capteur Go ! Motion est un détecteur de mouvement de la compagnie Vernier Science Education qui analyse le déplacement en temps réel par la détection de la position (par rapport au capteur), de la vitesse et de l'accélération d'objets en mouvement.

IV. RÉSULTATS ET DISCUSSION

1. *Éthique communautaire « bien établie » : une dynamique positive d'entraide*

Regardons d'abord le cas d'une équipe dans laquelle l'éthique communautaire semble déjà bien établie⁴. Entre les membres de l'équipe 5B, une réelle collaboration peut s'observer pendant la tâche des bouteilles. Même avant la fin de l'explication des consignes pour la sous-tâche 2, Jolyane se penche vers le centre de la table, énonce sa compréhension, puis elle attend que les autres s'expriment (UA-B5.1). Dans cette équipe, la responsabilité est au cœur des échanges puisqu'il y a une volonté de toutes les personnes participantes de s'assurer de la compréhension des autres. Cela peut s'observer particulièrement de la part de Jolyane, qui va même jusqu'à se mettre à genou sur sa chaise pour avoir son corps au centre de la table (UA-B5.3). Concrètement, en utilisant son corps pour se mettre au centre de l'équipe, Jolyane se place à la rencontre des autres. Elle expose sa compréhension tout en étant attentive aux idées de ses collègues qu'elle reprend, discute ou fait évoluer. L'engagement et le soin de l'autre qui sont présents dans le travail conjoint de cette équipe semblent permettre aux différents membres de s'exprimer librement et contribueraient ainsi à l'émergence et au déploiement de la pensée fonctionnelle. Ce faisant, la pensée des élèves évolue et se tourne vers l'extérieur afin de devenir pensée commune (Merleau-Ponty, 1945, cité dans Radford, 2011). La pensée fonctionnelle émerge par l'entremise du dialogue qui s'édifie pour trouver un terrain commun. Dans l'activité de cette équipe, on peut voir émerger notamment des raisonnements plus sophistiqués et une meilleure appréhension du registre graphique.

Une éthique communautaire bien établie comme celle-ci pourrait être réinvestie par une personne enseignante. En effet, nous soulevons l'hypothèse que la mise en valeur par la personne enseignante de la manière dont le travail conjoint de cette équipe se met en mouvement aurait pu permettre aux élèves des autres équipes de développer une sensibilité au soin de l'autre, à l'engagement et à la responsabilité. Cette exemplification aurait pu faire prendre conscience aux autres élèves des particularités de leur manière d'interagir dans l'activité, de l'importance de la voix de chacun dans la construction d'une pensée commune et donc avoir un impact positif sur l'éthique communautaire des autres équipes.

2. *Une éthique communautaire lacunaire*

Poursuivons maintenant avec les équipes dans lesquelles l'éthique communautaire était lacunaire. Nous avons pu observer cette dynamique dans l'équipe 6B, dans laquelle Mathias et Arthur travaillent ensemble et Derek et Ravi travaillent de leur côté. Cette équipe a été formée par la disposition de la classe. Il s'agit de deux paires d'amis forcés de travailler ensemble. Derek et Ravi ne prennent pas l'activité au sérieux, ce qui exaspère Mathias et Arthur. La dynamique entre les membres de cette équipe est notamment influencée par des conflits de personnalités ou des rapports de pouvoir inégalitaires et ceci semble faire obstacle à l'émergence et au déploiement de la pensée fonctionnelle. À cet effet, Arthur dira d'ailleurs : « on est pris avec vous parce qu'on était obligé » (UA-B6.5). Tout au long de l'activité, les interventions faites par Derek et Ravi ne sont pas considérées par Mathias et Arthur et aucune pensée commune ne s'établit. Dans cette équipe, nous pouvons observer que les conflits de personnalités ne laissent pas de place à un débat sain des idées mathématiques. De plus, l'engagement déficitaire de la part de Derek et Ravi a un impact sur l'engagement de Mathias et Arthur. Ce dernier

⁴ Dans la théorie de l'objectivation, il n'existe pas, à notre connaissance, de qualificatifs associés à l'éthique communautaire. Des qualificatifs sont donnés ici dans l'optique de distinguer l'état de développement de l'éthique communautaire dans les différentes équipes.

en vient à dénigrer les tentatives de Derek et expose ses erreurs aux autres élèves. Il assume d'emblée qu'il a raison et donc que les autres ont tort : la responsabilité est ici absente. Il fait une étoile sur sa copie comme signe de l'obtention d'un consensus même s'il n'y a pas eu de rencontre entre leurs perspectives. Quand une telle dynamique au sein d'une équipe ou plus largement dans l'activité d'enseignement-apprentissage est présente, les idées mathématiques des différents membres du groupe sont relayées à l'arrière-plan, ne permettant pas le déploiement d'une pensée fonctionnelle commune, rendant presque impossible les développements qui pourraient être provoqués par des discussions et des débats. Conséquemment, dans la thèse, il a été conclu que le développement d'une pensée fonctionnelle commune dépend de l'état de développement de l'éthique communautaire (Robert, 2024).

Nous émettons l'hypothèse que les interventions faites dans le cas d'une telle dynamique entre les membres d'une même équipe doivent aller au-delà de la finalité de la tâche et même au-delà de seulement leur demander de collaborer. En effet, pendant l'activité, la chercheuse est intervenue auprès de cette équipe pour leur demander s'ils étaient arrivés à un consensus. Malheureusement, l'intervention qui était davantage axée sur la pensée fonctionnelle a été insuffisante. En effet, ici, nous croyons qu'il aurait été nécessaire d'apprendre aux élèves comment réussir à être ensemble dans une activité mathématique même en situation où des conflits de personnalités sont présents. Dans cette optique, l'enseignement-apprentissage de l'éthique communautaire en amont d'activités dans lesquelles les débats sont essentiels nous semble être une avenue pertinente pour espérer voir émerger des développements dans le déploiement d'une pensée fonctionnelle commune.

3. Entre éthique communautaire bien établie et lacunaire : la place du rôle de l'adulte

Entre les équipes où l'éthique communautaire était bien établie et celles où elle était lacunaire existe un spectre de dynamiques entre les élèves. En effet, dans la plupart des autres équipes, l'éthique communautaire aurait gagné à être apprise. Dans ces équipes, le fait d'intervenir dès le départ sur la responsabilité, le soin de l'autre et l'engagement aurait pu favoriser le déploiement de la pensée fonctionnelle. Prenons par exemple l'équipe 1M, dans la tâche du mouvement. À travers le regard que nous posons sur le travail de cette équipe de quatre élèves (Éloi, Rose, Josh et Laurence), nous pouvons voir émerger une nuance supplémentaire concernant aussi la perception du rôle de l'adulte comme ultime outil de validation par les élèves. Dans l'unité d'analyse UA-M1.4, Éloi est convaincu de sa compréhension de la tâche et il tente sans succès de faire valoir son idée auprès des autres membres de son équipe. Josh, Rose et Laurence sont tous trois du même avis et lui donnent de multiples contrexemples. Ici, il n'y a pas de ponts qui s'érigent entre les deux perspectives : les deux camps ne font qu'exposer leur point, sans pour autant prendre le temps d'expliquer pourquoi la position opposée n'est pas valide. Malgré le fait qu'ils soient trois à avoir une perspective différente de la sienne, Éloi reste convaincu de sa propre perspective. Au fil des minutes, Josh, Rose et Laurence montrent de plus en plus de signes d'exaspération. À un certain moment, Josh prend sa tête dans ses mains et il hausse le ton à de multiples reprises. Rose se couche sur son bureau et tape sur la table (UA-M1.4). La chercheuse arrive après avoir déjà pu observer de loin l'intensité des échanges. Laurence lui explique la façon dont elle, Rose et Josh voient la tâche puis Éloi réexplique sa façon de voir les choses. Après avoir écouté attentivement les deux perspectives, la chercheuse repart de l'explication d'Éloi pour tenter de l'amener à voir son erreur conceptuelle qui relevait de sa compréhension entre la différence entre la distance parcourue et la position par rapport au capteur. C'est la chercheuse ici qui incarne la responsabilité en repartant de l'idée d'Éloi pour tenter d'amener les élèves à avoir une vision commune. En traçant du doigt la courbe et en comptant à voix haute, elle semble réussir à faire comprendre Éloi qui se recule et dit : « Ahhh !! ». Les autres membres de l'équipe sont aussi satisfaits : Josh dit « Bon !! [il sourit et se recule dans sa chaise] » et Rose dit « c'est ça ! [elle lève les bras au ciel] ».

C'est principalement l'intensité des échanges qui aura amené la chercheuse à intervenir auprès de ces élèves et son intervention et bien que son intervention soit restée davantage sur le plan mathématique, le fait de repartir de l'idée d'Éloi aura permis de faire le pont entre les deux perspectives. Notons ici que la dynamique entre les membres de l'équipe n'était pas occasionnée par des conflits de personnalités. En effet, en autoconfrontation, Éloi mentionne que le fait qu'il soit ami avec les autres membres de son équipe a joué un rôle sur son intensité. Le rôle de l'adulte a aussi eu une influence sur le dénouement présenté puisque pour Éloi, le fait que les arguments aient finalement été énoncés par l'adulte a influencé sa réceptivité. La dimension affective a donc définitivement une influence sur l'émergence et le déploiement de sa pensée mathématique et plus spécifiquement sur sa pensée fonctionnelle puisque l'aisance d'Éloi face aux autres le pousse à mener son argumentaire jusqu'au bout et à n'être réceptif qu'aux arguments apportés par l'adulte. Une réflexion qui émerge ici est qu'un impact positif aurait aussi pu être occasionné par une mise en lumière, auprès de la classe entière, de ce que la chercheuse venait de faire c'est-à-dire d'être réellement à l'écoute des propos d'Éloi de manière à pouvoir repartir de son idée pour le faire progresser. Ceci aurait pu permettre à toutes les autres équipes de profiter de cet événement pour apprendre en quoi consiste la responsabilité de l'éthique communautaire. Nous réitérons qu'il pourrait être intéressant, voire même nécessaire, de faire préalablement des activités d'enseignement-apprentissage sur l'éthique communautaire et donc sur la manière d'*être* en classe de mathématiques.

Deux élèves d'autres équipes (Lorie et Malix) ont aussi mentionné en autoconfrontation que l'adulte jouait un rôle important dans leurs changements de perspectives pendant une activité d'enseignement-apprentissage. Dans les deux cas, il a été mentionné que leurs pairs n'auraient pas réussi à les convaincre que leurs hypothèses initiales étaient erronées. Cette manière de percevoir l'adulte comme étant le détenteur ultime de la bonne réponse doit être adressée pour que puisse se développer une éthique communautaire entre les membres de l'équipe. En effet, le fait de donner tout le pouvoir de validation à l'adulte modifie la réceptivité des élèves face aux arguments apportés par les autres élèves dans les discussions. Dans le travail conjoint, l'adulte et les élèves travaillent *ensemble* : les élèves peuvent tout autant provoquer des développements et contribuer aux apprentissages de leurs pairs. Il est donc important de valoriser la responsabilité et l'engagement au travail conjoint pour qu'un respect des perspectives de chacun et surtout qu'une valeur soit accordée aux contre-arguments des pairs.

V. CONCLUSION

En somme, en revisitant l'un des résultats de la thèse de Robert (2024) qui concernaient le rôle de l'éthique communautaire dans le déploiement de la pensée fonctionnelle, nous avons pu émettre quelques hypothèses sur des pratiques enseignantes qui pourraient être pertinentes pour améliorer la qualité des débats et permettre de réels échanges d'idées mathématiques. Sachant que le rôle de l'éthique communautaire dans l'activité d'enseignement-apprentissage est non négligeable, nous croyons qu'il est important pour les personnes enseignantes d'y être sensible. En effet, les résultats présentés nous ont permis de voir qu'une mauvaise éthique communautaire peut empêcher le débat d'idées mathématiques et donc potentiellement nuire au développement de la pensée mathématique. Dans le cas des activités sur la pensée fonctionnelle qui ont été menées et qui représentaient l'une des premières rencontres des élèves avec ce concept, nous pouvons même penser qu'une éthique communautaire lacunaire peut nuire à l'édification des premières bases du concept de fonction. Une telle situation demande davantage d'interventions sur l'éthique communautaire de la part de l'enseignante. À l'inverse, nous avons pu voir que dans des équipes où l'éthique communautaire est bien établie, une pensée fonctionnelle commune a davantage le potentiel de se développer. Conséquemment, nous croyons que des activités d'enseignement-apprentissage portant sur les trois composantes d'une éthique communautaire positive pourraient favoriser le déploiement de la pensée

mathématique des élèves. Dans cette optique, il peut aussi être pertinent d'exemplifier les manières d'être en activité mathématique d'une équipe dont l'éthique communautaire est saine. En somme, nous croyons que les personnes enseignantes doivent savoir intervenir tant sur le plan de cette dimension socio-affective de l'activité d'enseignement-apprentissage que sur les mathématiques qui y sont déployées.

RÉFÉRENCES

- Benoit, D. (2022). *La clinique didactique de l'activité en classe d'accueil de mathématiques : provoquer le développement de la pensée didactique* [Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke]. Savoirs.
<http://hdl.handle.net/11143/19193>
- Blanton, M., Brizuela, B.-M., Gardiner, A., Sawrey, K. et Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-558.
- Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 7, 114-162.
- Carraher, D., Schliemann, A. D. et Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. Dans J. Kaput, D. Carraher et M. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 235-272). Routledge.
<https://doi.org/10.4324/9781315097435-12>
- Lenoir, Y. (dir.), Zaid, A., Maubant, P., Hasni, A., Larose, F. et Lacourse, F. (2018). *Guide d'accompagnement de la formation à la recherche : un outil de réflexion sur les termes et expressions liés à la recherche scientifique*. Cursus universitaire. (Ouvrage original publié en 2012)
- Passaro, V. (2015). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans* [Thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus.
https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/bitstream/handle/1866/13509/Passaro_Valeriane_2015_these.pdf
- Passaro, V., Saboya, M. et Venant, F. (2019). Apport de capteurs de distance pour le développement du raisonnement covariationnel chez les élèves du deuxième cycle du secondaire. Dans C. Corriveau, V. Martin, M. Thibault et A. Savard (dir.), *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec « À quoi ressemble aujourd'hui la recherche en didactique des mathématiques au Québec ? », 24-26 mai 2019, Université Laval* (p. 196-208).
- Passaro, V., Saboya, M. et Venant, F. (2023). Émergence de signes personnels chez des élèves de 3e secondaire dans un contexte d'interprétation graphique avec le capteur de distance CBR. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 1(2), 66-105.
- Pinto, E. et Cañadas, M. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 33, 113-134.
- Powell, A. B., Francisco, J. M. et Maher C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 405-435.
- Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. *Éléments*, 1, 53-87.

- Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, 8(18), 547-567.
- Radford, L. (2018). A cultural-historical approach to teaching and learning: The theory of objectification. Dans F.-J. Hsieh (dir.), *Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (p. 137-147). Earcome.
- Radford, L. (2019). Une théorie vygotskienne de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. Dans J. Pilet et C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM 2018* (p. 314-332). Université Diderot.
- Radford, L. (2020). Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. Dans *Cahier du Laboratoire de Didactique André Revuz* (p. 1-19). IREM de Paris.
- Radford, L. (2021). *The theory of objectification, a Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Brill.
- Robert, V. (2018). *Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois : une analyse praxéologique* [Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS. <https://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/12608>
- Robert, V. (2024). *La pensée fonctionnelle : une analyse multisémiotique de l'activité d'enseignement-apprentissage visant son déploiement avant l'introduction formelle du concept de fonction* [Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS. <http://hdl.handle.net/11143/21653>
- Stephens, A., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E. et Murphy Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, 19(3), 143-166.

CARACTÉRISATION DE LA NATURE DES AIDES SUGGÉRÉES PAR LES ENSEIGNANT·ES EN RÉOLUTION DE PROBLÈMES : LE CAS DES PROBLÈMES DE TYPE ESSAIS ET AJUSTEMENTS

| FAVIER* STÉPHANE

Résumé | Cette communication vise à caractériser la nature des aides suggérées par les enseignant·es dans le contexte de la résolution de problèmes. Elle s'inscrit dans la continuité du travail présenté dans le cadre du GT9 de l'édition de 2022. Notre point de départ est l'analyse des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements mis en œuvre par des élèves du primaire et du secondaire 1 du canton de Genève. L'accès à des images inédites du travail privé des élèves (Coppé, 1993) est le levier qui nous permet de problématiser la question de l'aide à la résolution de problèmes au travers des propositions de régulations déclarées par les enseignant·es. Ainsi, après avoir présenté le dispositif mis en place dans le cadre de la formation initiale et continue de l'enseignement primaire du canton de Genève, nous analysons de quelle nature, procédurale ou constructive, sont les aides suggérées par les participant·es aux élèves. Il ressort une grande diversité des régulations envisagées, ce qui illustre le potentiel d'un tel dispositif de formation basé au plus près du travail des élèves.

Mots-clés : aide à la résolution de problèmes, régulation, essais et ajustements, travail privé des élèves, représentation du problème

Abstract | This paper aims to characterize the nature of the aids declared by teachers in the context of problem solving. It follows on from the work presented in GT9 of the 2022 edition. My starting point is the analysis of trial-and-error problem-solving processes carried out by primary and secondary 1 students in the canton of Geneva. Access to original images of students' private work (Coppé, 1993) is the lever that enables me to problematize the question of problem-solving aid through the propositions of regulation suggested by teachers. After presenting the program set up as part of initial and in-service training for primary school teachers in the canton of Geneva, I analyze the procedural or constructive nature of the aids suggested by the participants to their students. The wide variety of regulations envisaged illustrates the potential of such a training program, which is based as closely as possible on students' work.

Keywords: Problem-solving aid, regulation, trial-and-error, private student work, problem representation

I. INTRODUCTION

Cette communication s'inscrit dans la continuité du travail présenté dans le cadre du GT9 de la précédente édition d'EMF en 2022. En effet, notre point de départ est l'analyse du travail des élèves du primaire et du secondaire 1 du canton de Genève, plus particulièrement au niveau des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements. Dans cette recherche¹ (Favier, 2022), nous avons montré qu'ajuster ne va pas de soi pour les élèves et que, notamment, le fait d'interpréter les rétroactions apportées par chaque essai est un implicite qui nécessite d'être mis en lumière auprès des élèves et par voie de conséquence auprès des enseignant·es notamment lors de temps dédiés en formation. Le travail que nous proposons ici rencontre les préoccupations de ce GT9 dans la mesure où nous nous appuyons sur l'activité réelle des élèves pour faire émerger, discuter et enrichir les

* Université de Genève – Suisse – stephane.favier@unige.ch

¹ Cette recherche s'est effectuée dans le cadre du projet financé par le Fonds national suisse de la recherche scientifique – FNS (Subside no 100019_173105 / 1) : « la résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques : un point de vue fédérateur à partir d'études dans différents contextes. »

pratiques enseignantes en matière d'aide à la résolution de problèmes. De manière plus précise, c'est l'accès à des aspects inédits du travail privé des élèves (Coppé, 1993) qui est notre levier pour problématiser la question de l'aide à la résolution de problèmes au travers des régulations déclarées par les enseignant·es.

Ainsi, dans un premier temps nous décrivons le dispositif de formation mis en place dans deux contextes différents : en formation continue et en formation initiale de l'enseignement primaire du canton de Genève. Puis, nous présentons les aspects méthodologiques avant de détailler les analyses réalisées notamment du point de vue de la nature des aides suggérées par les participant·es.

II. DESCRIPTION DU DISPOSITIF DE FORMATION

1. *Objectifs*

Ce dispositif d'une durée d'une heure environ s'inscrit dans une formation sur la résolution de problèmes qui s'adresse à des enseignant·es du primaire. Les objectifs spécifiques de ce dispositif sont multiples. Tout d'abord, nous cherchons, à l'appui de l'analyse du travail privé des élèves (Coppé, 1993), à sensibiliser les participant·es à la question de la représentation du problème (au sens de Julo, 1995). Nous visons également à révéler les difficultés des élèves au niveau des ajustements et notamment des manières d'ajuster qui peuvent être très limitées chez certain·es élèves. Ainsi, à l'appui des difficultés révélées et de l'analyse a priori du problème centrée sur les différentes manières d'ajuster, nous cherchons à problématiser la question de l'aide à la résolution de problèmes de manière contextualisée pour ce type de problèmes d'essais-ajustement. Voici l'énoncé du problème étudié qui avait été proposé à des élèves de 4^e année de primaire dans le canton de Genève (élèves de 7-8 ans) dans le cadre de notre recherche doctorale (Favier, 2022) :

Le jeu de cartes²

Chaque carte de mon jeu représente soit un triangle, soit un carré. Je tire au hasard 15 cartes. Je compte tous les côtés des figures dessinées sur les cartes que j'ai tirées et je trouve 49. A ton avis, combien ai-je tiré de triangles et de carrés ?

2. *Analyse a priori du problème du jeu de cartes*

Une résolution algébrique n'est évidemment pas envisageable pour des élèves si jeunes. En proposant un tel problème, nous nous attendons à ce que les élèves procèdent principalement par essais et ajustements. Réaliser un essai consiste, pour ce problème, à proposer des valeurs possibles (ou une configuration selon le registre de représentation sémiotique employé) pour chacune des grandeurs c'est-à-dire le nombre de cartes représentant un triangle et le nombre de cartes représentant un carré. Selon les élèves, ces valeurs peuvent embarquer une des contraintes du problème (le nombre total de cartes ou le nombre total de côtés) ou aucune. Ensuite, tester cet essai consiste à vérifier si les contraintes du problème sont vérifiées. Si toutes les contraintes du problème sont vérifiées alors cet essai est solution du problème (preuve par ostension). Dans le cas contraire, l'essai est invalidé et l'élève peut/doit procéder à un autre essai. C'est à ce niveau que le type d'interprétation de la rétroaction impacte fortement l'ajustement. En effet, nous distinguons trois types de rétroaction. Le niveau le plus basique consiste à invalider l'essai sans tirer d'information supplémentaire utile pour un autre essai. Mais il est possible de remarquer si le nombre de la grandeur testée (par exemple le nombre total de côtés) est supérieur ou inférieur à la valeur communiquée dans l'énoncé. Dans ce cas nous parlerons

² Adapté d'un problème extrait des documents d'application des programmes français (Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2005, p. 7-9).

d'interprétation qualitative de la rétroaction. Cette information devra être ensuite interprétée en termes d'ajustement possible (par exemple enlever ou rajouter une carte ou bien échanger une carte triangle par une carte carré, etc.). Enfin, le niveau le plus fin consiste en rechercher précisément l'écart entre la valeur testée et la valeur communiquée dans l'énoncé. Nous obtenons ainsi une interprétation dite quantitative de la rétroaction qui devra elle aussi être traduite en termes d'ajustement possible. Ce niveau peut permettre de déterminer le nombre de cartes à échanger par exemple. Nos analyses (Favier, 2022) ont montré que les élèves, même plus âgés, ne procèdent peu voire pas à des interprétations de nature qualitative ou quantitative de leurs essais.

3. *Scénario de la formation*

Le dispositif s'articule en plusieurs étapes. La première consiste en la présentation des outils d'analyse utilisés pour étudier le travail des élèves, à savoir les processus de représentation de problèmes (Julo, 1995) et les différents types d'interprétation des rétroactions. Sur ce deuxième aspect, comme le montre l'analyse a priori, le problème étudié offre un milieu ayant un caractère rétroactif (Hersant, 2010, p. 10) intéressant pour permettre aux élèves de valider ou d'invalidier leurs essais mais les rétroactions peuvent également être interprétées de manière qualitative voire même quantitative. C'est l'exploitation des interprétations de ces rétroactions par l'élève qui doit lui donner la possibilité, théoriquement, d'ajuster de manière pertinente afin de se rapprocher voire de trouver la solution. Une analyse a priori centrée sur les différentes manières d'ajuster est également réalisée collectivement lors de ce premier temps (cf section précédente). Ensuite, la deuxième étape consiste en la présentation de l'analyse des différents essais réalisés au cours de la résolution proposée par un groupe de deux élèves (voir annexe). Le groupe choisi n'interprète les rétroactions qu'à minima, c'est-à-dire seulement comme l'invalidation de leur essai mais n'en tire pas d'interprétation pour ajuster. Enfin, la dernière étape consiste en la problématisation annoncée : ayant une connaissance plus précise du travail privé de ce groupe d'élèves, quelle régulation proposer en tant qu'enseignant·e suite à l'essai numéro 8 ?

III. PROBLÉMATISER LA QUESTION DE L'AIDE EN RÉOLUTION DE PROBLÈMES

L'aide qu'un·e enseignant·e peut apporter à ses élèves lorsqu'ils et elles résolvent des problèmes est une question qui reste difficile à traiter qui plus est pour les problèmes dont les objectifs d'apprentissage mathématiques ne s'expriment pas en termes de savoirs mathématiques reconnus par l'institution scolaire. Notre travail a donc une visée prospective qui vise à documenter la nature des aides déclarées proposées par des enseignant·es dans le cadre d'une formation continue ainsi que par des futur·es enseignant·es en formation initiale. Pour analyser ces aides déclarées, nous nous appuyons sur la distinction entre les aides procédurales et les aides constructives (Pariès et al., 2009). Les aides procédurales recouvrent, entre autres, les indications données aux élèves par l'enseignant·e et susceptibles d'entraîner un changement dans les adaptations que doivent produire les élèves voire au niveau des mises en fonctionnement des connaissances investies. Elles se traduisent, par exemple, par l'ajout de questions intermédiaires dans le problème ou par l'indication de méthode de résolution *ad hoc*. Ces aides permettent, selon ces auteures, de débloquer certain·es élèves « en réduisant la difficulté mais en leur laissant du travail » (p. 105). Si les aides procédurales sont tournées vers le problème en lui-même, les aides constructives sont orientées vers les élèves pour qu'elles et ils puissent faire le lien entre le travail réalisé et les savoirs visés. Les interventions de l'enseignant·e qui amènent les élèves à « récapituler ce qu'ils viennent de faire, au moins en partie, à prendre une petite distance par rapport à leur action, à compléter, justifier ou expliquer ce qui a été fait » (*ibid.*) sont des illustrations de telles aides.

Dans le contexte de la résolution de problèmes, nous faisons l'hypothèse que les aides procédurales s'incarnent en particulier via les pistes, proposées par l'enseignant·e, que les élèves peuvent mettre en œuvre directement pour converger vers la solution sans que les indices qui amènent à ces pistes ne soient explicités d'une manière ou d'une autre. Quant aux aides constructives, nous supposons qu'elles maintiennent le potentiel de recherche du problème (Georget, 2009), donnent l'occasion aux élèves de prélever les indices pertinents dans cette situation qu'elles et ils vont pouvoir réinvestir dans un autre problème.

Ainsi, la question qui nous anime peut se formuler ainsi : de quelle nature sont les aides imaginées par les enseignant·es notamment lorsqu'ils et elles ont accès au travail privé des élèves ? Pour tenter d'y répondre, les données recueillies tiennent en une prise de notes des propositions des enseignant·es au cours de la formation continue et l'enregistrement audio pour ce qui concerne les enseignant·es en formation initiale. La section suivante présente les analyses produites.

IV. ANALYSES

L'ensemble des essais présentés et analysés au cours de la formation est rassemblé en annexe. Rappelons que nous amenons les enseignant·es à proposer une régulation suite à l'essai n° 8.

1. *Analyses des données recueillies en formation continue*

Une première proposition (R1³) faite par un enseignant consiste à demander aux élèves de faire un essai qui regroupe tous les triangles ensemble, d'une part, et tous les carrés d'autre part, de manière à gérer un nombre total de triangles et un nombre total de carrés. Les différents premiers essais proposés par le groupe d'élèves étudié présentent une succession de figures sans une gestion distincte des cartes représentant des carrés et des triangles. Cette aide a le potentiel, selon nous, d'avoir un effet au niveau de la représentation du problème puisque l'ordre de tirage considéré par ces élèves constitue une contrainte supplémentaire qui n'est pas utile pour cette résolution. Pour autant, nous considérons que cette aide est procédurale du fait que ce serait l'enseignant qui l'impose qui plus est sans amener les élèves à prendre conscience de cette contrainte et sachant que les difficultés observées chez ce groupe ne résident pas dans la constitution d'un essai mais dans la manière d'interpréter la rétroaction et ainsi d'ajuster.

Ensuite, une autre proposition (R2) vise à discuter de la manière d'interpréter la rétroaction. L'enseignant explicite que l'on obtient un certain nombre de côtés pour 15 figures et on doit amener les élèves à déterminer s'il en manque ou s'il y en a en trop et combien il en manque ou combien sont en trop. Cette aide nous semble de nature constructive dans la mesure où l'idée est de permettre aux élèves de faire le lien entre le résultat du test de l'essai et ce qui est visé par l'énoncé. Ceci correspond aux difficultés de ce groupe rappelées juste avant.

Une autre régulation (R3) souhaite faire apparaître les traces intermédiaires de la recherche des élèves avec la volonté que ces traces servent de support pour une intervention ultérieure de l'enseignante. Il est discutable de considérer cette idée comme une aide à proprement parlé. En effet, lors de la discussion cette enseignante expliquait que, pour intervenir efficacement auprès de ce groupe d'élèves, elle avait besoin d'informations supplémentaires et que pour cette raison elle souhaiterait avoir accès à quelques étapes de leur raisonnement. Il s'agit ainsi plutôt d'une demande qui n'a pas vocation à aider directement les élèves mais plutôt à aider l'enseignante à aider les élèves.

³ Nous abrégons chacune des propositions faites par un ou une enseignante par la lettre R pour Régulation suivie du numéro d'apparition de la proposition.

Un enseignant a suggéré (R4) de revenir sur les essais n° 5 et 6 réalisés dans le registre dessin : le nombre de côtés (49) y est représenté à l'aide de 4 barres dizaines et de 9 points unités. Son idée est que les élèves travaillent dans ce registre qu'il estime très opérationnel pour résoudre le problème. En l'état, nous considérons que cette aide est davantage procédurale dans la mesure où ce registre est imposé par l'enseignant et que ce registre avait été envisagé et exploité par les élèves puis abandonné.

L'introduction de matériel comme par exemple 49 barres a ensuite été envisagée par un enseignant (R5). Ce registre de représentation sémiotique non encore mobilisé par les élèves de ce groupe est susceptible de jouer sur la représentation qu'ont ces élèves du problème à résoudre, et à ce titre, aurait probablement permis de relancer la recherche voire de faire le lien entre un changement du nombre de figures d'un essai à l'autre et l'effet sur le nombre total de côtés. A priori, nous voyons ainsi un caractère plutôt constructif de cette aide. Néanmoins, dans cette régulation, l'enseignant n'a pas précisé s'il aurait laissé les élèves décider de ce que représente le matériel introduit. En effet, une barre peut représenter un côté comme il le suggère mais aurait tout aussi bien pu représenter une carte-carré ou une carte-triangle. Ainsi, le potentiel constructif de cette aide dépend également fortement de la représentation des élèves ce qui serait moins le cas si l'enseignant ne précise pas ce que représente ce matériel.

Enfin, la dernière proposition (R6) cherche à questionner les élèves à partir du constat réalisé à l'issue du test de l'essai : « s'il y a deux côtés de trop, comment faire pour enlever ces deux côtés ? ». De la sorte, cette aide a une visée constructive.

2. *Analyses des données recueillies en formation initiale*

L'idée de la première proposition (R7) est de faire écrire aux élèves le résultat. L'enseignante explicite ainsi que cela a pour but « que ce soit plus concret qu'elles [les deux élèves du groupe] voient à quoi elles arrivent et qu'on reparte de ce nombre-là [...] et de les faire réfléchir en sens inverse partant du nombre et déconstruire le nombre en 4 et 3 par exemple s'il y a 52 de se dire il faut qu'on aille à 49 alors il faut que j'enlève un triangle ou un carré et de tâtonner comme ça ». Bien que dans l'évocation de cette proposition, une méthode soit imposée par l'enseignante, il semble quand même que l'idée sous-jacente est de permettre aux élèves de faire le lien entre le nombre total de côtés et la composition d'un essai. Une visée constructive semble donc dominer au travers de cette aide.

Enfin, la dernière proposition constituée de deux étapes est explicitée ainsi : « Je crois que j'aurais posé la question “combien de carrés et combien de triangles ont été tirés ?” pour voir s'ils [les élèves] arrivent à restituer combien de chaque a été tiré ». On retrouve dans cette aide (R8a), la même idée évoquée par le premier enseignant lors de la formation continue (R1) à savoir de traiter séparément les triangles et les carrés. Nous avons classé cette aide comme procédurale. L'enseignant précise ensuite « puis j'aurais demandé est-ce qu'on ne pourrait pas organiser autrement cette suite, ta trace, pour mieux voir où est-ce qu'on en est et qu'est-ce qu'on fait maintenant. Et après, dans une suite si on est toujours bloqué, j'aurais cherché le résultat avec eux et à partir de là, est-ce qu'on en a trop, est-ce qu'on en a pas assez, qu'est-ce qu'on peut faire avec nos triangles qu'est-ce qu'on peut faire avec nos carrés ». Cette seconde partie (R8b) concerne davantage les difficultés liées aux interprétations des rétroactions et aux manières d'ajuster donc de nature constructive.

V. DISCUSSION ET PERSPECTIVE

En nous penchant sur la nature des aides déclarées par les enseignants notamment lorsqu'elles et ils ont accès au travail privé des élèves, nous observons une grande variété des régulations proposées qui couvrent les deux natures, procédurale et constructive, avec une légère domination de cette

dernière. Le fait que les difficultés rencontrées par le groupe d'élèves dont le travail a été étudié aient été mises en évidence et que les objectifs d'apprentissages de ce problème aient été présentés et discutés au cours de la formation expliquent probablement cette prédominance. Néanmoins, bien que les objectifs d'apprentissage aient été abordés au préalable, aucune mise en relation explicite de l'aide proposée avec les apprentissages visés ni avec ce qui pourrait être institutionnalisé n'a été observée.

Par ailleurs, nous prenons conscience des difficultés de catégorisation a priori de ces aides car, comme l'expriment également Pariès et ses collègues :

« ce qu'une aide peut produire chez un élève dépend de facteurs très individuels qui vont de son attention (conjoncturelle) à son rapport au savoir et à l'état de ses connaissances ; cela dépend aussi de la tâche, du travail de l'élève, du moment où l'aide est donnée et de sa nature » (2009, p. 105)

Il nous semble ainsi que c'est plutôt un potentiel que nous caractérisons qui pourra s'exprimer ou non selon les situations. Par exemple, pour R7 l'objectif de l'enseignant est de donner l'occasion aux élèves de faire du lien mais selon la manière dont l'interaction va être menée par l'enseignant et la place qu'il va laisser aux élèves, une aide a priori de nature constructive pourrait finalement se transformer en situation en aide de nature procédurale. Un paramètre qui favorise ou limite l'expression de ce potentiel pour les aides de nature constructive est la représentation que les élèves se construisent du problème à résoudre. Le cas de R5 est un exemple assez évocateur de cette idée. Au-delà de l'expression effective de la nature d'une certaine aide, il est intéressant de souligner que prendre en considération la question de la représentation du problème constitue un indicateur précieux pour aider à caractériser la nature de ces aides dans le contexte de la résolution de problèmes. Ceci fait écho à ce qu'affirme Julo : « c'est l'impact sur l'activité de représentation qui constitue le critère décisif de toute démarche d'aide » (p. 173).

Pour conclure, ce travail d'analyse des régulations proposées par les enseignants nous semble ainsi être un axe de réflexion pertinent à aborder en formation car cela donne la possibilité, d'une part, d'appréhender ce que Julo (1995) met en avant, à savoir d'« avoir toujours le souci de stimuler et de développer cette activité de représentation » (p. 173) tout en ayant à l'esprit que « toute démarche cherchant à intervenir autoritairement sur la représentation pour la guider dans une direction donnée et lui imposer une certaine forme n'ayant aucune chance de succès » (Ibid). D'autre part, ce serait également une manière de quitter le contexte de ce type de problèmes qui se résolvent par essais et ajustements pour aller vers des outils didactiques plus généraux que sont justement les aides à visée procédurale et à visée constructive. Ceci permettrait de mener une réflexion sur la nature de l'activité mathématique que l'on souhaite provoquer chez les élèves et en lien avec les éléments qui seront institutionnalisés à l'issue de la recherche des élèves.

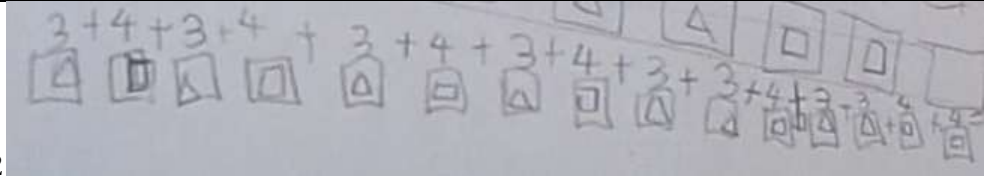
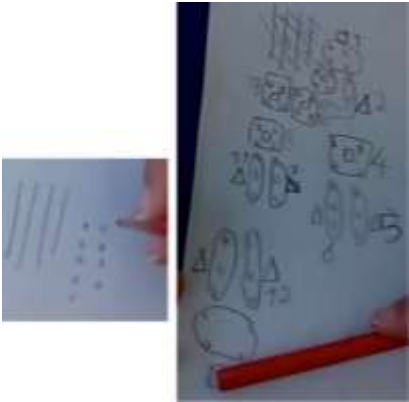
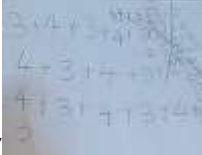
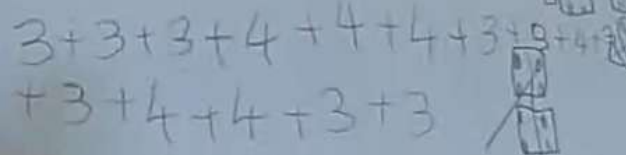
En guise de perspective du point de vue de la recherche, il nous apparaît nécessaire de poursuivre ce travail en procédant à une analyse systématique des régulations proposées pour affiner la caractérisation de ces aides pour les problèmes de recherche. Il nous semble indispensable de compléter la caractérisation actuelle par des éléments qui prennent en compte la représentation du problème.

RÉFÉRENCES

Coppé, S. (1993). *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé* [Thèse de doctorat inédite]. Université Claude Bernard.

- Favier, S. (2022). *Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève* [Thèse de doctorat, Université de Genève]. <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:159466>
- Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot - Paris 7]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-00426603v1>
- Hersant, M. (2010). *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : De l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires*. [Note de synthèse HDR, Université de Nantes].
- Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.
- Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche. (2005). *Documents d'accompagnement des programmes*. Scéren.
- Pariès, M., Robert, A. et Rogalski, J. (2009). Comment l'enseignant de mathématiques, en classe, met ses élèves sur le chemin des connaissances : un point de vue méthodologique en didactique des mathématiques. *Travail et apprentissages*, 3(1), 95-123.

ANNEXE
PRÉSENTATION DES DIFFÉRENTS ESSAIS PRODUITS PAR LES ÉLÈVES, ANALYSÉS AU COURS DE LA FORMATION

N° essai	Capture d'écran de l'essai produit	
N° 1		
N° 2		
N° 3		
N° 4		
N° 5		
N° 7		
N° 8		

LA CONSTRUCTION DE LA DÉFINITION DU CERF-VOLANT : UNE PRATIQUE ENSEIGNANTE POUR DÉVELOPPER LE RAISONNEMENT CHEZ DES ÉLÈVES DE 6^E ANNÉE DU PRIMAIRE AU QUÉBEC

| MICHOT* SANDRINE

Résumé | Certaines pratiques enseignantes, ainsi que ce qui est proposé dans les manuels, à propos de l'apprentissage de la définition mathématique ne favorisent pas la construction du sens des concepts géométriques chez les élèves. À cette fin, nous proposons une tâche sur la construction de la définition du cerf-volant pour des élèves du primaire. Des éléments logiques essentiels pour comprendre les spécificités de la définition mathématique et amorcer un travail sur le raisonnement déductif seront travaillés.

Mots-clés : géométrie, définition mathématique, cerf-volant, école primaire, raisonnement déductif

Abstract | Teaching practices and textbook suggestions regarding the learning of mathematical definitions are not conducive to building students' sense of geometric concepts. To this end, we propose a task on the construction of the definition of a kite for primary school pupils. Logical elements essential to understanding the specifics of mathematical definition and initiating work on deductive reasoning will be worked on.

Keywords: Geometry, mathematical definition, kite, elementary school, reasoning

I. PROBLÉMATIQUE : L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DE LA DÉFINITION MATHÉMATIQUE

Cette contribution s'inscrit dans un projet doctoral visant à amorcer le développement du raisonnement déductif dès l'école primaire. De fait, certains auteurs soulèvent que le raisonnement déductif est à faire ressortir davantage au primaire (Harel et Sowder, 1998 ; Mariotti, 2006 ; Solomon, 2006 ; Usiskin, 1982). Un travail sur les définitions (De Villiers, 1998 ; Ouvrier-Buffet, 2003 ; 2005), mené de concert avec l'analyse de figures à l'aide des instruments de géométrie (Cyr, 2011 ; Perrin-Glorian, 2001 ; Tanguay et Geeraerts, 2012), et avec l'intégration progressive d'éléments de raisonnement déductif, comme la maîtrise des bases de logique et de théorie des ensembles, est une piste à considérer.

Par un travail sur les définitions, nous entendons une approche favorisant l'engagement des élèves et dans laquelle ces derniers ont à découvrir ou à construire des définitions (De Villiers, 1998). De fait, bien comprendre le rôle et le statut de la définition est un facteur essentiel dans l'élaboration de démonstration. Effectivement, si l'élève amalgame dans la définition toutes les propriétés qu'il connaît de la figure géométrique, alors il ne sera pas en mesure de les dissocier, ou d'en choisir une pour en prouver une autre. Ainsi, lorsqu'il réalise une démonstration (preuve déductive), il ne sera pas quoi invoquer et à quel moment dans la « sériation des propositions » (Tanguay et Geeraerts, 2012).

Néanmoins, la littérature relève que certaines pratiques enseignantes à propos de la définition en géométrie ne permettent pas aux élèves de construire le sens des concepts définis. D'après De Villiers (1998), les enseignant·e·s ont tendance à présenter des définitions aux élèves sans qu'il y ait eu un travail de construction préalable et sans s'appuyer sur des connaissances sur la structure de la définition

* Université du Québec à Montréal – Canada – michot.sandrine@courrier.uqam.ca

mathématique (minimale et sans éléments redondants) (voir section II). Apprendre par cœur des définitions sans leur donner du sens peut avoir un impact négatif sur les apprentissages des élèves. Un élève qui apprend la définition d'un objet ne comprend pas forcément le concept sous-jacent ou même la définition en tant que telle, et pourrait ne pas être en mesure de réexploiter la définition dans un contexte qui met des raisonnements déductifs en jeu (Bernat, 2021). L'enseignement direct des définitions en géométrie est donc une pratique enseignante critiquée par les mathématiciens et les enseignants de mathématiques (De Villiers, 1998 ; Freudenthal, 1973 ; Griffiths et Howson, 1974 ; Ohtani, 1996 ; Vinner, 1991). De plus, Ouvrier-Bufferet (2003) montre qu'en géométrie, il n'est pas rare que les définitions présentées aux élèves soient variables et même parfois contradictoires dans les manuels scolaires. Elle constate un manque d'uniformité entre les définitions formelles proposées dans les ouvrages de référence, ce qui contribue à la confusion qui règne autour de la définition mathématique. Afin d'aller valider ces constats, nous avons réalisé une analyse de manuels québécois à propos des définitions des quadrilatères présentées au 2^e cycle du primaire, (Michot, 2023). Nos observations vont dans le même sens que celles d'Ouvrier-Bufferet (2003) : il n'y a pas d'uniformité entre les énoncés présentés et le référentiel théorique (au sens de Kuzniak et al., 2016) est très instable au sein des collections étudiées. L'aspect minimal des définitions mathématiques n'est pas pris en compte : les énoncés sont redondants et exhaustifs. On retrouve dans la plupart des cas une liste de propriétés pour « définir » les figures géométriques. La plupart des énoncés ne respectent ni la structure de la définition mathématique ni celle de la définition lexicale.

Or, une théorie géométrique se construit et s'élabore à partir d'objets définis selon la propriété caractéristique choisie (il peut y avoir plusieurs définitions acceptables) : à partir d'une proposition donnée, on peut déduire une nouvelle proposition en s'appuyant sur une règle d'inférence (axiome, théorème, définition) (voir exemple p. 9-10 de Tanguay et Geeraerts, 2012). La définition mathématique et le travail sur la définition mathématique ont donc un rôle important à jouer pour préparer et pour appuyer le travail déductif à venir des élèves. Pour ce faire, la définition doit être minimale et inclusive (voir section II). Ouvrier-Bufferet (2005) met en avant que les activités impliquant la construction de définitions apportent un réel enrichissement conceptuel, et peuvent constituer une pratique pédagogique intéressante pour amener les élèves à développer leur pensée géométrique, et ce dès le primaire. Même si la culture de la définition mathématique n'est pas encore installée au primaire, nous pensons qu'il est possible de mettre en place cette pratique si les définitions travaillées portent sur des objets géométriques accessibles et prévus au programme de formation du primaire. Il nous semble judicieux de réaliser des expérimentations auprès d'élèves du primaire afin de mieux cerner en quoi cette pratique enseignante a des impacts sur l'appréhension de nouveaux concepts.

C'est pourquoi nous avons construit une séquence d'enseignement dans laquelle des élèves de 6^e année du primaire sont amenés à réaliser un travail sur l'analyse de figures et la construction de définition du cerf-volant, objet géométrique peu connu des élèves. L'objectif est de voir si cette pratique enseignante influence les apprentissages potentiels des élèves et leur permet de mieux comprendre les propriétés des figures tout en amorçant un travail sur le raisonnement déductif ainsi que sur les processus logiques sous-jacents. Dans le cadre de cette communication, nous présentons l'élaboration d'une tâche géométrique tirée de cette séquence.

II. CADRE CONCEPTUEL : LA DÉFINITION MATHÉMATIQUE ET L'ACTIVITÉ DE DÉFINITION

Pour que la définition puisse préparer le raisonnement déductif à venir des élèves, celle-ci doit avoir une structure spécifique aux mathématiques. D'abord, les particularités de la définition lexicale et de la définition mathématique sont présentées, afin de mieux comprendre les enjeux de l'enseignement-

apprentissage de la définition pour les enseignants et les élèves. Ensuite, différentes approches pour l'enseignement de la définition mathématique sont décrites pour voir comment il est possible de travailler la définition mathématique à l'école primaire.

1. *La définition lexicale vs la définition mathématique*

Les définitions mathématique et lexicale se distinguent par leur structure et leurs finalités. La définition lexicale a comme finalité de donner le sens le plus précis possible à propos du terme défini, dans le but de décrire le langage et de donner des explications sur son utilisation. La définition lexicale se subdivise en deux parties : une composante centrale construite autour d'un sens appelé *genre prochain* et d'un ensemble de *différences spécifiques* (Polguère, 2016). Le *genre prochain* exprime ce que le mot défini a en commun avec les autres mots ou concepts qui lui ressemblent le plus. Les *différences spécifiques* expriment ce par quoi ce mot se distingue des mots qui ont le même genre prochain. Par exemple, le parallélogramme est défini comme un « quadrilatère [genre prochain] dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles et égaux [diff. spécifiques] » (Petit Robert, 1984, p. 1355). Comme il est illustré ici, la définition lexicale est exhaustive : on y retrouve la liste de toutes les propriétés de l'objet défini.

Quant à la définition mathématique, elle permet d'attribuer un sens aux objets mathématiques travaillés. C'est un énoncé particulier impliquant des propriétés mathématiques qui respecte une structure spécifique aux mathématiques : elle doit tenir compte de tous les cas possibles (Duval, 2005) et doit être rédigée en s'appuyant sur un nombre minimal de caractéristiques (Duval, 2005 ; Ouvrier-Buffer, 2015 ; Tanguay et Geeraerts, 2012).

La définition d'un objet géométrique associe un groupe nominal à une condition nécessaire et suffisante. Celle-ci est constituée d'une seule propriété caractéristique (par exemple, avoir quatre angles droits [pour le rectangle]) ou d'une conjonction minimale de propriétés simples (par exemple, avoir quatre angles droits et quatre côtés isométriques [pour le carré]) (Tanguay et Geeraerts, 2012, p. 14).

En effet, comme l'indique Duval (2005, p. 38),

[p]armi une liste de propriétés pouvant être attribuées à un objet, il s'agit de retenir uniquement celles qui suffiront pour retrouver, par déduction, toutes les autres. Naturellement cela ouvre à la voie à plusieurs définitions possibles d'un même objet. Ainsi on peut avoir au moins trois définitions différentes d'un parallélogramme : [quadrilatère qui a deux paires de côtés parallèles ; quadrilatère qui a deux paires de côtés opposés isométriques ; quadrilatère qui a des diagonales partageant le même milieu].

La définition mathématique se construit à partir d'une seule propriété caractéristique. Il y a donc une équivalence ($\Leftrightarrow$) entre la propriété caractéristique et l'objet géométrique défini. La minimalité des définitions mathématiques est essentielle pour établir une structure logique entre les propriétés, c'est-à-dire pour que les différentes propriétés soient déduites les unes des autres, à travers la construction d'une théorie où chaque propriété a sa place dans un ordre (logique) précis. Cette structure logique, essentielle pour la construction du sens mathématique, échappe souvent aux élèves, qui ont tendance à donner en bloc indissociable toutes les propriétés qu'ils connaissent de l'objet à définir, ce que Tanguay et Geeraerts (2012) appellent la *litanie des propriétés*. Ces difficultés découlent du fait qu'ils définissent les objets selon la structure des définitions lexicales : ils sont exhaustifs et listent toutes propriétés, plutôt que de proposer des définitions minimales en s'appuyant sur une propriété caractéristique.

Une autre particularité de la définition mathématique est qu'en géométrie, la définition se présente habituellement sous une forme inclusive (De Villiers, 1994). Une définition inclusive est organisée de façon à ce que les concepts plus particuliers forment des sous-ensembles du concept plus général. Par exemple, le rectangle sera défini comme « un quadrilatère avec 4 angles droits » (rectangle $\Leftrightarrow$ 4 angles

droits). Ainsi, le carré entre dans cette catégorie de figure puisqu'il satisfait à la définition, le carré est donc alors un cas particulier de rectangle.

Toutefois, les définitions peuvent aussi prendre une forme exclusive, ce qui est semblable à l'usage dans le langage courant. Une définition exclusive «interdit à un objet de vérifier des propriétés additionnelles à celles le définissant, donc lui interdisant d'appartenir à une classe restreinte d'objets plus particuliers» (Bernat, 2021, p. 16). Les différents sous-ensembles de concepts sont alors considérés comme disjoints les uns des autres. Par exemple, sous cette forme, le rectangle est défini comme «un quadrilatère ayant quatre angles droits et possédant deux paires de côtés opposés de mêmes dimensions, les longueurs de ces paires étant différentes» (Bernat, 2021, p. 16). Ainsi, avec cette définition, le carré n'est pas un rectangle. Par exemple, si nous demandons des tuiles de céramique rectangulaires dans une quincaillerie, nous serions surpris qu'on nous présente des tuiles carrées.

Les élèves sont en mesure de réaliser une classification inclusive : ils comprennent la logique et sont capables de donner des définitions inclusives, mais n'en voient pas l'utilité (Clements et Battista, 1992). De Villiers (1994) a mis en évidence que même si les élèves sont en mesure de donner des définitions inclusives, ils préfèrent employer des définitions exclusives parce que c'est plus naturel pour eux. La définition inclusive n'est pas employée spontanément dans la vie courante : c'est sans doute la raison la plus évidente pour expliquer les difficultés qu'ont les élèves à réaliser une classification inclusive des quadrilatères. En effet, comme le souligne De Villiers (1994), si on voit un carré, on ne dira pas que l'on voit un losange. On réservera le terme «carré» pour des carrés et le terme «losange» pour des losanges non carrés.

La définition inclusive permet une meilleure compréhension des objets géométriques et de leurs propriétés (Bernat, 2021 ; De Villiers, 1994). Elle est donc à privilégier en géométrie, dans la mesure où elle servira pour la rédaction de démonstrations. Malgré cela, De Villiers (1994) mentionne que le type de classification des figures et les définitions associées sont arbitraires et non absolues : le choix est personnel et varie selon l'utilité souhaitée. Il mentionne qu'il est important de ne pas considérer les définitions mathématiques exclusives comme invalides, elles seraient plutôt inefficaces, mal adaptées au travail mathématique subséquent.

L'enseignement-apprentissage de la définition mathématique est complexe, notamment parce qu'il est contre-intuitif pour les élèves de rédiger des définitions mathématiques minimales et inclusives qui s'appuient sur une propriété caractéristique, car dans le langage courant les définitions lexicales sont plutôt exhaustives et exclusives et s'appuient sur une liste de propriétés. Il est d'autant plus important de construire le sens des définitions mathématiques, afin que l'élève soit en mesure de choisir la propriété qui caractérise l'objet défini (il y a une équivalence entre l'objet défini et la propriété caractéristique) et qu'il comprenne pourquoi la définition peut être considérée comme minimale et inclusive.

2. *L'apprentissage de la définition : définition formelle ou définition provisoire*

La conception et le rôle de la définition mathématique ne font pas l'unanimité en didactique des mathématiques (Ouvrier-Buffet, 2003). Différentes perspectives s'affrontent, parmi lesquelles nous exposons ci-dessous celles de définitions formelle et provisoire.

La définition formelle est présentée lors de l'exposition des savoirs et de l'explication des concepts mathématiques. Elle est construite et présentée par un «expert» comme un enseignant ou un auteur de manuel. Elle est utilisée dans une approche déductive, où l'on présente aux élèves une définition qu'ils doivent réutiliser dans les chaînes deductives.

La définition provisoire est celle qui se met en place dans un contexte de découverte. L'élève construit une définition tout en découvrant une nouvelle connaissance. Elle lui permet de comprendre le sens du mot, mais également, de découvrir par lui-même la chaîne déductive dont découle la définition. Il est possible de distinguer deux types de définitions provisoires des concepts : la définition descriptive et la définition constructive, toutes deux envisageables dès l'école primaire (De Villiers, 1998 ; Freudenthal, 1973). La définition « descriptive » est mise en œuvre lorsque le concept et ses propriétés sont déjà connus. Le but est alors de formaliser des connaissances existantes. Quant à la définition « constructive », le but en est de produire de nouvelles connaissances. Un travail sur la définition permet de construire un nouveau concept.

Étant donné qu'un élève a peu de chance de comprendre le sens d'une définition formelle s'il n'a pas la chance d'inventer des définitions en se fiant aux propriétés des objets géométriques qu'il découvre (Freudenthal, 1973), nous avons choisi de travailler la description provisoire pour favoriser la construction de sens chez les élèves. De fait, comme présenté précédemment, les pratiques rapportées dans les recherches autour de la définition mathématique sont déficientes. Dans le cadre de l'activité présentée dans cet article, les élèves travailleront la définition de type « constructive » à l'aide du cerf-volant, figure géométrique avec laquelle ils sont peu familiers et dont toutes les connaissances sont à produire.

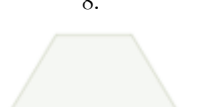
III. PRATIQUES ENSEIGNANTES ENVISAGÉES : UNE TÂCHE SUR LA DÉCOUVERTE DES PROPRIÉTÉS DU CERF-VOLANT ET LA CONSTRUCTION D'UNE DÉFINITION PROVISoire DU CERF-VOLANT

Dans cet article nous présentons en détail la sixième activité tirée d'une séquence d'enseignement. Les quatre premières activités proposées dans cette séquence travaillent la définition provisoire de type « descriptive ». L'idée est de partir du travail habituel des élèves sur des quadrilatères usuels, avec mesure et instruments de géométrie (activités 1 et 2), pour les amener vers les notions de propriétés géométriques indépendantes du représentant de la figure (activités 2 et 3 : « jeu du portrait »), puis à comprendre les différences entre une propriété simple et une propriété caractéristique (en lien avec l'implication, sa réciproque et l'équivalence correspondante), différences essentielles pour réaliser un travail sur la définition mathématique (activité 3). Il s'agit de mettre en évidence qu'une définition mathématique s'appuie sur des propriétés caractéristiques (activité 4 : définition de quadrilatères usuels). Les cinquième et sixième activités prévues au sein de cette séquence permet de travailler la définition provisoire de type « constructive ». Ces tâches visent la construction de la définition du quadrilatère nommé cerf-volant au Québec. Les élèves sont amenés à découvrir le cerf-volant en tant que quadrilatère convexe particulier et à reconnaître la figure d'une manière globale : activation des connaissances antérieures et lecture d'un énoncé historique sur le cerf-volant en guise de dévolution pour introduire le sujet (activité 5). Puis, lors de la sixième activité, l'enseignant·e y invite les élèves à définir cette nouvelle classe de quadrilatères. L'objectif principal est de réinvestir la notion de propriétés caractéristiques d'une classe de figures géométriques afin de proposer une définition d'un cerf-volant en prenant en compte les propriétés sur les côtés, les angles et les diagonales.

Pour ce faire, l'enseignant·e distribue une fiche sur laquelle des cerfs-volants et des non-cerfs-volants (avec des propriétés communes aux cerfs-volants) de toutes tailles et formes sont tracés (Tableau 1), et une affiche sur laquelle les élèves doivent rédiger la définition et inscrire les propriétés simples et caractéristiques du cerf-volant (voir annexes). Puisque des non-cerfs-volants (#5, 7, 8, 9) sont proposés aux élèves, ceux-ci devront décider quelles sont les figures à garder, et repérer quelles

propriétés pourraient caractériser la classe des cerfs-volants. Ils ont à se positionner et décider si chaque figure doit être mise dans la catégorie « cerf-volant » ou non : qui est et qui n'est pas un cerf-volant ? Le non-cerf-volant #5 a été choisi car il ressemble à un cerf-volant, le #7, car il a des diagonales perpendiculaires, le #8, car il a un axe de symétrie et le #9, car il a 2 paires de côtés consécutifs isométriques. Les cerfs-volants #4 et #6 sont des doubles cerfs-volants et le #10 peut être considéré comme un cerf-volant non-convexe.

Tableau 1 – Cerfs-volants (# 1, 2, 3, 4, 6) et non-cerfs-volants (#5, 7, 8, 9)

				
1.	2.	3.	4.	5.
				
6.	7.	8.	9.	10.

L'enseignant·e rappelle aux élèves que pour définir cette nouvelle classe de quadrilatères, il faut isoler une *propriété caractéristique*, c'est-à-dire une propriété particulière qui permet de différencier la figure de toutes les autres figures, celle qui va caractériser complètement la figure. Les élèves essaient de voir ce que les figures retenues ont toutes en commun et ils peuvent s'aider de leurs instruments de géométrie (règle graduée, équerre et rapporteur d'angles) pour déterminer le plus de propriétés possibles vérifiées par chaque figure : les côtés, les angles, les diagonales, les axes de symétrie.

Une fois que l'équipe s'est mise d'accord à propos de ce qu'est un cerf-volant, elle formule une définition du cerf-volant et l'écrit sur leur affiche. Elle inscrit également les propriétés simples et les propriétés caractéristiques du cerf-volant. L'enseignant·e circule pour observer comment chaque équipe s'y prend pour formuler les définitions et pour soutenir les équipes qui seraient bloquées ou auraient plus de difficultés à repérer les propriétés des figures. L'enseignant·e essaie de repérer les équipes dont les définitions pourraient alimenter des discussions intéressantes pour le retour en grand groupe (voir exemple à la section V).

Après l'analyse des cerfs-volants et la composition de la définition, une séance de discussion sous forme de débat en grand groupe est arbitrée par l'enseignant·e. Chaque équipe vient afficher sa définition au tableau afin de lire les définitions du cerf-volant et les propriétés simples et caractéristiques proposées par chaque équipe. Ensuite, chacune vient à tour de rôle présenter sa définition d'un cerf-volant et les propriétés simples et caractéristiques retenues. Si certaines définitions sont identiques ou similaires, l'enseignant·e peut choisir de les traiter parallèlement ou l'une à la suite de l'autre. À partir des réponses, les équipes ou élèves discutent s'ils sont d'accord ou non avec les définitions proposées et les propriétés identifiées. Les élèves réagissent également s'il y a des erreurs, si certaines propriétés ne sont pas vérifiées, etc. L'enseignant·e les invite à donner des contre-exemples le cas échéant. Les élèves peuvent s'aider des figures non-cerfs-volants des fiches pour en suggérer.

Finalement, l'enseignant·e fait un retour sur les apprentissages effectués lors de cette séance. Il ou elle inscrit sur une affiche la définition du cerf-volant qui a été retenue pour le référentiel théorique de la classe. Il ou elle inscrit également toutes les propriétés du cerf-volant : côtés consécutifs isométriques, une paire d'angles opposés isométriques, des diagonales perpendiculaires et qui se coupent au milieu d'une des diagonales, un axe de symétrie.

IV. APPRENTISSAGES POTENTIELS DES ÉLÈVES

Pour être en mesure de proposer une définition, les élèves doivent choisir les figures à retenir dans cette nouvelle classe de quadrilatères. Pour ce faire, ils devront utiliser adéquatement leurs instruments de géométrie et avoir une vision non iconique des formes pour analyser les figures (Duval, 2005), c'est-à-dire concevoir les figures en termes de points, de droites, de segments, de courbes, de surfaces. Du fait qu'il y a trop de similitudes entre les figures présentées (globalement elles ressemblent toutes à un cerf-volant), les élèves doivent décomposer et comprendre les relations entre les éléments de dimensions 0, 1 et 2 (c'est ce qu'on appelle la déconstruction dimensionnelle) et analyser les unités figurales (sommets, angles, côtés, diagonales, etc.) des figures dessinées pour en repérer les propriétés. Les élèves auront l'occasion de réinvestir leurs connaissances à propos des propriétés simples et caractéristiques et de la définition mathématique : retenir les propriétés caractéristiques pour composer leur définition mathématique, afin qu'elle soit minimale et efficace. Par ailleurs, il est envisagé que les élèves soient obligés d'employer un vocabulaire géométrique adéquat (ex. : *angle*, *opposé*, *côté*, *perpendiculaire*, *consécutif*) et de délaisser le vocabulaire courant (ex. : *coin*, *trait*, *ligne*, *croisement*, *vertical*, *à gauche*) pour l'élaboration d'un référentiel théorique satisfaisant, sur lequel ils pourront s'appuyer par la suite.

Un des apprentissages envisagés dans cette tâche est une amorce sur le développement du raisonnement déductif en faisant des liens logiques entre implication, réciproque et équivalence entre les propriétés, et en validant les définitions proposées par les différentes équipes. Les élèves pourront prendre conscience que les définitions inclusives sont à privilégier.

Les élèves définiront vraisemblablement le cerf-volant de plusieurs façons différentes, selon les propriétés des côtés et/ou des angles, des diagonales, des axes de symétrie. Par exemple, une équipe pourrait définir le cerf-volant comme « un quadrilatère qui a deux paires de côtés adjacents isométriques ». Une subtilité à prendre en compte à propos du choix de cette définition : un quadrilatère qui aurait 3 côtés isométriques (sur 4) satisferait à cette définition, sans pour autant être un cerf-volant : voir le 9^e quadrilatère (tableau 1). Les phases de débat permettront aux élèves d'être sensibilisés à la nécessité, en mathématiques, d'être aussi précis que possible. L'enseignant·e pourrait corriger en proposant « les 4 côtés du quadrilatère sont répartis dans deux paires de côtés adjacents isométriques ». On pourrait aussi dire que c'est « un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et dont une coupe l'autre en son milieu » ou « un quadrilatère dont une des diagonales est un axe de symétrie ». Les élèves pourront aussi définir le cerf-volant en termes de déconstruction dimensionnelle : « c'est un quadrilatère composé de deux triangles isocèles disposés sur une base commune ».

L'enseignant·e invite les élèves à donner des contre-exemples le cas échéant. Les élèves peuvent s'aider des figures non-cerfs-volants des fiches de la première partie de l'activité pour suggérer des contre-exemples. Supposons par exemple qu'une équipe définisse le cerf-volant comme « un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires ». Il s'agit d'une condition nécessaire, mais qui n'est pas suffisante (on ne peut pas parler d'équivalence ici). Une autre équipe pourrait proposer un contre-exemple en dessinant un quadrilatère qui a des diagonales perpendiculaires mais qui n'est pas un cerf-volant (ex. : 7^e quadrilatère du tableau 1). Une équipe pourrait proposer « un quadrilatère qui a un axe de symétrie ». Une autre équipe proposerait alors le trapèze isocèle comme contre-exemple : il respecte cette condition, mais n'est pas un cerf-volant (ex. : 8^e quadrilatère du tableau 1). L'inadéquation peut être formulée (ou reformulée, par l'enseignant·e, par les autres équipes) de plusieurs façons : la classe des cerfs-volants est incluse dans la classe des quadrilatères qui ont un axe de symétrie mais c'est une inclusion stricte, il y a dans cette 2^e classe des quadrilatères qui ne sont pas

des cerfs-volants ; c'est une propriété nécessaire, mais non suffisante, elle ne caractérise pas complètement les cerfs-volants et ne peut donc être prise comme définition ; etc. « Être un cerf-volant » implique « avoir un axe de symétrie », mais la réciproque n'est pas (toujours) vraie ; etc.

Au besoin, l'enseignant·e peut également prévoir au tableau une banque de quadrilatères additionnels pour aider les élèves à trouver des contre-exemples et une série de questions pour relancer la discussion et enrichir le débat pour que de courts raisonnements soient mis à profit.

Par exemple, l'enseignant·e pourrait poser ce type de questions aux élèves : « est-ce qu'un cerf-volant peut avoir un angle droit ? » (Réponse attendue : oui) (ex. : 1^{er} ou 4^e quadrilatère du tableau 1) ; « est-ce qu'un cerf-volant peut avoir deux angles droits ? » (Réponse attendue : oui) ; « est-ce qu'avoir deux diagonales perpendiculaires est suffisant pour être un cerf-volant ? (*avoir deux diagonales perpendiculaires $\Leftrightarrow$ être cerf-volant) » (Réponse attendue : non, parce qu'une des diagonales doit couper l'autre en son milieu) ; « est-ce que le losange pourrait être considéré comme un cerf-volant ? Si oui, sinon pourquoi ? » (Réponse attendue : oui, c'est un double cerf-volant) (ex. : 6^e quadrilatère du tableau 1) ; « être un carré implique-t-il être un cerf-volant ? (être carré $\Rightarrow$ être cerf-volant) (Réponse oui : car le carré a des côtés adjacents isométriques. C'est aussi un double cerf-volant ou un cerf-volant particulier) (4^e quadrilatère du tableau 1) ; Réciproquement : « est-ce que tous les cerfs-volants sont des carrés ? (*être cerf-volant $\Leftrightarrow$ être carré ; être carré $\Rightarrow$ être cerf-volant –mais la réciproque n'est pas vraie– *être cerf-volant $\Rightarrow$ être carré) » (Réponse attendue : non, on vient de montrer qu'un losange est un cerf-volant et ce n'est pas (nécessairement) un carré. Ce n'est pas une équivalence) (faire les liens avec la définition retenue), etc.

À cet égard, le losange (en particulier le carré) et le trapèze isocèle seront à surveiller, pour des raisons opposées : le losange et le carré sont à garder même s'ils ne correspondent pas tout à fait à l'idée intuitive qu'on se fait d'un cerf-volant ; le trapèze isocèle est à rejeter même s'il correspond pour certains à l'idée d'un cerf-volant. Si les élèves n'arrivent pas à trouver des contre-exemples, l'enseignant·e peut prendre une définition et proposer un contre-exemple comme décrit précédemment. Le but est que la définition du cerf-volant soit minimale et efficace, qu'elle soit composée d'une seule propriété caractéristique (équivalence entre la propriété caractéristique choisie et le cerf-volant).

Les questions de l'enseignant·e sont importantes pour alimenter le débat et pour s'assurer que les élèves poussent leur réflexion plus loin en ce qui a trait à la logique entre les propriétés des figures (travailler l'implication, sa réciproque et l'équivalence) : cette pratique enseignante vise à travailler le raisonnement des élèves. Par exemple les questions « être un carré implique-t-il être un cerf-volant ? » et « est-ce que tous les cerfs-volants sont des carrés ? » visent à ce qu'ils se rapportent à la définition du cerf-volant donnée dans cette tâche pour y répondre.

V. CONCLUSION

L'enseignement et l'apprentissage de la définition mathématique doivent permettre aux élèves de construire du sens à propos des concepts définis et de s'y référer pour le travail déductif subséquent. Pour ce faire, les tâches proposées aux élèves doivent leur laisser la chance de construire des définitions minimales et inclusives qui s'appuient sur une propriété caractéristique. Présenter des définitions aux élèves sans qu'il y ait eu un travail de construction préalable et sans s'appuyer sur des connaissances sur la structure de la définition mathématique ne favorise pas les apprentissages des élèves. L'enseignant·e a donc un rôle important à jouer pour guider les élèves dans cet apprentissage : la construction du sens passe par une mise en action des élèves et l'enseignant·e doit être capable de se

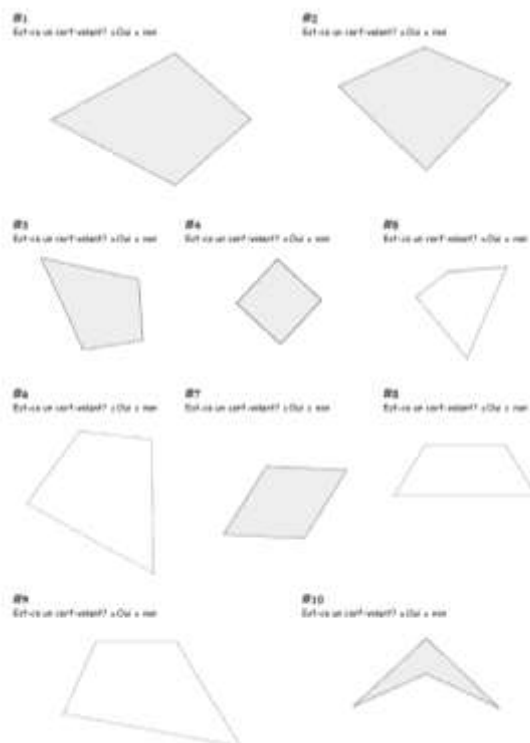
saisir de leurs réponses pour les aider à raisonner et à saisir la logique entre les propriétés des figures et la définition mathématique et ainsi faire progresser la connaissance commune de la classe. En ce sens, une véritable pratique est à développer, pour une gestion efficace de ce type d'activités.

RÉFÉRENCES

- Bernat, J. (2021). Réflexions sur les quadrilatères et leur enseignement. *Repères-IREM* (122), 15-46.
- Clements, D. H. et Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 420-464). Macmillan.
- Cyr, S. (2011). Development of beginning skills in proving and proof writing by elementary school students. Dans M. Pytlak, T. Rowland et E. Swoboda (dir.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 9-13 février 2011, Université de Rzeszów, Pologne* (p. 263-272).
- De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.
- De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? Dans A. Olivier et K. Newstead (dir.), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 12-17 juillet 1998, Université de Stellenbosch, Afrique du Sud* (volume 2, p. 248-255).
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel.
- Griffiths, H. B. et Howson, A. G. (1974). *Mathematics: Society and curricula*. Cambridge University Press.
- Harel, G. et Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, 7, 234-283.
- Kuzniak, A., Tanguay, D. et Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM*, 48(6), 721-737.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. Dans A. Gutiérrez et P. Boero (dir.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education past, present and future* (p. 173-204). Sense Publishers.
- Michot, S. (2023, 11-12 mai). *La définition des quadrilatères à l'école primaire : un état des lieux des manuels québécois du 2^e cycle du primaire* [communication orale]. 90^e congrès de l'ACFAS, Université de Montréal, Montréal, Canada.
- Ohtani, M. (1996). Telling definitions and conditions: An ethnomethodological study of sociomathematical activity in classroom interaction. Dans L. Puig et A. Gutiérrez (dir.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 8-12 juillet 1996, Universitat de València, Espagne* (volume 4, p.75-82).

- Ouvrier-Buffer, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques* [Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier - Grenoble I]. ProQuest Dissertations & Theses Global.
- Ouvrier-Buffer, C. (2005). Activités de classification et construction de définitions à l'école élémentaire. Dans *Actes du XXXII^e Colloque COPIRELEM* (p. 1-8).
<https://bibnum.publimath.fr/IWO/IWO06019.pdf>
- Perrin-Glorian, M.-J. (2001). Des problèmes pour enseigner la géométrie à l'école. Des expériences spatiales aux objets géométriques. Dans *Actes de la Journée IREM-APMEP-IUFM-CRDP sur la géométrie en primaire*, Centre régional de documentation pédagogique Nord-Pas-de-Calais. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02428982>
- Solomon, Y. (2006). Deficit or difference? The role of students' epistemologies of mathematics in their interactions with proof. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 373-393.
- Tanguay, D. et Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, (88), 5-24.
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* [Thèse de doctorat inédite]. University of Chicago.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. Dans D. Tall (dir.), *Advanced mathematical thinking* (p. 65-81). Kluwer Academic Publishers.
https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5

ANNEXES



1. D'après l'analyse sur les figures réalisée, inscrivez toutes les propriétés du cerf-volant.

2. Composez une définition de ce qu'est un cerf-volant.

Attention, votre définition doit être précise et permettre d'identifier clairement un cerf-volant parmi un lot de figures.

Que pouvez-vous dire à propos de :

- Des côtés?

- Des angles?
- Des diagonales?
- Des axes de réflexion?

Définition du cerf-volant :

Définition du cerf-volant :

SITUATIONS ENGAGEANT UN TRAVAIL DE COMMUNICATION EN ALGÈBRE EN 2^E SECONDAIRE : DES APPORTS POUR L'ÉLÈVE COMME POUR L'ENSEIGNANT ?

| LABROSSE* PHILIPPE

Résumé | Notre recherche s'intéresse à la communication qui apparaît souvent négligée dans l'enseignement-apprentissage de l'algèbre. Une séquence de situations pour des élèves de 13-14 ans a été conçue visant à ce qu'ils développent une communication riche. Les résultats de la mise à l'essai de cette séquence, dont certains seront présentés dans cet article, montrent que le jeu sur certaines valeurs des variables didactiques retenues pour concevoir les situations apparaissent comme des leviers intéressants pour l'élève et l'enseignant.

Mots-clés : situation de communication, algèbre, secondaire, variables didactiques, positions des interlocuteurs

Abstract | Our research focuses on communication, which often appears to be neglected in the teaching-learning of algebra. A sequence of situations for 13-14 year old has been designed to help them develop rich communication skills. The results of testing this sequence, some of which will be presented in this article, show that playing with certain values of the didactic variables selected to design the situations appear to be interesting triggers for both student and teacher.

Keywords: Communication situation, algebra, secondary, didactic variables, positions of interlocutors

I. INTRODUCTION

L'importance du travail de communication pour l'apprentissage mathématique des élèves est reconnue dans les programmes d'étude de plusieurs pays, de même que par l'OCDE. Pourtant, lors de l'accompagnement d'enseignants du Québec à titre de conseiller pédagogique de mathématiques au secondaire, nous avons constaté que la compétence à communiquer ne semblait pas être exploitée à son plein potentiel rejoignant les constats de chercheurs (Cobb et Bauersfeld, 1995 ; Anderson et Piazza, 1996 ; Sierpiska, 1998 ; Bibby, 1999 ; Hufferd-Ackles et al., 2004 ; Black, 2004 ; Giroux, 2004 ; Rauscher, 2006 ; Bruce, 2005, 2007). Une séquence de situations en algèbre a été élaborée et mise à l'essai auprès d'élèves de 2^e secondaire (13-14 ans). Le choix de certaines valeurs des variables didactiques lors de la conception sont apparues, après analyse, comme porteuses pour le déploiement d'une communication riche notamment l'attribution à *l'élève de la position d'enseignant qui porte un regard sur la production d'un élève-fictif* (position de l'élève résolveur) qui *s'adresse à un élève-fictif* (interlocuteur de l'élève résolveur).

II. QUELQUES REPÈRES THÉORIQUES DE L'ÉTUDE

La communication est assurément un sujet vaste et complexe, particulièrement dans l'enseignement des mathématiques. Elle regroupe toutes les actions mises en place pour transmettre des messages de tous types (écrits, oraux, des émotions, des gestes, etc.) entre un émetteur et un récepteur. Elle n'est pas nécessairement simultanée et peut être différée. Pensons à l'enseignant qui demande à ses élèves une résolution de problème qu'il ramasse et corrige. Il remet ensuite par écrit une rétroaction à l'élève qui la reçoit et la décode. Peut alors s'enclencher un processus interactif avec l'enseignant sur la

* Université de Montréal – Canada – philippe.labrosse@umontreal.ca

correction. La communication peut être verbale ou non-verbale. Bibeau (1982) indique que « la communication verbale se fait dans quatre formes ou modes possibles : deux modes passifs (écouter et lire) ; deux modes actifs (écrire et parler) » (rapporté dans Legendre 1993, p. 219). Intimement liées à la communication, les interactions (Brousseau, 1998 ; Odier-Guedj, 2019) sont des échanges bidirectionnels non seulement lorsque deux personnes interagissent de façon courante, mais aussi lorsqu'un élève reçoit une rétroaction qui n'est pas nécessairement « humaine » en posant des actions sur un milieu. La rétroaction peut ainsi provenir de la réaction du milieu à l'action de l'élève. Dans notre recherche (Labrosse, 2020), nous avons choisi de développer une séquence de situations qui priorisent la communication écrite, tout en nous intéressant aux interactions orales qui ont eu lieu entre une enseignante et ses élèves. Les travaux de Rausher (2006) montrent que les écrits ont une place reconnue dans le processus de développement des connaissances mathématiques et qu'ils offrent des occasions de prises de conscience en cours de résolution. L'auteur mentionne que la communication écrite exige une véritable réorganisation de la pensée et une argumentation de la part de celui qui rédige. Elle est plus exigeante pour l'élève que la communication orale, puisqu'elle force la structure et la synthèse des idées. Bien souvent aussi, l'interlocuteur n'a plus accès à celui qui a écrit d'où l'importance que la communication écrite soit claire et complète.

Plusieurs auteurs ont aussi mis en évidence l'importance de l'argumentation et de la validation dans l'activité mathématique afin de convaincre. Pour travailler l'argumentation et la validation avec les élèves, la communication apparaît aussi essentielle. Devant des problèmes mathématiques, on cherchera à amener les élèves à aller au-delà de la simple narration de leurs productions (« *voici ce que j'ai fait...* »), afin de les convier à communiquer les raisons pour lesquelles ils l'ont fait, quel est leur raisonnement, d'où proviennent leurs conclusions et comment ils les valident. Le principal but de l'argumentation étant de convaincre, un élève peut argumenter sans se préoccuper du caractère de vérité de l'affirmation originale (Balacheff, 1987, 1988 ; Duval, 1991). Les arguments peuvent être vrais ou faux. Notons aussi que les arguments invoqués par un élève pour convaincre ne sont pas nécessairement appuyés mathématiquement. Ainsi, un élève qui argumente peut utiliser un argument d'autorité pour convaincre les autres. Les travaux de Balacheff montrent que la communication est un élément central qui permet d'outiller les élèves dans leur travail de validation et de preuve. En effet, c'est par la communication que les élèves peuvent fournir les arguments et les raisons qui permettent de « rendre intelligible le caractère de vérité » (Balacheff, 1988) de leur proposition, en d'autres termes, de déployer une argumentation. La Théorie anthropologique du didactique (TAD, Chevallard, 1991a, 1991b, 1998) nous a aussi permis de décliner l'argumentation d'élèves auxquels nous avons proposé des problèmes mathématiques à résoudre. Cette théorie considère que toute activité humaine consiste à accomplir une tâche d'un certain type, au moyen d'une technique, justifiée par une technologie qui permet en même temps de la penser, de la produire, et qui, à son tour, est justifiable par une théorie.

Ainsi, à la lumière des travaux de Balacheff et Chevallard, nous considérons qu'une communication riche est une communication qui met en jeu une argumentation ou, dit autrement, qui peut s'appuyer sur un discours technologique. Les arguments à l'appui n'ont toutefois pas tous la même valeur. Plus ces arguments tendent vers un haut niveau hiérarchique de preuve, plus nous avons qualifié la communication de « riche ». Une communication riche met donc en jeu une argumentation qui s'éloigne d'un discours ostensif et tend vers la mise en place d'une justification ou d'une validation qui s'appuient sur des savoirs mathématiques adéquats et partagés par la communauté.

Par ailleurs, l'organisation du discours est également un critère à considérer pour qualifier la communication. En effet, Radford et Demers (2004), se sont interrogés sur les façons de choisir des activités de communication pertinentes ainsi que sur les stratégies de gestion de classe qui favorisent le mieux les situations d'argumentation, de preuve et de discussion entre les élèves. Ils cherchent des

moyens d'opérationnaliser l'observation de la communication et ciblent ainsi des critères d'évaluation pour rendre compte du développement de la communication en classe de mathématiques. Un des critères qu'ils proposent est l'organisation du discours. Ainsi, en plus de la présence de l'argumentation s'ajoute un critère relatif à l'organisation de la communication qui repose sur l'articulation des arguments avancés et sur la clarté de ces derniers. C'est la deuxième caractéristique d'une communication riche. L'organisation relève davantage de la forme de la communication alors que l'argumentation relève du fond.

Notre objectif de recherche revenait donc à trouver une façon d'organiser un enseignement des mathématiques qui favorise une communication riche. Nous avons ainsi conçu et mis à l'essai une séquence de six situations engageant un travail de communication afin d'analyser la richesse de la communication déployée. Nous nous attardons dans ce texte sur une de ces situations appelée *l'Enseignant*.

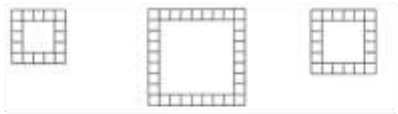
III. ÉLÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES

Les six situations ont toutes été de type papier-crayon. La séquence a été soumise à 57 élèves de 2^e secondaire d'une école montréalaise. Ces élèves provenaient de deux classes d'une même enseignante. Nous avons conçu ou adapté les différentes situations proposées aux élèves, lesquelles se sont insérées dans l'enseignement ordinaire de la classe. Dans nos travaux, nous nous sommes notamment intéressés à deux variables didactiques : la position attribuée (à titre d'élève-résolveur) et l'interlocuteur de l'élève. Les valeurs de ces variables didactiques (voir tableau 1 en annexe) ont été mises à contribution dans la conception de situations en algèbre, notamment dans celle qui fait l'objet de cet article, *l'Enseignant* (voir figure 1). Ces variables visaient à augmenter l'exigence de communication des élèves, c'est-à-dire à solliciter une communication plus riche, donc plus axée sur les critères retenus pour définir la richesse, soit principalement l'argumentation et, dans une moindre mesure, l'organisation. Pour cette situation, ces valeurs sont *Attribuer à l'élève la position d'enseignant qui porte un regard sur la production d'un élève-fictif* (position de l'élève résolveur) qui *s'adresse à l'élève-fictif* (interlocuteur de l'élève résolveur).

Amélie et Maxime, deux de tes élèves, viennent de te remettre leur solution au problème suivant.

Un encadreur doit réaliser l'encadrement de miroirs carrés (la surface blanche sur les dessins) avec des carreaux de mosaïque. Il ne dispose que d'une seule grandeur de carreaux.

Ses clients choisissent la taille du miroir qu'ils veulent. La seule condition posée par l'encadreur est que la dimension du miroir corresponde à un nombre entier de carreaux, comme dans les modèles illustrés ci-dessous. L'encadreur dispose ses carreaux autour du miroir de manière à ne pas cacher la surface réfléchissante.



a) Peux-tu indiquer une façon qui permette à l'encadreur de trouver rapidement le nombre de carreaux nécessaires pour réaliser l'encadrement dès qu'un client lui donne la mesure du côté du miroir en unités « carreaux » ?

b) Quelle est la mesure du côté d'un miroir dont l'encadrement requiert 88 carreaux ?

Comme enseignant, tu dois :

- 1- Répondre toi-même à la question, puis faire ton corrigé.
- 2- Ensuite, ton enseignante te remettra les copies de Maxime et Amélie. Corrige les productions d'Amélie et de Maxime en inscrivant des commentaires directement sur leurs copies.
- 3- Comment pourrais-tu expliquer à la classe le fait que les deux élèves arrivent à la même quantité de carreaux à la question b) alors qu'ils n'ont pas trouvé la même règle ?
- 4- Entre les deux solutions qui te sont proposées, y en a-t-il une qui t'apparaît meilleure que l'autre ? Explique pourquoi.

Figure 1 – Énoncé de la situation de l'Enseignant¹

En le plaçant dans la peau d'un enseignant qui doit juger de productions d'élèves (voir figures 2 et 3 en annexe), cette situation exige de l'élève plusieurs habiletés en communication. En effet, la proposition d'adopter la position d'enseignant vise à amener les élèves-enseignants, entre autres, à identifier ce qu'ils considèrent important dans les productions mathématiques soumises et à en rendre

¹ Problème conçu à partir d'une activité réalisée au Groupe Didactique de la CI-IREM, Marseille, 2006.

compte explicitement. Ils expriment aussi, implicitement, de ce fait, ce qui, selon eux, relève du travail de l'enseignant. L'invitation à endosser le rôle d'enseignant cherche ainsi à solliciter de la part des élèves-enseignants des éléments de justification qui témoignent d'une communication riche. Ainsi, l'élève doit d'abord résoudre la situation pour lui-même, puis étant placé dans une position d'enseignant, il doit rédiger sa solution afin de faire le corrigé. Il doit ensuite corriger, donc décoder, les productions des élèves fictifs en inscrivant des commentaires directement sur leurs copies. On demande ainsi à l'élève de décoder et de prendre position sur la production de chacun des deux élèves-fictifs, de les valider ou les invalider et d'en rendre compte par des commentaires. Les productions sont volontairement incomplètes ou imprécises amenant ainsi l'élève-enseignant à analyser le langage mathématique utilisé, la démarche proposée, les raisonnements sous-jacents, d'autres registres (les formules, les calculs et le texte de deux élèves), à expliciter les corrections requises et, idéalement, les raisons qui les sous-tendent. L'élève-enseignant ne peut, en principe, se contenter d'être dans la narration s'il veut s'acquitter de sa tâche de commenter et expliquer à ses élèves. Il doit sentir que, dans cette partie de la situation, la stratégie ostensive (« *voilà ce qu'il faut faire* ») n'est pas suffisante.

Les traces laissées par l'élève-enseignant sont révélatrices des éléments qu'il juge importants à considérer dans la communication écrite d'une stratégie. Pour décoder, l'élève doit comprendre les registres de communication des deux élèves et analyser leurs stratégies respectives. En ce sens, la situation demande une exigence quant au décodage des registres et des raisonnements présents chez les deux élèves puisque ces derniers prennent des chemins différents : l'un travaille avec le pourtour du miroir, l'autre avec une stratégie construite à partir de l'aire de sa surface. De plus, par l'analyse des productions d'élèves demandée, l'élève-enseignant peut être amené à poser un regard critique sur sa propre production (son corrigé) tout en commentant et améliorant les productions d'autres élèves. En corrigeant des productions d'élèves, il entre dans un processus de validation et de prise de conscience face à sa propre solution. Il constate deux solutions qui arrivent à une même réponse, mais d'une manière possiblement différente de la sienne. Cela force le regard sur sa propre production et suscite le questionnement sur les liens et les relations mathématiques en jeu : « *pourquoi l'élève fait cela de cette manière ?* » ; « *pourquoi ça marche ?* » ; « *quelles propriétés ou relations entrent en jeu ici ?* ». On voit donc comment les choix faits dans cette situation visent à solliciter la richesse de la communication à soi-même dans ce cas.

Par la suite, l'élève-enseignant doit expliquer à une classe fictive le fait que les deux élèves arrivent à la même quantité de carreaux à la question b) alors qu'ils ont des stratégies très différentes. Cela appelle un travail de validation. L'élève-enseignant est placé devant deux stratégies bien distinctes : une plus classique et l'autre qui utilise les aires des miroirs. Afin d'expliquer l'équivalence des résultats obtenus, il doit dépasser le discours descriptif. Il doit valider les stratégies et les mettre en correspondance. Il est appelé à nommer les différents objets mathématiques en jeu de manière plus générale en se détachant de l'aspect opératoire sur les nombres. De ce fait, les conduites de communication de premier niveau (description des actions) deviennent caduques invitant l'élève-enseignant à aller vers des stratégies de plus haut niveau telles que la justification. Enfin, l'élève doit décider entre les deux solutions proposées celle qui semble la meilleure en expliquant son choix. À ce moment, l'élève retrouve sa position « d'élève » qui s'adresse à « son enseignante ». Ici l'élève devra s'appuyer sur des arguments qui lui permettent de discriminer, entre les deux stratégies, puis il devra formuler ces arguments afin d'expliquer son choix. La prise de position intervient donc, tant dans la correction qui est faite des deux copies, que dans la réponse à la demande de choisir quelle solution est la « meilleure ».

Lors de l'expérimentation des situations dans le cadre de notre recherche, l'enseignante a d'abord présenté la situation en précisant le temps accordé et les modalités de travail. Puis les élèves ont réalisé

le problème individuellement (20 minutes) et en dyades (pour deux des situations qui ne font pas l'objet de cet article) en laissant des traces écrites de leurs résolutions. Pendant la réalisation des situations, l'enseignante interagit avec les élèves (répond aux questions, rappelle à l'ordre certains élèves, etc.). Lors du cours suivant, l'enseignante, après avoir pris connaissance des écrits des élèves, fait un retour avec le groupe-classe sur la situation.

L'analyse a été établie sur la base des productions écrites des élèves (à partir d'une grille d'analyse²), du journal de bord tenu par l'enseignante, des séquences vidéo des retours animées par l'enseignante et auxquels nous avons assistés. Nous avons également tenu un journal de nos observations pendant les présentations et les retours de chaque situation.

IV. QUELQUES RÉSULTATS DE NOTRE RECHERCHE

Dans cette section, nous présentons les principaux résultats issus de l'analyse des conduites de communication déployées par les élèves au cours de l'activité mathématique dans la situation de l'*Enseignant*. Nous montrons en particulier que certaines valeurs de variables, notamment la position attribuée à l'élève et avec qui il devait interagir (l'interlocuteur de l'élève), ont favorisé la richesse de la communication déployée.

1. *Les positions attribuées à l'élève et son interlocuteur influencent l'argumentation et l'organisation*

C'est dans le but de favoriser l'émergence du discours technologique que le choix de varier les positions attribuées à l'élève et à l'interlocuteur de l'élève a été fait. Dans la situation de l'*Enseignant*, l'élève ne s'adresse pas uniquement à son enseignante, complice des connaissances mathématiques qu'il a construites avec elle, mais il doit aussi, en tant qu'élève-enseignant, produire un corrigé, décoder puis commenter des productions d'élèves-fictifs. Les choix de valeurs des variables semblent effectivement favoriser l'argumentation des élèves dans la situation de l'*Enseignant*. Lorsqu'ils rédigent leur « corrigé », le tiers des élèves dans notre étude se situent aux niveaux d'argumentation 3 ou 4³. Il semble que le fait de dire explicitement aux élèves qu'ils sont des enseignants les a encouragés à en assumer la responsabilité : ils sont maintenant les modèles et doivent créer un corrigé qui servira à analyser les copies d'Amélie et Maxime. En effet, il a été constaté dans notre recherche que l'élève-enseignant organise et développe son discours, car il aura à porter un jugement sur des productions et à rétroagir auprès des élèves-fictifs. Il semble alors préparer un argumentaire plus étoffé : il en va de sa « crédibilité d'enseignant ».

Par ailleurs, comme pour la réalisation de leur corrigé, les élèves-enseignants semblent percevoir la responsabilité du rôle et laissent beaucoup d'éléments de communication relatifs à l'argumentation, à l'organisation, et aux savoirs mobilisés par les élèves-fictifs lorsqu'ils commentent les productions de ces derniers. Lors de notre analyse des traces de communication laissées par les élèves-enseignants sur les copies d'Amélie et Maxime nous avons noté que l'usage de notes chiffrées est prédominant. Les notes font partie des pratiques enseignantes courantes. C'est sans doute ce qui incite les élèves à y recourir en premier lieu lors de leur rétroaction. S'il s'agit d'éléments de communication importants, ils en disent peu à celui qui les reçoit (ici les élèves-fictifs) sur son niveau de maîtrise des connaissances mathématiques.

² La démarche ayant conduit à la construction de cette grille n'est pas traitée dans le présent article. Le lecteur intéressé pourra la trouver dans Labrosse (2020).

³ Les niveaux les plus élevés sur notre grille d'analyse, 4 étant le maximum.

Toutefois, nous avons aussi constaté que les élèves-enseignants formulaient des commentaires en lien avec les raisonnements et les savoirs mathématiques des deux élèves-fictifs, témoignant ainsi d'une préoccupation pour ce qui contribue à la richesse de la communication. L'*Enseignant* étant conçu pour travailler des savoirs algébriques, les élèves-enseignants portent une attention au formalisme en jeu dans les résolutions, à la rigueur et à la précision des raisonnements, comme aurait sans doute pu le faire leur enseignante. Par exemple, un des élèves met un point « ? » en encerclant la ligne inscrite par Maxime dans l'expression « $4 \times \_\_\_\_\_\_$ » et lui dit de « *continuer ses parenthèses jusqu'à la fin où il y en a besoin* ». Un autre élève réagit à l'expression « $4 \times \text{côté} + 4$ » et dit qu'il faut mettre un « x » et remplacer par « $4x+4$ ». Un autre, sur la copie de Maxime, indique « *tes parenthèses sont inutiles, car la multiplication passe avant l'addition* ». Enfin, un autre encercle la section des bonds « +4 » d'Amélie et indique que ce n'est pas vraiment une preuve mathématique. D'ailleurs, des élèves-enseignants ont refusé la stratégie d'Amélie pour la sous-question b) disant qu'une telle stratégie n'est pas mathématique puisqu'elle est construite, selon eux, sur une série d'essais.

Les commentaires des élèves-enseignants montrent aussi qu'ils accordent de l'importance à l'argumentation et à la clarté des stratégies des élèves-fictifs. Par exemple, un sujet questionne « *d'où viennent tous ces nombres ?* ». Un autre mentionne « *je ne comprends pas la formule, tu devrais nous donner un exemple* ». Un sujet demande « *où tu l'as trouvé ?* » en encerclant tous les calculs d'Amélie liés aux aires totales. Un autre mentionne à Amélie que sa démarche n'a pas de sens et qu'il ne comprend pas « *le sens de sa démarche* ». Enfin, un élève à côté des calculs d'Amélie, lui indique de mettre des titres et lui propose même deux titres potentiels pour les calculs : « *côté 1* », « *côté 2* », etc.

Pour la dernière question de la situation de l'*Enseignant*⁴, les élèves retrouvent leur rôle habituel et ils s'adressent à leur enseignante. Cette question cherche à être encore plus exigeante au regard de l'activité de communication en demandant aux élèves de prendre position sur les deux productions et en justifiant leur choix. Puisque les deux réponses sont vraies, les élèves doivent se rabattre sur d'autres éléments pour justifier leur choix. Toutefois, nos données montrent que c'est la simplicité (ou à la complexité) de la stratégie analysée qui revient le plus souvent pour justifier le choix fait. Plusieurs élèves écrivent que la stratégie d'Amélie, à leurs yeux plus complexe, est meilleure que celle de Maxime. On peut penser que certains élèves optent pour la stratégie d'Amélie parce qu'ils ne la comprennent pas bien ou la trouvent plus « savante » que celle de Maxime. En effet, comme l'ont observé Healy et Hoyles (2000), il arrive que des élèves considèrent plus convaincante une preuve simplement parce qu'ils ont de la difficulté à en suivre le raisonnement. Le fait de ne pouvoir saisir le raisonnement montre sa complexité et suggère sa validité.

Nous avons aussi constaté des justifications appuyées sur l'argumentation, le souci du lecteur et la clarté de la production. Le fait de devoir choisir entre deux « bonnes réponses » force l'élève à appuyer sa prise de position sur d'autres d'arguments. Il est ainsi conduit à réaliser une analyse plus fine des solutions en s'intéressant, notamment, à l'argumentation. Pour convaincre son enseignante qu'il fait le bon choix, une plus grande richesse dans les arguments avancés peut être déployée.

2. Des apports didactiques liés à l'exploitation de la situation de l'*Enseignant* pour l'enseignante ayant participé à la recherche

Notre recherche se centrait également sur les interactions entre l'enseignante et ses élèves lors des phases de retours des situations. On cherchait à voir si les situations proposées donnaient lieu à des

⁴ Entre les deux solutions qui te sont proposées, y en a-t-il une qui t'apparaît meilleure que l'autre ? Explique pourquoi.

interactions utiles à l'enseignante. Notre regard se portera donc sur les interactions qui ont « nourri » l'enseignante a posteriori de la passation de la situation de l'*Enseignant*.

Un premier constat est à l'effet que les solutions des deux élèves-fictifs, volontairement imparfaites, non-canoniques⁵ et qui présentent toutes deux des productions qui arrivent au bon résultat sont des leviers intéressants pour le travail de l'enseignante. Tout d'abord, elles offrent une possibilité de confronter des raisonnements de deux élèves-fictifs et de travailler la validation avec le groupe-classe. En effet, il serait étonnant que, devant les deux solutions proposées, l'enseignante maintienne les élèves en position d'attente et propose une stratégie différente sans considérer les solutions qu'elle a sous la main. Les deux solutions d'élèves-fictifs placent les élèves en position de recherche. L'enseignante interagit avec les élèves sur les solutions proposées, forçant le regard collectif sur les raisonnements dont l'un est construit à partir du périmètre et l'autre à partir de l'aire pour trouver un terme général d'une suite désordonnée. En considérant les solutions d'élèves-fictifs, elle dévolue étroitement un espace didactique aux élèves puisqu'ils sont appelés à prendre position sur la meilleure stratégie. Dans les deux retours observés, l'enseignante place les élèves en phase de validation en ouvrant les échanges sur chacune des solutions. Pour valider les raisonnements en jeu, les élèves doivent alors se référer à leurs connaissances pour développer leur argumentaire, lequel peut porter sur la validité sémantique (la référence à ces messages), syntaxique (les messages et leurs descriptions) ou pragmatique (l'échange des assertions entre les élèves de la classe par exemple) (Brousseau, 1998).

Les solutions-fictives permettent également un retour sur des savoirs ponctuels mobilisés par les élèves-fictifs au profit de la classe. Au-delà de la réponse vraie, les raisonnements sont plus finement analysés par les élèves. Conséquemment, l'enseignante peut faire une analyse plus fine des productions proposées et interagir sur des savoirs mathématiques en jeu, et sur la qualité du discours écrit des productions.

Comme autre constat, on peut voir dans l'exploitation des solutions d'élèves-fictifs, des interactions centrées sur des éléments de communication plus généraux (e.g. l'organisation de la solution) en prenant en compte les commentaires laissés par les élèves-enseignants sur les copies de Maxime et d'Amélie. Le type de rétroaction donnée aux élèves-fictifs par les élèves-enseignants est intéressant et les commentaires sont exploités par l'enseignante. La rétroaction passe beaucoup par un pointage et certains éléments qualitatifs de communication (« Bravo ! Tu peux faire mieux ». etc.). L'enseignante, lors du retour, met en évidence le recours aux notes pour communiquer : « vous auriez enlevé combien de points ici ? ». Elle retourne ainsi les élèves vers leur responsabilité d'enseignant.

La posture d'enseignant qu'adopte l'élève lui confère un rôle d'expert et il ne peut se référer à quelqu'un d'autre pour résoudre la situation. L'élève-enseignant assume la responsabilité de la validation du résultat. Dans l'*Enseignant*, l'enseignante reçoit de la part des élèves qui assument volontiers leur rôle d'enseignant un accès renouvelé aux raisonnements portant sur ceux des autres, qu'ils formulent, sous formes de commentaires et de prises de position, ce qui constitue un levier pour ajuster son enseignement.

V. DISCUSSION ET CONCLUSION

Les différents choix des valeurs des variables faits dans l'*Enseignant* visent à éloigner l'élève de la simple narration de son action et l'invitent à invoquer des arguments. L'adoption d'une posture

⁵ Mentionnons que, dans la situation de l'*Enseignant*, les dessins sont volontairement placés dans le désordre de manière à éloigner les élèves d'une stratégie canonique (institutionnalisée par l'enseignante) lorsque des motifs sont ordonnés et qu'une règle est trouvée en fonction du rang d'un terme. La présentation des dessins, de manière désordonnée croissante dans l'*Enseignant*, rend moins visible la suite et invite à d'autres stratégies.

enseignante où l'élève-enseignant doit, par exemple, expliquer à la classe, appelle une clarté et une organisation du discours pour être compris des élèves. Il s'agit donc de contraintes qui pèsent sur le travail de communication demandé à l'élève-enseignant en vue d'en solliciter la richesse. Dans notre séquence de situations, nous avons cherché à rendre caduque la possibilité d'usage par l'élève de stratégies de communication de faible niveau hiérarchique, telles que la description ou la narration de ses actions. Notre préoccupation étant de forcer l'élève à entrer dans des stratégies de communication visant, à tout le moins, la justification et, au plus haut niveau, la validation, et ce, par un jeu sur les valeurs de plusieurs variables à la fois. Nous avons constaté que l'exploitation des situations a effectivement permis le déploiement d'un travail de communication mathématique riche pour plusieurs élèves. Nous avons aussi pu montrer l'influence du choix des valeurs des variables didactiques effectués sur cette communication.

En effet, le jeu sur les valeurs des variables *position attribuée à l'élève* et *interlocuteur de l'élève* semble influencer le type d'argumentation déployée de même que l'organisation du discours. Ce résultat est particulièrement marqué lorsque l'élève est en position « d'enseignant-explicite » qui explique à des élèves-fictifs, position qui favorise une meilleure organisation et, surtout, une argumentation plus soutenue de la stratégie personnelle de l'élève-enseignant. Il apparaît que la position « d'élève-enseignant » joue sur la responsabilité de la validation du résultat assumée par l'élève. Dans une situation où les élèves adoptent une posture d'enseignant, devant rédiger leur « corrigé » et formuler des commentaires aux élèves-fictifs, les élèves-enseignants perçoivent un réel enjeu et s'engagent ainsi à commenter les copies, tant en ce qui a trait à l'argumentation, qu'aux savoirs mobilisés ou à l'organisation des productions d'élèves-fictifs. L'étude des productions des élèves-fictifs peut aussi forcer l'élève-enseignant à relancer son propre raisonnement.

Enfin, les prises de position écrites par les élèves, notamment lorsqu'ils adoptaient une posture d'enseignant, ont donné un accès privilégié à l'enseignante aux arguments invoqués pour justifier cette prise de position. Elle a ainsi pu animer un débat dans la classe afin obtenir les différents points de vue des élèves à propos de ces arguments. Les interactions sont d'autant plus riches dans une situation comme l'*Enseignant* où les deux solutions-fictives arrivent à la bonne réponse, mais avec des stratégies différentes. Les interactions sont alors centrées sur les raisonnements plutôt que sur les réponses.

RÉFÉRENCES

- Anderson, D. S. et Piazza, J. A. (1996). Changing beliefs: Teaching and learning mathematics in constructivist preservice classrooms. *Action in Teacher Education*, 17(2), 51–62.
<https://doi.org/10.1080/01626620.1996.10462833>
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, (18), 147-176. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00314724>
- Balacheff, N. (1988). *Une étude épistémologique du processus de preuve en mathématiques au collège* [Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble II]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-00326426v1>
- Bibby, T. (1999). Subject knowledge, personal history and professional change. *Teacher Development*, 3(2), 219-232.
- Bibeau, G. (1982). *L'éducation bilingue en Amérique du Nord*. Guérin.

- Black, L. (2004). Teacher-pupil talk in whole class discussions and process of social positioning within the primary school classroom. *Language and Education*, 18(5), 347–360.
<https://doi.org/10.1080/09500780408666888>
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (didactique des mathématiques 1970-1990)* (Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield). La pensée sauvage.
- Bruce, C. (2005). Teacher candidate efficacy in mathematics: Factors that facilitate increased efficacy. Dans G. A. Lloyd, S. Wilson, J. L. M. Wilkins et S. L. Behm (dir.), *Proceedings of the twenty-seventh annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 20-23 octobre 2005, Roanoke, Virginie*.
<https://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2027%202005%20Proceedings.pdf>
- Bruce, C. (2007). *L'interaction entre élèves dans un cours de mathématiques : compétition ou échange d'idées ?* (Monographie n° 1). Le Secrétariat de la littérature et de la numératie, Ministère de l'Éducation de l'Ontario.
https://assets.ctfassets.net/cfektv4t16rw/Zs0eY56Nqos8Vf8vYRshv/cd8e28b02f2aa0878ecffc04351d56bc/L___interaction-entre-___l___ves-dans-un-cours-de-math___matiques-Comp___tition-ou-___change-d___id___es-2.pdf
- Chevallard, Y. (1991a). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1991b). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.
- Chevallard, Y. (1998, 4-11 juillet). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique* [Cours]. Université d'été « Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques », La Rochelle.
- Cobb, P. et Bauersfeld, H. (1995). Introduction: The coordination of psychological and sociological perspectives in mathematics education. Dans P. Cobb et H. Bauersfeld (dir.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (p. 1-16). Lawrence Erlbaum Associates.
- Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-262. <https://doi.org/10.1007/BF00368340>
- Fiola, A. (2005). *Étude de l'impact d'une approche didactique invitant des élèves en difficulté d'apprentissage à jouer le rôle d'enseignant lors d'activités de mise en équation algébrique* [Mémoire de maîtrise, Université de Montréal].
- Giroux, J. (2004). Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(2), 303-327.
- Healy, L. et Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.
- Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C. et Gamoran-Sherin, M. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal of Research in Mathematics Education*, 35(2), 81-116.
- Labrosse, P. (2020). *Conception et mise à l'essai d'une séquence de situations engageant un travail de communication en algèbre en 2^e secondaire : des apports pour l'élève comme pour l'enseignant ?* [Thèse de doctorat, Université de Montréal]. <https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/24276>
- Odier-Guedj, D. (2019). *Favoriser l'interaction*. Université du Québec à Montréal.
- Radford, L. et Demers, S. (2004). *Communication et apprentissage : repères conceptuels et pratiques pour la classe de mathématiques*. Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

René de Cotret, S. (2014). Espaces de travail/espaces de connaissances : Peut-on imaginer une navette pour y voyager ? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4-II), 401-416. <https://doi.org/10.12802/relime.13.17420>

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. Dans H. Steinbring, A. Sierpinska et M. G. Bartolini-Bussi (dir.), *Language and communication in the mathematics classroom* (p. 30-63). National Council of Teachers of Mathematics.

ANNEXE

Tableau 1 – Variables et leurs différentes valeurs

Variables	Valeurs de deux variables
Position attribuée à l'élève Position dans laquelle est placé l'élève pour effectuer la tâche en situation (liée au contrat didactique)	<i>Élève</i> : position « habituelle » <i>Co-équipier</i> : Après avoir réalisé individuellement le problème, l'élève interagit avec un autre élève pour réaliser une production écrite commune. <i>Enseignant implicite</i> : Sans être explicitement placé en position d'enseignant, l'élève est appelé à se prononcer sur la production d'un élève. Il est détourné de son rôle habituel afin de décoder et commenter des stratégies d'élèves-fictifs. <i>Enseignant explicite</i> : en adoptant une posture d'enseignant, l'élève est invité en quelque sorte à assumer la responsabilité du savoir en jeu et donc de sa validité. S'il accepte cette invitation, la position depuis laquelle il aborde le problème risque de faire appel à un autre milieu, c'est-à-dire que d'autres connaissances risquent d'être mobilisées (Fiola, 2005 ; René de Cotret, 2014). Il s'agit d'une forme de stratagème pour aider l'élève à puiser dans l'ensemble de ses connaissances et pour l'amener à justifier davantage les résultats obtenus.
Interlocuteur de l'élève À qui l'élève s'adresse, avec qui il interagit	<i>Enseignante</i> : contrat didactique « normal », l'élève voit une hiérarchie/autorité probable attribuée à l'enseignante. Des codes mathématiques sont communs, des savoirs institués sont aussi partagés. <i>Co-équipier</i> : égalité des protagonistes, pas de hiérarchie, arguments d'autorité peu probables. <i>Élèves-fictifs</i> : en position d'enseignant, l'élève s'adresse aux élèves-fictifs qui ont produit des solutions. <i>Classe-fictive</i> : en position d'enseignant, une question dans la situation invite l'élève à expliquer à la classe l'équivalence de deux stratégies. « <i>Quidam</i> » : référence au « langage » mathématique moins probable ou moins pertinent ou efficace, codes mathématiques non nécessairement communs.

Figures 2 et 3 – Solutions présentées par Maxime et Amélie à la situation de l'enseignant

CATÉGORISATION DE QUELQUES PROBLÈMES DE PROPORTIONNALITÉ

| MRABET* SLIM ET OUNI** MOHAMED WARDI

Résumé | Dans ce travail, nous traitons la question de la catégorisation des problèmes de proportionnalité. Nous nous plaçons dans le contexte de l'enseignement primaire tunisien, proposons des situations qui relèvent de la proportionnalité et varions les données suivant une logique que nous expliquons. Les représentations sous forme de tableaux ont le double rôle de permettre de mieux comprendre les relations entre les données et les inconnues, et d'aider les élèves à unifier les procédures de résolution.

Mots-clés : proportionnalité, catégorisation, classification, représentation, problèmes

Abstract | In this work, we treat the question of categorizing the problems of proportionality. We place ourselves in the context of Tunisian primary education, propose situations related to the proportionality principle and vary the data according to a logic that we explain. We use tabular representation playing two possible roles: allowing a better understanding of the relationships between data and unknowns and helping pupils to unify some resolution procedures.

Keywords: Proportionality, categorization, classification, representation, problems

I. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

Dans le cadre de ce groupe de travail, nous essayons d'éclairer le lien entre enseignement et apprentissage à partir des choix institutionnels relatifs à la proportionnalité, et de l'analyse des résultats des productions des élèves. La prise en compte de la spécificité de ces choix qui conditionnent les activités des élèves, pourrait mettre à la disposition des enseignants, inspecteurs et concepteurs des manuels un outil qui leur permet de faire les adaptations didactiques nécessaires.

Après une longue expérience avec le système d'enseignement tunisien, nous partons de notre inquiétude quant aux faibles résultats de nos élèves de 6^e année du premier cycle de l'enseignement de base tunisien (élèves de 11 à 12 ans) en mathématiques, dans le concours d'accès aux collèges pilotes. À l'instar de beaucoup d'enseignants, nous nous sommes posé la question des raisons qui expliquent ces résultats. Les difficultés à traiter une situation de proportionnalité, à mettre en œuvre des stratégies pour sa résolution et à délimiter des relations entre les concepts qui entrent en jeu, sont au cœur de cette question, puisque le thème de la proportionnalité est souvent central dans ces concours. Après plusieurs années d'enseignement de ce niveau, nous pouvons affirmer que les élèves éprouvent en général des difficultés notables liées à ce thème, et que certains enseignants ont du mal à expliquer à leurs élèves les procédures de résolution d'une manière claire et accessible à tous. Ainsi, nous rejoignons deux questions de Vergnaud (1990) :

Peut-on trouver des schèmes pour regrouper ces problèmes dans des classes bien déterminées afin d'unifier les procédures de leur résolution ?

Peut-on utiliser les représentations graphiques, les nombres de données et d'inconnues dans une situation pour mieux comprendre les relations qu'entretiennent les données et les inconnues et de regrouper celles qui se ressemblent ?

* Université de Carthage – Tunisie – mrabet_slim@yahoo.fr

** E.P. Bouhssina 2, Sousse – Tunisie – ouniwardi@yahoo.fr

En outre, nous nous interrogeons sur la relation mise en jeu entre les termes de la proportionnalité, et sur la façon de distinguer les cas où il s'agit d'une addition des cas où on fait la multiplication des termes donnés.

II. CADRE THÉORIQUE

En didactique, le travail sur les problèmes arithmétiques est un enjeu fort de l'enseignement mathématique de l'école. Le défi est de comprendre ce qui se joue pour le sujet dans la résolution, notamment cette dialectique (mentale) entre trouver une stratégie efficace dans la mémoire de l'élève des problèmes analogues, et l'élaboration d'une nouvelle stratégie si le problème n'est pas lié à une ancienne stratégie connue (Houdement, 2017). Dans ce travail, nous partons de l'idée qu'entraîner les élèves à catégoriser les problèmes en traitant leur structure profonde induit de meilleures performances (Iacono et al., 2021), et nous tentons d'aider les élèves à conceptualiser la notion de proportionnalité, indispensable à la compréhension de la société dans laquelle nous évoluons.

Rappelons d'abord que deux grandeurs liées sont dites proportionnelles si la multiplication d'une valeur par un nombre dans une des deux grandeurs entraîne une multiplication de la valeur liée par le même nombre dans l'autre. L'étude des rapports et proportions a autrefois fait l'objet de recherches mathématiques qui ont eu une importance considérable dans le développement de certains concepts (Dahan – Dalmedico, Peiffer, 1995). Puis, l'algèbre a rendu caduque la théorie des proportions qui a été remplacée par l'application linéaire. L'évolution de la transposition didactique de la proportionnalité passe par trois périodes alors essentielles : celle de la « règle de trois » des « mathématiques traditionnelles », celles des fonctions linéaires des « mathématiques modernes », et celle de tableaux de proportionnalité des « mathématiques concrètes » (Pluvineau et Dupuis, 1981). Dans ce qui suit, nous n'abordons pas la question des bases théoriques nécessaires à la compréhension de la notion de proportionnalité en termes de « théorie des proportions » et en termes de « fonctions linéaires » (Alpha et al., 2021; Simard, 2012; Hersant, 2005; Comin, 2000). Nous présentons ici un dispositif d'apprentissage qui favoriserait chez des élèves la capacité à recatégoriser des problèmes de proportionnalité, en développant leur flexibilité cognitive, et évoquons et discutons de la question de l'intérêt des dispositions tabulaires, notamment en primaire (Voisin, 2017).

Un cadrage théorique faisant appel à la théorie des champs conceptuels et à la notion de schèmes (Vergnaud, 1990) semble pertinent. Pour reconnaître une situation, le sujet semble passer par la construction d'invariants opératoires qui sont les éléments centraux des schèmes. Ces derniers structurent la prise d'information et organisent des conduites particulières pour chaque classe de problèmes (Simard, 2012). Pour analyser la structure mathématique du problème de proportionnalité, Vergnaud a développé les relations qui entretiennent les questions et les différentes données de l'énoncé, et a souligné l'importance du concept d'homomorphisme dans l'analyse des rapports entre le réel et sa représentation, tant dans la conceptualisation que dans la symbolisation. Sur ce point, Levain (1992) remarque que les énoncés relevant d'une même structure mathématique appartiennent à une même classe de problèmes et que, en fonction de la donnée recherchée, une même classe de problèmes pourrait se subdiviser en plusieurs catégories, et recommande de présenter plus systématiquement aux élèves les différentes structures de problèmes en faisant varier très largement les valeurs numériques (petit entiers, grand entiers, décimaux supérieurs et inférieurs à 1). Voisin (2017) remarque que les choix relatifs aux variables didactiques numériques ont une incidence sur la réussite des élèves confrontés à des problèmes relevant de la proportionnalité. Sur ce point, nous pensons qu'il serait important de présenter systématiquement aux élèves les différentes structures du problème posé, en faisant varier les données dans une classe de situations qui se ressemblent, et ce, pour les aider à

constituer un répertoire de procédures organisées et favoriser la compréhension du fondement des problèmes de proportionnalité.

III. MÉTHODOLOGIE

Pour creuser cette idée, nous avons consulté et analysé quelques sujets de mathématiques proposés dans ce concours, tout en mettant l'accent sur le thème de proportionnalité. Nous avons regroupé les épreuves de cinq concours proposés durant les années allant de 2007 à 2011, à raison de 3 problèmes dans chaque sujet de l'épreuve du concours. Parmi les 15 problèmes retenus, 5 relèvent de la proportionnalité. Nous avons procédé à une représentation sous forme de tableaux de chaque situation de proportionnalité, précisant à chaque fois ce qui est donné et ce qui demandé, et expliquant les moyens de passage d'une représentation sous forme de tableaux aux procédures de résolution. Nous nous inspirons des travaux de Vergnaud (1990) pour mettre en avant le lien entre les données du problème et les conséquences sur l'apprentissage des élèves. Dans chaque problème, les données et les inconnues sont classées dans un tableau formé de 3 colonnes et 2 lignes. Nous nous contentons des problèmes de proportionnalité de pourcentage, qui sont les plus fréquents en 6^e année primaire, et qui posent des problèmes pour les élèves. Dans chaque cas, nous avons toujours une quantité initiale, exprimée soit en pourcentage (ligne 1, colonne 1), soit en valeur réelle qui correspond à ce pourcentage (ligne 2, colonne 1), qui va subir soit une augmentation, soit une diminution. La forme générale des deux tableaux obtenus est la suivante :

Tableau 1

	L'initial	Augmentation	L'initial + Augmentation
M1	100 %	a%	b%
M2	x	y	Z

M₁ : grandeurs exprimées en pourcentage.

M₂ : valeurs correspondantes aux grandeurs exprimées en pourcentage

Tableau 2

	L'initial	Diminution	L'initial - Diminution
M1	100 %	a%	b%
M2	x	y	Z

IV. CLASSIFICATION DES PROBLÈMES DE PROPORTIONNALITÉ : UNE NOUVELLE APPROCHE

Cette approche suit le schéma suivant :

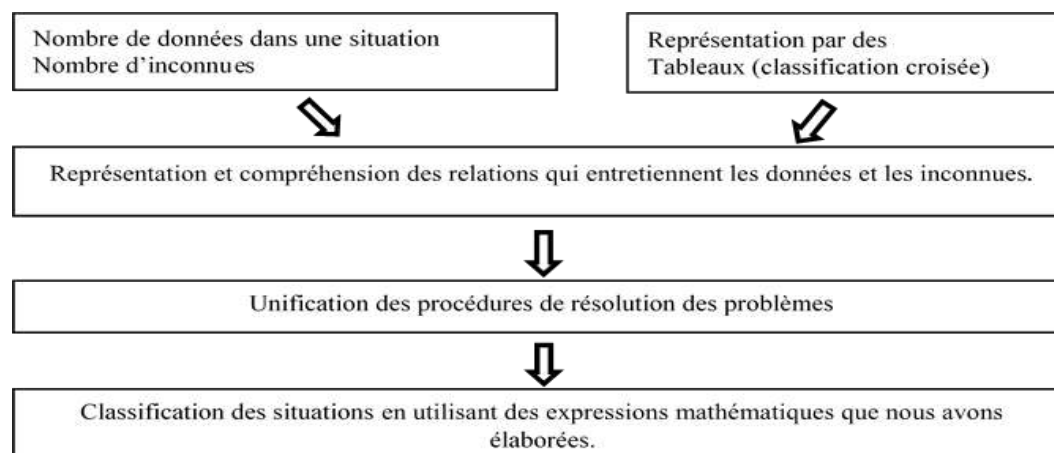


Figure 1 – procédure de résolution

Dans ce qui suit, nous distinguons des catégories et des classes de problèmes de proportionnalité données compte-tenu des variables suivantes : le nombre de données et d'inconnues, la nature de la proportionnalité (simple ou simple composée) et la nature des données dans l'espace de mesure M_1 (entières ou fractionnaires).

1. *Catégorie 1 : classe des problèmes : C_5^2-1 où les grandeurs de l'espace de mesure M_1 sont des entiers*

Cette classe est représentée comme suit :

Tableau 3

	Lecture Verticale 1 ^{ère} et 2 ^{ème} colonne		Lecture Verticale 2 ^{ème} et 3 ^{ème} colonne	
M₁				
Lecture Horizontale 1 ^{ère} ligne (1)	100%	a%	b%	
M₂	x	y	z	
Lecture Horizontale 2 ^{ème} ligne (2)				
	Lecture verticale 1 ^{ère} et 3 ^{ème} colonne			

Remarquons que ce tableau permet de distinguer deux cas, suivant qu'il s'agisse dans le problème posé d'une augmentation ou d'une diminution de la quantité initiale.

Pour une augmentation, nous avons les égalités

$$100 + a = b, \quad x + y = z \quad \text{et} \quad 100y = ax, \quad az = by \quad \text{et} \quad 100z = bx$$

Pour une diminution, nous avons les égalités : $100 - a = b, \quad x - y = z$

Nous avons ainsi un tableau de six cases « classification croisée : 2 lignes et 3 colonnes ».

Lecture horizontale :

1^{er} ligne : relations additives (grandeurs exprimées en pourcentage).

2^e ligne : relations additives (valeurs correspondantes aux grandeurs exprimées en pourcentage).

Lecture verticale : il s'agit d'une proportionnalité simple pour chaque paire de colonnes choisie.

Dans cette catégorie, nous avons une donnée invariable qui occupe la 1^{re} case de la 1^{re} ligne (le taux de pourcentage de la quantité initiale est « 100 % »), et deux données variables qui peuvent occuper les 5 autres cases, avec la contrainte suivante : la 1^{re} inconnue qu'on va chercher doit être placée sur une même ligne avec deux données. Remarquons que, par conséquent, le cas où les deux données variables occupent la 2^e et la 3^e case de la 1^{re} ligne est à éliminer. Dans cette catégorie, le nombre de cas possibles est donc : $C_5^2 - 1 = 9$. Ce résultat permettrait d'unifier les méthodes de résolution pour des problèmes qui semblent différents, mais qui font réellement partie d'une même classe.

Voici deux exemples des 9 cas possibles, le travail sur le reste des cas est similaire.

Exemple 1

Tableau 4

(1)	100 %	a%	b ? %
(2)	x	y ?	z ?
	(1)	(2)	(3)

On a: $100 + a = b$; $y = \frac{ax}{100}$

Tableau 5

(1)	100 %	a%	b ? %
(2)	x	y ?	z ?
	(1)	(2)	(3)

On a: $b = 100 - a$; $y = \frac{ax}{100}$

Exemple 2

Tableau 6

(1)	100 %	a%	b ? %
(2)	x ?	y	z ?
	(1)	(2)	(3)

On a $100 + a = b$; $x = \frac{ay}{100}$

Tableau 7

(1)	100 %	a%	b ? %
(2)	x ?	y	z ?
	(1)	(2)	(3)

On a $b = 100 - a$; $x = \frac{ay}{100}$

2. *Catégorie 2 : cas des problèmes de la proportionnalité simple composée, de la classe $C_5^2 - 1$*

Exemple : Une jupe coûtait 90^{DT}, son prix augmente de 10 % puis augmente de 15 %. Quel est son prix final ?

Pour répondre à cette question, l'élève doit remplir les cases d'un premier tableau.

Tableau 8

100 %	10 %	inc1 ? %
90 ^{DT}	inc2 ?	inc3 ?

$inc_1 = 100 \% + 10 \% = 110 \%$; $inc_2 = \frac{90 \times 10}{100} = 9^{DT}$; $inc_3 = 90 + 9 = 99^{DT}$ / ou $\frac{9 \times 110}{10} = 99^{DT}$ /
ou $\frac{90 \times 110}{100} = 99^{DT}$

Puis, il remplit les cases d'un deuxième tableau.

Tableau 9

1 = 100 %	15 %	inc1 ? %
99 ^{DT}	inc2 ?	inc3 ?

$inc_1 = 100 \% + 15 \% = 115 \%$; $inc_2 = \frac{99 \times 15}{100} = 14^{DT},850$; $inc_3 = 99 + 14,850 = 113^{DT},850$
ou $inc_3 = \frac{14,850 \times 115}{15} = 113^{DT},850$ ou $inc_3 = \frac{99 \times 115}{100} = 113^{DT},850$

Les contraintes de l'emplacement des variables et des données étant les mêmes que les cas précédents, les problèmes de la proportionnalité simple composée font partie de la catégorie $C_5^2 - 1$: deux données doivent occuper deux des cinq cases restantes (à part la première case de la première ligne) ; il y a toujours un cas à éliminer où toutes les données sont alignées).

À partir de ce résultat, nous reprenons les sujets des concours tunisiens où tous les problèmes proposés font partie de cette catégorie (voir Annexes).

Dans l'histogramme suivant, A désigne le cas d'une augmentation ; B le cas d'une diminution. les résultats obtenus sont les suivants :

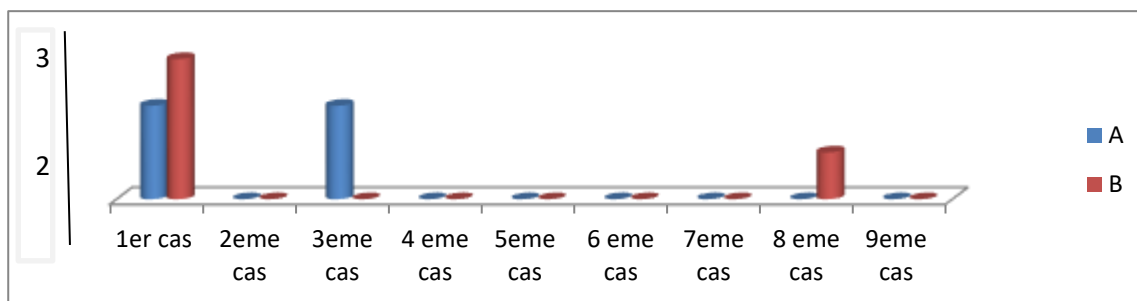


Figure 2 – Les 9 cas de la catégorie C_5^2-1

Nous avons remarqué que :

- Un premier cas est répété 5 fois, un deuxième cas est répété 2 fois et un troisième cas est repris une seule fois.
- Tous les autres cas ne font pas parties des sujets des concours. L'apprenant est testé deux fois dans un même cas à la même session. Ceci pose une question principale quant aux critères mis en place par les responsables de la préparation de ces épreuves.

3. Catégorie 3 : La classe des problèmes : $C_7^3 - 1$

Cette catégorie est représentée selon le tableau suivant :

M_1	$\frac{d}{d}$	$\frac{a}{d}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{c}{d}$
M_2	x	x_1	x_2	x_3
	(1)	(2)	(3)	(4)

Nous avons un tableau de huit cases (classification croisée de 2 lignes et 4 colonnes).

Les relations reliant les données du tableau

$$d = a + b + c ; x = x_1 + x_2 + x_3 ; ax = dx_1 ; bx = dx_2 ; cx = dx_3$$

$$ax_2 = bx_1 ; bx_3 = cx_2 ; cx_1 = ax_3$$

Lecture horizontale :

- 1^{re} ligne : relations additives (grandeurs exprimées en fraction)
- 2^e ligne : relations additives (valeurs correspondantes aux grandeurs exprimées en fraction)

Lecture verticale : il s'agit d'une proportionnalité simple pour toutes les paires de colonnes choisies.

Dans cette catégorie de situations, nous avons une donnée invariable qui occupe la 1^{re} case de la 1^{re} ligne ($\frac{d}{d} = 1$) et 3 données variables qui peuvent occuper les 7 autres cases avec toujours la même condition : la 1^{re} inconnue qu'on va chercher doit être sur la même ligne avec 3 données, et le même cas à éliminer : lorsque les 3 données variables occupent la 2^{eme}, la 3^{eme} et la 4^{eme} cases de la 1^{re} ligne.

Le nombre de situations possibles relativement à cette catégorie est : $C_7^3 - 1 = 34$

Exemple : Un agriculteur exploite un champ dont la superficie est de 160 hectares comme suit :

Tableau 10

	Superficie totale	Superficie cultivée en blé	Superficie plantée en oliviers	Superficie cultivée en légumes
Les fractions qui les représentent	$1 = \frac{8}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{inc_1?}{8}$
Superficie en hectares	160 hectares	inc ₂ ?	Inc ₃ ?	Inc ₄ ?

L'élève peut suivre les étapes suivantes

$$inc_1 = \frac{8}{8} - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{8}; inc_2 = \frac{160 \times 2}{8} = 40 \text{ hectares}; inc_3 = \frac{40 \times 3}{2} = 60^h \text{ ou } \frac{160 \times 3}{8} = 60 \text{ hectares}$$

$$inc_4 = inc_3 = \frac{160 \times 3}{8} = 60 \text{ hectares ou } 160 - (40 + 60) = 60 \text{ hectares.}$$

Ce problème fait partie de la classe $C_7^3 - 1$: trois données variables peuvent occuper 7 places (la première case de la première ligne est toujours donnée) avec un cas à éliminer, lorsque toutes les données s'alignent.

Le nombre de situations possibles dans cette classe est $C_7^3 - 1 = 34$

Mise en application

En 2017, nous avons fait l'expérience avec des élèves de deux classes de sixième année primaire. Nous avons choisi arbitrairement 18 élèves de chaque classe, puis que nous avons au total 18 situations qui relèvent du cas $C_5^2 - 1$. Nous avons réparti les élèves sur trois groupes de six élèves chacun, et nous leur avons demandé de résoudre six situations en 60 minutes, à raison d'une situation toutes les 10 minutes. Toutes les situations portent sur la proportionnalité ou sur le calcul de pourcentage.

Pour les groupes de la première classe, aucune aide n'est donnée aux élèves. Les résultats obtenus sont les suivants :

Groupes de la première classe	Pourcentage de réussite
situation 1 (travail en groupe)	50 %
situation 2 (travail individuel)	33.33 %
situation 3 (travail en groupe)	55.55 %
situation 4-5-6 (travail individuel)	39.3 %

Pour les groupes de la deuxième classe, il est demandé aux élèves de remplir deux tableaux vierges du type suivant (suivant qu'il s'agit d'une augmentation ou d'une diminution), avant de procéder à la résolution des situations.

100 %		

L'élève est appelé à remplir le tableau avec des données numériques. La première ligne est consacrée aux pourcentages ; la deuxième aux valeurs numériques correspondantes.

Les résultats obtenus sont les suivants :

Groupes de la deuxième classe	Pourcentage de réussite
situation 1 (travail en groupe)	66.6 %
situation 2 (travail individuel)	50 %
situation 3 (travail en groupe)	83.3 %
situation 4-5-6 (travail individuel)	88.88 %

Voici un exemple des situations proposées pour la deuxième classe :

Le nombre d'élèves d'une école était 600 l'année dernière. Cette année, ce nombre a augmenté de 90 élèves.
Cherchez le pourcentage du nombre d'élèves de cette année par rapport à celui de l'année dernière.

Dans cette situation, l'élève doit d'abord remplir le tableau suivant :

100 %	inc 2	inc 3
600	90	inc 1

Il cherche les inconnues :

$$inc1 = 600 + 90 = 690$$

$$inc2 = \frac{90 * 100}{600} = 15\%$$

$$inc3 = 100\% + 15\% = 115\% \text{ ou encore } inc3 = \frac{690 * 15}{90} = 115\%$$

$$\text{ou encore } inc3 = \frac{690 * 100}{600} = 115\%$$

Après ces exemples, nous avons remarqué que le taux de réussite des élèves a nettement augmenté. Les quelques erreurs qui persistent proviennent le plus souvent des erreurs de calcul ou d'une mauvaise compréhension de la situation.

V. CONCLUSION

Pour conclure, nous ne prétendons pas apporter une solution immédiate aux difficultés d'enseignement de la proportionnalité, mais nous espérons avoir nourri la réflexion des enseignants sur le fait que, si l'on veut que les élèves progressent dans la résolution de problèmes de proportionnalité, on peut penser à institutionnaliser des techniques (Hersant, 2005). Dans notre lecture des épreuves des concours de mathématiques, nous avons cherché à déchiffrer la logique derrière la variation des valeurs numériques dans les problèmes proposés. Le codage que nous proposons définit une catégorie spécifique à partir des nombres de données variables et d'inconnues, avec des classes de problèmes à l'intérieur de chaque catégorie en fonction de la nature des données (entières ou fractionnaires) et/ou la nature de la proportionnalité (simple ou composée). Les procédures de résolution qui appellent des tableaux convenablement remplis font créer chez les élèves des invariants opératoires pour unifier la manière de résolution des problèmes d'une même classe. Remarquons que n'avons pas tenu compte de toutes les variables didactiques qui peuvent intervenir, mais notre méthode de catégorisation semble réduire les difficultés qui pourraient apparaître par la variation des catégories

de situation. En effet, une première expérience que nous avons faite avec des élèves de 6^e année primaire a montré que l'utilisation des tableaux de proportionnalité, dans cet esprit de catégorisation, a permis d'avoir, dans les différentes catégories, des progrès importants dans les productions des élèves. Ces derniers qui ont pu construire des réflexes pour fixer et distinguer les cases connues des cases inconnues, et des techniques pour la recherche des inconnues après les avoir ordonnés, mais ce travail est à creuser.

Cette idée de catégorisation qui se base sur des formules simples, pourrait être au service des enseignants de mathématiques du primaire, pour leur permettre de montrer aux élèves de nouvelles techniques de résolution. En outre, les expressions $C_p^n - 1$ peuvent être traduites grâce à un langage de balisage (HTML) et un langage de programmation (JavaScript) en un produit exécutable par un ordinateur, et peuvent donc servir comme moyen de validation des procédures utilisées, et de contrôle des résultats. Un tel langage pourrait-il contribuer à l'amélioration de l'auto-apprentissage des élèves et de l'apprentissage à distance ? Il nous semble que cette piste mérite d'être explorée.

RÉFÉRENCES

- Alpha, O. et Almouloud, A. A. (2021). Conceptions des enseignants du fondamental I dans le traitement des Situations-problèmes de proportionnalité. *Revista matematica, Ensino e Cultura*, 16 , 197-230.
- Comin, E. (2000). Proportionnalité et fonction linéaire. Caractère, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire [Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-00827905v1>
- Dahan-Dalmedico, A. et Peiffer, J. (1995). *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*. Seuil.
- Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères IREM*, (59), 5-41. <https://hal.science/hal-00450476/document>
- Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, (100), 59-78.
- Iacono, É., Gros, H. et Clément, E. (2021, décembre). *Flexibilité cognitive et processus de catégorisation dans la résolution de problème de proportionnalité : une étude en milieu scolaire* [Communication]. 61^e congrès de la Société Française de Psychologie, Tours, France. <https://hal.science/hal-03379086/document>
- Levain, J. P. (1992). La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 139-161. <https://doi.org/10.1007/BF00588053>
- Pluvinaige, F. et Dupuis, C. (1981). La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(2), 165-212. <https://revue-rdm.com/1981/la-proportionnalite-et-son/>
- Simard, A. (2012). Reconnaissance de situations de proportionnalité en CM2–6^e. *Grand N*, (90), 49-68.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133-170.
- Voisin, S. (2017). L'enseignement de la proportionnalité : une expérimentation en classe de SEGPA. *Grand N*, (103), 36-56.

ANNEXES

Les 9 cas possibles de la catégorie $C_5^2 - 1$; a et b désignent des données.

1^{er} cas

100 %	a%	inc ₁ % ?
b	inc ₂ ?	inc ₃ ?

2^e cas

100 %	a%	inc ₁ % ?
inc ₂ ?	b	inc ₃ ?

3^e cas

100 %	a%	inc ₁ %
inc ₃ ?	inc ₂ ?	b

4^e cas

100 %	inc ₁ %	a%
b	inc ₂ ?	inc ₃ ?

5^e cas

100 %	inc ₁ %	a%
inc ₂ ?	b	inc ₃ ?

6^e cas

100 %	inc ₁ %	a%
inc ₃ ?	inc ₂ ?	b

7^e cas

100 %	inc ₂ %	inc ₃ %
a	b	inc ₁ ?

8^e cas

100 %	inc ₂ %	inc ₃ %
a	inc ₁ ?	b

9^e cas

100 %	inc ₂ %	inc ₃ %
inc ₁ ?	a	b

**GT10 | ENSEIGNEMENT
AUPRÈS DE PUBLICS
SPÉCIFIQUES OU DANS
DES CONTEXTES
PARTICULIERS**

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL 10

ENSEIGNEMENT AUPRÈS DE PUBLICS SPÉCIFIQUES OU DANS DES CONTEXTES PARTICULIERS

| DUPRÉ* FRÉDÉRIC, KOUDOGBO** JEANNE, THEIS*** LAURENT ET HOULE**** VIRGINIE

Notre groupe de travail a réuni 29 participants avec des expériences et positions professionnelles variées : doctorant-es, conseiller-ères pédagogiques, enseignant-es, chercheur-euses et retraité-es. Les contributions étaient issues de quatre pays ou province (Côte d'Ivoire, Québec [Canada], France et Suisse), dont 16 textes qui ont alimenté les réflexions du groupe.

Ce groupe s'inscrivait à la fois dans une histoire et dans le moment présent. D'un point de vue historique, depuis EMF 2006, la question de l'enseignement auprès de publics spécifiques ou dans des contextes qualifiés de difficiles (puis de particuliers) est travaillée sous différentes formes. Si dans un premier temps les élèves désignés à besoins particuliers étaient considérés comme posant des problèmes d'enseignement, un nouvel angle d'analyse se développe depuis quelques années. Il s'agit dorénavant d'étudier les difficultés liées à l'impératif d'accessibilité de manière systémique en les considérant comme celles du système didactique dans sa globalité.

Dans le contexte actuel, nos différents systèmes éducatifs sont engagés dans des politiques en faveur d'une éducation inclusive qui recouvre des réalités locales différentes. Nos différents pays sont confrontés à une myriade de défis en matière d'équité, d'égalité et d'inclusion. La conférence de Louise Poirier, lors de ce colloque EMF 2025, « Les mathématiques et leur enseignement pour atteindre une responsabilité sociale et culturelle » a particulièrement fait écho aux travaux menés dans le GT10.

Les 16 textes travaillés nous ont amenés à choisir un format qui pouvait sembler déroutant a priori : cinq minutes de présentation, les questionnements de deux relecteur-rices désigné-es puis une discussion au sein du groupe. Nous présentons une synthèse des contributions au sein de notre GT10, en fonction des journées de travail, suivie de points de discussion et de questions.

I. SYNTHÈSE DES CONTRIBUTIONS

La première journée s'est articulée autour de l'enseignement des mathématiques à des publics spécifiques et plus précisément des élèves atteints d'un trouble du spectre de l'autisme. Tout d'abord, **Atkins** a montré dans son texte comment les difficultés d'expression verbale d'une élève autiste empêchent la négociation du contrat didactique et la dévolution dans une classe où les élèves handicapés sont accompagnés par une enseignante en adaptation scolaire et une préposée aux élèves handicapés. Ensuite, **Kouamé** s'intéresse à l'impact des pratiques enseignantes sur l'engagement des élèves autistes à partir d'un questionnaire et d'observations en classe. Le texte montre que malgré une volonté politique, l'opérationnalisation de la politique inclusive rencontre de nombreuses difficultés

* Coresponsable du groupe de travail n° 10 – INSEI Groupe de recherche sur le handicap, l'accessibilité, les pratiques éducatives et scolaires – France – frederic.dupre@insei.fr

** Coresponsable du groupe de travail n° 10 – Université de Sherbrooke, CRIDid, CREA, CREAS et SAPIEMS – Canada – jeanne.koudogbo@usherbrooke.ca

*** Coresponsable du groupe de travail n° 10 – Université de Sherbrooke – Canada – laurent.theis@usherbrooke.ca

**** Correspondante du comité scientifique – Université du Québec à Montréal – Canada – houle.virginie@uqam.ca

dans le contexte ivoirien. Enfin, **Diomande et Boa** s'intéressent aux difficultés déclarées dans la mise en œuvre d'activités prénomériques à partir d'une enquête par questionnaire menée dans des écoles d'Abidjan auprès de douze enseignants.

Lors de la deuxième journée, **Dupuis-Brouillette et al.**, présente une démarche collaborative avec une enseignante du début du primaire pour soutenir une élève présentant des troubles langagiers dans l'apprentissage de concepts géométriques. Le texte montre d'une part comment un surinvestissement du vocabulaire peut mettre en difficulté l'élève ayant un trouble langagier et comment le recours au langage non-verbal lui permet, en revanche, de s'engager dans des apprentissages géométriques. La deuxième communication de **Lesnes et Peteers** décrit la mise en œuvre d'une séquence à visée inclusive portant sur la symétrie axiale, basée sur les principes de la pédagogie universelle. Les auteurs y analysent comment des élèves à besoins particuliers du primaire s'engagent dans la résolution d'une situation adidactique des napperons de Peltier (2000-2001) et quelles procédures de résolutions ils développent. Dans la troisième communication du jour, **Vendeira et al.** ont présenté le dispositif développé par le groupe d'élèves, le jeu de tâches, à l'intention d'élèves de l'enseignement spécialisé. Ils illustrent à l'aide d'un jeu de tâches autour de la construction d'hexagones réguliers les différents moments du dispositif : l'exploration du milieu par les élèves, le jeu de tâches en tant que tel et la narration de la situation. La dernière communication de la journée de **Petitfour** s'est intéressée à la conception d'une situation de formation à l'enseignement de la géométrie à des élèves de 9 à 11 ans. Elle y développe notamment des critères de réussite d'une construction instrumentée, à savoir la précision d'une construction et la justesse de la construction et elle relate les analyses faites par 50 étudiants en formation des enseignants des résultats d'une tâche de construction d'un carré réalisée par des élèves de cours moyen (CM).

La troisième journée comprenait des communications qui comportaient des dimensions de co-enseignement ou de collaborations entre chercheur-euses et enseignant-es. À ce propos, **Dupré** analyse les effets de la mise en œuvre de la situation robuste de Brousseau, voitures/garages, dans deux séances de coenseignement dans une classe spécialisée à sous-effectif en France. Dans ces conditions, il cherche à savoir si le coenseignement est suffisant pour favoriser l'accès aux savoirs visés ou si des obstacles didactiques existent. Ainsi une préparation conjointe des séances est notée, mais la mise en œuvre révèle qu'un des enseignants n'intervient pas sur les objets de savoir, jouant plutôt un rôle préventif de gestion de comportements d'élèves. En somme, une relation d'enseignement individuelle semble être privilégiée et une situation robuste ne suffit pas à elle seule à lever les obstacles existants. Considérant l'apport potentiel du travail des orthopédagogues au sein des classes pour favoriser l'apprentissage en mathématiques de l'ensemble des élèves, **Houle et Ghailane** se sont quant à elles penchées sur les conditions didactiques favorables au coenseignement enseignante-orthopédagogue. Leur étude montre notamment l'intérêt, pour répondre à l'hétérogénéité des connaissances des élèves, de miser sur des situations qui ouvrent sur une diversité de stratégies et qui permettent à l'enseignante et à l'orthopédagogue de jouer sur les valeurs des variables didactiques, selon les conduites des élèves. Tandis que **Bergeron et al.** ont analysé les potentialités et défis d'une recherche partenariale avec des conseillers pédagogiques, enseignant-es et orthopédagogues pour les soutenir dans une démarche de coenseignement de tâches pour développer la pensée algébrique et favoriser l'accessibilité didactique. Le travail conjoint semble être un atout pour maintenir et développer une sensibilité envers l'accessibilité didactique. Outre le coenseignement, les rencontres de co-construction sont nécessaires pour saisir les théories d'action professionnelle. Finalement, **Peteers** examine l'impact du coenseignement en résolution de problèmes sur les pratiques d'un binôme d'enseignantes (spécialisée et titulaire de classe) au cours d'une année, liées à l'exercice de leur vigilance didactique. Deux processus s'en émergent : l'enseignante spécialisée semble bouleverser les pratiques de l'enseignante de classe, qui est en retrait et observatrice au début du coenseignement, mais s'implique graduellement

lors des mises en commun. Le binôme se fixe des objectifs pour améliorer leurs coenseignement et pratiques, mais il paraît précoce d'interpréter ces changements en termes d'exercice de la vigilance didactique.

La quatrième journée comportait trois communications proposant chacune des pistes différentes pour favoriser l'accessibilité didactique. La première, présentée par **Athias et al.**, porte sur l'acquisition des connaissances spatiales à travers la mise en œuvre d'une situation impliquant un robot de sol. L'étude montre notamment que, face à deux élèves adoptant une conduite similaire, la professeure choisit d'interpeller uniquement celui faisant partie du dispositif ULIS (Unité localisée pour l'inclusion scolaire). Or, c'est cette demande de verbalisation — et non la situation elle-même — qui mettra cet élève en difficulté. La communication suivante, réalisée par **Guille-Biel Winder**, prend appui sur les travaux que mène une équipe de recherche depuis plusieurs années sur le développement d'un dispositif d'aide préventif visant à ce que les élèves prennent pleinement leur place en tant qu'apprenant-es dans le système didactique principal. Cette communication ouvre sur des éléments de réponse mais aussi de réflexion en ce qui a trait aux conditions favorables à l'articulation mésogénétique entre les deux systèmes didactiques auxiliaires (pré et post) et le système didactique principal. Finalement, la communication de **De Varent** propose une séquence d'enseignement sur l'aire du rectangle qui se décline selon trois niveaux de différenciation. Les élèves sont répartis en groupes de besoin sur la base d'un pré-test et des passerelles permettent de passer d'un niveau à l'autre, selon les progrès observés. Bien que ce dispositif représente un certain défi pour les enseignants quant à sa mise en œuvre, il a l'avantage d'offrir des parcours adaptés aux connaissances mathématiques des élèves et de ne pas considérer leurs difficultés comme définitives.

Le dernier jour, **Gardes et al.** a présenté les résultats d'une recherche dans laquelle elle s'est intéressée à l'apprentissage des fractions auprès des élèves présentant un trouble d'apprentissage en mathématiques (MLD). Cette recherche relate les résultats d'un test construit en utilisant un modèle praxéologique et présenté à la fois à des élèves avec et sans trouble d'apprentissage. Ensuite, **Bélanger-Fortin** a présenté des extraits de ses travaux de thèse sur le recours au matériel de manipulation auprès d'élèves d'adaptation scolaire. Pour ce faire, elle s'est appuyée sur une analyse d'articles scientifiques portant sur le recours au matériel de manipulation afin de dégager des réflexions qui pourront alimenter son travail avec des enseignants dans le cadre d'une recherche collaborative.

Ces 16 textes ont permis d'aborder différentes thématiques : le travail conjoint, les approches collaboratives, des publics spécifiques, la production de ressources qualifiées d'inclusives. Lors de la clôture des activités du GT10, de manière unanime, la qualité des échanges a été remarquée. Ce format a permis d'aller au-delà des textes et ce point a été source d'enrichissement pour l'ensemble du groupe.

II. POINTS DE DISCUSSION

Plusieurs points ont été abordés, en voici quatre que nous souhaitons partager :

- Étudier l'enseignement auprès de publics spécifiques ou dans des contextes particuliers rend nécessaire la pluralité des regards et des questionnements. À travers nos ancrages théoriques variés, nous mettons en évidence l'intérêt d'articuler approches quantitatives et qualitatives. D'allier une approche systémique sans oublier de prendre en compte les connaissances spécifiques des élèves. On retrouve ici *le modèle de développement humain – processus de production du handicap* (MDH-PPH) développé à la fin des années 90 par Fougeyrollas et ses collaborateurs. Ce modèle nous invite à considérer les interactions entre des facteurs personnels et des facteurs environnementaux pour réfléchir à des

environnements capacitants, c'est à dire qui permettent l'accès à l'étude des savoirs mathématiques.

- Le second point concerne une vigilance sur le vocabulaire utilisé. Nous avons eu de belles discussions sur l'usage du mot inclusion, de l'adjectif inclusif et sur les risques de mésusage. Ce point sur le vocabulaire a permis au groupe de réfléchir à l'opérationnalisation des principes de l'éducation inclusive en s'intéressant par exemple à la construction de séquence ou de ressources qui permettraient de lever a priori les obstacles pour que les élèves s'engagent dans l'étude des savoirs mathématiques. Ces réflexions sur l'opérationnalisation inclusive nous ont également amenés à réfléchir sur la prise en compte de la diversité des enseignant-es et des contextes.
- Le dernier point à partager concerne le fait que l'ensemble de nos travaux au sein de contextes particuliers ou auprès de publics spécifiques ont pour point commun de chercher à donner une place à l'ensemble des élèves. Le regard sur les potentialités de l'élève, sur la compréhension de ses productions, est un regard important à adopter et il est revenu de façon régulière dans nos échanges. Ce regard n'est pas simple, il s'apprend, il nécessite pour le chercheur, la chercheuse, ou pour l'enseignant-e de quitter une position haute.

III. DES QUESTIONS LIÉES AUX ENJEUX À CONSIDÉRER ET CONCLUSION

Nous sommes repartis de Montréal avec plusieurs axes de discussion. Nous en partageons ici trois qui constituent pour notre groupe des enjeux majeurs pour les années à venir :

- Les recherches collaboratives locales invitent à réfléchir à une transposition en formation ;
- La diffusion des travaux est une question en soi pour prendre position dans le débat public en faveur de l'éducation inclusive ;
- L'accessibilité didactique est un concept partagé. Cependant, dans d'autres milieux de recherche, milieux professionnels, dans les médias, la notion d'accessibilité universelle est de plus en plus mobilisée. Avec notre regard didactique, il s'agira de réfléchir sur cette question : l'accessibilité peut-elle être véritablement universelle ou est-elle forcément contextuelle ?

Pour conclure, nous avons quatre réflexions à partager avec les notions de temps et d'accélération qui étaient au cœur de la thématique du colloque EMF 2025 :

- Du point de vue du groupe, nous avons dû accélérer nos présentations pour mieux prendre le temps de ralentir lors de nos discussions ;
- Du point de vue des enseignant-es, il est nécessaire de prendre le temps de la planification, d'ouvrir des espaces pour « que les enseignant-es apprennent et disposent du temps pour se questionner » pour reprendre les propos d'une conseillère pédagogique ;
- Du point de vue des élèves, il convient de considérer le temps d'enseignement et le temps d'apprentissage. Le monde accélère, mais pour certain-es élèves le temps dédié à l'enseignement des mathématiques reste encore largement inégalitaire et inéquitable : des élèves n'ont pas accès à l'école, d'autres n'y ont accès que partiellement, d'autres encore sont dits inclus-es, mais rencontrent au quotidien que très peu d'objets mathématiques ;
- Du point de vue des chercheur-euses, si l'on s'en tient à l'intervention de Viviane Durand-Guerrier (grand témoin, présente dans notre groupe de travail le vendredi matin), considérant, en référence aux travaux de François Conne, l'enseignement spécialisé comme

une sorte de « loupe » posée sur l'enseignement ordinaire, il s'avère sans nul doute nécessaire que les chercheur-euses s'octroient quelques occasions de prendre le temps pour descendre dans l'arène de la classe pour interagir directement avec les élèves considérés en difficulté ou à besoins particuliers. Au-delà des dispositifs sophistiqués qu'ils ou elles conçoivent (questionnaires, groupes pré/post, systèmes principal/auxiliaires,...), c'est en effet à l'occasion de ces interactions directes qu'ils ou elles seront en mesure de collecter les surprises, les opportunités et les défis que le travail avec ces élèves pose à l'acte de leur enseigner et leur faire apprendre des mathématiques.

Le groupe se quitte donc avec cette volonté partagée de réfléchir aux enjeux sociaux d'accessibilisation des environnements scolaires.

INTERACTIONS DIDACTIQUES ENTRE UNE ENSEIGNANTE, UNE AIDE EN CLASSE ET UN ÉLÈVE AUTISTE MINIMALEMENT VERBAL

| ATKINS* ISABELLE

Résumé | Au Québec, la catégorie d'élèves identifiés autistes inscrits à la formation générale des jeunes a connu un accroissement de 1 341 % entre les années 2000-2001 et 2021-2022. L'ouverture de classes spéciales est une des mesures mises en place par l'école québécoise pour répondre à cette progression fulgurante. Ces classes accueillent bien souvent des élèves minimalement verbaux. Les conditions didactiques mises en place auprès de ces élèves dans ce contexte sont peu connues. Dans le cadre de ce texte, nous nous intéressons au contrat didactique (Brousseau, 1998, 2003, 2009) et au processus de dévolution (Brousseau, 1990 ; Margolinas, 2004, 2021) dans le cadre de situations d'enseignement-apprentissage des mathématiques liant un élève autiste minimalement verbal avec une enseignante en adaptation scolaire, puis avec une préposée aux élèves handicapés. Les analyses suggèrent que l'absence de communication expressive verbale chez un élève affecte la négociation du contrat didactique et le processus de dévolution.

Mots-clés : autisme, interactions didactiques, classe spéciale, contrat didactique, dévolution

Abstract | In Quebec, the number of students identified as autistic enrolled in general education has increased by 1,341% between 2000-2001 and 2021-2022. The opening of special classes is one of the measures put in place by Quebec schools to respond to this rise. Minimally verbal pupils are often solarised in that type of classroom. Little is known about the didactic conditions in place in this context. In this paper, we focus on the didactic contract (Brousseau, 1998, 2003, 2009) and the devolution process (Brousseau, 1990; Margolinas, 2004, 2021) in mathematics teaching-learning situations involving a minimally verbal student, a special education teacher and an attendant for handicapped students. The analyses suggest that a student's lack of expressive verbal communication affects the negotiation of the didactic contract and the devolution process.

Keywords: Autism, didactic interactions, special classroom, didactic contract, devolution

I. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

Au Québec, la population d'élèves identifiés autistes inscrits à la formation générale des jeunes (FGJ) a augmenté de 1 341 % entre 2000-2001 (1 532 élèves ; 0,14 % des élèves de la FGJ) et 2021-2022 (22 080 élèves ; 1,97 % des élèves de la FGJ) (ministère de l'Éducation [MEQ], 2023¹). Toutefois, soulignons qu'il y a eu sur la même période une transformation des approches et pratiques diagnostiques qui témoignent d'une évolution de la conceptualisation de l'autisme². Au Québec, les élèves autistes peuvent être scolarisés dans différents milieux : à la maison, en classe spéciale (dans une école spéciale ou dans une école régulière), en classe ordinaire (avec ou sans services de soutien) ou autres (hôpital, centre d'accueil, etc.). Selon la Loi sur l'instruction publique (2022), tout devrait être mis en place pour que les élèves soient scolarisés dans le milieu le plus « normal » possible, soit la classe ordinaire avec l'enseignante régulière. La proportion d'élèves autistes scolarisés en classe spéciale tend à rester relativement stable depuis 2010. Dans un contexte où le nombre d'élèves identifiés autistes est en constante augmentation, cette proportion relativement stable représente une augmentation du

* Université du Québec à Montréal – Canada – atkins.isabelle@uqam.ca

¹ Ces données nous ont été transmises par courriel par le ministère de l'Éducation du Québec en 2023.

² Des études, notamment celle de Fombonne et al. (2019), nous incitent à porter un regard circonspect sur le phénomène d'augmentation de la prévalence de l'autisme observé à travers le monde.

nombre d'élèves scolarisés en classe spéciale³. La décision de scolariser un élève en classe spéciale (en école spéciale ou ordinaire) dépend, entre autres, de l'évaluation de ses besoins d'accompagnement en ce qui a trait aux comportements, à la communication ou aux apprentissages. De nombreuses classes spéciales accueillent des élèves minimalement verbaux. Selon Kasari et al. (2013), un enfant est considéré comme minimalement verbal lorsqu'il utilise un très petit répertoire de mots ou de phrases fixes pour communiquer. Cela peut aller de l'absence de mots parlés à environ 30 mots ou phrases fixes. Les mots ou phrases fixes sont généralement utilisés dans des contextes restreints et ne servent qu'à communiquer une ou deux fonctions (ex. : communiquer une demande). Il est estimé qu'environ 30 % des enfants autistes seraient minimalement verbaux au début de leur scolarisation (Tager-Flusberg et Kasari, 2013). Peu d'informations sont disponibles quant aux conditions didactiques en place dans le contexte de l'enseignement-apprentissage des mathématiques en classe spéciale pour élèves autistes. Des études réalisées auprès de différents publics de l'enseignement spécialisé permettent d'éclairer certaines des spécificités de l'enseignement-apprentissage dans ce champ (voir par exemple Assude et al., 2011 ; Assude et al., 2014 ; Favre, 1997, 2003 ; Giroux, 2004, 2008 ; Giroux et René de Cotret, 2001). Cependant, bien que l'on puisse émettre l'hypothèse que l'espace de contraintes et de possibilités est semblable à bien des égards dans les classes spéciales pour élèves autistes et dans d'autres types de classes spéciales, nous formulons l'hypothèse que les atypies interactionnelles et communicationnelles qui caractérisent le trouble du spectre de l'autisme (TSA) agissent comme une contrainte propre à ce contexte d'enseignement⁴. Cela nous semble d'autant plus probable lorsqu'un élève minimalement verbal est engagé dans les interactions didactiques. La question explorée dans ce texte est donc la suivante : quels sont les effets de l'absence de communication expressive verbale chez un élève sur la négociation du contrat didactique et sur le processus de dévolution ? La démarche est exploratoire.

II. CONTEXTE DE LA RECHERCHE

L'étude présentée dans ce texte s'inscrit dans mon projet de thèse en cours de réalisation⁵. Je m'appuie sur des extraits de situations ordinaires d'enseignement-apprentissage observées dans une classe spéciale d'élèves identifiés autistes âgés de 8 à 9 ans (2^e et 3^e années du primaire). Lors de la période d'observation, le groupe-classe comprend six élèves ; l'un d'entre eux, Philippe⁶ (2^e année), ne s'exprime pas verbalement. L'équipe-classe est composée d'une enseignante en adaptation scolaire, d'une technicienne en éducation spécialisée (TES)⁷ et d'une préposée aux élèves handicapés (PEH). Selon la Fédération du personnel de soutien scolaire ([FPSS-CSQ], 2024), le rôle d'une PEH est de soutenir la participation aux activités de scolarisation d'élèves dits handicapés en veillant à leur bien-être, à leur hygiène et à leur sécurité. Cette description de tâche peu spécifique ouvre la porte à différentes interprétations. Le partage des rôles et responsabilités des intervenantes au sein d'une équipe-classe varie donc d'un milieu à l'autre. Dans la classe observée, les trois intervenantes s'impliquent, à des degrés divers, dans l'enseignement des contenus disciplinaires et dans les interventions visant le

³ À titre d'exemple, 57 % des élèves autistes étaient scolarisés en contexte autre que la classe ordinaire pour les années 2012-2013 et 2021-2022. Ce pourcentage représentait 6 313 élèves en 2012-2013, mais tout près du double en 2021-2022, soit 12 573 élèves.

⁴ Évidemment, les élèves autistes ne sont pas les seuls à présenter des atypies sur le plan de la communication et des interactions sociales. Cette hypothèse pourrait donc être élargie, et possiblement raffinée, pour tenir compte d'autres publics d'élèves.

⁵ Projet réalisé sous la direction de Jacinthe Giroux et Virginie Houle (Département d'éducation et formation spécialisées de l'Université du Québec à Montréal).

⁶ Prénom fictif.

⁷ Les extraits retenus ne mettent pas en scène cette intervenante, puisqu'elle n'intervient pas ou peu avec l'élève choisit durant les séances filmées. Son rôle n'est donc pas décrit ici.

développement personnel, social et affectif des élèves. La PEH a donc une fonction d'aide lors de l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Il est à noter qu'aucun temps de concertation n'est prévu, la PEH découvre donc les tâches d'enseignement-apprentissage choisies par l'enseignante en même temps que les élèves.

III. CADRE THÉORIQUE

Une interaction est dite didactique lorsqu'il est possible d'identifier clairement un lien avec l'objet ou l'intention d'enseignement (Sarrazy, 2001). L'observation des interactions didactiques permet d'analyser comment se négocient les enjeux de savoirs dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Le concept de contrat didactique, développé par Brousseau (1998) dans le cadre de la Théorie des situations didactiques (TSD), est utile à cette analyse. Brousseau (2009, p. 33) présente le contrat didactique comme « l'ensemble des comportements (spécifiques) du maître qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître ». Selon Brousseau (2003), les élèves peuvent raisonnablement s'attendre à ce que l'enseignante présente les savoirs à apprendre, c'est le rôle qui lui incombe dans nos sociétés. Cependant, plus elle offre du soutien ou des indices aux élèves pour qu'ils produisent les comportements attendus, plus elle diminue l'incertitude de l'élève. Les conditions ne sont alors plus réunies pour favoriser l'apprentissage et la compréhension de la notion visée. L'enseignante se trouve donc dans une situation paradoxale. Pour surmonter cette impasse, Brousseau (1998) mise sur la dévolution de situations adidactiques. Selon Brousseau (1990, p. 325), « la dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (adidactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert ». Comme le souligne Margolinas (2004, p. 29), ce processus « demande de la part du professeur la volonté de déléguer une partie de la responsabilité de l'acte d'enseignement à l'élève ». Ce transfert de responsabilités génère de l'incertitude tant pour l'enseignante que pour l'élève. Dans le cadre de l'enseignement ordinaire au Québec, les activités vécues en classe ne présentent que rarement les caractéristiques d'une situation adidactique. Le plus souvent, l'enseignante sélectionne ou construit une tâche ou une activité plus ou moins ouverte en tenant compte des prescriptions du Programme de formation de l'école québécoise ([PFEQ] (ministère de l'Éducation, 2006) et de sa planification personnelle. Comme le souligne Margolinas (2021), les processus de dévolution et d'institutionnalisation (dont il ne sera pas question dans ce texte) sont toujours à l'œuvre, quelles que soient les orientations pédagogiques qui ont mené à la planification d'une séance d'enseignement. Cependant, le choix du problème proposé aux élèves détermine dans une large mesure les actions possibles pour ceux-ci et pour l'enseignante (Margolinas, 2021).

IV. ÉLÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES

Dans le cadre de cette étude, j'ai suivi une enseignante pendant une période de quatre semaines (mai 2024). Cette observation prolongée vise la prise en compte des différentes contraintes et possibilités qui caractérisent ce milieu d'enseignement. En tout, cinq séances d'enseignement-apprentissage des mathématiques ont été filmées. Le choix des tâches et des contenus à enseigner était à l'entière discrétion de l'enseignante. Deux caméras ont été utilisées pour la captation vidéo. L'analyse porte sur la transcription des données vidéos qui est consignée dans des tableaux organisés de façon à permettre une vision synoptique de l'avancement du temps de l'horloge, des discours et des gestes des acteurs. Des captures d'écran permettent de garder des traces de l'évolution du milieu et de certains gestes des acteurs. Dans le cadre de ce texte, nous avons choisi d'analyser des interactions didactiques entre un élève minimalement verbal, Philippe, l'enseignante et la PEH. Les extraits retenus permettent de dégager des interrogations de diverses natures quant aux spécificités des interactions didactiques et de

la dévolution dans ce contexte d'enseignement. Partant des transcriptions, nous procédons à une analyse ascendante (Quilio, 2017, Sensevy, 2011) afin de dégager, à partir de l'analyse de la tâche et des interactions didactiques, les apprentissages rendus possibles (ou non) pour l'élève.

V. ANALYSES

1. Premier extrait

Le premier extrait choisi est tiré de la première séance filmée. L'enseignante propose un énoncé de problème additif de composition de mesures avec cinq mesures (3, 2, 2, 2, 10). Les analyses permettent de dégager trois temps dans le déroulement de la situation. Le premier temps est consacré à la présentation et à la lecture de l'énoncé (voir figure 1). Durant le deuxième temps, l'enseignante formule ses attentes. Elle explique qu'ils ont lu tous les « ingrédients » et qu'elle veut maintenant connaître le nombre total de fruits nécessaires à la réalisation de la recette. L'enseignante insiste sur l'importance de laisser des traces de la démarche, pour qu'elle puisse « voir » ce que les élèves « ont fait ». Elle présente ensuite différentes démarches possibles, soit 1) dessiner les fruits ; 2) représenter graphiquement les fruits par des points ; 3) « écrire les chiffres ». Lors de cette présentation, le but de la tâche, qui est de trouver la somme des fruits, reste implicite. Toutefois l'opération d'addition, comme résolution de l'énoncé, est présentée explicitement. Durant le troisième temps, les élèves travaillent de façon individuelle à la résolution avec assistance au besoin. Durant les deux premiers temps de la séance, la PEH est assise à côté de Philippe ; elle intervient très peu. L'extrait commence dès le début du troisième temps, consacré à la résolution.

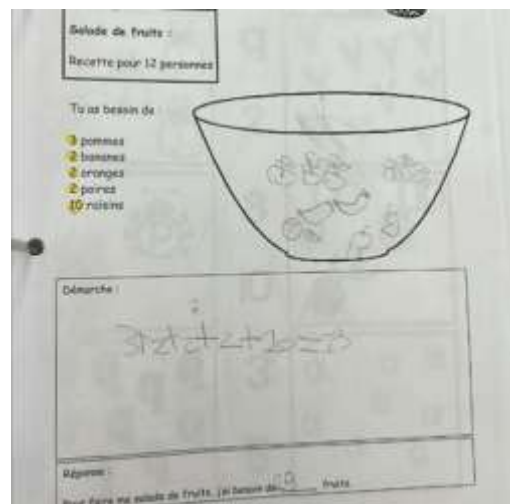


Figure 1 – Feuille de travail de Philippe
(démarche : $3+2+2+2+10=19$)

[La PEH surligne en jaune tous les nombres dans la liste de fruits sur la feuille de travail de Philippe].

PEH : Trois pommes. Fais trois pommes ici [elle trace avec son doigt trois cercles dans le bol de fruits].

[Philippe approche son crayon de la feuille, il semble sur le point d'écrire ou dessiner. La PEH lui rappelle « des pommes ». Philippe s'arrête et la regarde. La PEH prend une ardoise].

PEH : Regarde [elle dessine trois pommes sur l'ardoise]. Un, deux, trois. Trois pommes. Comme ça.

[Philippe reproduit les pommes dans le bol sur sa feuille de travail].

PEH : Ok, regarde ici [En pointant la liste de fruits]. Deux bananes [elle dessine deux bananes sur l'ardoise]. Un, deux.

[La PEH procède de la même façon pour les oranges, les poires et les raisins. Elle dessine les fruits sur l'ardoise et Philippe reproduit le dessin sur sa feuille. (Voir figure 2)].

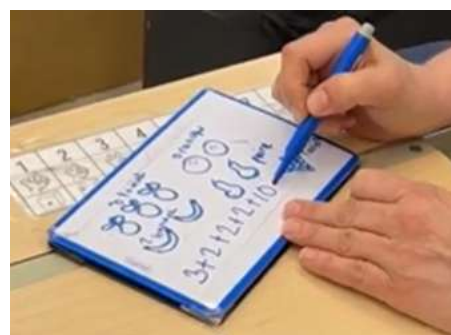


Figure 2 – Écritures et dessins de la PEH

PEH : Bravo ! Maintenant, regarde, trois pommes [elle écrit 3 sur l'ardoise]. Trois plus deux bananes [elle écrit +2]. Plus deux oranges [elle écrit +2]. Plus deux poires [elle écrit +2]. Plus dix [elle écrit +10]. Ici [elle pointe l'espace pour écrire sa démarche sur la feuille de Philippe]. Écris-le ici.

[La PEH se déplace au bureau d'un autre élève. Pendant ce temps, Philippe reproduit l'écriture sur sa feuille, puis il écrit immédiatement la somme, sans mettre en place de stratégie apparente].

Cet extrait montre que dès le départ, la PEH prend en charge le travail de Philippe. Il est donc impossible de savoir ce qu'il avait compris de la tâche ou ce qu'il aurait fait par ses propres moyens. Cet extrait donne à voir un schéma d'interactions essentiellement unidirectionnelles. Il n'y a pas véritablement d'échanges entre l'élève et la PEH. Cette dernière morcèle la tâche en dictant de façon précise les gestes attendus. La fonction qui revient à Philippe en est essentiellement une de reproduction. Malgré cela, Philippe assume, grâce aux quelques minutes d'indépendance qui lui sont accordées, le rôle de producteur de réponses (Assude et al., 2014) lorsqu'il effectue le calcul de la somme. Il s'agit de la seule étape de la résolution qui lui est dévolue. Il n'est pas possible de savoir avec précision quelle stratégie a été mise en place par Philippe, mais l'absence de gestes suggérant le dénombrement ou l'utilisation d'un compteur pour contrôler le surcomptage laisse croire qu'il s'est appuyé sur une stratégie de surcomptage sans compteur apparent ou qu'il a procédé par compositions additives à partir de faits additifs connus (ou une combinaison de ces stratégies). L'élève engage donc des connaissances sur le calcul numérique, connaissances qui semblent anciennes considérant ses conduites. La situation dans laquelle se trouve Philippe ne semble pas déstabiliser ses connaissances, le contrat didactique est donc stable. L'intention annoncée par l'enseignante avant la séance est de travailler la résolution de problème (sans précision sur les connaissances mathématiques en jeu). Lors du deuxième temps de l'activité, elle insiste sur l'importance de laisser des traces de la démarche pour qu'elle puisse « voir » ce que les élèves « ont fait ». Le choix de cette tâche d'enseignement vise donc principalement un travail sur la procédure de résolution attendue. La PEH semble s'approprier cette intention de l'enseignante, considérant que ses actions sont orientées vers la production du dessin des fruits et de l'écriture additive. Le contrat didactique se noue donc principalement autour de « ce que l'on doit dessiner ou écrire » sur la fiche. Il semble que l'enjeu de l'activité se déplace vers l'enseignement et l'apprentissage de moyens heuristiques plutôt que d'un objet de savoir mathématique. Considérant que la seule étape réalisée par l'élève de façon autonome est le calcul de la somme, étape qui engage des connaissances anciennes pour lui, il n'est pas possible de spécifier d'apprentissages mathématiques potentiellement réalisés par l'élève au cours de cette situation.

2. Deuxième extrait

Le deuxième extrait est tiré de la quatrième séance filmée. Il s'agit d'une séance de causerie mathématique. Selon le Référentiel d'intervention en mathématiques (ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur [MEES], 2019), la causerie mathématique devrait durer entre 5 et 15 minutes. Elle vise à « consolider [l]a compréhension conceptuelle, [l]a flexibilité et [l]a fluidité » (Berger, 2017 ; Boaler, 2015 ; Parrish, 2011 ; dans MEES, 2019, p. 14). L'activité présentée durant cette séance engage un travail sur les écritures additives de type $a + b = c$ (voir figure 3), puis de type $a + b = c + d$. Les élèves sont appelés à produire les écritures. Ils doivent choisir des nombres entre 1 et 9, chacun ne pouvant être utilisé qu'une seule fois. Cette activité, qui n'implique pas de contexte

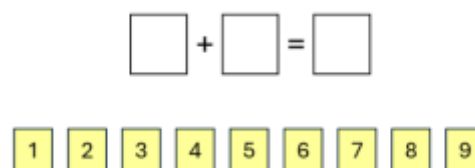


Figure 3 – Reproduction de la tâche $a + b = c$

extramathématique, engage des connaissances sur la signification du signe d'égalité et sur le calcul additif. Comme les nombres sont inférieurs à 10, les stratégies de dénombrement peuvent être mobilisées. Les stratégies de comptage continué, de surcomptage ou le rappel de faits additifs connus sont aussi possibles. Dans un premier temps, l'enseignante présente une écriture de type $a + b = c$. Cette écriture a déjà été présentée lors de séances précédentes. L'enseignante attribue le rôle de producteur de réponse à un seul élève à la fois qui est appelé au tableau numérique interactif (TNI). Les autres élèves se voient attribuer le rôle de vérificateur (Assude et al., 2014). Ils doivent se prononcer sur la justesse de la solution proposée, en tenant compte des contraintes imposées. À son tour, Philippe complète adéquatement l'écriture en écrivant $2 + 6 = 8$. Par la suite, une écriture de type $a + b = c + d$ est proposée aux élèves. Le déroulement reste le même. Les techniques possibles pour accomplir la tâche sont nombreuses. L'élève peut choisir aléatoirement tous les nombres. Il peut aussi choisir aléatoirement les nombres a et b , puis trouver la somme de ces deux nombres. À partir de ce point, il peut choisir aléatoirement le nombre c (en choisissant idéalement un nombre inférieur à la somme trouvée précédemment), puis procéder par dénombrement (addition ou soustraction), surcomptage (avant ou à rebours) ou rappel de faits additifs pour trouver le terme manquant. Le rappel de faits additifs connus peut aussi permettre d'identifier rapidement un calcul à deux termes permettant d'obtenir cette somme. L'extrait choisi met en scène Philippe et l'enseignante.

[Philippe a écrit $2 + 3 = 5 + 4$. L'enseignante demande aux autres élèves si ça fonctionne. Deux d'entre eux répondent que oui. Voyant à sa réaction que ce n'est pas la réponse attendue par l'enseignante, un élève dit que c'est trop haut].

Ens. : Ouan... Attends, regarde comme il faut. Regarde. Regarde Philippe. $2 + 3$, ça donne 5 [elle montre 5 doigts]. Attention ici, c'est $5 + 4$. Han han. Ça, ça fonctionne pas. $5 + 4$ ça fait 9. [L'enseignante prend le crayon pour écrire au TNI. Philippe agrippe son bras].

Ens. : Attends, attends. Je vais t'aider. Regarde bien, on va essayer quelque chose. On va essayer quelque chose. Attends un peu [elle efface les réponses de Philippe]. Si je te fais un quatre [elle écrit 4 dans la première case] plus... [elle écrit 3 dans la deuxième case] oh boboy, y est pas beau mon trois, je vais le refaire [elle réécrit le 3]. Bon, est-ce que tu peux me compléter ça ? Quatre plus trois, ça fait ? [Elle montre 7 doigts]. Sept.

[Philippe fait un trait sur le nombre 7 et se prépare à écrire dans la 3^e case].

Ens. : Han han. Non [elle efface son trait sur le nombre 7]. Ici, comb... regarde. Regarde. Je veux avoir ici... combien plus combien [Philippe tente de reprendre le crayon des mains de l'enseignante]. Regarde. Si j'écris deux [elle se place derrière Philippe et prend sa main pour écrire au tableau. Philippe produit des sons qui semblent exprimer un mécontentement]. Deux plus combien, ça donne sept ?

[Philippe fait un trait sur le nombre 7 et se prépare à écrire dans la 4^e case].

Ens. : Han han.

[Philippe produit des sons. Il semble contrarié].

Ens. : Regarde, on va l'essayer autrement. Regarde. Juste te montrer. Regarde bien. Regarde. [Elle dessine 4 points sous le nombre] quatre, [elle dessine 3 points sous le nombre 3] trois. Ça donne... ensemble [elle encercle tous les points], ça donne sept. Ici [elle dessine 2 points sous le nombre 2] deux, trois, quatre, cinq, six, sept (elle dessine un point pour chaque nombre évoqué à partir de 3). Combien ?

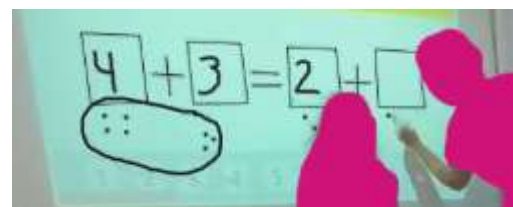


Figure 4 – Traces et gestes de l'enseignante et de l'élève

[Philippe barre le nombre 5 et l'écrit dans la 4^e case].

Ens. : Oui. Cinq. Regarde, quatre plus trois...

[Philippe encercle les points à droite du signe =].

Ens. : Oui. Égal à deux plus cinq. Bravo.

Aucun indice gestuel ne permet d'identifier les stratégies ou techniques utilisées par Philippe. Cependant, il semble que l'élève tente de répondre aux contraintes de la tâche précédente, en trouvant une écriture de type $a + b = c$. Le choix d'écrire le nombre 4 dans la dernière case pourrait s'inscrire dans une logique de complétion de suite numérique. Dans cette tâche, la signification du signe d'égalité est l'enjeu mathématique sensible. Comme beaucoup d'élèves en début de scolarité, Philippe semble interpréter ce signe comme un indice qu'il doit effectuer une opération arithmétique. Or, cette tâche vise un travail sur l'équivalence des deux côtés du signe d'égalité. La tâche introduit donc un déséquilibre dans la relation élève-milieu. Cependant, comme le montre Theis (2005), le passage de la conception du signe = comme un opérateur à la conception de ce signe comme un indicateur de relation représente un obstacle cognitif important. La mise en échec de la première conception ne suffit pas à faire émerger la seconde. La tâche présentée aux élèves lors de cette séance ne favorise pas (ou peu) l'évolution de la compréhension conceptuelle des élèves, en raison notamment du fait que le passage d'une conception à l'autre demeure largement implicite.

Contrairement à l'extrait précédent, on observe une certaine forme d'échanges, un va-et-vient, entre l'enseignante et l'élève autour de cette tâche. Les gestes de l'enseignante suggèrent qu'elle souhaite déléguer à l'élève la responsabilité de trouver une solution au problème proposé. En ce sens, la dévolution est d'abord réussie, puisque l'élève produit une première réponse par ses propres moyens ($2 + 3 = 5 + 4$). Cependant, l'enseignante peine à rebondir à la suite de la production de cette réponse erronée. Du point de vue de l'élève, le déséquilibre engendré par l'introduction de l'écriture $a + b = c + d$ pourrait être considéré comme une rupture du contrat didactique. Philippe ne semble pas comprendre pourquoi sa réponse n'est pas acceptée par l'enseignante. S'étant vu accorder jusqu'alors la responsabilité de trouver une solution par ses propres moyens, il n'accepte pas facilement que l'enseignante reprenne progressivement la responsabilité de la résolution. L'élève utilise les moyens de communication qu'il possède pour exprimer son mécontentement, en produisant des sons, en agrippant le bras de l'enseignante et en tentant de reprendre le crayon. En pilotant la démarche de l'élève, l'enseignante l'amène à produire la réponse attendue. Cependant, on observe un évanouissement du savoir en jeu. Pour compléter l'écriture $4 + 3 = 2 + \underline{\quad}$, Philippe n'a plus qu'à dénombrer les points dessinés sous la case vide.

VI. DISCUSSION ET CONCLUSION

La première situation permet de s'intéresser aux interactions didactiques entre une enseignante, une PEH et un élève minimalement verbal. Rappelons qu'aucun temps de concertation n'est prévu entre l'enseignante et la PEH avant les périodes d'enseignement-apprentissage. La PEH doit donc, tout comme les élèves, inférer les attentes de l'enseignante en interprétant ses gestes et paroles, ainsi que les traces et les indices disponibles dans le milieu. Dans cette situation, l'enseignante insiste auprès des élèves sur l'importance de laisser des traces de leur démarche pour qu'elle puisse « voir » ce qu'ils « ont fait ». La PEH met donc l'accent sur la production du dessin des fruits et de l'écriture additive. En raison de l'absence de communication expressive verbale chez l'élève, les traces laissées sur sa feuille de travail pourraient représenter le principal moyen de rendre compte de son activité mathématique. Pour s'assurer que ces traces soient conformes à ce qu'elle juge adapté à la tâche, la PEH morcèle le

travail de l'élève et prend à sa charge une très large portion du travail qui devrait lui revenir. Ce faisant, elle peut en quelque sorte assurer l'adéquation scolaire de l'élève (Mercier, 1998), mais aussi la sienne. Margolinas (2004, p. 57) souligne que « [d]ans la situation didactique S0, se rencontrent les intentions d'enseigner et d'apprendre du professeur et de l'élève dans le contrat didactique ». Or, dans la situation qui nous occupe, cette rencontre est médiatisée par la PEH, porteuse elle aussi d'intentions. Dans un tel contexte, il semble que l'incertitude pourrait être décuplée. Or, les gestes de la PEH réduisent considérablement l'incertitude pour Philippe et pour elle aussi. Cela semble favoriser un certain équilibre du contrat didactique, mais la situation observée ne rend pas possibles de nouveaux apprentissages mathématiques pour Philippe. Dans le deuxième extrait, l'enseignante accepte au départ de déléguer la responsabilité de la résolution à l'élève. Les caractéristiques de la tâche, mais aussi le contexte dans lequel elle est présentée, soit une période de causerie mathématique, pourraient expliquer en partie cette différence. Les rôles et responsabilités propres à chacune de ces intervenantes au sein de l'institution seraient aussi un angle d'analyse à développer. Toutefois, malgré le fait qu'au départ le pilotage permet la dévolution du problème à l'élève, l'enseignante reprend progressivement la responsabilité de la résolution.

Les deux extraits analysés donnent à voir une prise en charge importante du travail de l'élève. Cela est certainement en partie attribuable aux caractéristiques des tâches présentées qui déterminent dans une large mesure les possibilités pour les acteurs et actrices de la situation. Cependant, il semble que le pilotage serré puisse aussi être une façon pour les intervenantes de s'adapter à l'absence de communication expressive verbale chez Philippe. En effet, il semble que cette atypie sur le plan de la communication pourrait augmenter l'incertitude de la situation, tant pour l'élève, qui ne peut expliquer son raisonnement ou demander des clarifications, que pour les intervenantes, qui ne peuvent questionner l'élève pour évaluer ce qu'il comprend de la tâche présentée. Les gestes des intervenantes tendent plutôt à réduire l'incertitude, et même à l'anéantir. Ce faisant, elles réduisent aussi les possibilités d'apprendre pour l'élève (Brousseau, 2003). Dans les deux extraits analysés, les connaissances investies par l'élève sont présumées anciennes et stables pour lui (calcul d'une somme pour des nombres inférieurs à 20 et dénombrement). Le contrat didactique se noue autour de la production de traces sur la feuille de travail et de la production de la réponse attendue, malgré un évanouissement du savoir en jeu. Au regard de nos analyses, il semble qu'un des effets possibles de l'absence de communication expressive verbale chez un élève est un déséquilibre dans le partage des responsabilités régi par le contrat didactique (Margolinas, 2004).

RÉFÉRENCES

- Assude, T., Perez, J. M., Tambone, J. et Vérillon, A. (2011). Apprentissage du nombre et élèves à besoins éducatifs particuliers. *Éducation et didactique*, 5(2), 65-84.
<https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1213>
- Assude, T., Perez, J. M., Suau, G., Tambone, J. et Vérillon, A. (2014). Accessibilité didactique et dynamique topogénétique : une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 33-57.
<https://revue-rdm.com/2014/accessibilite-didactique-et/>
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336. <https://revue-rdm.com/1988/le-contrat-didactique-le-milieu/>
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques : didactique des mathématiques 1970-1990* [Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield]. La pensée sauvage.

- Brousseau, G. (2003, 25 février). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. https://sites.unipa.it/grim/Gloss_fr_Brousseau.pdf
- Brousseau, G. (2009). *Le cas de Gaël revisité (1999-2009)*. HAL Archives Ouvertes. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00582620>
- Favre, J.-M. (1997). *L'échec, le temps, la multiplication : étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement et l'apprentissage de la multiplication dans une classe spécialisée, par comparaison avec l'enseignement et l'apprentissage de la même opération dans une classe primaire* [Mémoire de maîtrise inédit]. Université de Genève.
- Favre, J.-M. (2003). Étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de la multiplication dans une classe d'enseignement spécialisé. Dans V. Durand-Guerrier et C. Tisseron (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2003* (p. 109-126). IREM de Paris.
- Fédération du personnel de soutien scolaire [FPSS-CSQ]. (2024, 30 septembre). *Préposée ou préposé aux élèves handicapés*. Centrale des syndicats du Québec. <https://fpss.lacsq.org/emplois/preposee-ou-prepose-aux-eleves-handicapes/>
- Fombonne, É., Myers, J., Chavez, A., Hill, A. P., Zuckerman, K. et Pry, R. (2019). Épidémiologie de l'autisme : où en sommes-nous ? *Enfance*, (1), 13-47.
- Giroux, J. (2004). Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(2), 303-327.
- Giroux, J. (2008). Conduites atypiques d'élèves du primaire en difficulté d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(1), 9-62.
- Giroux, J. et René de Cotret, S. (2001). Le temps didactique en classe de doubleurs. Dans *Actes du sixième congrès des sciences de l'éducation de langue française (AFDEC)*, (p. 41-71).
- Kasari, C., Brady, N., Lord, C. et Tager-Flusberg, H. (2013). Assessing the minimally verbal school-aged child with autism spectrum disorder. *Autism research*, 6(6), 479-493. <https://doi.org/10.1002/aur.1334>
- Loi sur l'instruction publique. RLCQ, I-13.3. <https://www.legisquebec.gouv.qc.ca/fr/document/lc/I-13.3>
- Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur : essai de développement de la théorie des situations didactiques* [Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches en sciences de l'éducation, Université de Provence]. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00429580/fr/>
- Margolinas, C. (2021). Le processus de dévolution dans le cadre de la théorie des situations didactiques. Dans P. Buznic-Bourgeacq (dir.), *Sujets et objets de la dévolution : une institution de l'autonomie* (1-14). ISTE Editions Ltd.
- Martineau, S. (2005). L'observation en situation : enjeux, possibilités et limites. *Recherches qualitatives*, 2, 5-17.
- Mercier, A. (1998). La participation des élèves à l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(3), 279-310.
- Ministère de l'Éducation du Québec [MEQ]. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise : éducation préscolaire, enseignement primaire*. Gouvernement du Québec. http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PFEQ_presentation-primaire.pdf

- Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur [MEES]. (2019). *Référentiel d'intervention en mathématique*. Gouvernement du Québec.
https://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/dpse/adaptation_serv_compl/Referentiel-mathematique.PDF
- Quilio, S. (2017). Caractériser les problèmes des élèves avec le savoir pour comprendre l'espace de décisions du professeur dans le contexte d'un enseignement des nombres et de leurs usages. *Recherches en éducation*, (29), 55-71.
- Sarrazy, B. (2001). Les interactions maître-élèves dans l'enseignement des mathématiques. Contribution à une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement. *Revue française de pédagogie*, 136(1), 117-132.
- Tager-Flusberg, H. et Kasari, C. (2013). Minimally verbal school-aged children with autism spectrum disorder: The neglected end of the spectrum. *Autism research*, 6(6), 468-478.
<https://doi.org/10.1002/aur.1329>
- Theis, L. (2005). L'apprentissage du signe = : un obstacle cognitif important. *For the Learning of Mathematics*, 25(3), 7-12.

ANALYSE DE LA MOTIVATION D'ENFANTS À PROFILS AUTISTIQUES EN SITUATION D'APPRENTISSAGE DU GRAPHISME

| KOUAMÉ* KOFFI PIERRE

Résumé | En Côte d'Ivoire, la question de l'inclusion scolaire est une question vive : elle est portée par une loi. Cependant, cette volonté pose le problème de la prise en charge efficace des enfants à profils autistiques dont la particularité exige des pratiques enseignantes spécifiques. La présente étude cherche à analyser à partir d'un questionnaire et d'observations de classes, l'impact des pratiques enseignantes sur l'engagement des enfants autistes pendant les séances d'apprentissage du graphisme lié aux mathématiques.

Mots-clefs : motivation, profils autistiques, graphisme, situation d'apprentissage

Abstract | In Ivory Coast, the issue of school inclusion is a pressing topic: supported by legislation. However, this commitment raises the challenge of the effective management of children with autism whose particularity requires specific teaching practices. This study seeks to analyze, based on a questionnaire and class observations, the impact of teaching practices on the engagement of autistic children during mathematics lessons focused on graphing.

Keywords: Motivation, autistic profiles, graphic design, learning situation

I. INTRODUCTION ET CONTEXTE

En Côte d'Ivoire, la loi d'orientation N° 95-696 du 7 septembre 95 sur l'enseignement stipule en son article premier que : « Le droit à l'éducation est garanti à chaque citoyen afin de lui permettre d'acquérir le savoir, de développer sa personnalité, d'élever son niveau de formation, de s'insérer dans la vie sociale, culturelle et professionnelle et d'exercer sa citoyenneté ».

Garantir le droit à l'éducation à tous les citoyens est fortement affirmé dans cette loi. Pour opérationnaliser cette volonté politique, d'importantes réformes structurelles ont été mises en œuvre par les autorités éducatives à travers un plan sectoriel Éducation/Formation. Celui de 2016 à 2025 révèle que l'enjeu est de s'assurer que le système éducatif ivoirien fournit à tous les enfants et adultes une éducation de qualité, une éducation équitable, inclusive en adéquation avec les besoins de transformation du citoyen et les besoins du marché de l'emploi. L'inclusion de tous les enfants quels que soient leurs handicaps dans le système éducatif est une question vive. Parmi ces enfants futurs citoyens du pays, il y a ceux à profils autistiques. L'autisme, trouble d'origine neurologique se manifeste par une altération des interactions sociales, de la communication et par des intérêts restreints et répétitifs. Ces troubles peuvent générer des comportements inadaptés dans certaines situations comme celle de l'apprentissage du graphisme dans les classes des écoles préscolaires et primaires. Le graphisme pourtant, pour les jeunes enfants en âge scolaire, revêt un caractère utilitaire. Il permet de mettre en place des processus cognitifs comme découvrir, observer, rechercher, discriminer des formes et des motifs, décrire, analyser, comparer, s'organiser dans l'espace selon Auradou (2021). Le graphisme est une discipline importante aux fonctions motrices, perceptives et représentatives. Il favorise l'installation de processus cognitifs, la mobilisation et le développement du langage, le développement de l'esprit d'imagination, de l'esprit de créativité et éveille l'esthétisme, la culture. Le graphisme précède l'apprentissage de plusieurs notions mathématiques à l'école maternelle et à l'école primaire comme

* Laboratoire de Recherche en Didactique (LAREDI) – École Normale Supérieure d'Abidjan (ENS-Abidjan) – Côte d'Ivoire – koffipierrekouame@yahoo.fr

l'écriture des nombres en chiffre et en lettres. Son caractère utilitaire exige des dispositions particulières tant au niveau des élèves qu'au niveau des enseignants. Or, dans la réussite scolaire d'un élève, des auteurs relèvent la motivation comme un vecteur important (Deci et al., 2002). Ils affirment que la motivation scolaire est l'essence de l'apprentissage, une clé didactique pour l'apprentissage (Nebout-Arkurst, 2013).

L'importance du graphisme dans le développement des élèves exige des enseignants, des stratégies pédagogiques appropriées, adaptées et inclusives. Ces stratégies doivent pousser tous les élèves quelles que soient leurs spécificités à l'engagement et à la motivation.

Dans cette étude, nous voulons nous intéresser à l'analyse des pratiques motivationnelles des enseignants de Côte d'Ivoire pour une prise en charge efficace des élèves à profils autistiques dans les activités graphiques qui les préparent à l'acquisition correcte des notions mathématiques. Pour ce faire, nous avons observé des enseignants du préscolaire et du primaire en situation d'activités graphiques nécessaires pour l'apprentissage de notions mathématiques.

II. CLARIFICATION CONCEPTUELLE

Pour rendre lisible ce travail, la définition de concepts en lien avec notre sujet est une nécessité. Il s'agit de la motivation, du graphisme, de l'autisme et des pratiques motivationnelles.

La motivation, selon Nebout-Arkurst (2013), est du point de vue dynamique la force qui pousse un individu à entreprendre une action ou l'en empêche. Elle détermine la quantité d'attention et d'énergie dévolue à une tâche. Pour elle, la motivation permet de continuer à agir là où d'autres abandonneraient et elle incite à tirer des leçons de ce que l'on a fait. Du point de vue directionnel, la motivation est l'attraction, l'intérêt ou le rejet que suscite une activité ou une situation donnée. Fréchette-Simard et al. (2019) affirment que la motivation est un vecteur pour la réussite à l'école. Pour Viau (2009), la motivation est : « Un concept dynamique qui a ses origines dans la perception qu'un élève a de lui-même et de son environnement et qui l'incite à choisir une activité, à s'y engager et à persévérer dans son accomplissement afin d'atteindre un but » (P7). La motivation est l'élément moteur (interne ou externe) qui pousse un individu à l'action.

Auradou (2021) définit le graphisme comme une activité caractérisée par l'action d'un outil et du mouvement qui laisse une trace, un motif, un signe sur certains supports dans un plan choisi. Pour Zerbato-Poudou (2002), les activités graphiques proposent des enchaînements de lignes simples rectilignes ou courbes, continues ou discontinues, tout en jouant sur les couleurs pour créer des motifs. Le graphisme est donc l'étude, la production et la reproduction de lignes, de motifs et de formes. Elle permet l'exploration d'organisations spatiales pour construire des habiletés perceptives, motrices et représentatives. Les activités graphiques sont des activités qui permettent aux élèves de reproduire des formes comme les traits, les courbes, les ronds. L'assemblage de ces formes permet d'écrire les chiffres, les lettres, entourer les éléments d'un ensemble comme présentés dans le tableau ci-dessous : l'assemblage de traits permet d'écrire le chiffre 4 ou le chiffre 7. L'assemblage du trait et du rond permet d'écrire la lettre d qui servira à écrire le nombre 10 en lettres.

Tableau 1 – Exemples d'assemblage des formes

Formes	Assemblages
Le trait —	Assemblage de traits pour écrire le nombre 4
	Assemblage de traits pour écrire le nombre 7
Le rond ○	Assemblage de trait et de rond pour écrire la lettre d qui sert à écrire 10 en lettres
Le trait —	
Les boucles C et C	Les boucles permettent d'écrire la lettre x qui intervient dans l'écriture du nombre 10 en lettres

Selon Bertrand (2008), l'autisme est un trouble envahissant du développement qui affecte l'ensemble des moyens de communication et de contact avec autrui. Il atteint aussi les différents domaines d'acquisition de l'enfant et son comportement, les relations sociales, les activités imaginatives, l'expression des émotions, les capacités cognitives, perspectives ou motrices. Ce trouble apparaît généralement avant l'âge de trois ans et s'accompagne de difficultés caractéristiques du comportement avec des aspects paradoxaux, étranges, variables. L'autisme représente un ensemble de symptômes qui varient d'une personne à une autre. L'enfant autiste peut avoir un regard fuyant. Il arrive difficilement à s'engager dans des interactions sociales. Il détourne son regard lorsque l'on essaie d'attirer son attention ou de communiquer avec lui. Il est difficile de capter son attention. Il est allergique aux changements. Il éprouve des difficultés à transférer ses apprentissages dans une nouvelle situation ou dans un environnement inconnu. Il a des difficultés à suivre les consignes verbales. Il a un intérêt obsessionnel pour les objets qui l'intéressent. Il a des difficultés à s'orienter dans l'espace et ne parvient pas à écouter correctement. Ces comportements peuvent impacter négativement les performances de l'enfant autiste pendant l'appropriation des techniques de reproduction des signes, des formes, des symboles et l'empêcher de les utiliser correctement pour acquérir des connaissances mathématiques, car pour bien apprendre, il faut de la concentration, de la discipline, de l'attention. Il faut savoir s'orienter et savoir imiter.

Altet (2003), définit les pratiques enseignantes comme « les manières de faire singulières d'une personne, ses façons réelles, propres d'exécuter une activité professionnelle : l'enseignement ». (P37). Pour elle, les pratiques enseignantes sont les manières dont une personne procède pour communiquer un savoir à un apprenant dans une situation d'enseignement-apprentissage. Les pratiques motivationnelles chez un enseignant sont les manières utilisées par ce dernier pour motiver, pour pousser ses élèves à la réalisation des tâches.

III. PROBLÉMATIQUE

Assurer une éducation de qualité à tous les enfants quels que soient leurs handicaps est une question vive dans tous les pays. Cependant, en Côte d'Ivoire, des études relèvent l'insuffisance d'institutions qualifiées pour la prise en charge efficace de tous élèves en situation de handicap (Kouamé, 2018) et que certains acteurs du système éducatif ivoirien ont une connaissance faible de l'éducation inclusive. Aussi ces études révèlent-elles que les compétences des enseignants sont inadaptées et que c'est dans un cadre scolaire hostile qu'évoluent les élèves à besoins spécifiques (Dembélé et al., 2014). Ces résultats nous poussent à porter un regard sur la prise en charge efficace des élèves à profils autistiques pendant les séances d'enseignement-apprentissage et plus spécifiquement pendant les séances d'activités graphiques en lien avec les notions mathématiques. L'importance du graphisme dans le développement des élèves exige des enseignants, des stratégies pédagogiques appropriées, adaptées et

inclusives. Ces stratégies doivent pousser tous les élèves quelles que soient leurs spécificités à l'engagement et à la motivation. La particularité de ces élèves nous oblige à nous interroger sur la qualité des pratiques enseignantes susceptibles de motiver les élèves autistes dans la réalisation des tâches liées aux activités graphiques nécessaires pour l'apprentissage aisé de notions mathématiques.

Cette étude soulève le problème de l'importance du graphisme dans le développement intellectuel des élèves du préscolaire et du primaire, l'intérêt que représente le graphisme dans l'enseignement des mathématiques, le rôle essentiel de la motivation dans le processus enseignement-apprentissage et la prise en compte de la motivation dans les pratiques enseignantes. Ce problème est suscité par les résultats des recherches qui indexent la qualité de la prise en charge efficace des élèves présentant des handicaps dans le système éducatif ivoirien. Pour ce faire, nous nous sommes posé la question suivante : « les pratiques motivationnelles des enseignants du préscolaire et du primaire de Côte d'Ivoire sont-elles adaptées pour une prise en charge efficace des élèves autistes dans les activités graphiques liées aux notions mathématiques ? » À travers cette question, nous voudrions établir un lien entre les pratiques motivationnelles des enseignants du préscolaire et du primaire et les réactions de leurs élèves à profils autistiques dans les activités d'enseignement-apprentissage du graphisme en lien avec les notions mathématiques. Nous partons de l'hypothèse que : « Les pratiques motivationnelles des enseignants du préscolaire et du primaire de Côte d'Ivoire sont inadaptées pour une prise en charge efficace des élèves autistes dans les activités graphiques liées aux notions mathématiques ».

IV. CADRE THÉORIQUE DE RÉFÉRENCE

Cette étude tire son ancrage théorique dans les questions relatives au processus enseignement-apprentissage, à la dimension sociale de l'apprentissage et à la motivation scolaire. Il se nourrit de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998), de la transposition didactique de Chevallard (1991), du socioconstructivisme de Vygotski (1995) et des théories de la motivation de (Deci et *al.* 2002) et de Viau (1994).

Les élèves acquièrent des savoirs structurés et mis à leur disposition dans des situations proposées par leurs maîtres, où s'exercent des relations étroites entre eux et ces derniers, entre eux et les milieux, entre eux et les savoirs. La démarche d'enseignement utilisée par les enseignants observés engage les phases d'action, de formulation et de validation telles que proposées par Brousseau (1998). La théorie des situations de Brousseau (1998) mérite d'être abordée, car ces situations peuvent être sources de motivation ou d'amotivation. Un savoir mal structuré et présenté aux apprenants peut générer des obstacles. L'approche pédagogique en vigueur en Côte d'Ivoire est l'Approche par les Compétences (APC) qui recommande la découverte de nouvelles notions par les apprenants à partir d'un travail de groupe. Les élèves échangent entre eux et les plus compétents aident les moins performants dans la réalisation des tâches. Le socioconstructivisme tel qu'élaboré par Vygotski (1995) constitue un cadre idéal pour aider à appréhender le processus de construction des connaissances chez les apprenants en vue de leur réutilisation.

Nous voudrions explorer la théorie de l'autodétermination de Deci et ses collègues (2002) qui retiennent les trois principaux types de motivation : la motivation intrinsèque, la motivation extrinsèque et l'amotivation. Pour ces auteurs, la motivation est intrinsèque lorsque l'apprenant s'engage volontairement et spontanément sans récompense dans la réalisation d'une tâche en raison de son intérêt, en raison de son plaisir. La motivation extrinsèque est liée à la pratique d'une activité non en raison du plaisir qu'elle procure ou de son intérêt pour soi, mais pour des raisons externes ou des motifs instrumentaux (punition, récompense, pression sociale, le regard d'une tierce personne). Cette motivation peut être regroupée en quatre sous-catégories : la régulation externe, la régulation introjectée, la régulation identifiée et la régulation intégrée.

La motivation extrinsèque par régulation externe est observée lorsque les élèves s'impliquent dans leurs études en y étant obligés par leurs parents ou lorsqu'ils attendent une récompense de leur travail. Lorsqu'ils s'investissent parce qu'ils ressentent une pression interne de culpabilité ou de honte, cette motivation est extrinsèque par régulation introjectée. La motivation extrinsèque par régulation identifiée se vérifie lorsque les élèves s'engagent dans une activité en sachant que cela peut leur être profitable à l'avenir. La motivation extrinsèque par régulation intégrée est quand des élèves s'investissent dans une activité lorsque celle-ci correspond à leurs valeurs et est cohérente avec leur concept de soi. L'amotivation est l'absence de motivation. C'est le niveau le plus bas de l'autodétermination selon Deci et *al.* (2002).

Pour une analyse des données liées aux différents types de motivation, les indicateurs de Viau (1994) nous éclairent. Selon lui, les indicateurs sont des conséquences de la motivation. Il en retient quatre : le choix de s'engager, la persévérance, l'engagement et la performance. Le choix de s'engager pousse l'élève à réaliser une tâche proposée en déployant des stratégies d'apprentissage. La persévérance s'observe par rapport au temps que l'élève consacre à la réalisation de cette tâche pour bien l'accomplir. L'engagement réfère aux moyens utilisés par l'élève pour s'approprier les contenus enseignés. La performance indique le niveau de réussite de l'élève dans la réalisation de la tâche.

V. APPROCHE MÉTHODOLOGIQUE

1. Site de l'étude

La présente étude s'est déroulée dans une école de la ville d'Abidjan, capitale de la Côte d'Ivoire et dans trois écoles de la ville d'Aboisso, une ville située au sud-est de la Côte d'Ivoire, à environ cent-vingt kilomètres d'Abidjan.

2. Population cible et échantillon

L'étude a été menée auprès de deux types de population : des élèves à profils autistiques et dix enseignants ayant à charge ces élèves. Six élèves à profils autistiques ont été observés dans quatre classes : Cours Préparatoire première année (CP1), et Grande Section (GS). Ces élèves sont répartis selon le tableau ci-dessous.

Tableau 1 – Répartition des élèves observés

Localités	Écoles	Niveaux	Titres des séances	Nombre d'enfants observés
Abidjan	Le Petite Baobab	CP1	Écriture du nombre 5	2
Aboisso	Aboisso Maternelle 1	GS	Les ronds	1
	Aboisso Maternelle 2	GS	Les traits verticaux	2
	Aboisso Maternelle TP	GS	Les traits horizontaux	1

Tous les enseignants ont été formés dans les Centres d'Animation et de Formation Pédagogiques (CAFOP), structures en charge de la formation des enseignants du préscolaire et du primaire en Côte d'Ivoire. Ils utilisent tous comme approche pédagogique, l'Approche Par les Compétences (APC). Les enseignants nous ont permis à partir des réponses aux items de l'enquête à laquelle ils ont été soumis de recueillir leurs connaissances relatives au graphisme et à la motivation scolaire. Ils nous ont proposé des situations d'enseignement-apprentissage en lien avec le graphisme et les notions mathématiques que nous avons exploitées aux fins d'analyse de leurs pratiques motivationnelles. Les séances

présentées ont pour intitulés « *L'écriture du nombre 5* », « *les ronds* », « *les traits verticaux* » et « *les traits horizontaux* ». L'écriture du nombre 5 en chiffre exige l'association d'une boucle, d'un trait vertical et d'un trait horizontal. Les ronds interviennent dans l'écriture des chiffres, dans l'écriture des lettres, dans les activités de tri et de classement relativement à la constitution des collections.

3. *Méthodes de recherche*

Nous utiliserons une méthode mixte de recherche : la méthode qualitative et la méthode quantitative. La méthode qualitative nous permettra d'apprécier les pratiques motivationnelles des enseignants et la méthode quantitative nous permettra de présenter les états statistiques des effectifs des réponses aux items proposés au questionnaire.

4. *Techniques et outils de collecte de données*

Cette étude a consisté à recueillir au moyen de grilles, des données relatives aux pratiques motivationnelles des enseignants puis, à les analyser. La grille comporte des colonnes relatives aux types de motivation observée, aux élèves observés, aux indicateurs de motivation et aux situations ayant déclenché la motivation. Les types de motivation que nous avons retenus sont les motivations intrinsèques, les motivations extrinsèques par régulation externe et les motivations extrinsèques par régulation identifiée au sens de Deci al. (2002). Nous attendons des enseignantes observées le déploiement de pratiques motivationnelles susceptibles d'amener leurs élèves autistes à s'engager volontairement dans la réalisation des tâches proposées ou de les amener à prendre conscience de l'intérêt que présentent les activités graphiques pour leur formation en expérimentant l'effet des récompenses. Le choix des types de motivation et des indicateurs s'est fait par rapport à leur facilité d'exploitation.

5. *Outils d'analyse des données*

Un questionnaire est soumis aux enseignants. Les réponses aux items sont consignées dans une grille. L'analyse des données est faite au regard du niveau d'appropriation des notions de graphisme, de motivation et d'autisme par les enseignants. Des observations de classes relatives à des séances de graphisme liées à des notions mathématiques ont été faites et les données de ces observations ont été recueillies, puis analysées. Les données sont relatives aux types de motivation suscité, aux réactions des élèves présents, aux indicateurs de motivation et aux pratiques motivationnelles des enseignants qui ont provoqué ces motivations.

VI. RÉSULTATS

1. *Résultats issus du questionnaire*

Les résultats issus du questionnaire sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Tableau 2 – Résultats issus du questionnaire

Items	Réponses	Effectifs	Total
Qu'est-ce que le graphisme ?	Activité qui permet à l'enfant d'écrire	5	10
	Manière particulière de dessiner, d'écrire de l'enfant	3	
	Discipline artistique qui traduit visuellement un message	2	
Le graphisme s'apparente à :	Dessin	1	10
	Écriture	6	
	Dessin et écriture	3	
Quelle est l'importance du graphisme ?	Permet à l'enfant d'écrire	8	10
	Développe la motricité fine, l'attention	2	
Donnez les étapes de l'enseignement du graphisme à l'école primaire	Réponses correctes	10	10
	Réponses incorrectes	0	
Vos élèves autistes ont-ils des difficultés à réaliser les tâches liées au graphisme ?	Non	2	10
	Oui	8	
Comment encouragez-vous vos élèves à profil autistique ?	Par des bonbons	3	10
	Par des chants et des poèmes	5	
	Par des stimulations	2	

À l'item 1, huit enseignants définissent le graphisme comme l'activité qui permet à l'enfant d'écrire et de dessiner et deux le définissent comme la discipline artistique qui traduit visuellement un message. À l'item 2, les dix enseignants affirment que le graphisme s'apparente soit au dessin ou à l'écriture, ou au dessin et à l'écriture. Ils ont tous une bonne connaissance de l'importance du graphisme dans le développement intellectuel de l'enfant. Huit affirment que leurs élèves éprouvent des difficultés à réaliser les tâches liées au graphisme. Pour les motiver, trois affirment user de bonbons, cinq de chants et poèmes et deux, de stimulations. Tous les enseignants enquêtés ont donné des réponses correctes relativement aux étapes de l'enseignement du graphisme à l'école préscolaire et à l'école primaire. Ces réponses sont conformes aux instructions des programmes éducatifs en vigueur.

VII. RÉSULTATS ISSUS DES OBSERVATIONS DE CLASSE

Les résultats relatifs à la classe de CP1, Abidjan, Le Petite Baobab sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 3 – Résultats issus de la classe de CP1 : Abidjan, Le Petite Baobab

Motivations suscitées par les enseignants	Élève 1	Élève 2		Pratiques motivationnelles
Motivation intrinsèque	Non	Non	Pas d'engagement	Aucune
Motivation extrinsèque par régulation identifiée	Non	Non	Pas d'engagement	Aucune
Motivation extrinsèque par régulation externe	Oui	Oui	Engagement	Usage de récompenses

Les résultats relatifs à la classe de CP1 Le Petite Baobab montrent qu'aucun des élèves ne manifeste de motivation intrinsèque ou de motivation extrinsèque par régulation identifiée. Cela est révélé par leur manque d'engagement à la réalisation des tâches proposées. La seule motivation observée est la

motivation extrinsèque par régulation externe. Ici, sur proposition de récompenses par l'enseignante (des biscuits), les élèves s'investissent difficilement dans l'exécution des tâches qui leur sont soumises.

Les résultats relatifs à la classe de *GS, Aboisso Maternelle 1* sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 4 – Résultats issus de la classe de GS : Aboisso Maternelle 1

Motivations suscitées par les enseignants	Élève 1	Indicateurs	Pratiques motivationnelles
Motivation intrinsèque	Non	Pas d'engagement	Aucune
Motivation extrinsèque par régulation identifiée	Non	Pas d'engagement	Aucune
Motivation extrinsèque par régulation externe	Oui	Engagement	Usage de récompenses

Les résultats de la classe de GS, Maternelle1 d'Aboisso révèlent que l'élève ne s'engage pas dans la résolution des situations proposées par rapport à une motivation intrinsèque ou par rapport à une motivation extrinsèque par régulation identifiée. La motivation observée pendant la séance est la motivation extrinsèque par régulation externe. L'élève, sur proposition de récompenses par l'enseignante (des bonbons), s'engage dans la réalisation des tâches proposées.

Les résultats relatifs à la classe de *GS, Aboisso Maternelle 2* sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 5 – Résultats issus de la classe de GS : Aboisso Maternelle 2

Motivations suscitées par les enseignants	Élève 1	Élève 2	Indicateurs	Pratiques motivationnelles
Motivation intrinsèque	Non	Non	Pas d'engagement	Aucune
Motivation extrinsèque par régulation identifiée	Non	Non	Pas d'engagement	Aucune
Motivation extrinsèque par régulation externe	Non	Non	Pas d'engagement	Aucune

Les résultats de la classe de GS, Maternelle 2 d'Aboisso n'indiquent qu'aucun des élèves ne manifeste de motivation intrinsèque, de motivation extrinsèque par régulation identifiée ou de motivation extrinsèque par régulation externe. L'enseignante ne propose pas de récompenses, n'encourage pas ses élèves, ne prend pas en compte la spécificité de ses élèves à profil autistiques. Ces derniers ne participent donc pas à la résolution des situations proposées.

Les résultats relatifs à la classe de *GS, Aboisso Maternelle T.P.* sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 6 – Résultats issus de la classe de GS : Aboisso Maternelle T.P.

Motivations suscitées par les enseignants	Élève 1	Indicateurs	Pratiques motivationnelles
Motivation intrinsèque	Non	Pas d'engagement	Aucune
Motivation extrinsèque par régulation identifiée	Non	Pas d'engagement	Aucune
Motivation extrinsèque par régulation externe	Oui	Engagement	Usage de récompenses

Les résultats de la classe de GS, T.P. d'Aboisso montrent que l'élève ne manifeste pas de motivation intrinsèque ou de motivation extrinsèque par régulation identifiée. Il ne s'engage pas dans la réalisation

des tâches proposées par l'enseignante par rapport à ces types de motivation. La motivation observée pendant la séance est la motivation extrinsèque par régulation externe. L'élève, sur proposition de récompenses par l'enseignante (du chocolat), s'engage difficilement dans la résolution des situations.

VIII. ANALYSE DES RÉSULTATS

Les dix enseignants ont une définition relativement correcte du graphisme. Ils reconnaissent son importance dans le développement intellectuel de l'enfant. La majorité affirment que leurs élèves éprouvent des difficultés à réaliser les tâches liées au graphisme. Comme sources de motivation, ils relèvent qu'ils utilisent des bonbons, des chants, des poèmes et des stimulations. Cependant, dans leurs pratiques, les chants, les poèmes ont été absents dans la recherche de moyens de motivation des élèves. La motivation la plus pratiquée est la motivation extrinsèque par régulation externe qui convoque l'usage de récompenses pour susciter l'engagement des élèves. En dépit de cette motivation, il est difficile pour les élèves de s'investir dans la réalisation des tâches proposées. Une enseignante (celle de la classe de *GS, Aboisso Maternelle 2*) ne prend pas en compte la spécificité de ses élèves à profil spécifique dans les activités d'enseignement-apprentissage du graphisme en lien avec les mathématiques. Ses deux élèves ne se sont pas investis dans la résolution des tâches qu'elle leur a proposées. Ces résultats montrent que les pratiques motivationnelles des enseignants du préscolaire et du primaire ne permettent pas de susciter l'engagement de leurs élèves autistes afin qu'ils s'investissent véritablement dans la réalisation des tâches relatives aux activités graphiques liées aux notions mathématiques. Ce constat confirme notre hypothèse qui stipule que « Les pratiques motivationnelles des enseignants du préscolaire et du primaire de Côte d'Ivoire sont inadaptées pour une prise en charge efficace des élèves autistes dans les activités graphiques liées aux notions mathématiques ».

IX. CONCLUSION

En Côte d'Ivoire, la question de l'inclusion scolaire est portée par une volonté politique. Elle s'adosse à une loi. Cependant, cette volonté politique, dans son opérationnalisation, rencontre des difficultés relativement à l'insuffisance d'institutions qualifiées pour une prise en charge efficace des élèves en situation de handicap et à la faible connaissance de l'éducation inclusive par certains acteurs du système éducatif ivoirien.

Cette étude a cherché à explorer les pratiques motivationnelles des enseignants pour une prise en charge efficace des élèves à profils autistiques dans les situations d'enseignement-apprentissage du graphisme lié à des notions mathématiques.

Les résultats obtenus à partir d'une enquête et d'observations de classes relèvent que les pratiques motivationnelles des enseignants en charge des élèves autistes sont essentiellement déployées pour susciter la motivation extrinsèque par régulation externe à travers l'usage par les enseignants de récompenses. Aucune action n'est mise en œuvre pour déclencher chez les élèves à profil autistique, les autres types de motivation.

RÉFÉRENCES

- Altet, M. (2003). Caractériser, expliquer et comprendre les pratiques enseignantes pour aussi contribuer à leur évaluation. *Les dossiers des sciences de l'éducation*, (10), 31-43.
<https://doi.org/10.3406/dsedu.2003.1027>
- Auradou, M. (2021). *Le graphisme...pour le graphisme à l'école maternelle : intérêt et mis en œuvre*. [Mémoire de Master 2, Institut National Supérieur du Professorat et de l'Education, Académie de Paris]. HAL theses. https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-03348012v1/file/3225-20mprigent_Auradou_Marie.pdf
- Bertrand, J. (2008). *Autisme, le gène introuvable, de la science au business*. Seuil.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.
- Deci, E. L. et Ryan, R. M. (2002). *Handbook of Self-Determination Research*. University of Rochester Press.
- Dembélé, M., Sirois, G., Abdourhaman, I., Azoh, F. J., Kyélem, M., Sakho, I. et Bacha, M. (2014). Assurer la disponibilité de personnel enseignant au primaire en Afrique subsaharienne francophone. *Revue internationale d'éducation de Sèvres*, (94), 95-106. <https://doi.org/10.4000/ries.14661>
- Fréchette-Simard, C., Plante, I., Dubeau, A. et Duchesne, S. (2019). La motivation scolaire et ses théories actuelles : une recension théorique. *Revue des sciences de l'éducation de McGill*, 54(3), <https://mje.mcgill.ca/article/view/9664>.
- Kouamé, K. P. (2018). Enseignement des mathématiques et école inclusive : cas des élèves handicapés visuels en côte d'ivoire. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMF2018 « Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines »*, 22-26 octobre 2018, Gennevilliers, Paris (p. 1277-1279). IREM de Paris.
- Nebout-Arkurst, P. (2013). *La motivation scolaire, une clé didactique pour l'apprentissage*. Balafons.
- Viau, R. (2009). *La motivation en contexte scolaire*. Les Éditions du Renouveau Pédagogique Inc. (Ouvrage original publié en 1994)
- Vygotski, L. (1995). *Pensée et langage*. Éditions sociales.
- Zerbato-Poudou, M.-T. (2002). À quoi servent les exercices graphiques ? *Repères – Recherches en didactiques du français langue maternelle*, (26-27), 61-71. <https://doi.org/10.3406/reper.2002.2390>

PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE DES ACTIVITÉS PRÉNUMÉRIQUES À DES APPRENANTS PRÉSENTANT DES TROUBLES DU SPECTRE AUTISTIQUE

| DIOMANDE* MARIAME ET BOA** EKORA HÉLÈNE (ÉPOUSE DJOUÉ)

Résumé | Notre texte porte sur les pratiques d'enseignement-apprentissage des activités prénumériques à destination d'apprenants présentant des troubles du spectre autistique. L'étude vise à décrire la nature des difficultés déclarées que rencontrent les enseignantes dans la mise en œuvre de ces situations. Les résultats indiquent des difficultés de nature didactique dans les activités de perception des couleurs « proches » et dans la construction des activités de sériation. Au niveau pédagogique, les enseignants semblent occulter la motivation dans leurs pratiques enseignantes.

Mots-clés : enseignement-apprentissage, autistes, activités prénumériques, préscolaire.

Abstract | Our text focuses on teaching-learning practices of pre-digital activities for learners with autism spectrum disorders. The study aims to describe the nature of the declared difficulties encountered by teachers in the implementation of these situations. The results indicate didactic difficulties in the activities of perception of “close” colors and in the construction of seriation activities. At the pedagogical level, teachers seem to hide motivation in their teaching practices.

Keywords: Teaching-learning, autistic, pre-digital activities, preschool

I. INTRODUCTION

En Côte d'Ivoire, les enfants en situation de handicap sont particulièrement vulnérables et éprouvent des difficultés d'intégration sociales et scolaires. Leur droit à l'éducation n'est pas suffisamment pris en compte. Le handicap représente un sujet qui fâche, qui dérange. Avoir un enfant en situation de handicap est presque considéré comme une « malédiction » selon les perceptions traditionnelles. Dans les zones rurales, il existe des rites d'accompagnement qui consistent à les faire disparaître. Les raisons découlent du fait que le peu de moyens dont disposent les familles sont destinés aux enfants « valides ». Certains parents, à cause du regard des autres, cachent leurs enfants chez eux sans jamais les montrer. Le handicap n'est pas une fatalité et les enfants en situation de handicap doivent bénéficier du droit à l'éducation. Pour leur éducation, une sensibilisation sur le handicap de façon générale se révèle indispensable pour que cessent les discriminations. Cela permettrait de dédramatiser le handicap et de favoriser une meilleure intégration des enfants autistes dans la société. La scolarité de l'élève présentant des troubles du spectre autistique doit se faire dans un cadre éducatif approprié. Les instructions officielles dans les dispositifs curriculaires exigent une orientation inclusive dans les pratiques enseignantes. D'où l'intérêt d'analyser le dispositif de formation des enseignants du préscolaire ivoirien pour comprendre les pratiques d'enseignement-apprentissage. Ces pratiques sont analysées autour d'enseignement-apprentissage des activités prénumériques en préscolaire. Le dispositif institutionnel de formation des enseignants présente des faiblesses. Elles sont liées au fait qu'il n'y ait pas d'outillage pour une prise en compte efficace des apprenants présentant des troubles neuro-développementaux dans leurs pratiques. Pourtant ces enfants ont besoin d'apprendre comme les autres. L'éducation pour tous, telle qu'envisagée dans la loi n° 95696 du 7 septembre 1995 relative

* Laboratoire de recherche en didactiques de l'ENS d'Abidjan – Cote d'ivoire – mdiomande25@yahoo.fr

** Laboratoire de recherche en didactique de l'ENS d'Abidjan – Cote d'ivoire – ekorahelène@gmail.com

à l'enseignement consacre la scolarisation des enfants dès l'âge de trois (3) ans. Les missions assignées se déclinent principalement à trois niveaux que sont le développement global et harmonieux de l'enfant, la socialisation et la préparation aux apprentissages scolaires avant l'entrée au primaire. La présente étude porte sur les pratiques d'enseignement-apprentissage des activités prénumériques à des apprenants présentant des troubles du spectre autistique. Elle se veut un cadre d'analyse pédagogique et didactique des situations d'enseignement-apprentissage sur ces activités. L'objectif de cette recherche est de décrire la nature des difficultés et les obstacles rencontrés par les enseignantes du préscolaire dans leurs pratiques.

II. QUELQUES REPÈRES THÉORIQUES

L'étude prend ancrage dans plusieurs postulats sur les activités prénumériques, la motivation et les pratiques d'enseignement-apprentissage auprès des apprenants autistes.

1. *Caractéristiques des activités prénumériques*

Les activités prénumériques sont des activités qui préparent l'enfant à aborder aisément l'étude des nombres et des opérations. Ces activités sont : le tri, le classement, les sériations le rangement, les rythmes, les correspondances, la comptine et le jeu Kim. Ces activités préparent les apprenants à la maîtrise des aspects ordinaux et cardinaux du nombre

Atta (2023) part d'une approche conceptuelle des activités prénumériques soutenues par des illustrations. À partir de plusieurs cartes conceptuelles, il tisse les liens didactiques entre ces notions et propose une démarche de didactisation des jeux pour une appropriation ouverte. Cette démarche prend en compte le nom du jeu, le principe, les règles et les variantes.

2. *La motivation au service de l'apprentissage*

Selon Viau (1994), la motivation est vue comme un état psychologique qui se manifeste par des comportements observables chez chaque apprenant. Elle résulte d'un ensemble de conceptions et de perceptions qu'il a de lui, de tout ce qui a rapport l'institution scolaire et à ce qui s'y déroule. Tardif (1992) soutient que la motivation scolaire est l'engagement, la participation et la persistance de l'élève dans sa tâche. Elle fait en sorte que les élèves écoutent attentivement et travaillent dans l'effort. Tout apprentissage dépend de la motivation. Sans cette dynamique, sans cette mise en mouvement, l'apprentissage faiblit. La motivation est un véritable moteur de l'activité. Elle garantit en plus du départ-orientation, le parcours du mouvement et la continuité vers la réalisation de l'objectif, en dépassant les obstacles. Pour Nebout (2013), la motivation est une clé didactique pour l'apprentissage. Aubert (1994) considère qu'elle constitue une composante essentielle de la réussite scolaire. Ainsi, certains échecs sont loin d'être toujours dus à l'incapacité des élèves. Les élèves se motivent s'il leur est proposé un contrat didactique avec du sens et respectueux de leur rôle (Nebout, 2019). Ils deviennent alors des acteurs créatifs, voire des partenaires dynamiques, qui coopèrent avec l'enseignant au sein du système didactique. Le développement même du cerveau dépend de l'engagement du sujet dans des aventures cognitives stimulantes. Il faut rappeler également que le lien qui existe entre la réussite scolaire et le degré de motivation est étroit. Forner (1999) confirme la corrélation entre la motivation des élèves et la réussite au baccalauréat. Roussel (2000) définit deux types de motivation que sont la motivation intrinsèque et celle extrinsèque. Pour la motivation intrinsèque, ce sont les forces qui incitent à effectuer des activités volontaires, par intérêt pour elles-mêmes et pour le plaisir et la satisfaction que l'on en tire. Cette motivation correspond aux intérêts spontanés de la personne, indépendamment de toute récompense extérieure. Concernant la motivation extrinsèque, la source se

situé à l'extérieur du sujet. Ce sont les renforcements, les évaluations positives, les récompenses significatives qui alimentent alors la motivation.

III. CADRE MÉTHODOLOGIQUE

La présente étude a été menée dans des écoles de l'inspection préscolaire et primaire de Cocody blokhau (Abidjan). La population cible est de deux types. La première est composée d'enseignantes titulaires de la moyenne et de la grande section ayant reçu au moins un enfant présentant des troubles du spectre autistique dans leur classe. Le second type concerne les apprenants autistes des écoles préscolaires ordinaires choisies de cette inspection. L'échantillonnage porte sur huit (8) enseignantes et 10 enfants autistes. Ces enseignantes et élèves autistes enquêtés sont choisis de manière raisonnée. L'étude s'est faite à travers une enquête par questionnaire adressée aux enseignantes du préscolaire des écoles choisies de cette inspection et une observation de leurs pratiques de classe en présence d'apprenants autistes. L'outil de collecte de donnée utilisé est un questionnaire qui se structure en trois parties : la première partie correspond à une présentation de l'objectif de l'enquête ; la deuxième est consacrée à l'identification des personnes enquêtées ; la troisième correspond à un recueil d'informations relatives aux connaissances sur les stratégies mises en œuvre pour l'apprentissage des activités prénommées à des apprenants présentant des troubles du spectre autistique. Les items ont été élaborés autour de deux axes. Les centres d'intérêt sur les pratiques enseignantes et les pratiques motivationnelles. Une séance de classe sur les activités prénommées dans les classes des enseignantes enquêtées a été menée. Les informations récoltées ont été consignées dans une grille d'observation qui se présente sous forme d'un tableau à trois (3) colonnes. La première colonne regroupe les observables. Il s'agit des étapes méthodologiques d'une séance à savoir, le prérequis, la situation d'amorce, la recherche, la validation, la fixation et l'évaluation. La deuxième colonne comporte les commentaires ou constats relatifs aux difficultés ou obstacles pédagogiques. La troisième colonne comporte les commentaires ou constats relatifs aux difficultés ou obstacles didactiques. Dans le cadre de l'étude, deux méthodes d'analyses du questionnaire ont été choisies, soit les méthodes qualitative et quantitative. La démarche qualitative a permis d'analyser la qualité de l'animation de la classe à travers la qualité des moyens motivationnels et d'évaluation (productions orales et écrites des enfants autistes) de ces classes. L'étude quantitative présente les statistiques sur les types de réponses aux différents indicateurs dégagés relativement aux items du questionnaire.

IV. RÉSULTATS

1. Résultats déclarés relatifs à la formulation des consignes

Le tableau 1 présente le nombre de réponses obtenues à chaque item concernant la formulation des consignes.

Tableau 1 – Qualité déclarée des consignes

Formulation de consignes	Nombre de réponses
Consignes avec qualité	8
Pas de prise en compte des besoins des autistes	6
Consignes formulées une fois	0
Consignes formulées plusieurs fois	8

Toutes les enseignantes enquêtées déclarent formuler des consignes de qualité. Elles affirment les reformuler plusieurs fois. Les 3/4 des enseignantes déclarent ne pas tenir compte des apprenants autistes dans la formulation de leurs consignes.

2. Résultats déclarés relatifs aux difficultés d'enseignement

Le tableau 2 présente le nombre de réponses obtenues à chaque item relatif aux difficultés d'enseignement des activités prénumériques.

Tableau 2 – Difficultés d'enseignement déclarées

Difficultés d'enseignement	Nombre de réponses
Maîtrise des notions sur les activités prénumériques	3
Confusion entre les notions de propriétés et de critères	7
Gestion des situations de manipulation	6
Formulation des contenus d'évaluations	8

L'ensemble des enseignantes enquêtées a évoqué des difficultés à formuler des contenus d'évaluation qui prennent en compte les apprenants autistes en activités prénumériques. Les 3/4 des enseignantes estiment ne pas arriver à gérer leur classe accueillant des apprenants autistes pendant les activités de manipulation. La majorité des enseignantes (7/8) confond les notions de critères et de propriétés. Cette confusion rend difficile la transmission de ces notions aux enfants autistes qui ne parviennent pas à manipuler ou à produire.

3. Résultats déclarés relatifs aux pratiques de remédiation déclarées

Le tableau 3 présente le nombre de réponses obtenues à chacun des items portant sur les pratiques de remédiations déclarées.

Tableau 3 – Pratiques de remédiation déclarées

Pratiques de remédiation	Nombre de réponses
Diagnostiquer les erreurs	2
Faire corriger les erreurs par les apprenants autistes en erreur	8
Faire répéter ou reprendre une fois les corrections par les apprenants autistes en erreur	8
Faire répéter ou reprendre plusieurs fois la correction par les apprenants autistes en erreur	1

Toutes les enseignantes déclarent faire corriger les erreurs et faire répéter ou reprendre une fois les corrections par les apprenants autistes. Une seule enseignante déclare faire répéter ou reprendre plusieurs fois la correction par les apprenants autistes en erreur. Seulement 1/4 des enseignantes déclare diagnostiquer l'erreur.

4. Résultats relatifs à la préparation matérielle

Le tableau 4 présente le nombre de réponses obtenues en ce qui a trait à la préparation matérielle.

Tableau 4 – Fréquences des dispositions matérielles

Préparation matérielle	Nombre de réponses
Confection de matériel en cas de manque ou d'insuffisance.	8
Achat de matériel en cas de manque ou d'insuffisance.	0
Utilisation du matériel prescrit dans les guides pédagogiques.	8

Les huit enseignantes déclarent confectionner du matériel en cas de manque ou d'insuffisance et utiliser le matériel prescrit dans les guides, mais aucune d'elles n'achète du matériel en cas de manque ou d'insuffisance.

5. Résultats relatifs à la gestion de la discipline

Le tableau 5 présente le nombre de réponses obtenues à chaque item relatif à la gestion déclarée de la discipline dans la classe.

Tableau 5 – Éléments de discipline

Éléments de discipline	Nombre de réponses
Communication permanente avec les apprenants autistes causant le désordre	8
Attention permanente à l'intention des apprenants autistes	8

Toutes les enseignantes déclarent dans le questionnaire communiquer et porter attention aux apprenants autistes causant le désordre dans leur classe.

6. Résultats relatifs aux pratiques motivationnelles déclarées

Le tableau ci-dessous présente le nombre de réponses obtenues à chaque item relatif aux pratiques motivationnelles déclarées des enseignants.

Tableau 6 – Fréquences des pratiques motivationnelles

Pratiques motivationnelles	Nombre de réponses
Encouragement des apprenants autistes en situation d'activités prénumériques	8
Félicitation des apprenants autistes en situation d'activités prénumériques	8
Soutien de l'effort des apprenants autistes en situation d'activités prénumériques	8
Valorisation des productions des apprenants en situation d'activités prénumériques	8

Les huit enseignantes enquêtées déclarent utiliser des pratiques motivationnelles telles que les encouragements, les félicitations, la valorisation des productions et le soutien des efforts en situation d'activités prénumériques en présence des apprenants autistes.

7. Résultats des observations relatifs à la gestion de la discipline

Le tableau 7 présente le nombre de réponses obtenues à chacun des items concernant la gestion déclarée de la discipline dans la classe.

Tableau 7 – Éléments de discipline

Éléments observables	Fréquences
Communication permanente avec les apprenants autistes causant le désordre	0
Attention permanente sur les apprenants autistes	1

Aucune des enseignantes observées ne communique en permanence avec les apprenants autistes causant le désordre dans leur classe et seulement une enseignante porte une attention de manière permanente aux apprenants présentant des troubles autistiques dans sa classe.

8. Résultats des observations relatives aux pratiques de remédiation

Le tableau qui suit présente la fréquence observée aux items relatifs aux pratiques de remédiation des enseignantes.

Tableau 8 – Fréquences des pratiques de remédiation observées

Observables	Fréquences
Diagnostiquer les erreurs	0
Faire corriger les erreurs par les apprenants autistes en erreur	0
Faire répéter ou reprendre une fois les corrections par les apprenants autistes en erreur	3
Faire répéter ou reprendre plusieurs fois la correction par les apprenants autistes en erreur	5

Aucune des enseignantes observées ne posent le diagnostic des erreurs. De plus, elles n'amènent pas les élèves autistes à corriger par eux-mêmes leurs erreurs. Ces constats sont en déphasage avec leurs déclarations dans le questionnaire. Moins de la moitié des enseignantes observées (3/8) font répéter ou font reprendre une fois les corrections par les apprenants en erreurs. Dans la pratique, cinq des huit enseignantes observées font reprendre plusieurs fois les corrections par les apprenants autistes en erreurs alors que dans le questionnaire, une seule enseignante avait déclaré cette pratique.

9. Résultats relatifs aux productions des élèves

La figure ci-dessous illustre les résultats des productions des apprenants présentant des troubles autistiques au cours de quelques activités prénumériques.

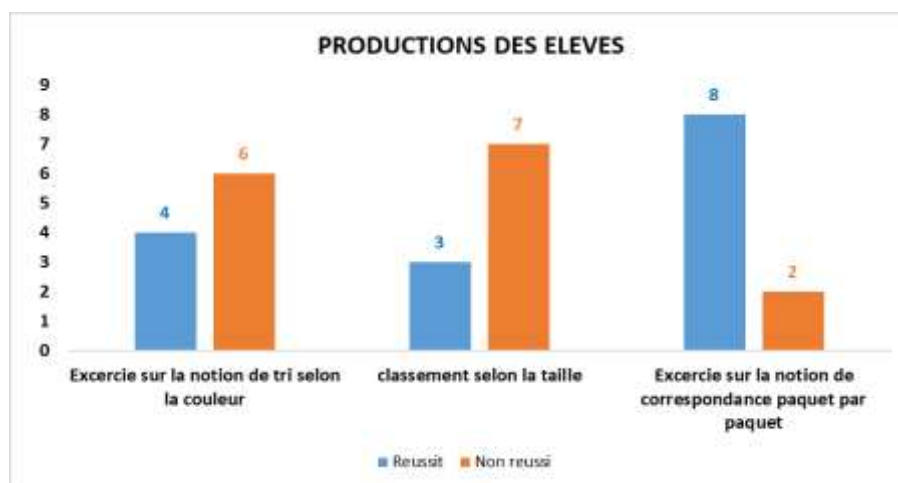


Figure 1 – Statistiques des productions des élèves

Bien que la plupart des apprenants autistes observés aient réussi l'exercice sur la notion de correspondance paquet par paquet (8/10), la majorité d'entre eux a échoué l'exercice de tri selon la couleur (6/10) et celui du classement selon la taille (7/10). Ces difficultés s'expliquent selon nous principalement par l'absence d'une prise en charge individualisée adaptée de la part des enseignantes aux besoins spécifiques de ces apprenants.

V. INTERPRÉTATION ET DISCUSSION DES RÉSULTATS

Au niveau motivationnel, les résultats révèlent que la valorisation des productions est une pratique de motivation courante. Toutes les enseignantes enquêtées la pratiquent, ce qui montre qu'elles prennent suffisamment en compte le handicap d'autisme en situation de classe. La plupart des enfants autistes ont un développement langagier inhabituel. La valorisation de leurs productions est un moyen motivationnel important pour les emmener à mieux s'exprimer et à avoir confiance en eux. À ce stade, il ressort que la difficulté majeure des enseignantes concerne les enseignements. Au niveau de la maîtrise des contenus, seulement les 3/8 des enseignantes maîtrisent les notions de façon générale relativement aux activités prénumériques. Toutes les enseignantes utilisent des pratiques motivationnelles conséquentes à l'endroit des enfants autistes, ce qui entraîne la réussite des apprenants dans les productions, comme le souligne Nebout-Arkhurst (2013) lorsqu'elle affirme que la motivation est une composante essentielle de la réussite scolaire. Les enfants autistes ne sont pas pris en compte au niveau de la reformulation des consignes des exercices d'évaluation proposés. Toutes les enseignantes enquêtées éprouvent des difficultés. Elles ont également des difficultés en ce qui a trait à la gestion des situations de manipulation. Il faut prendre en compte la spécificité des enfants autistes en matière de communication et de mémoire à long terme ainsi que leurs difficultés à gérer plusieurs stimuli. De plus, ces enfants ont des difficultés à planifier et à conduire une stratégie de résolution. Les méthodes d'apprentissage préconisées dans les instructions officielles s'appuyant essentiellement sur le socioconstructivisme, c'est-à-dire les connaissances construites dans l'action des élèves par des échanges, des confrontations entre eux peuvent jouer un rôle important dans l'éducation des enfants autistes. Elles peuvent les aider à dépasser leurs difficultés spécifiques à savoir l'altération des interactions sociales de la communication, la maladresse motrice ainsi que le manque d'imagination et d'autonomie. Il s'agit surtout des difficultés à affronter une situation nouvelle ou prendre des initiatives. La mise en pratique de méthodes appropriées ne saurait se faire sans une formation des enseignants ordinaires à transcrire le savoir. Un enseignement adapté aux capacités des apprenants autiste est conseillé comme le préconisent Viau (1994) et Tardif (1992) qui affirment que la motivation est un des facteurs importants dans le processus d'apprentissage.

VI. CONCLUSION

Notre sujet a porté sur les pratiques d'enseignement-apprentissage des activités prénumériques à des apprenants présentant des troubles du spectre autistique au préscolaire. Le contexte institutionnel décrit fait comprendre que les pratiques attendues auprès d'enfants présentant des troubles du spectre autistique sont loin de respecter les exigences en la matière. Les interrogations qui en découlent amènent à penser que les pratiques des enseignants sont de natures hétérogènes et non réflexives. Pourtant, l'enjeu de l'école d'aujourd'hui est entre autres l'égalité des chances et la lutte contre toutes formes de discriminations. Prenant appui sur un questionnaire et sur des observations de séances en classe, notre étude montre que les besoins spécifiques des apprenants présentant des troubles du spectre autistique ne sont pas suffisamment pris en charge par les enseignants dans leurs pratiques malgré leurs initiatives de créations et de productions de matériel de travail en dehors des prescriptions institutionnelles. Dans l'ensemble, elles mettent en place des pratiques motivationnelles même si leurs pratiques de communication sont à reconsidérer. Afin d'aider l'institution à atteindre l'objectif

d'inclusion scolaire et d'un apprentissage de qualité, une formation des enseignants s'impose. Ces derniers doivent être formés pour ainsi prendre adéquatement en charge les enfants autistes en situation de classe. Partant de ce constat, l'institution doit renforcer les capacités des enseignants en matière de pédagogie différenciée et individualisée. L'organisation de séjours pédagogiques dans des institutions spécialisées au profit des enseignants favoriserait une prise en charge pédagogique et didactique efficiente dans les pratiques de classe.

RÉFÉRENCES

- Atta, K.Y.G. (2023). *Les activités prénumériques au préscolaire et au primaire*. Attakob.
- Diomande, M. (2022). *Pratiques enseignante de la multiplication auprès des apprenants présentant des troubles du spectre autistique* [Mémoire de master, École normale supérieure d'Abidjan].
- Förner, Y. (1999). *Motivation à apprendre, mythe ou réalité*. L'Harmattan.
- Nebout-Arkhurst, P. (2013). *La motivation scolaire. Une clé didactique pour l'apprentissage*. Maylis.
- Nebout-Arkhurst, P. (2019). *Se former en didactique*. Balafons.
- Roussel, P. (2000). *Rémunération, motivation et satisfaction au travail*. Economica.
- Tardif, J. (1992). *La transposition pour un enseignement stratégique. L'apport de la psychologie cognitive*. Logiques.
- Viau, R. (1994). *La motivation en contexte scolaire*. Renouveau Pédagogique.

REGARD SUR L'EFFET DE DEUX RÉGULATIONS DANS L'ADAPTATION DE TÂCHES MATHÉMATIQUES PROPOSÉES À DES ÉLÈVES EN DIFFICULTÉS LANGAGIÈRES

| DUPUIS BROUILLETTE* MARILYN, THEIS** LAURENT ET MILLON-FAURÉ*** KARINE

Résumé | Des glissements sont possibles dans les interventions mises en place pour les élèves ayant des difficultés. Ce texte propose des analyses de deux régulations menant à des conditions défavorables et favorables aux apprentissages en géométrie d'élèves âgés de 6 à 8 ans ayant un trouble langagier. Un premier exemple de régulation traduit un surinvestissement du vocabulaire mathématique au détriment de l'activité géométrique. Par la suite, un deuxième exemple de régulation favorisant l'activité mathématique explicite une activité langagière non verbale.

Mots-clés : élève ayant des difficultés langagières, régulations, géométrie, activités langagières

Abstract | Phenomena are possible in the field of teaching and learning mathematics especially for students with difficulties. This text analyses two regulations that lead to unfavorable and favorable conditions for geometry for students aged 6 to 8 with language difficulties. Regulations observed have resulted in an over-investment in mathematical vocabulary instead of geometric activity. Subsequently, other tasks are explained, with the example of non-verbal language activity.

Keywords: Students with language disabilities, regulations, geometry, language activities

Ce texte met en lumière deux exemples de régulation lors d'une situation didactique, issus d'une thèse de doctorat (Dupuis Brouillette, 2024). Cette thèse étudie des pratiques enseignantes en mathématiques réalisées auprès d'élèves ayant un trouble langagier âgés de 6 à 8 ans en milieu scolaire québécois au Canada. Ces deux exemples abordent des enjeux relatifs à l'enseignement et l'apprentissage en mathématiques pour les élèves ayant des difficultés langagières. Les pratiques enseignantes véhiculées en sol québécois, spécifiquement pour les élèves ayant des difficultés, sont souvent influencées par les courants de la psychologie et de la neuroscience, et ce, parfois au détriment des enjeux didactiques propres aux disciplines telles que les mathématiques. À l'instar de Roiné (2009) et Giroux (2013), l'étude de phénomènes didactiques permet de comprendre les conditions dans lesquelles les difficultés des élèves se déploient. Ces phénomènes didactiques explicitent les glissements dans les interventions réalisées pour ces élèves. En effet, ces aides offertes aux élèves se basent parfois uniquement sur les caractéristiques des élèves et prennent peu compte des spécificités du milieu didactique.

Afin de considérer à la fois les difficultés des élèves et les enjeux didactiques en mathématiques, nous adoptons un point de vue qualifié de « systémique ». Ce faisant, une perspective tenant compte des interactions entre ces trois pôles, soit l'élève, l'enseignant et le savoir est choisie (Giroux, 2013 ; Theis et al., 2014). Les caractéristiques des élèves sont étudiées en fonction des conditions dans lesquelles elles apparaissent et comment elles évoluent.

En ce sens, Assude et ses collègues (2014, 2015) parlent de conditions d'accessibilité didactique afin de réfléchir à la manière dont les savoirs sont rendus accessibles aux élèves lors des situations

* Université du Québec à Rimouski – Canada – marilyn_dupuisbrouillette@uqar.ca

** Université de Sherbrooke – Canada – laurent.theis@usherbrooke.ca

*** Université d'Aix-Marseille – France – karine.millon-faure@univ-amu.fr

didactiques, en particulier ceux qui rencontrent des difficultés. Dans ce texte, nous abordons les enjeux propres à l'activité langagière en mathématiques et les aides qui sont mobilisées pour soutenir les apprentissages des élèves ayant des difficultés langagières.

I. ACTIVITÉ LANGAGIÈRE EN MATHÉMATIQUES POUR DES ÉLÈVES AYANT DES DIFFICULTÉS LANGAGIÈRES

Des auteurs tels que Bernié (2002) et Jaubert et Rebière (2002) explicitent l'importance de l'activité langagière dans l'enseignement et l'apprentissage de certains contenus, dont les mathématiques. En mathématiques, Mendonça Dias et Millon-Fauré (2023) précisent que « quel que ce soit le niveau scolaire considéré, l'enseignant se doit de prendre en charge un certain travail sur la langue dans le cadre de ses cours de mathématiques » (p. 14). L'interrelation entre le langage usuel et le langage spécifique aux disciplines telles que les mathématiques est complexe et fait naître des enjeux considérables. Pensons notamment aux connaissances liées au vocabulaire et aux symboles propres aux mathématiques, d'une part, ainsi que des justifications et de la formulation de preuves afin d'explicitier différents raisonnements.

Devant cette nécessité, nous définissons la notion d'activité langagière en mathématiques, dans un premier temps, pour ensuite décrire les difficultés potentielles en mathématiques pour des élèves ayant des difficultés langagières. Finalement, les enjeux concernant les aides apportées à ces élèves sont ciblés afin d'exposer les résultats par la suite.

1. Activités langagières en mathématiques

Plusieurs recherches ont mis de l'avant les enjeux liés au langage en mathématiques (Bronner et Larguier, 2004 ; Bulf et al., 2015 ; Coulange, 2014 ; Millon-Fauré, 2011 ; Radford et Barwell, 2016). Tout dépendamment des chercheurs, différents vocables sont utilisés : activité langagière, pratiques langagières, rôles du langage mathématique, etc. Afin de clarifier ce que nous entendons, nous nous appuyons sur les propos de Reuter et ses collaborateurs (2021) qui mettent de l'avant que le travail d'analyse de l'activité langagière consiste à : « analyser les fonctionnements du langage en contexte, [à] interroger sur la production de sens et d'effets, [à] interroger le rapport du sujet au langage et à la situation dans laquelle il est engagé comme sujet » (p. 169). Cela implique alors de considérer dans quelles conditions le langage est présent et quelles sont les attentes en termes d'apprentissages par les élèves.

Qui plus est, Chesnais et Coulange (2022) explicitent différents enjeux et fonctions que l'activité langagière en mathématiques détient. Réfléchir aux enjeux langagiers demande de :

S'interroger sur le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques [en] questionn[ant] le rôle du langage comme objet d'apprentissage et d'enseignement, comme moyen d'apprentissage, enfin comme moyen d'enseignement ; cela nécessite en outre de s'intéresser au langage en tant qu'outil pour le chercheur, comme trace de l'activité des élèves et des enseignants. Chacune de ces quatre problématiques inclut les précédentes, mais ne s'y réduit pas. (Chesnais et Coulange, 2022, p. 104)

À la suite de la lecture de cet extrait, il est possible de constater la pluralité et la complexité du rôle du langage en mathématiques. Cette activité langagière est donc autant réalisée par l'enseignant que par l'élève. Dans le cas de cette recherche, l'activité langagière mobilisée par une enseignante est étudiée ainsi que l'activité langagière attendue et réalisée par deux élèves ayant un trouble langagier précisément dans une situation en géométrie. Les attentes en termes d'apprentissage peuvent évoluer avec des changements de tâches et, de ce fait, modifier l'activité langagière demandée.

2. *Difficultés langagières en mathématiques*

Constatant la prégnance du langage dans l'enseignement et l'apprentissage en mathématiques, comment se déroulent les situations d'apprentissage et d'enseignement pour les élèves ayant des difficultés langagières ? Les régulations font partie de l'enseignement en ce sens qu'elles permettent de faciliter les apprentissages. Tout élève est amené à vivre des difficultés ; elles sont intrinsèques à l'apprentissage. Il est possible d'envisager que les élèves ayant des difficultés langagières pourraient vivre des difficultés de natures différentes que leurs camarades du même âge, voire même davantage de difficultés lors d'activités langagières en situations mathématiques.

Ces difficultés langagières peuvent être causées par différents facteurs tels qu'un diagnostic de dyspraxie verbale ou un trouble de l'élocution. Des élèves allophones qui ne maîtrisent pas la langue d'enseignement utilisée dans leur nouvelle classe peuvent également vivre des difficultés, et ce, même s'ils n'ont pas ces difficultés dans leur langue maternelle (Millon-Fauré, 2011). Dans le cas de notre thèse, les élèves qui ont bénéficié des interventions ont un trouble langagier. Pour expliciter les difficultés possibles, nous nous basons sur la définition du trouble langagier de l'Association Américaine de Psychiatrie écrite dans le Manuel diagnostique et statistique des troubles mentaux (2023) :

- A. Difficultés persistantes d'acquisition et d'utilisation du langage dans ses différentes modalités (c.-à-d. langage parlé, écrit, langage des signes ou autre forme) dues à un manque de compréhension ou de production incluant les éléments suivants :
 - 1. Vocabulaire restreint (connaissance et utilisation des mots).
 - 2. Carence de structuration de phrases (capacité d'assembler des mots et de les accorder afin de former des phrases selon les règles grammaticales et morphologiques).
 - 3. Déficience du discours (capacité d'utiliser le vocabulaire et d'associer des phrases pour exprimer ou décrire un sujet ou une série d'événements, ou pour tenir une conversation). (...) (p.57)

Force est de constater que les situations de handicap (dans un même ordre d'idées que Fougeyrollas, 2010) sont inévitables. Pour les élèves ayant un trouble langagier, l'apprentissage de tout vocabulaire est ardu. En contexte d'apprentissage en mathématiques, les difficultés langagières sont également prégnantes. Les obstacles sont multiples en lien avec la connaissance et l'utilisation du vocabulaire mathématique, d'une part, et également lorsque des énoncés discursifs sont exigés, comme les démonstrations et les justifications.

Dans une vision systémique, les tensions apparaissent entre les attentes liées à l'activité langagière nécessaire aux mathématiques et les caractéristiques de l'élève ayant des difficultés langagières. Quelles pratiques enseignantes sont mobilisées pour répondre à ces tensions ?

II. CADRES DE RÉFÉRENCE

Nos premières notions théoriques sont celles introduites par le cadre théorique de la Théorie de l'Action Conjointe Didactique (TACD) (Collectif Didactique pour enseigner, 2019 ; Sensevy, 2011 ; Sensevy et Mercier, 2007) utilisant plusieurs descripteurs théoriques. Dans ce texte, le quadruplet de caractérisation du déroulement du jeu didactique est utilisé avec ses quatre composantes, soit la définition, la dévolution, la régulation et l'institutionnalisation (Sensevy, 2011). En cohérence avec la TACD, le concept d'accessibilité didactique permet d'analyser dans quelles conditions les difficultés apparaissent. L'accessibilité didactique cible quatre descripteurs théoriques : les analyses épistémiques

des savoirs disciplinaires, les régulations, la robustesse des situations didactiques ainsi que les praxéologies professionnelles des personnes enseignantes (Assude et al., 2015 ; Dupré, 2019).

Dépendamment des ouvrages, les régulations peuvent être synonymes d'aides, d'interventions, de soutien ou encore d'adaptations. Ces actions sont réalisées par l'enseignant alors que l'élève éprouve une difficulté dans une tâche quelconque. Dans une perspective didactique, les régulations sont définies comme étant des pratiques mises en place par l'enseignant et permettant : « à l'élève d'occuper une place par rapport aux savoirs » (Dupré, 2019, p. 41). Ainsi, ces aides visent à favoriser la réalisation des tâches mathématiques par l'élève afin qu'ils mobilisent des techniques nouvelles ou connues.

À partir de ces éléments théoriques, la question se pose : quelles sont les régulations lors de l'adaptation de tâches mathématiques pour des élèves ayant des difficultés langagières ? Plus exactement, quels sont les effets de ces régulations sur le milieu didactique et sur les tâches demandées ? Avant de répondre à cette question, le cadre méthodologique est décrit.

III. MÉTHODOLOGIE

Cette recherche s'inscrit dans une approche qualitative (Savoie-Zajc, 2018 ; Paillé et Mucchielli, 2021) avec un devis de recherche collaborative (Desgagné et al., 2001). Ceci peut être compris comme étant partie prenante des recherches participatives : la relation entre le chercheur et les participants est définitivement le moteur de la démarche de recherche (Bednarz, 2013 ; Desgagné et al., 2001). La recherche collaborative amène cette idée de construction collective des savoirs, avec la participation active des praticiens (enseignants) et des chercheurs. Selon le modèle des recherches collaboratives de Desgagné (2001) et de Bednarz (2013), trois étapes sont présentes, soit la co-situation, la co-opération et la co-production. La phase de co-situation permet de constater les besoins respectifs, de les comprendre et de mettre en place des moyens pour en arriver à l'objectif situé. La phase de co-opération constitue la démarche de réflexion permettant le développement professionnel pour les praticiens et la collecte de données pour les chercheurs. La phase de co-production est le moment où il y a une production des retombées de cette recherche pour les praticiens et les chercheurs (Desgagné et al., 2001).

Nous avons collaboré avec une enseignante, titulaire d'une classe ordinaire d'élèves âgés entre 6 et 9 ans, tout au long de la collecte de données. Dans cette classe ordinaire, nous avons particulièrement analysé les interactions entre l'enseignante et deux élèves ayant un trouble langagier, Jade et Rose. Nous analysons des exemples issus de deux des cinq situations expérimentées, en nous appuyant sur des descripteurs tirés du cadre de référence, à savoir les régulations de l'enseignante et l'accessibilité didactique. Les modalités d'analyse ont été des analyses de contenus thématiques (Paillé et Mucchielli, 2021) tirés des descripteurs théoriques des cadres de référence. Dans ce texte, nous faisons ressortir exclusivement les analyses liées aux régulations, descripteur théorique présent dans la TACD et l'accessibilité didactique.

IV. RÉSULTATS ET DISCUSSION

Nous proposons d'analyser deux exemples de régulations qui ont marqué les réflexions entre chercheuse et enseignante. Dans quelles conditions les élèves ont-ils fait des apprentissages ? Devant les difficultés, quelles régulations ont été mises en place pour tenter de favoriser la réalisation des tâches par les élèves ? Nous relevons également différents enjeux qui paraissent pertinents au regard des régulations et des effets sur les tâches mathématiques proposées.

1. *Déroulement sommaire d'une situation didactique*

La situation didactique ciblée dans ces analyses s'intitule « La chasse aux figures planes » et travaille des enjeux de savoirs mathématiques liés à la géométrie, à travers l'identification et la description de figures planes comme intention principale. Il s'agit d'une situation de communication où les élèves sont amenés à travailler en équipe de deux. Dans ce cas, deux élèves ayant un trouble langagier ont été placés volontairement dans la même équipe par l'enseignante. Sommairement, des tâches différentes selon les rôles sont présentes, 1) identifier oralement la figure plane ciblée (rôle de l'émetteur), 2) repérer la figure plane ciblée par l'émetteur parmi une collection de figures planes placées sur une table (rôle du récepteur) et 3) valider (ou invalider) la figure plane récupérée par le récepteur (rôle de l'émetteur). Pour réaliser les tâches, deux rôles sont ainsi présents, soit le rôle de l'émetteur et le rôle du récepteur. Dans le rôle de l'émetteur, l'élève a un document avec les consignes. La première consigne montre une figure plane (par exemple un cercle) et demande à l'émetteur de nommer cette figure au récepteur. La deuxième consigne pose une question à l'émetteur (quelle figure a trois côtés ?) et lui demande de nommer cette figure au récepteur. La dernière consigne demande à l'émetteur de décrire une figure sans la nommer (décris un rectangle sans dire le mot rectangle).

Lors des débuts de la situation didactique, Jade commence avec l'aide de l'enseignante qui l'accompagne afin de comprendre le rôle d'émettrice et de faire la lecture des consignes. Il est possible de constater que Jade, en tant qu'émettrice, a réussi la première tâche. L'objectif était d'identifier un cercle et Jade a nommé verbalement « rond ». Même si des nuances existent entre les termes rond et cercle, ce qu'il importe de souligner, c'est que Jade a proposé un nom qui permet à l'enseignante de comprendre que l'élève est capable d'identifier cette figure. L'enseignante a alors accepté l'utilisation du vocabulaire « rond ». Pour une autre question, Jade a décrit un triangle en affirmant que c'était une figure à trois côtés. Pour ce qui est des étapes de validation, comme Rose a rapporté trois figures planes qui correspondaient aux attentes, Jade a hoché de la tête pour approuver sans argumenter.

Lorsque vient le tour de Rose avec le rôle d'émettrice, elle a besoin de soutien à plusieurs reprises. L'enseignante lui apporte du soutien pour lire les consignes, ce qui était prévu en sachant que l'élève ne sait pas encore lire, mais elle le fait également à certains moments pour l'activité mathématique. Lors de la première question, Rose nomme la figure comme étant un triangle alors que c'était un carré ; l'enseignante la questionne en lui disant « Est-ce que c'est un triangle ? » et Rose se réajuste immédiatement, sans aide supplémentaire, en proposant « carré ». La place de l'enseignante, lors de cette régulation sur la dénomination du carré, ne permet pas à Rose de valider que la figure plane rapportée n'aurait pas concordé avec celle illustrée sur son document de travail ; la rétroaction qui serait alors venue du milieu est évitée et c'est l'enseignante qui, par son questionnement, invite Rose à changer sa réponse. Lors d'une autre question, Rose décrit le rectangle illustré en disant que c'est une figure à quatre côtés. Jade rapporte un rectangle à Rose, qui correspond à la bonne figure plane et Rose valide rapidement par un « Oui ». Ainsi, Rose parvient à identifier le rectangle en nommant une caractéristique (quatre côtés), mais sans verbaliser le mot « rectangle ». Bref, l'enseignante termine en affirmant que cette figure est correcte.

Un peu plus tard, l'enseignante revient vers Jade et Rose et elle leur propose quelques tâches de manière spontanée. Voici l'extrait qui décrit ces nouvelles tâches :

Tableau 1 – Extrait ciblant le premier exemple de régulations

Déroulement de la situation didactique	Tâches observées
L'enseignante questionne Jade et Rose à propos des figures planes. Elle demande à Jade : « Comment ça s'appelle ça ? (En lui montrant un triangle) ». Jade lui répond « kriangue ». L'enseignante lui demande de répéter, ce qu'elle fait en prononçant le mot triangle de la même façon. Après avoir compris, l'enseignante la félicite en lui disant bravo.	Dénomination d'une figure plane trouvée et validée (triangle)
L'enseignante montre le cercle à Jade et lui demande « Comment ça s'appelle ? ». Jade répond alors « Rond » et l'enseignante lui dit que c'est vrai, mais qu'elle a aussi un autre nom... Jade affirme qu'elle ne s'en rappelle pas. L'enseignante demande à Rose le connaît. Rose affirme que non et, après quelques secondes, l'enseignante dit que c'est un « cercle ».	Dénomination d'une figure plane trouvée et validée (cercle)
L'enseignante échange un peu avec les élèves plus âgés. Ensuite, elle revient avec une autre question. Elle prend la figure du carré, la désigne à Jade et lui demande « Comment ça s'appelle ça ? ». Jade lui répond « carré » sans hésiter. L'enseignante lui demande ensuite combien de côtés a le carré. Jade, encore une fois sans hésiter, lui répond « quatre ». Elle montre la figure à Rose et cette dernière hoche de la tête pour dire « oui ».	Dénomination d'une figure plane trouvée et validée (carré) Description d'une figure plane trouvée et validée (par son nombre de côtés) (carré)
L'enseignante change alors la figure plane et prend un rectangle. Elle demande à Jade « Comment ça s'appelle ça ? » Voyant que Jade ne s'en rappelle plus, elle demande à Rose qui répond que c'est un rectangle. L'enseignante se tourne vers Jade et lui demande le nombre de côtés présents dans un rectangle. Jade lui répond « quatre » sans hésitation. L'enseignante pose une autre question « Est-ce que les quatre côtés sont égaux ? » Quelques échanges se font à ce sujet. L'enseignante demande à nouveau à Jade de nommer cette figure. Elles échangent pendant cinq minutes parce que Jade et Rose n'arrivent plus à nommer le rectangle.	Dénomination d'une figure plane trouvée et validée (rectangle) Description d'une figure plane trouvée et validée (par son nombre de côtés et la longueur de ses côtés) (rectangle)

Plusieurs interrogations se présentent pour comprendre pourquoi Jade et Rose ne parviennent pas à se rappeler du nom du rectangle alors qu'elles l'ont fait en début de situation didactique. Est-ce de la fatigue ? Est-ce que les considérations sur les côtés égaux qui les ont embrouillées ? Pourquoi insister sur la dénomination alors que le nom a été dit quelques instants auparavant ? Les effets de ce premier exemple de régulations face aux difficultés des élèves nécessitent une analyse que nous détaillons plus tard.

2. Premier exemple de régulation : un surinvestissement de la dénomination verbale

C'est à partir de ces extraits tirés du premier tableau que nous avons pu mettre en exergue le nombre de régulations portant sur la dénomination verbale. À maintes reprises, les élèves ont été questionnées sur le nom des figures planes ainsi que le nombre de côtés présents dans ces figures. Dans la majorité des consignes, les deux élèves ayant un trouble langagier ont réussi à réaliser les tâches demandées. À un moment, vers la fin de la situation, l'enseignante est confrontée à des difficultés persistantes de Jade et Rose ; elle les questionne pendant plus de cinq minutes afin de les amener à nommer le rectangle, mais les élèves n'y parviennent pas. Devant ces difficultés, l'enseignante met en place plusieurs régulations dont l'élimination de différentes figures planes en les nommant une à une (rond, triangle, carré), mais en omettant la « bonne réponse » (le rectangle)... qu'elle finit par dire finalement.

Ce type de phénomène a également été décrit par d'autres auteurs dont Conne (2003), Giroux (2013), Marlot et Toullec-Théry (2013) et Toullec-Théry (2006). Conne (2003) relève un surinvestissement de certains savoirs au détriment d'autres. Ce surinvestissement est présent dans cette recherche collaborative, notamment avec les tâches mathématiques sollicitant la dénomination des

figures planes. Selon ce dernier auteur, cette sélection de certains savoirs, perçus comme étant essentiels, permet d'étirer (et de surinvestir) le temps d'enseignement consacré à ces mêmes savoirs, et ce, en y adoptant des tâches qu'il est possible de qualifier de routinières. En ce sens, Jade a été amenée à répondre aux questions de l'enseignante « Comment ça s'appelle ? » ciblant ainsi le vocabulaire géométrique cinquante fois. Pour Rose, c'est vingt-huit fois que l'enseignante s'est adressée exclusivement à elle avec cette même question. Pour les autres élèves de deuxième et troisième cycle de cette classe, c'est environ à une dizaine de reprises que l'enseignante s'est adressée directement à chacun d'eux pour leur proposer ce type de tâches. Ainsi, même si Jade réussit à pointer et nommer le rectangle au début de l'activité, l'enseignante y revient et la questionne à nouveau. Ceci fait écho à une affirmation de Sensevy (2011) qui souligne que « d'autres élèves sont classés comme "ayant des difficultés" et dans ce cas (...) le maître semble exiger des preuves multiples et répétées de connaissance avant de se convaincre qu'ils sont également compétents » (p. 165). Ceci entre en cohérence avec les propos de Marlot et Toullec-Théry (2013) qui mettent de l'avant « un affaiblissement de l'enjeu didactique pour les élèves perçus en difficulté, un éparpillement et fractionnement de tâches, une mobilisation des élèves sur des tâches de bas niveau dans le but de les faire réussir ou de les aider à regagner un certain capital de confiance dans la classe » (Marlot et Toullec-Théry, 2013, p. 9). Bref, dans les régulations analysées, une forte centration sur les tâches sollicitant le vocabulaire géométrique (activité langagière) a été faite au détriment de l'activité mathématique, et ce, même en ayant observé que les élèves étaient en mesure de réaliser les tâches, parfois avec un peu d'aide et souvent sans.

3. *Deuxième exemple de régulation : le passage par l'activité langagière non-verbale pour identifier des figures planes*

À la suite du premier extrait de la situation, l'enseignante propose d'autres tâches exclusivement à Jade. Ces régulations sont spontanées et ne font pas partie des analyses *a priori* ou même des échanges qui ont eu lieu entre l'enseignante et la chercheuse dans la planification.

Tableau 2 – Extrait ciblant le deuxième exemple de régulations

Déroulement réel de la situation didactique	Tâches observées
L'enseignante s'adresse directement à elle et lui demande combien de triangles il y a au sol. « Va voir, va les mettre ensemble et dis-moi il y en a combien ! »	Repérer tous les triangles parmi la collection Dénombrer les triangles présents sur le carton au sol

Dans ce passage, l'enseignante change de tâches en demandant à Jade de dénombrer et de désigner les triangles au sol ; ces tâches permettent de constater si elle est capable d'identifier les figures planes ciblées sans avoir à passer par la dénomination et la description verbale. Qui plus est, il faut mentionner que la collection était composée de différents cercles, de quadrilatères et de triangles. Par exemple, comme il y avait différents types de triangles, ceci ajoutait une certaine difficulté dans la reconnaissance de la figure. Il a été possible de voir si l'ensemble des triangles se résumait pour elle à l'exemple typique du triangle équilatéral ou isocèle. Bref, les effets de ce deuxième exemple de régulations sont abordés dans une analyse que nous décrivons à la suite du premier exemple.

Pour les tâches d'identification des figures planes, les programmes éducatifs en vigueur au Québec citent la dénomination comme technique possible, mais d'autres sont également envisageables comme la désignation. Cet extrait nous paraît pertinent dans l'amorce d'un changement de posture de l'enseignante.

Voyant que Jade avait de la difficulté à nommer les figures planes, l'enseignante a décidé de les nommer elle-même. L'enseignante lui a donc demandé d'aller chercher, parmi la collection de figures planes variées, tous les triangles. Ce passage de la dénomination au pointage change la tâche initialement demandée mais permet de contourner les obstacles liés aux difficultés langagières des élèves. Cette évolution dans ce deuxième exemple de régulations permet à l'élève de montrer sa compréhension sans avoir à verbaliser, c'est-à-dire par un geste pointant la figure parmi une collection. Les gestes font ainsi office de réponse.

Force est de constater que la fonction de communication du langage verbal s'inscrit dans un ensemble plus large incluant la communication paraverbale et non verbale (gestes, pointages, mimiques, etc.) (Barrera-Curin et al., 2020 ; Lacombe, 2022 ; Mendonça Dias et Millon-Fauré, 2023). En ce sens, Lacombe (2022) souligne les bénéfices des gestes dans la réalisation de différentes tâches de transformations géométriques (rotations) afin de constater les apprentissages d'élèves ayant une déficience intellectuelle. Ceci entre en cohérence avec les propos de Chesnais et Coulangue (2022) qui affirment que le langage permet d'avoir une trace de l'activité des élèves. Dans ce texte-ci, les traces ne sont pas des verbalisations telles que Chesnais et Coulangue (2022) le proposent, mais bien des gestes à l'instar de Lacombe (2022). La considération de différentes activités langagières paraît dès lors prometteuse.

V. CONCLUSION

Aux termes de cette recherche, les analyses présentées ont mis de l'avant deux régulations offrant des conditions d'accessibilité aux tâches géométriques bien différentes. Dans les situations ciblant les figures planes et les solides en géométrie en début de scolarité, il est communément assumé que « les nommer permet de les identifier ». Nous avançons ici que les nommer ne suffit pas pour les identifier et qu'il existe d'autres manières d'identifier. Ainsi, cette situation étudiée montre qu'il est possible d'identifier des figures planes sans passer par leur nom ; identifier non-verbalement par pointage, par exemple. Ce dernier aspect, émergent de la pratique de l'enseignante dans la deuxième régulation, reste plutôt en marge et crée d'ailleurs des remises en question dans sa pratique enseignante. En effet, dans la continuité des situations didactiques de la thèse, subséquentes à celle analysée ici, l'enseignante a progressivement diminué les tâches de verbalisation, et ce, malgré le fait que la verbalisation est omniprésente et valorisée en géométrie.

Par ailleurs, les résultats révèlent que les tâches variées (arrimant activité langagière verbale et non-verbale) permettent de rejoindre les savoirs prescrits dans les programmes éducatifs tout en diminuant les situations de difficulté pour les élèves ayant un trouble langagier. La réalisation des tâches par l'élève peut tout aussi bien être pertinente lorsqu'elles sont réalisées en complémentarité avec le langage non-verbal (manipulation, désignation, geste, etc.). Ces régulations réfléchies et spontanées peuvent être profitables pour ces élèves, comme les analyses le montrent, mais également être bénéfiques pour d'autres élèves.

Certaines nuances doivent cependant être apportées. D'une part, cette régulation proposant une activité langagière non-verbale est tout à fait pertinente pour les élèves ayant un trouble langagier dans la mesure où la verbalisation risquent d'empêcher leur activité mathématique. Pour les autres élèves de la classe, la verbalisation peut constituer un support au raisonnement mathématique et doit donc être encouragée. D'autre part, même si nous avons mentionné que certaines régulations entraînent des glissements et ne facilitent pas toujours l'accès aux savoirs mathématiques (selon les conditions de l'accessibilité didactique), plusieurs de ces régulations ont permis aux élèves d'entrer dans le jeu

didactique et de réaliser les tâches prévues initialement. L'analyse de ces régulations doit être approfondie afin de comprendre les conditions dans lesquelles elles s'avèrent nécessaires.

RÉFÉRENCES

- Association Américaine de Psychiatrie [APA]. (2023). *Manuel diagnostique et statistique des troubles mentaux* (5^e éd., texte révisé). Elsevier Masson.
- Assude, T., Perez, J.-M., Suau, G. et Tambone, J. (2015). Conditions d'accessibilité aux savoirs. Dans J. Zaffran (dir.), *Accessibilité et handicap : anciennes pratiques, nouvel enjeu* (p. 209-224). Presses universitaires de Grenoble.
- Assude, T., Perez, J.-M., Suau, G., Tambone, J. et Vérillon, A. (2014). Accessibilité didactique et dynamique topogénétique : une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 33-57.
- Barrera-Curin, R. I., Bergeron, L. et Perreault, A. (2020). Analyse des interactions dans une classe où les élèves présentent des difficultés langagières : l'influence des pratiques d'une enseignante sur l'activité mathématique des élèves. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 23(1), 103-133.
- Bednarz, N. (dir.). (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement*. L'Harmattan.
- Bernié, J.-P. (2002). L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ? *Revue française de pédagogie*, (141), 77-88.
- Bronner, A. et Larguier, M. (2004). Le rôle du langagier dans la construction des savoirs mathématiques. Dans *Acte du 9^e colloque de l'AIRDF, 26-28 août 2004, Québec*.
<http://www.colloqueairdf.fse.ulaval.ca/fichier/Communications/Bronner-Larguier.pdf>
- Bulf, C., Mathé, A.-C., Mithalal, J. et Wozniak, F. (2013). Le langage en classe de mathématiques : regards croisés en TSD et en TAD. Dans A. Bronner, C. Bulf, C. Castela, J.-P. Georget, M. Larguier, B. Pedemonte, A. Pressiat et É. Roditi (dir.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. XV^e école d'été de didactique des mathématiques, 21-28 août 2011, Carcassonne*. La Pensée Sauvage.
- Champagne, M. et Coulangue, L. (2019). Pratiques langagières et difficulté scolaire : des questions didactiques ou pédagogiques ? *Éducation et formation*, (312), 65-80.
- Chesnais, A. et Coulangue, L. (2022). Rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Synthèse et perspectives en didactique des mathématiques. *Revue française de pédagogie*, (214), 85-121.
- Collectif Didactique pour enseigner (dir.). (2019). *Didactique pour enseigner*. Presses universitaires de Rennes.
- Conne, F. (2003). Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. *Éducation et francophonie*, 31(2), 82-102.
- Coulangue, L. (2014). Les pratiques langagières au cœur de l'institutionnalisation des savoirs mathématiques. *Spirale*, (54), 9-27. <https://doi.org/10.3406/spira.2014.1034>
- Desgagné, S., Bednarz, N., Couture, C., Poirier, L. et Lebuis, P. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, 27(1), 33-64.
- Dias, T., Sermier Dessemontet, R. et Dénervaud, S. (2016). Étayer les élèves dans la résolution de problèmes. *Revue de Mathématiques pour l'école*, (225), 4-8.

- Dupré, F. (2019). *Pratiques inclusives en mathématiques dans le second degré : études de cas en ULIS collège* [Thèse de doctorat inédite]. Université d'Aix-Marseille.
- Dupuis Brouillette, M. (2024). *Co-construction de situations mathématiques entre intervenantes et chercheuse pour des élèves ayant un trouble langagier en contexte d'inclusion scolaire* [thèse de doctorat inédite]. Université de Sherbrooke.
- Fortin, M.-F. et Gagnon, J. (2016). *Fondements et étapes du processus de recherche : Méthodes quantitatives et qualitatives* (3^e éd.). Chenelière éducation
- Fougeyrollas, P. (2010). *La funambule, le fil et la toile. Transformations réciproques du sens du handicap*. Presses de l'Université Laval.
- Giroux, J. (2004). Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(2), 303-327.
- Giroux, J. (2013). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Éducation et didactique*, 7(1), 59-86.
- Jaubert, M. et Rebière, M. (2002). Parler et débattre pour apprendre : comment caractériser un « oral réflexif » ? Dans J.-C. Chabanne et D. Bucheton (dir.), *Parler et écrire pour penser, apprendre et se construire* (p. 163-186). Presses universitaires de France.
- Lacombe, N. (2022). *Le rôle des gestes chez des élèves avec une déficience intellectuelle dans la réalisation, la conceptualisation et l'explicitation d'une tâche de rotation mentale - Résultats de trois revues systématiques de littérature et d'une recherche empirique* [Thèse de doctorat inédite]. Université de Fribourg.
- Mendonça Dias, C. et Millon-Fauré, K. (2023). *Mathématiques en français langue seconde et en langue étrangère*. Hachette.
- Millon-Fauré, K. (2011). *Répercussions des difficultés langagières des élèves dans l'activité mathématique en classe : Le cas des élèves migrants* [Thèse de doctorat inédite]. Université d'Aix-Marseille.
- Millon-Fauré, K. et Gombert, A. (2021). Analyse d'une situation en mathématiques pour une élève dyscalculique. Méthodologie pour la conception d'adaptations pédagogiques et didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 41(2), 143-176.
- Paillé, P. et Muchielli, A. (2021). *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales* (5^e éd.). Armand Colin.
- Radford, L. et Barwell, R. (2016). Language in mathematics education research. Dans A. Gutiérrez, G. Leder et P. Boero (dir.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (p. 275-313). Sense.
- Reuter, Y. (dir.), Cohen-Azria, C. et Lahanier-Reuter, D. (2021). *Traité des didactiques : 40 concepts fondamentaux, questions et débats, lectures de référence*. De Boeck supérieur.
- Roiné, C. (2009). *Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en S.E.G.P.A. - Une contribution à la question des inégalités* [Thèse de doctorat inédite]. Université de Bordeaux.
- Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir : éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck.
- Sensevy, G. et Mercier, A. (dir.). (2007). *Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Presses universitaires de Rennes.
- Theis, L., Assude, T., Tambone, J., Morin, M.-P., Koudogbo, J. et Marchand, P. (2014). Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ? *Éducation et francophonie*, 43(2), 158-172.

ANALYSE DE LA MISE EN ŒUVRE D'UNE SÉQUENCE À VISÉE INCLUSIVE SUR LA SYMÉTRIE AXIALE AU CYCLE 3

| LESNES* ELANN ET PETEERS** FLORENCE

Résumé | Nous analysons la mise en œuvre d'une séquence à visée inclusive sur la symétrie axiale au cycle 3 (élèves de 9 à 11 ans) en nous concentrant sur une séance construite à partir de la situation adidactique des napperons de Peltier (2000-2001). Nous étudions les procédures de résolution de trois élèves à besoins éducatifs particuliers, les difficultés qu'ils/elles rencontrent et la façon dont ils/elles les dépassent (ou non) en s'appuyant sur le milieu, avec ou sans l'aide de l'enseignante.

Mots-clés : pédagogie universelle, symétrie axiale, situation adidactique, interactions enseignant-élèves

Abstract | We analyse the implementation of a sequence with an inclusive aim on axial symmetry in “cycle 3” (pupils aged 9 to 11), focusing on a lesson based on the adidactic situation of Peltier's doilies (2000-2001). We study the solving strategies of three pupils with special educational needs, the difficulties they face and the ways in which they overcome them (or not) with the help of the *milieu*, with or without the teacher's help.

Keywords: Universal pedagogy, axial symmetry, adidactic situation, teacher-student interactions

I. INTRODUCTION

L'inclusion scolaire des élèves ayant des *besoins éducatifs particuliers* (BEP) représente actuellement un véritable défi pour l'école. Une réponse possible et prometteuse à la prise en compte de la diversité des élèves peut être trouvée du côté de la pédagogie universelle (*Universal Design for Learning*, UDL). En effet, cette démarche pédagogique vise la création de situations d'apprentissage accessibles pour toutes et tous en misant sur l'accès à une multitude de chemins pour atteindre un objectif commun d'apprentissage (Rose et Meyer, 2002). Trois grands principes sous-tendent la pédagogie universelle (Bergeron *et al.*, 2011). Le premier principe consiste à offrir plusieurs moyens d'engagement, c'est-à-dire à susciter et maintenir l'intérêt des élèves en tenant notamment compte des difficultés émotionnelles qui peuvent entraver les apprentissages. Le deuxième principe vise à proposer divers moyens de représentation, reconnaissant que chaque individu assimile et traite l'information de manière unique. Enfin, le troisième principe consiste à offrir aux élèves plusieurs moyens d'action et d'expression pour rendre compte de leurs apprentissages, notamment en repensant les modalités d'évaluation. Des lignes directrices pour chacun de ces principes fondateurs de l'UDL ont été définies par le groupe CAST (Center for Applied Special Technology, 2018).

Nous faisons l'hypothèse que les situations adidactiques développées dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) respectent en particulier le premier principe de l'UDL (l'engagement). En effet, il s'agit de situations dans lesquelles l'élève peut envisager une réponse à partir de ses connaissances actuelles. Cette réponse initiale n'est (souvent) pas celle que l'on veut enseigner car c'est la connaissance visée par le concepteur ou la conceptrice de la situation qui est requise pour passer de la stratégie de base à la stratégie optimale, ce qui lui donne du sens. D'autant plus que c'est le milieu qui fournit les rétroactions pour permettre à l'élève de construire (ou réinvestir) la

* Univ Rouen Normandie, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, F-76000 Rouen – France – elann.lesnes@univ-rouen.fr

** CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, Univ. Lille, Univ Rouen, LDAR, F-95000 Cergy-Pontoise – France – florence.peteers@cyu.fr

connaissance visée après potentiellement plusieurs essais au cours desquels l'élève a pu essayer plusieurs stratégies.

Cette hypothèse va dans le sens des travaux de Houle et Bachand (2023) ou encore Assude *et al.* (2011, 2012) qui faisaient déjà expérimenter une situation adidactique emblématique, la situation « les voitures et les garages », par deux enseignantes de CLIS 1 (avant 2015, classes pour l'inclusion destinées aux élèves dont la situation de handicap affecte les fonctions cognitives ou mentales). Leur expérimentation montre que lorsque la situation est adaptée au contexte par l'enseignante (nombre de voitures diminué par rapport à la situation initiale, aides sur la technique à mobiliser, etc.) sans modifier les enjeux de savoir (ou temporairement pour permettre l'engagement des élèves avant de revenir à la situation initiale), celle-ci se révèle en effet efficace pour faire progresser les élèves dans la construction du nombre.

II. PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE CONSTRUITE

1. *Présentation des trois séances*

Suite à une première étude (Lesnes et Peteers, 2024) portant sur l'analyse de manuels destinés aux élèves BEP dans laquelle nous nous sommes focalisé·es sur la symétrie axiale, nous avons repris la situation adidactique des napperons conçue par Peltier (2000-2001) en vue de concevoir une séquence rendant la plus accessible possible cette notion à l'ensemble des élèves (nous évoquerons les principes de l'UDL pris en compte au fur et à mesure sans pouvoir rentrer dans les détails ici). Cette situation étant reprise dans des manuels (De Kocker et Winder, 2016), nous faisons l'hypothèse qu'elle n'est potentiellement pas trop éloignée des pratiques usuelles des enseignant·es, ce qui peut faciliter sa mise en œuvre en classe.

La séquence conçue est à destination des élèves de CM1-CM2 (*grades* 4 et 5) et comporte trois séances. Lors de la première, les élèves découpent des premiers napperons sans chercher à reproduire un modèle (premier principe de l'UDL). Ils et elles plient des carrés de papier et découpent pour observer les figures obtenues une fois le papier déplié. Lors de la mise en commun, la symétrie est explicitement réintroduite (ce n'est pas une nouvelle notion pour les élèves qui la travaillent depuis le CE1/*grade* 2) et la méthode pour obtenir un napperon expliquée (pour soutenir le premier principe de l'UDL) : plier autant de fois que nécessaire et découper tout ou une partie de la forme que l'on veut obtenir.

Dans cet article, nous nous intéressons à la première partie de la deuxième séance qui correspond à la situation adidactique de Peltier (2000-2001). Après un bref rappel de la séance précédente, la figure 1 (que nous appellerons « le modèle », voir annexe, figure 1) est projetée au tableau et distribuée aux élèves (cette double représentation respecte le deuxième principe de l'UDL) qui reçoivent également des carrés de papier (plus grands que le modèle à reproduire). La consigne, prévue pour être donnée à l'écrit et à l'oral (deuxième principe de l'UDL), est la suivante : « Vous devrez reproduire le napperon qui est affiché. Pour cela, vous devrez effectuer tous les pliages et tous les découpages que vous jugerez nécessaires. Vous pouvez recommencer autant de fois que nécessaire jusqu'à obtenir le napperon affiché. ». Suite à ce travail individuel, nous avons prévu un travail en binôme sur la comparaison des napperons réalisés par les élèves avec le modèle afin de faire émerger des critères de conformité (les élèves manipulent et verbalisent, en lien avec le troisième principe de l'UDL). La séance se termine par une mise en commun de ces critères et des procédures pour obtenir un napperon conforme à un modèle donné.

Lors de la troisième séance, les élèves reproduisent des napperons plus complexes (deux ou quatre axes de symétrie) au choix (premier principe de l'UDI) et il y a une phase d'institutionnalisation sur la symétrie axiale et les axes de symétrie des figures usuelles.

2. *Analyse a priori de la reproduction du napperon modèle*

Les notions mathématiques visées concernent essentiellement la symétrie axiale : la notion d'axe de symétrie, certaines propriétés de la symétrie axiale (conservation des formes, des alignements, des angles), ainsi que les propriétés de symétrie de certaines figures simples. Ces notions sont au programme en CM1-CM2 en France.

Pour réussir cette tâche, l'élève peut repérer l'axe de symétrie sur le napperon modèle puis déterminer le « motif » à découper. Celui-ci peut être découpé en plusieurs fois (en dépliant entre chaque découpe pour s'assurer de la conformité au modèle) ou en une seule fois. Pour se repérer lorsque le napperon est plié, les élèves peuvent s'appuyer sur les figures déjà découpées en fonction des positions relatives des figures entre elles sur le modèle. Il est également possible de plier le modèle de la même façon et de placer le napperon plié dans la même orientation pour repérer une à une les découpes à effectuer. En ce qui concerne les difficultés, les élèves peuvent avoir du mal à repérer l'axe de symétrie sur le modèle, à déterminer le motif à découper. Ils/elles peuvent aussi se tromper d'orientation au moment de découper une figure. Nous envisageons également une stratégie erronée qui consiste à plier le napperon selon l'axe de symétrie repéré mais à systématiquement découper des figures entières, l'élève obtiendrait alors deux cerfs-volants de part et d'autre de l'axe de symétrie, par exemple.

Les variables didactiques sont nombreuses (nombre d'axes de symétrie et position par rapport au carré, formes à découper, position des découpes par rapport à l'axe ou aux bords, présentation du napperon modèle, modalités de validation d'un napperon). Pour la situation proposée dans cette deuxième séance, le modèle n'a qu'un seul axe de symétrie qui est une des médianes du carré. Il y a sept figures à reproduire dont quatre sur les bords du carré (deux quarts de disque symétriques, deux triangles symétriques) et trois sur l'axe de symétrie (un triangle, un disque, et un cerf-volant). Les élèves disposent d'un modèle individuel sur lequel ils et elles peuvent écrire et qu'ils et elles peuvent plier (voire découper). Les modalités de validation sont négociées plus tard dans la séance mais il est clair dès le début qu'il ne s'agit pas de produire une réduction ou un agrandissement proportionnel au modèle et aucune mesure n'est impliquée.

III. CADRE THÉORIQUE, QUESTION DE RECHERCHE ET MÉTHODE

1. *Cadre théorique*

L'objectif de notre recherche est d'étudier l'activité des élèves (en particulier, à BEP) en situation. Nous appelons « activité » ce que développe un ou une élève pour réaliser une tâche. Dans le cadre de la théorie de l'activité en didactique des mathématiques (Vandebrouck, 2008), une tâche a toujours un objet à transformer ou à étudier et peut être décrite « au minimum en termes de résultats à atteindre : l'état de l'objet quand la tâche aura été (correctement) réalisée » (Rogalski, 2008, p. 15). La tâche prescrite par l'enseignant·e ici est celle présentée dans la partie II : reproduire le napperon projeté. Pour la réaliser, l'élève agit, interagit avec les autres élèves ou l'enseignant·e, fait des hypothèses, prend des décisions, gère son temps et son état personnel, etc. De nombreux indicateurs ont été développés par les chercheurs et chercheuses pour étudier certains aspects de cette activité (Vandebrouck, 2008 ;

Pariès et al., 2009). Nous mobiliserons en particulier la notion d'activité *a minima/a maxima*. En effet, lorsqu'un ou une élève accomplit une tâche en classe, ce que dit ou fait l'enseignant·e peut influencer son activité. Ainsi, Robert (2008, p. 31) distingue notamment des activités (des élèves) *a maxima* lorsque l'élève s'engage dans la tâche sans que l'enseignant·e ait donné aucune aide ou indication supplémentaire par rapport à la consigne, et des activités *a minima* lorsque l'élève s'engage dans la tâche après que l'enseignant·e a donné des indications. Ces indications ne sont pas forcément spécifiques à l'élève mais peuvent être données à toute la classe, par exemple si l'enseignant·e observe que les élèves ont globalement du mal à avancer, s'il ou elle veut raccourcir le temps de réflexion, etc.

Pour regarder plus en détail les aides fournies par l'enseignant·e, nous nous appuyons sur le modèle des interactions développé par Kiwan et Roditi (2022) qui s'inscrivent dans le cadre de la double approche (Robert et Rogalski, 2002). Dans ce modèle, chaque interaction entre l'enseignant·e et l'élève peut être décrite par un couple information-action, dans lequel l'information correspond à la production de l'élève, et l'action à la rétroaction donnée par l'enseignant·e. Tant l'information que l'action peuvent concerner un résultat (réponse mathématique à la tâche), une procédure de réalisation de la tâche ou un état de connaissance (justification au moins partielle de la validité de la procédure utilisée par un élément de connaissance). Il est alors possible de distinguer différents types de régulations : des régulations didactiques « horizontales » où l'enseignant·e intervient au même niveau que l'information reçue et des régulations didactiques « verticales » où le niveau de l'intervention de l'enseignant·e est différent de celui de l'information reçue. Ces dernières peuvent être ascendantes (l'enseignant·e part du résultat pour examiner les procédures et les connaissances qui les sous-tendent) ou descendantes (contextualisation des connaissances).

2. *Question de recherche et méthode*

La séquence présentée précédemment a été proposée à deux enseignantes de CM1-CM2 dans deux écoles rurales du nord de la France en février/mars 2024. Nous nous posons alors les questions suivantes : les élèves *à besoins éducatifs particuliers* s'engagent-ils/elles dans la tâche ? Comment la résolvent-ils/elles ? Quelles sont les difficultés qu'ils/elles rencontrent et comment les surmontent-ils/elles ?

Pour répondre à ces questions, nous nous intéressons à la classe d'Océane. Océane est une enseignante débutante (c'est sa première année en tant que titulaire), sa classe comprend 4 élèves de CM1 et 8 élèves de CM2. Le niveau est hétérogène et la moitié des élèves a des BEP¹. Nous étudierons l'activité de trois de ces élèves : Isaac (CM2), Alfred (CM2) et Ollie (CM1).

Plusieurs semaines avant la séquence, nous avons fourni une fiche de préparation de séquence ainsi que tous les documents à distribuer ou à projeter aux enseignantes. Nous n'avons pas fourni les carrés de papier mais avons donné des exemples de mesures adéquates. Nous avons laissé l'opportunité aux enseignantes de nous poser toutes les questions qu'elles voulaient mais nous n'en avons pas reçues. En février et mars 2024, nous avons filmé les trois séances (au rythme d'une par semaine) dans les deux classes à l'aide d'une caméra posée au fond de la classe (surtout utile pour les moments de mise en commun) et de caméras mobiles utilisées pour filmer le travail des élèves à deux endroits différents de la classe. Nous nous intéressons à la première tâche de la séance 2 présentée dans la partie II.2. Après avoir décrit l'introduction collective de la tâche par l'enseignante, nous analyserons, pour chacun des trois élèves, les procédures mobilisées pour accomplir la tâche, les erreurs et difficultés observées et la gestion de ces erreurs et difficultés par les élèves eux/elles-mêmes et par l'enseignante. En particulier,

¹ Nous ne détaillerons volontairement pas le type de troubles des élèves mais nous nous intéresserons uniquement à ce qu'ils/elles font ou ne font pas dans la situation observée.

nous analyserons la nature des régulations de l'enseignante. Pour cela, nous nous appuierons sur les données captées en séance : actions des élèves, napperons produits au fur et à mesure de la séance, discours éventuels des élèves et interactions avec l'enseignante.

IV. ANALYSE DES DONNÉES RECUEILLIES EN CLASSE

1. *Introduction de la tâche par l'enseignante*

Océane commence la deuxième séance de la séquence en demandant aux élèves de rappeler ce qui a été fait la semaine dernière « en symétrie ». Les élèves se rappellent qu'ils/elles ont produit des napperons en pliant et découpant des carrés de papier. Océane leur demande également les façons possibles de plier un carré et elle réexplique qu'on peut plier « bord à bord » ou « dans les angles opposés ». Elle finit en demandant ce « que permet la symétrie », la réponse attendue étant : obtenir des formes identiques de part et d'autre de l'axe.

Suite à ces rappels, Océane introduit la tâche du jour : reproduire un napperon qui est projeté au tableau et pour lequel les élèves disposent aussi d'un modèle individuel. L'enseignante a auparavant produit elle-même le napperon qu'elle accroche au tableau à côté du modèle projeté (voir annexe, figure 2). Les modèles qui seront utilisés dans la troisième séance apparaissent en-dessous car elle n'a pas projeté le diaporama en plein écran. De plus, le vocabulaire étudié ce jour-là avant la séance de mathématiques est encore écrit sur la gauche du tableau.

Cette phase de rappels et d'introduction de la tâche dure un peu moins de cinq minutes. Les élèves commencent ensuite à travailler en autonomie, l'enseignante passant dans les rangs pour les aider. Un peu plus de trente secondes après le début du travail, l'enseignante s'adresse à toute la classe en demandant « dans un premier temps pour vous aider si vous avez un peu de difficultés comment pouvez-vous faire ? Vous prenez votre modèle et qu'est-ce que vous pouvez faire ? ». Les élèves ne répondent pas et elle retourne donc à une aide individuelle auprès d'un élève à qui elle indique qu'il peut plier son modèle « et après tu regardes comment tu dois découper ». Trois minutes plus tard, elle s'adresse de nouveau à toute la classe et dit : « alors pour ceux qui ont du mal vous prenez votre modèle et vous commencez par le plier ça doit vous aider ».

Nous remarquons donc qu'Océane révèle plusieurs éléments de la tâche dès les rappels ou tout de suite après le début du travail : la symétrie est la notion mathématique qui permet de résoudre le problème ; le pliage du carré est soit selon une diagonale soit selon une médiane ; l'élève peut plier le modèle. Ces informations réduisent l'activité *a maxima* des élèves qui n'ont pas à construire ces connaissances par eux/elles-mêmes. Nous verrons cependant que ces indications n'ont pas forcément les effets attendus par l'enseignante.

En ce qui concerne l'accessibilité de la tâche, nous avons indiqué dans la fiche de préparation que la consigne devait être écrite et orale mais elle n'a été donnée qu'à l'oral. De plus, nous supposons que la surcharge d'informations au tableau pourrait poser problème même s'il peut être contourné car les élèves ont, comme prévu, un modèle individuel.

2. *Analyse de l'activité d'Isaac*

Isaac rencontre d'abord des difficultés de motricité fine puisqu'il a du mal à plier le carré de papier de telle sorte à joindre précisément les deux bords. Il doit s'y reprendre à plusieurs fois, ce qui ne semble cependant pas l'empêcher de s'engager dans l'activité. Par la suite, Isaac ne semble pas vraiment associer pliage et symétrie ni chercher un axe de symétrie du modèle puisqu'il plie son carré selon une

diagonale. Suite à un premier découpage, il se rend compte qu'il n'obtient pas la même chose que sur le modèle. Il appelle alors l'enseignante mais celle-ci ne vient pas immédiatement et il recommence avec un nouveau carré qu'il plie selon une médiane du carré cette fois (potentiellement par mimétisme par rapport à sa voisine). Suite au conseil général de l'enseignante, il plie son modèle mais d'abord selon un axe perpendiculaire à l'axe de symétrie avant de comparer son carré, le modèle individuel et le modèle réalisé par l'enseignante (accroché au tableau) puis de le plier selon l'axe de symétrie (voir annexe, figure 3). Le modèle plié ne semble cependant pas lui servir pour le reste des découpages. Lors de la phase de mise en commun, il expliquera qu'il a trouvé l'axe de symétrie de la figure en repérant le pli sur le napperon réalisé par l'enseignante au tableau.

Isaac veut ensuite découper les quarts de disque mais il coupe sur l'axe de symétrie et se rend compte de son erreur en dépliant. C'est une erreur que nous avons envisagée due à la mauvaise anticipation du résultat après dépliage et à la difficulté à percevoir sur le modèle déplié ce qu'il faut découper sur le napperon plié. Isaac corrige son erreur en repliant le napperon et en coupant par-dessus l'arc de cercle pour former un côté du triangle. Par la suite, il plie le napperon et découpe successivement les quarts de disque, le demi-disque central et les triangles sur les bords (il dépie à chaque fois pour comparer au modèle). Il hésite pour le cerf-volant et demande à sa voisine « c'est quoi ce truc ? ». En l'absence de réponse, il plie son napperon et découpe un petit triangle sur l'axe. Avant de déplier, il dit « moi je l'ai réussi je crois... enfin selon moi quoi ». Après avoir déplié et comparé au modèle, il semble satisfait. Il replie néanmoins son napperon et redécoupe par-dessus pour agrandir le cerf-volant. Il interpelle ensuite l'enseignante qui valide le napperon ainsi produit.

Isaac travaille pendant environ 7 minutes, principalement en autonomie en interaction avec le milieu composé (notamment) du modèle individuel, du modèle projeté, du modèle de l'enseignante et des autres élèves. L'identification de l'axe de symétrie ne relève pas forcément de la mobilisation de compétences liées à la symétrie mais plutôt de l'interprétation d'éléments ajoutés au milieu (indications générales de l'enseignante et napperon déjà réalisé accroché au tableau). Cependant, Isaac semble en mesure de produire des figures symétriques une fois l'axe repéré. Les éléments du milieu lui permettent d'identifier ses erreurs et de les corriger par lui-même. L'enseignante n'intervient que pour lui redonner une feuille et valider le napperon final.

3. *Analyse de l'activité d'Alfred*

Le travail d'Alfred n'a pas été filmé en intégralité. Ainsi, nous savons qu'il a réalisé assez vite plusieurs essais qu'il n'a pas jugé concluants mais nous ne savons pas quelles procédures ont été mobilisées. Environ 7 minutes après le début du travail individuel, Alfred appelle l'enseignante car son napperon est non conforme (voir annexe, figure 4). L'enseignante lui dit : « dis-moi ce qui ne va pas / regarde par rapport à ton modèle ». Alfred désigne la partie arrachée du napperon. L'enseignante approuve et dit « ça tu l'as fait vers le haut [en parlant de la tentative de cerf-volant arrachée] alors que sur ton modèle il est vers le ? », Alfred complète « bas ». Lors de cette interaction, l'enseignante aide Alfred à verbaliser une des erreurs sur son napperon. L'information donnée par l'élève et l'action de l'enseignante portent tous deux sur les résultats (régulation horizontale). Cependant, l'enseignante n'interroge pas l'élève sur la procédure l'ayant mené à ce résultat et n'évoque pas non plus l'absence de symétrie du napperon produit. De plus, nous ne savons pas si Alfred voulait attirer l'attention de l'enseignante sur le mauvais placement du cerf-volant (ce qu'elle semble interpréter) ou sur la déchirure de la feuille.

Alfred réalise ensuite plusieurs napperons, tous non conformes, sans que son travail soit filmé. Environ 11 minutes après le début du travail, il découpe un nouveau napperon (voir annexe, figure 5).

Il ne plie pas le carré et découpe les deux triangles sur les bords puis le triangle en haut mais il arrache la feuille en tirant sur le morceau de papier qu'il veut retirer. Il découpe ensuite les deux « quarts de disque » mais en-dessous des coins de la feuille plutôt que dans les coins. Pour découper le disque central, il semble conscient de l'intérêt du pliage et plie selon un axe qui n'est pas l'axe de symétrie du modèle. Il ne transfère pas l'idée du pliage au découpage du cerf-volant qu'il découpe depuis un bord du napperon. Alfred appelle alors l'enseignante pour qu'elle valide son travail (il demande : « madame, j'ai réussi ? »). Celle-ci prend le napperon et tente de le plier selon l'axe de symétrie du modèle, elle n'y parvient pas et dit « alors toi t'as pas pris d'axe de symétrie si ? ». Elle plie ensuite le napperon selon l'axe utilisé par Alfred et ajoute « déjà la feuille tu me l'as mal pliée », elle lui donne alors une nouvelle feuille sans lui rendre son napperon et repart. Les rétroactions de l'enseignante portent sur la procédure supposément utilisée par Alfred (régulation verticale ascendante) mais elles sont contradictoires. De plus, l'enseignante n'interroge pas directement Alfred et il est peu probable qu'il comprenne ce qu'il doit faire ou même ce qu'est un axe de symétrie (et son intérêt ici). Cette hypothèse est confirmée par le fait qu'Alfred plie la nouvelle feuille selon une des médianes du carré puis la déplie pour découper les deux triangles sur les bords et procède comme précédemment pour le triangle du haut, les quarts de disque et le disque central (cette fois il utilise le pli précédent pour le disque central, qui correspond donc bien à l'axe de symétrie du modèle). Pour découper le cerf-volant, il plie la feuille selon l'axe en découpant un cerf-volant « entier », ce qui donne deux cerfs-volants de part et d'autre de l'axe une fois la feuille dépliée. Il se rend compte de l'erreur, probablement due à une mauvaise anticipation du résultat du découpage, mais ne semble pas savoir comment la résoudre car il demande à son voisin comment il a réussi et celui-ci répond « avec mon imagination ». Alfred n'a plus de feuille pour recommencer et la mise en commun débute peu de temps après.

Alfred utilise tout le temps alloué au travail individuel (un peu plus de 18 minutes) et ne parvient pas à produire un napperon conforme au modèle. Il a interagi plusieurs fois avec l'enseignante qui a pointé des erreurs, que ce soit au niveau du résultat ou au niveau d'une procédure supposément utilisée par Alfred mais nous remarquons qu'il ne s'agit pas vraiment d'échanges et l'élève ne s'exprime jamais sur ce qu'il a fait pour arriver au résultat. De plus, les retours faits par l'enseignante ne permettent pas vraiment de comprendre comment faire mieux, il s'empare de certaines idées (« il faut plier le napperon ») et de ce que font les autres élèves autour de lui mais ne donne pas l'impression d'avoir compris l'intérêt de la symétrie pour accomplir la tâche et semble avoir des difficultés à anticiper les effets d'un découpage quand la feuille est pliée, à part pour le disque central.

4. *Analyse de l'activité d'Ollie*

Comme pour Alfred, nous n'avons pas filmé le premier essai d'Ollie. Un peu plus d'une minute après le début du travail individuel, elle fait appel à l'enseignante car elle n'a pas compris la consigne. Elle demande : « il faut plier et faire le triangle ou faire comme ça [le modèle] ? ». L'enseignante répond d'abord « tu essaies de reproduire le modèle » avant de guider davantage Ollie : « alors comment est-ce que tu peux t'aider ? On a vu que la symétrie c'était un pliage alors pour t'aider tu peux essayer de la plier dans un sens et ça t'aide déjà à repérer les formes / là [sur le modèle] ton axe de symétrie il est où ? ». Ollie ne sait pas répondre et l'enseignante finit par le lui indiquer et plier le modèle. Elle ajoute : « tu essaies de reproduire la même chose d'accord ? / là tu vois bien que c'est par rapport au bord donc tu reproduis par rapport au bord ». On peut identifier ici des régulations horizontales au niveau de la procédure qui vont se transformer, au vu de l'incapacité d'Ollie à répondre, en régulation verticale descendante pour la ramener au résultat attendu.

Lorsque l'enseignante repart, Ollie n'est pas filmée directement mais nous remarquons que bien que le napperon ait été plié, elle effectue des découpes sur le napperon déplié. Nous ignorons comment elle a découpé le disque central mais nous savons qu'elle rencontre des difficultés pour découper le cerf-volant et, comme Alfred, elle commence sa découpe à partir du bord, ce qui laisse un triangle en bas du napperon (voir annexe, figure 6). Ollie appelle l'enseignante qui vient l'aider en posant le modèle et le napperon côte à côte et en désignant le triangle découpé en bas : « là est-ce que tu vois un écart ? ». Ollie répond qu'elle n'y arrive pas : « je peux pas faire les trucs au milieu c'est impossible ». L'enseignante ne répond pas mais prend un nouveau carré qu'elle plie selon une médiane. Elle place côte à côte le napperon plié et le modèle plié et demande « là il est où ton rond ? ». Ollie désigne le napperon plié et répond « bah là il n'y a pas de demi rond ». L'enseignante découpe alors le demi-disque dans le napperon et lui fait remarquer qu'en dépliant, elle obtient bien le disque tout entier. Tout au long de l'échange, les régulations restent horizontales au niveau du résultat, la procédure n'est pas exprimée à voix haute. L'enseignante partie, Ollie repart de ce napperon qu'elle plie pour découper les triangles sur les bords. Elle déplie pour découper un quart de disque puis plie pour découper l'autre quart de disque en suivant sa première découpe. Elle plie et veut découper le triangle du haut mais de même qu'Isaac et Alfred, elle anticipe mal les effets de son découpage et découpe un triangle, elle se retrouve avec deux triangles de part et d'autre de l'axe (voir annexe, figure 6). Elle remarque l'erreur mais enchaîne avec le cerf-volant en pliant le napperon et en coupant correctement un triangle sur l'axe. Elle appelle l'enseignante en désignant le problème des deux triangles en haut mais celle-ci répond que ce n'est pas grave et prend les napperons d'Ollie pour les utiliser dans la mise en commun.

Comme Alfred, Ollie utilise tout le temps imparti au travail individuel mais, même si elle ne parvient pas à produire un napperon complètement conforme, elle semble avoir compris l'intérêt de la symétrie pour résoudre la tâche. Nous remarquons que contrairement aux autres élèves qui ne semblent pas pouvoir se servir du conseil de « plier son modèle », Ollie en bénéficie car l'enseignante plie elle-même le modèle comme voulu. De même, elle passe du temps à lui (re)montrer les effets d'un découpage sur un napperon plié. De plus, le fait de plier son napperon intervient justement comme une réponse à un problème qu'Ollie rencontre au début (« faire les trucs au milieu ») et elle s'en ressert donc une fois seule, contrairement à Alfred.

V. CONCLUSION

Bien que nous n'ayons analysé que trois résolutions d'élèves d'une des deux classes, nous sommes en mesure de tirer des premières conclusions. Ainsi, suivant notre hypothèse, nous avons observé un engagement important des élèves lors de la séance. Malgré leurs difficultés, Alfred et Ollie persévèrent pendant presque 20 minutes et Alfred produit de nombreux napperons. Ces élèves rencontrent des difficultés dont certaines sont vite surmontées (difficultés à manipuler pour Isaac, à comprendre la consigne pour Ollie) alors que d'autres sont plus résistantes, en lien avec les apprentissages en jeu puisqu'il était attendu que les élèves aient encore du mal à anticiper les effets des découpages, en particulier sur l'axe de symétrie.

Seul Isaac produit un napperon conforme à la fin mais il nous semble qu'Ollie a bénéficié de la situation et des aides de l'enseignante. Il est plus difficile de savoir ce qu'Alfred a appris au terme de ce travail individuel et il serait intéressant de le suivre en séance 3. Nous identifions d'autres perspectives : les élèves à BEP présentent-ils/elles le même engagement, les mêmes procédures de résolution et difficultés que les autres élèves ? Nous pouvons également faire l'hypothèse qu'ici, le fait que les régulations de l'enseignante soient majoritairement horizontales et centrées sur les résultats ou des procédures hypothétiques ne facilite pas l'accessibilité de la situation. Qu'en serait-il avec une autre enseignante ?

RÉFÉRENCES

- Assude, T., Perez, J.-M., Tambone, J. et Vérillon, A. (2011). Apprentissage du nombre et élèves à besoins éducatifs particuliers. *Éducation & Didactique*, 5(2), 65-84.
- Assude, T., Tambone, J. et Vérillon, A. (2012). Situations d'enseignement spécifiques pour des élèves particuliers ? Problème et débat. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Actes du colloque EMF2012 « Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle », 3-7 février 2012, Université de Genève, Suisse* (p. 1058-1066). <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>
- Bergeron, L., Rousseau, N. et Leclerc, M. (2011). La pédagogie universelle : au cœur de la planification de l'inclusion scolaire. *Éducation et francophonie*, 39(2), 87-104.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.
- CAST. (2018). *Universal design for learning guidelines* (version 2.2). <http://udlguidelines.cast.org>
- de Kocker, N. et Guille-Biel Winder, C. (2016). Analyser une ressource de formation : exemple de la « situation des napperons » (Atelier A15). Dans J.-L. Dorier et A. Daina (dir.), *Actes du XLII^{ème} colloque COPIRELEM, 16-18 juin 2015, Besançon, France*. ARPEME. <https://bibnum.publimath.fr/IWO/IWO16008.pdf>
- Houle, V. et Bachand, S. (2023). Enseignement des mathématiques dans une classe d'élèves ayant une déficience intellectuelle légère : étude de deux situations adidactiques. *Didactique*, 4(1), 1-25.
- Kiwan-Zacka, M. et Roditi, É. (2022). Étude des liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages : le cas des expressions algébriques dans le contexte scolaire libanais. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 42(2), 193-239.
- Lesnes, E. et Peteers, F. (2024). Manuels de cycle 2 et 3 pour les élèves à besoins éducatifs particuliers : quelles adaptations pour la symétrie axiale ? Dans *Actes du 49^e colloque international sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles (COPIRELEM)* (p. 398-426). IRES d'Aix-Marseille.
- Pariès, M., Robert, A. et Rogalski, J. (2009). Comment l'enseignant de mathématiques, en classe, met ses élèves sur le chemin des connaissances : un point de vue méthodologique en didactique des mathématiques. *Travail et Apprentissages*, 3(1), 95-123. <https://doi.org/10.3917/ta.003.0095>
- Peltier, M. L. (2000-2001). Le napperon : un problème pour travailler la symétrie axiale. *Grand N*, (68), 17-27.
- Robert, A. (2008). Problématique et méthodologie communes aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. Dans F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 21-52). Octarès.
- Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2(4), 505-528.
- Rogalski, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Dans F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 14-20). Octarès.

Rose, D. H. et Meyer, A. (2002). *Teaching every student in the digital age: Universal Design for Learning*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

<https://doi.org/10.1007/s11423-007-9056-3>

Vandebrouck, F. (dir.). (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octarès.

ANNEXES

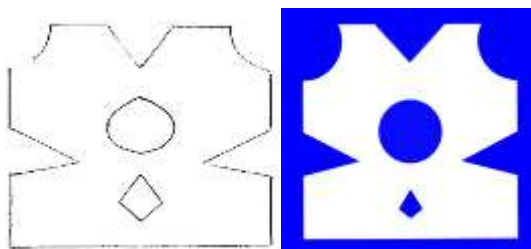


Figure 1 – Modèle de napperon (Peltier, 2000-2001, p.24) à gauche et notre modèle à droite

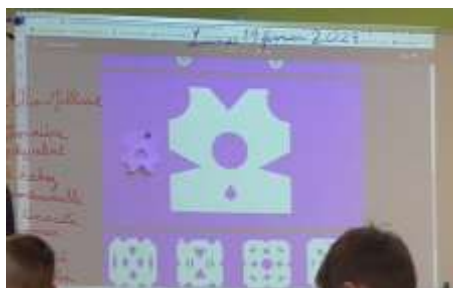


Figure 2 – État du tableau au début de la tâche.



Figure 3 – Modèle plié d'Isaac



Figure 4 – Premier napperon erroné d'Alfred



Figure 5 – Succession des découpages d'Alfred



Figure 6 – Deuxième napperon découpé par Ollie (à gauche) et son napperon final (à droite)

L'HEXAGONE : UN OBJET D'EXPLORATION POUR CONCEVOIR DES JEUX DE TÂCHES À L'INTENTION DES ÉLÈVES DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIALISÉ

| VENDEIRA* CÉLINE, CANGE** CHRISTIAN, CONNE*** FRANÇOIS, FAVRE**** JEAN-MICHEL
ET MONOD***** JEAN-DANIEL

Résumé | Dans ce texte, nous présentons le dispositif créé par le groupe ddmes (didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé) pour aménager des expériences mathématiques aux élèves de l'enseignement spécialisé. L'objectif est de décrire les trois moments-clés du dispositif que sont : l'exploration d'un milieu, le jeu des tâches auprès des élèves et la narration, en nous appuyant sur des extraits de séances liés à une investigation en cours portant sur l'objet « hexagone¹ ».

Mots-clés : géométrie, enseignement spécialisé, exploration du milieu, jeu de tâches, narration

Abstract | In this text, we present the system developed by the ddmes group (didactics of mathematics in special education) to provide special education students with mathematical experiences. The aim is to describe the three key moments of the system: exploration of the “milieu”, task play and narration, based on classroom sessions on the “hexagon” object.

Keywords: Geometry, special education, exploration of the “milieu”, task play, narration

I. INTRODUCTION

L'une des questions que se pose le groupe ddmes, et qui semble récurrente dans le contexte de l'enseignement spécialisé (Es), est de savoir comment faire vivre des expériences quelque peu substantielles à propos d'objets mathématiques que les élèves de l'ES n'ont généralement pas l'occasion de rencontrer en classe. Nous considérons que le dispositif de jeu de tâches, fruit des recherches du groupe ddmes, en est une réponse possible notamment par l'intérêt qu'il présente à faire durer les échanges. Il s'agit d'un mode d'interaction original destiné prioritairement aux élèves de l'Es. Le jeu de tâches fonctionne sur la base d'un processus en trois temps : exploration du milieu - jeu de tâches avec des élèves - narration, qui se répète et s'enrichit au fur et à mesure de son développement (Favre et Vendaiera, 2024). Pour être mené à bien, ce processus nécessite d'être porté par un groupe dont, idéalement, un ou deux membres bénéficient d'une formation mathématique approfondie (ce qui est généralement difficile à dénicher dans le contexte de l'Es). Ses membres officient dans chaque temps comme interlocuteur de celui qui explore, qui joue et de celui qui narre. Et ce, pour que l'exploration, le jeu effectif et la narration puissent tour à tour, c'est-à-dire sous forme de boucles récursives, se nourrir des interprétations et des réflexions des autres et que le processus s'en trouve ainsi à la fois étayé, relancé et donc dynamisé. Nous profitons de l'occasion qui nous est offerte dans le cadre du colloque emf 2025 pour décrire le dispositif du jeu de tâches conçu sur la base d'un objet mathématique spécifique : l'hexagone. À cet effet, nous avons mené deux séances en classe avec des élèves et une

* Groupe ddmes - Université de Genève – Suisse – celine.marechal@unige.ch

** Groupe ddmes – Suisse – cangechristian67@gmail.com

*** Groupe ddmes – Suisse – francois.conne@sefanet.ch

**** Groupe ddmes – CFPS du Château de Seedorf – Suisse – jmfavre@cfps-seedorf.ch

***** Groupe ddmes – Suisse – jean-daniel.monod@bluewin.ch

¹ Dans l'ensemble du texte, nous utilisons par confort le substantif « hexagone » pour désigner l'hexagone régulier.

enseignante d'une institution spécialisée vaudoise que nous remercions ici chaleureusement de s'être laissé prêter à nos jeux.

II. LE CONTEXTE DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIALISÉ

Il s'avère toujours malaisé de décrire un peu précisément en quoi consiste le contexte de l'Es et surtout en quoi il diffère d'un contexte d'enseignement ordinaire (Eo). Nous avons tenté à maintes reprises de le faire et de différentes manières (Conne et al., 2003) sans jamais vraiment parvenir à convaincre : on nous objecte quasiment à chaque fois qu'à nous entendre ou à nous lire le contexte de l'Es ne serait finalement pas si différent de celui de l'Eo. Et pourtant, à notre arrivée dans cette classe que nous ne connaissions pas, deux éléments caractéristiques de l'Es sont immédiatement venus confirmer que nous nous trouvions bel et bien dans ce contexte : le premier concerne les échanges que nous avons eus avec l'enseignante avant la séance et le second se rapporte à l'entrée des élèves dans la classe.

1. *Les échanges préalables avec l'enseignante*

L'enseignante nous dit qu'elle se réjouit de voir comment cela va se passer : « les élèves de cette classe disent souvent que ce qui leur est proposé est nul et que cela ne leur sert à rien ». Elle dit aussi qu'ils sont souvent absents, en raison des stages et des thérapies. Pour les maths, elle essaie de leur faire faire des choses qui leur seront utiles par la suite en s'appuyant sur des maths du quotidien. Elle profite ainsi des courses qu'ils doivent effectuer en utilisant les tickets de caisse pour leur faire faire des calculs. Elle leur a aussi demandé de réaliser diverses mesures dans leur salle de classe. (Extrait de la narration Jmf du 15.05.2024)

Dans l'Es, en l'absence d'un programme établi pour les classes de fin de scolarité désignant les savoirs à enseigner et de méthodologies qui indiquent comment s'y prendre pour le faire, c'est à l'enseignant qu'est dévolue cette part importante du processus de transposition didactique. Il est ainsi fréquent que l'enseignant propose aux élèves des mathématiques à vocation utilitaire, selon les représentations qu'il se fait des mathématiques dont tout un chacun est supposé faire usage au quotidien ou dont les élèves auront besoin plus tard dans le cadre de leur formation professionnelle (Favre, 2015). Cette invocation de l'utilité des mathématiques a pour intention, souvent vaine, d'en justifier l'importance, voire de conforter la nécessité de leur apprentissage auprès des élèves.

2. *L'entrée des élèves en classe*

Vers 10 h 30, trois élèves arrivent l'un après l'autre dans la classe : chacun s'installe à une table différente, l'un en laissant tomber ses bras et sa tête sur la table, l'autre en prenant un livre de mangas posé à côté d'un ordinateur, le troisième en s'appuyant sur le dossier de sa chaise. C'est un peu comme si nous n'existions pas et nous avons besoin de nous approcher pour entrer en contact avec eux en leur tendant la main pour les saluer. (Extrait de la narration Jmf du 15.05.2024)

À l'arrivée des trois élèves, impossible de se dire que l'on se trouve dans une classe de l'Eo : déjà parce qu'ils ne sont que trois en tout et pour tout, et ensuite parce qu'ils n'entrent pas du tout spontanément en interaction avec nous. Ce qui fait qu'immédiatement nous nous demandons bien, sans autre connaissance des raisons qui font qu'ils se retrouvent dans cette classe, comment nous allons pouvoir les amener à s'engager dans ce que nous avons prévu de leur faire faire.

III. LES MOMENTS-CLÉS DU DISPOSITIF

En préambule, il importe de préciser que si, au départ, c'est à la suite de l'exploration du milieu que le jeu de tâches prend forme, ces trois moments-clés peuvent s'articuler autrement par la suite. Nous considérons par exemple que la phase d'exploration du milieu se poursuit lors des interactions

enseignants-élèves. Ces différents moments-clés du dispositif se distinguent donc surtout par leur but et non par leur temporalité.

L'ordre choisi pour les présenter dans ce texte vise essentiellement la compréhension du lecteur.

1. L'exploration du milieu

La conception d'un jeu de tâches débute par une phase d'« exploration du milieu » (Favre, 2008) qui se réalise à partir d'un objet mathématique spécifique, d'un matériel didactique ou encore d'une activité tirée d'un manuel scolaire. Cette phase vise à explorer, de manière approfondie, soit l'objet mathématique à partir de ses multiples manifestations empiriques, soit le matériel, soit l'activité du manuel, en le/la manipulant, le/la représentant, le/la décomposant, le/la transformant, etc., et en nous intéressant tout particulièrement aux propriétés et relations mathématiques que cette exploration nous révèle, aux surprises qu'elle nous occasionne et aux diverses tâches qu'elle nous conduit à imaginer.

Dans le cas de l'hexagone, c'est l'un des membres du groupe ddmes qui a initié cette exploration, piqué de curiosité par l'observation d'une vidéo montrant deux élèves de l'Es qui ne faisaient pas de distinction entre deux plaques Polydron² de forme pentagonale et hexagonale : il avait alors suffi de leur demander d'enchâsser des plaques en forme de triangle équilatéral sur chaque côté du pentagone et de l'hexagone pour que les assemblages ainsi créés - des étoiles - leur permettent de ne plus les confondre. L'exploration a permis de faire émerger plusieurs propriétés mathématiques de l'hexagone, mais aussi de nombreuses relations que l'hexagone entretient avec d'autres formes (cf. Annexe 1 pour un exemple des relations entre l'hexagone régulier et le triangle équilatéral). Elle a provoqué des surprises et permis d'imaginer un grand nombre de tâches. Notre collègue nous a ensuite invités à en réaliser quelques-unes lors de deux séances du groupe afin de nous enrôler à notre tour dans ce travail exploratoire. De là, des listes de tâches ont pu être constituées pour être ensuite jouées auprès des élèves en classe.

2. La narration

Au terme de chaque séance que nous menons avec des élèves de l'enseignement spécialisé, nous employons à en faire le récit selon les souvenirs que nous en avons conservés et sur la base des productions des élèves et du meneur de jeu que nous avons collectées. Nous avons appelé « narration » cette reconstruction dans l'après-coup des interactions qui y ont eu lieu (Favre et al., 2012, 2019). Il est évidemment important que cette narration puisse se faire à chaud, soit peu après la séance, afin que nous puissions y rapporter des événements particuliers que nous avons observés, des surprises qui nous ont été occasionnées et conserver la mémoire du déroulement général du jeu. C'est cette narration que nous employons ensuite comme support pour relater, de façon orale en général, aux membres du groupe qui n'étaient pas présents dans la classe, ce qui s'y est passé.

3. Le jeu des tâches auprès des élèves

Avant d'entrer dans le vif des séances, il nous importe de rappeler qu'une des idées fondamentales qui préside au jeu de tâches rompt avec la logique habituelle de l'enseignement des mathématiques quand l'enseignant cherche à donner aux élèves la responsabilité d'accomplir quelque tâche en vue de lui faire rencontrer un problème relatif à l'enseignement d'un savoir spécifique et dont il sait très bien lui-même comment s'y prendre pour le résoudre.

² Il s'agit d'un jeu de construction géométrique éducatif à partir de plaquettes 2D de différentes formes (triangle, carré, rectangle, pentagone, hexagone, etc.) qui une fois clipsées produisent des constructions en 3D.

Dans un jeu de tâches, lorsqu'on joue une tâche auprès d'un élève, c'est bien sûr aussi dans l'intention de l'amener à rencontrer un problème en lui laissant la responsabilité d'en proposer une réponse ou une esquisse de solution. Sauf qu'on ne connaît jamais vraiment à l'avance le problème que l'élève, en se confrontant à la tâche, va se constituer pour lui-même, ni non plus la manière dont lui ou le meneur de jeu pourrait s'y prendre pour y apporter une solution.

Demander à un élève d'accomplir une tâche donne chaque fois l'occasion d'interpréter comment il s'y prend pour le faire, en quoi cela peut constituer pour lui un problème, ce qu'il va entreprendre pour le résoudre et comment il se satisfera ou non du résultat obtenu. Ceci nous renseignera notamment sur ce qu'il sait faire ou ce qu'il a appris, nous donnera l'occasion en cours de jeu de le voir apprendre, nous étonnera aussi parfois de ce qu'il aura appris. Et, en contrepartie, cela nous permettra également d'apprendre à mieux jouer (car cela n'est jamais acquis), c'est-à-dire d'apprendre comment il est possible de rebondir, par une intervention que l'on espère appropriée, sur ce que l'élève a pu produire. En ce sens, une tâche donnée ne s'adresse pas seulement à l'élève, mais tout autant au meneur de jeu qui doit tenter à la fois de comprendre/interpréter ce que fait l'élève dans son interaction avec le milieu et piloter le jeu en fonction des tâches qu'il a gardées en réserve et de ce que sur le moment l'élève parvient à en faire (Vendeira, à paraître).

Le jeu de tâches est donc une forme de jeu avec le jeu de l'élève. Un jeu où l'on saura tantôt se laisser prendre à son jeu et où tantôt ce sera l'élève qui sera pris à quelque jeu qu'on lui aura suggéré de mener au détour d'une tâche à accomplir. Un jeu de pertes et prises de contrôles (Conne, 2003) en quelque sorte qui, pour chaque protagoniste, accorde à l'autre un espace de liberté pour agir. Un jeu où le rapport au savoir et le rapport à l'ignorance de chacun évoluent sur le même plan, même si les interprétations de ce qui s'y passe diffèrent profondément pour l'un et pour l'autre.

Épisode n° 1

L'intérêt de ce premier épisode réside dans la succession des problèmes que le tracé d'hexagones réguliers de diverses dimensions sur un réseau de triangles équilatéraux amène l'élève (Ja) à rencontrer et les moyens de contrôle qu'il va mettre en œuvre pour les résoudre.

En distribuant à chaque élève une feuille imprimée en réseau de triangles équilatéraux, Jdm déclare : « Pour faire le plus précis possible, pour faire un hexagone le plus régulier possible, vous avez vu que dedans, on pouvait partir de triangles qu'on appelle équilatéraux, alors pour vous aider, j'aimerais que vous dessiniez un hexagone avec ce papier réseau de triangles équilatéraux. Là, vous pouvez vous appuyer dessus et c'est plus facile de faire un hexagone. » (Extraits de la vidéo avec Ja du 15.05.2024)

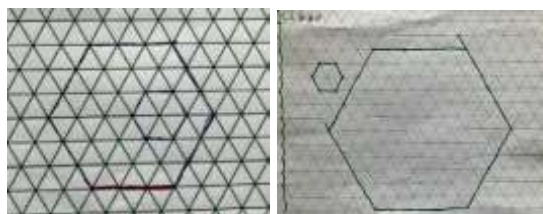


Figure 1 – Productions de Ja

Ja réalise un premier hexagone régulier de côté de longueur 3 (cf. Figure 1, page de gauche) après avoir réfléchi un bon moment sur comment il pouvait s'y prendre pour le faire en plaçant et déplaçant ses doigts à l'intérieur de différents triangles du réseau de la feuille.

La manière de procéder de Ja donne à penser qu'il place ses doigts dans les triangles pour visualiser et donc contrôler la forme à laquelle il désire aboutir, tout en contrôlant en même temps la longueur des côtés pour qu'elle soit régulière : la coordination de ces deux contrôles constituant le problème

qu'il s'est aménagé et qu'il doit résoudre. Cela étant fait, il peut alors s'appuyer sur le réseau pour dessiner avec assurance l'hexagone de longueur 3.

Après avoir surligné son premier hexagone en couleur avec un plus gros stylo (sur demande de Jdm, puis de Jmf pour qu'il soit bien visible), Ja réalise dans la foulée, de façon immédiate, et sans qu'on lui ait demandé de le faire, un deuxième hexagone de côté de longueur 1.

Ici c'est un peu comme si Ja avait voulu répliquer sur une longueur réduite le tracé qu'il avait réalisé pour produire l'hexagone régulier de côté de longueur 3. Ce dernier s'avère cette fois-ci immédiat parce qu'il peut se faire sans le contrôle de la forme (car portée par le réseau), ni de la longueur des côtés (car de dimension 1).

Jdm demande à Ja de dessiner un hexagone plus grand que les deux qu'il vient de produire, mais Ja lui répond qu'il ne peut pas, car il n'a pas la place sur sa feuille. Jmf donne à Ja une nouvelle feuille comprenant un autre réseau de triangles équilatéraux et lui demande de dessiner le plus grand hexagone possible.

Ja dessine un premier côté de longueur 7 (cf. Figure 1, page de droite), puis vérifie d'un geste de la main qu'il est possible de tracer un autre côté de longueur 7 à partir d'une extrémité de ce premier côté tout en suivant le réseau triangulaire ; il passe à l'autre extrémité du côté et en dessine un deuxième en dénombrant le nombre de mailles du réseau sur lesquelles il passe ; il bute alors sur le bord de la feuille en parvenant à 6 mailles et revient à l'autre extrémité du premier côté pour tracer un troisième côté de l'hexagone ; il veille à raccourcir le premier côté qu'il avait dessiné en partant une maille en-dessous de son extrémité (passant de 7 à 6 mailles) et trace le troisième côté en contrôlant à nouveau le nombre de mailles (6) ; il s'attelle ensuite au tracé du quatrième côté en contrôlant que celui-ci soit parallèle et de même longueur que le troisième, ce qui lui permet de pointer avec son doigt le sommet auquel il doit aboutir ; il ne lui reste plus dès lors qu'à tracer les deux derniers côtés de l'hexagone en se laissant porter par le réseau triangulaire (avec un petit dépassement final auquel il ne porte pas attention).

Avec le tracé de ce nouvel hexagone de côté de longueur 6, on voit que le contrôle de la forme est désormais entièrement porté par le réseau. Ce que Ja doit en revanche contrôler, c'est que d'une part il est bien possible de tracer un hexagone de dimension 7 (comme il en a l'intention au départ) dans la feuille qui lui a été remise (est-elle assez grande ?) et que d'autre part les côtés de l'hexagone seront bien tous de longueur identique. Ces deux contrôles fondent un nouveau problème qu'il parvient à résoudre en utilisant successivement le dénombrement des mailles (qui l'amène à réduire la longueur des côtés de 7 à 6 quand il bute sur le bord de la feuille), puis en recourant à la propriété du parallélisme de deux côtés opposés de l'hexagone et enfin en se laissant porter par le réseau pour finaliser le tracé des deux derniers côtés.

Jdm montre à Ja qu'il serait possible de réaliser un hexagone de côté de longueur 7 ou de longueur 8. Ja répond à Jdm que l'on pourrait aussi en tracer un de côté de longueur 9, mais sans se mettre à sa réalisation.

Ceci aurait évidemment pu constituer un nouveau problème pour Ja.

Jdm demande à Ja de tracer le plus petit hexagone possible sur sa feuille. Ja dessine un hexagone de côté de longueur 1 en commençant par tracer un point sur chacun de ses futurs sommets, puis en reliant chacun de ses sommets par un trait.

Le tracé de l'hexagone régulier de côté de longueur 1 s'avère à nouveau immédiat - assorti néanmoins d'une variante, puisque Ja commence par le tracé des sommets, suivi du tracé des côtés - du fait qu'il n'y a nécessité ni du contrôle de la forme (car portée par le réseau), ni de la longueur des côtés (car de dimension 1), ni encore que l'hexagone puisse être tracé sans sortir de la feuille (car évident).

Épisode n° 2

L'intérêt de ce second épisode réside à la fois dans la conformité et la diversité des productions qu'une même tâche, présentée aux élèves sous forme de défi, génère. Il montre aussi comment l'interprétation de ces productions, en cours ou après la séance, fait naître dans l'esprit du meneur de jeu de nouvelles tâches qu'il aurait été possible (ou qu'il sera possible dans une séance ultérieure) de proposer aux élèves sous forme de relances pour chercher à entrer dans leur jeu.

Après avoir distribué à chaque élève une feuille A4 vierge, Cc leur annonce qu'ils vont devoir y dessiner un hexagone les yeux fermés à partir d'un premier point³ posé les yeux ouverts.

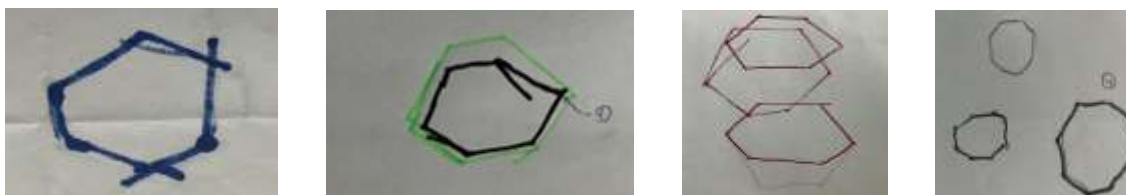


Figure 2 – Productions (dans l'ordre) de Ra, San, Ja et Yo.

Sitôt les yeux fermés, aucun des quatre élèves ne se précipite pour réaliser le tracé de l'hexagone. Ils le dessinent ensuite d'un seul tenant, c'est-à-dire sans lever le crayon. Et tous les quatre parviennent à refermer la forme (cf. Figure 2), au contraire de leur enseignante qui, même après plusieurs tentatives, n'y parviendra pas. (Extraits de la narration de Cc du 22.05.2024)

Le fait que les quatre élèves aient eu besoin d'un temps d'arrêt avant de débiter leur dessin de l'hexagone donne à penser qu'ils ont eu besoin de concevoir la forme dans sa totalité, d'en faire un projet, de l'envisager, avant de passer à sa réalisation. Il est probable aussi que la tâche implique un tracé en continu afin de ne pas se perdre dans la réalisation de la forme. Enfin, l'on peut imaginer que si tous sont parvenus à refermer leur forme - l'expérience montre que la chose n'est pas si simple (les essais successifs et infructueux de l'enseignante en apportent une confirmation) - il est fort possible que ce soit parce qu'ils aient quelque peu ouvert les yeux durant la dernière phase de leur tracé.

Ra et San tracent chaque côté de façon rapide au début, puis ralentissent considérablement leur geste lorsqu'ils parviennent à la fin et marquent un temps d'arrêt avant de poursuivre. Ja commence son dessin par un trait horizontal, suivi de deux traits obliques, puis d'un nouveau trait horizontal, suivi encore de deux nouveaux traits obliques. Après avoir ouvert les yeux et manifestement non-satisfait de ce qu'il a produit, il se met à dessiner, yeux fermés, un nouvel hexagone presque identique au premier. Yo aboutit quant à lui à un... octogone.

La manière de procéder de Ra et San, lorsqu'ils ralentissent leurs gestes, peut être considérée d'une part comme une façon de contrôler la bonne longueur de chaque côté, c'est-à-dire qu'elle soit à chaque fois la même (égalité des longueurs) et d'autre part de régler l'inclinaison à donner au côté suivant à tracer (égalité des angles). Dessiner un hexagone les yeux fermés les amènerait ainsi à convoquer certaines de ses propriétés pour en assurer le tracé. Dans le cas de Ja, il semble que ce soit le positionnement des côtés sur la feuille : un horizontal - deux obliques - un horizontal - deux obliques qui l'aident à en contrôler l'exécution, ce qui l'amène à produire des hexagones posés sur une base horizontale à la différence de celui de Ra qui est posé « sur une pointe ». Chez Yo (absent lors de la première séance), on voit que la propriété du nombre de côtés de l'hexagone n'est pas encore bien établie, ce qui ne l'a pas empêché d'exercer un contrôle manifeste sur les longueurs et les inclinaisons pour aboutir au tracé d'un octogone bien régulier.

³ Sur deux des productions (San et Yo), il a été possible de situer le point de départ du tracé des élèves, (représenté par D) mais pas la direction prise ensuite.

Après que les élèves aient ouvert les yeux, Cc leur demande de considérer leur production et d'y apporter les modifications qu'ils souhaitent afin de le rendre « plus hexagone ». Chacun d'eux se lance alors dans la tâche (cf. Figure 2). Ra n'apporte qu'une très légère modification au côté supérieur droit de son hexagone. San n'agit pas directement sur le tracé de sa première forme, mais l'« emprisonne » dans un nouvel hexagone. Ja, quant à lui, trace un troisième hexagone qui chevauche ses deux tentatives précédentes, juste avant d'étirer par trois traits de crayons supplémentaires celui du bas pour le faire ressembler à la correction qu'il vient de faire.

On observe tout d'abord que l'expression « plus hexagone » ne pose pas de difficulté particulière aux élèves. Elle semble faire consensus, alors que chaque protagoniste ne lui attribue pas forcément la même signification. On voit ensuite que les corrections ne portent pas sur les mêmes propriétés de l'hexagone : chez Ra, elles semblent se rapporter à l'inclinaison d'un côté (et donc à l'angle), chez San, c'est sur les longueurs qu'elles s'exercent, tandis que chez Ja, elles s'établissent tout à la fois sur les angles et les longueurs pour aboutir à une forme plus harmonieuse correspondant mieux à l'idée qu'il se fait sur le moment d'un hexagone.

Cette interprétation des productions des élèves relatives à leur manière de dessiner les yeux fermés un hexagone sur une feuille blanche, puis de les corriger les yeux ouverts suscite inévitablement (après chaque séance on en vient régulièrement à se dire que l'on aurait pu proposer ceci ou cela et on regrette de ne pas l'avoir fait) chez le meneur de jeu de nouvelles idées de tâches à jouer avec les élèves (cf. Annexe 2).

Outre ces idées de tâches, issues de l'interprétation des productions d'élèves réalisée peu après le déroulement des séances, le processus va irrémédiablement se trouver relancé à l'occasion de nouvelles séances du groupe ou même parfois en solitaire, en triturant un morceau de papier ou en esquissant quelques formes qui nous reviennent en mémoire (cf. Annexe 3).

IV. QUI MÉRITE TOUTE NOTRE ATTENTION

Les narrations des deux séances menées en classe autour de l'hexagone ont montré que le pilotage d'un jeu de tâches, qui vise à entrer en interaction directe avec le jeu de l'élève pour faire cas de ce qu'il produit et rebondir sur ce qu'il fait, est loin d'être chose aisée.

Nous avons ainsi réalisé que, dans les deux cas, les meneurs de jeu s'en étaient plus ou moins tenus à proposer aux élèves des tâches en suivant l'ordre de la liste qu'ils avaient préparée avant la séance.

Je me rends compte que mon attention a été entièrement prise par la gestion du matériel : formes découpées, papiers réseaux, journaux et par le choix de la suite des tâches, tout cela sans disposer d'une table devant moi pour déposer les choses. (Extrait de la narration Jdm du 15.05.2024)

En quittant la classe, mon sentiment est double. J'ai pris un certain plaisir à réaliser cette séance avec Jdm, mais je constate avec regret que l'organisation de la classe (chaque élève seul à son bureau) n'est pas aussi propice aux interactions et aux rebonds (relances) que beaucoup de séances ddmes antérieures où les élèves avaient une meilleure proximité. (Extrait de la narration Cc du 22.05.2024)

Il n'en reste pas moins que, dans chaque séance, les élèves se sont bien laissé enrôler dans la succession des tâches qui leur ont été proposées. Nous en voulons pour preuve deux nouveaux extraits des échanges que nous avons eus avec l'enseignante au terme de la première séance.

L'enseignante nous dit combien elle a été étonnée de voir que l'activité ait pu durer si longtemps. D'habitude, elle se dit obligée de changer fréquemment d'activité (au bout de dix minutes précise-t-elle) pour maintenir l'attention des élèves : « cela fait longtemps que je ne les ai pas vus comme ça. ». (Extrait de la narration Jmf du 15.05.2024)

La fugacité des interactions que les élèves entretiennent avec le milieu que l'on cherche à leur faire explorer est un phénomène typique de l'Es. Ce qui nous amène régulièrement à dire qu'un enjeu principal du jeu de tâches est de dynamiser les interactions pour les faire durer. C'est en effet dans cette durée que l'on se donne des chances qu'au détour des tâches qu'ils accomplissent, les élèves s'aménagent des problèmes et qu'ils s'essaient à les résoudre. Le fait que cette première séance ait duré une quarantaine de minutes (la seconde durera même quelques minutes de plus) témoigne de l'implication des élèves sur la durée.

Elle nous dit aussi que lorsqu'elle s'est rendue dans le couloir pour vérifier que les élèves se rendaient bien à leur leçon de musique, elle a vu que Ra (celui qui a demandé de quitter la classe un peu avant les autres) était un train de faire des pliages avec un morceau de papier ; alors que San s'était mis à chercher des hexagones dans les couloirs du bâtiment et qu'il avait repéré des formes qui leur ressemblaient (elle pensait que c'étaient plutôt des pentagones). (Extrait de la narration Jmf du 15.05.2024)

Ce second extrait relève d'un autre phénomène typique de l'Es. Il concerne la restitution de ce que les élèves apprennent, comprennent et mémorisent en classe. Cette restitution de la part des élèves, qui constitue un élément central du contrat didactique dans le cadre de l'Eo, fait souvent défaut dans le contexte spécialisé, ce qui conduit fréquemment l'enseignant à dire des élèves qu'ils ne retiennent pas ou peu ce qui leur a été enseigné. Or nous avons pu observer à maintes reprises que si elle fait souvent défaut dans l'échange, cette restitution n'en est pas moins présente, mais qu'elle advient souvent de manière indirecte, dans un autre lieu et dans un autre temps, comme c'est le cas ici où les deux élèves ont poursuivi à notre insu l'activité hors de la classe, ce qui constitue un nouveau témoignage⁴ de leur investissement.

V. CONCLUSION

Le jeu de tâches se développe sur la base d'un processus en trois temps qui tourne en boucles récursives : l'exploration du milieu, le jeu des tâches avec les élèves et la narration. L'exploration du milieu qui l'initie se poursuit durant les deux autres temps, lors de l'interaction avec les élèves, puis à l'occasion de la restitution de la séance et l'interprétation de ce qui s'y est effectivement passé. Ce processus est porté par un groupe de recherche dont les membres prennent la fonction d'interlocuteur vis-à-vis de celui qui explore, celui qui joue et celui qui narre de façon à l'enrichir, le dynamiser et de favoriser son développement. En situation, le jeu effectif est un jeu à trois qui met en interaction des élèves, un (parfois deux) meneur de jeu et un milieu, fertile en mathématiques, à explorer. Les tâches constituent autant de propositions faites aux élèves pour amorcer et accompagner cette exploration, en escomptant qu'en cherchant à les accomplir, ils en viennent à se faire interpellé ou surprendre par le milieu et se retrouvent ainsi confrontés à des problèmes. Des problèmes qui ne peuvent être déterminés a priori et qui demanderont souvent tout un travail d'interprétation de la part du meneur de jeu, puis de ses interlocuteurs au sein du groupe, pour qu'il devienne possible de les circonscrire. Le jeu de tâches n'est donc pas un dispositif qui cherche à enseigner aux élèves un savoir spécifique. Il convie à un jeu de problèmes amenant les élèves et le meneur de jeu à échanger et partager les expériences auxquelles les tâches qu'ils réalisent les introduisent. Et il pointe en priorité les apprentissages que procurent les relations qu'entretiennent les relations du milieu auquel les élèves se confrontent : des répliques, des variations, des changements de perspectives, des contrôles, ... Le jeu de tâches cherche à promouvoir une pratique des mathématiques en intelligence avec autrui ; et c'est sans doute à ce titre qu'on peut lui reconnaître une visée inclusive.

⁴ Un témoignage dont nous n'aurions pas eu connaissance si l'enseignante n'était pas sortie de la classe pour vérifier que les élèves se rendaient bel et bien à leur cours de musique. Avec le groupe ddmes, nous avons créé des dispositifs susceptibles de produire ces restitutions indirectes afin de pouvoir les observer et en rendre compte.

RÉFÉRENCES

- Conne, F. (2003). Interactions de connaissances et investissements de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. *Éducation et francophonie*, 31(2), 82-102.
- Conne, F., Cange, C., Favre, J.-M., Del Notaro, L., Scheibler, A., Tièche Christinat, C., Bloch, I. et Salin, M.-H. (2004). L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. Dans V. Durand-Guerrier et C. Tisseron (dir.), *Actes du séminaire ARDM2003 de didactique des mathématiques* (p. 77-185). IREM de Paris.
- Dupré, F., Million-Fauré, K. et Vendaíra, C. (à paraître). Trois études autour de l'accessibilité didactique dans des contextes différents. Dans *Actes de la 22^e école d'été de didactique des mathématiques, 16-22 octobre 2023, Barne-sur-Seine, France*.
- Favre J.-M. (2008). Jeu de tâches : un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Grand N*, (82), 9-30.
- Favre, J.-M. (2015). *Investissements de savoirs et interactions de connaissances dans un centre de formation professionnelle et sociale : une contribution à l'étude des mathématiques et de leur fonctionnement dans le contexte de la formation professionnelle spécialisée* [Thèse de doctorat, Université de Genève]. Archive ouverte UNIGE. <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:76939>
- Favre, J.-M. (dir.). (2011). Des narrations pour partager et faire rebondir nos expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. Dans *Actes des deuxièmes journées didactiques de La Chaux-d'Abel, 26-28 mai 2011*. <https://hal.science/halshs-03324376v1>
- Favre, J.-M. (dir.) (2019). Expérience et interprétation. Faire des mathématiques avec des élèves de l'enseignement spécialisé. Dans *Actes des troisièmes journées didactiques de La Chaux-d'Abel, 3-5 mai 2019*. <https://hal.science/halshs-03286007v1>
- Favre, J.-M. et Vendaíra, C. (2024). Jouer des tâches avec les élèves : une alternative aux problèmes pour qu'ils se mettent à chercher. Dans *Actes de la COPIRELEM 2023* (p. 489-509).

ANNEXE 1

QUELQUES RELATIONS ENTRE L'HEXAGONE RÉGULIER ET LE TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

Triangle équilatéral	Hexagone régulier
3 côtés isométriques, 3 angles isométriques, 3 directions manifestes	2 fois 3 côtés isométriques, 2 fois 3 angles isométriques, 3 directions manifestes
3 axes de symétrie formant entre eux des angles égaux	2 x 3 axes de symétrie formant entre eux des angles égaux
En repliant chaque sommet sur le centre de gravité on fait apparaître un hexagone régulier de côtés 1/3 des côtés du Δ de départ.	En traçant une diagonale sur deux on fait apparaître un triangle équilatéral qui devient manifeste si on replie les autres sommets vers le centre.
Superposant à un triangle équilatéral celui qu'on obtient par symétrie de centre de gravité on fait apparaître un hexagone régulier étoilé de 6 Δ équilatéraux de côtés 1/3 des côtés du Δ de départ.	En prolongeant un côté sur deux par une droite, on fait apparaître un Δ équilatéral de côtés 3 fois plus grands que ceux de l'hexagone de départ.
En déplaçant un triangle équilatéral par une succession de symétries on forme un hexagone régulier.	En traçant une diagonale sur deux on fait apparaître 2 triangles équilatéraux dont l'intersection est un hexagone régulier.

Quelques relations entre l'hexagone régulier et le triangle équilatéral

ANNEXE 2

QUELQUES IDÉES DE TÂCHES ISSUES DE L'INTERPRÉTATION DES PRODUCTIONS DE L'ÉPISODE 2

Il aurait ainsi été possible de demander :

- à Ja qui a dessiné un hexagone posé sur un côté horizontal d'en tracer un autre posé sur une pointe ; et à Ra de faire l'inverse ;
- à San, de dessiner d'autres hexagones de plus en plus grands qui englobent (à l'image des poupées russes) à chaque fois les précédents ; puis d'autres de plus en plus petits qui s'y insèrent les uns dans les autres ;
- à Yo de compter le nombre de côtés de chacune des formes qu'il a dessinées, puis d'en tracer d'autres comportant six, cinq, neuf ou encore dix côtés ;
- à chacun, partant des corrections effectuées sur leur premier essai, de tenter un nouveau tracé les yeux fermés ;
- à chacun, en échangeant les productions, demander d'intervenir sur l'essai réalisé par un autre élève en suggérant/réalisant des propositions de modifications ;
- à chacun, en partant d'un hexagone dont deux côtés non-consécutifs ont été tracés, de compléter les quatre côtés manquants.

ANNEXE 3

QUELQUES RÉFLEXIONS CONCERNANT DE NOUVELLES EXPÉRIMENTATIONS À MENER EN CLASSE

La technique du pliage est rarement utilisée en leçon de mathématiques. On remarque ainsi chez les élèves une certaine gêne à plier, replier, déplier et observer ce que cela donne : de fait les imprécisions sont nombreuses (cf. Figure 3) masquant partiellement les surprises (en termes de formes, de symétries, etc.) que les pliages seraient susceptibles de provoquer.



Figure 3 – Pliage réalisé par Ra

Proposer des tâches en s'appuyant sur cette technique s'avère donc délicat, ce d'autant que lorsqu'une surprise est supposée surgir, elle peut laisser les élèves dubitatifs, voire sans réaction comme après un tour de magie. Et pourtant la technique du pliage appliquée à l'hexagone constitue un milieu très riche pour établir des relations mathématiques entre différents objets. Un hexagone en papier étant donné, le plier et le replier selon ses diagonales fait ressurgir des formes courantes du travail scolaire comme, le rectangle, le trapèze, le losange ou le triangle équilatéral. Ainsi de nombreux constats pourraient être établis par les élèves, par exemple lors d'une exposition de toutes les formes possibles que révèlent les pliages d'un hexagone selon ses diagonales ou ses médianes.

Avec les tâches de tracés sur des feuilles tramées triangulaires ou hexagonales, les manifestations de certaines propriétés de l'hexagone repérées lors des pliages sont également facilitées. Il est en outre facile d'enchaîner des tâches demandant de tracer des hexagones plus grands ou plus petits, puis de trouver et dessiner le plus grand hexagone ou le plus petit possible. Ainsi avec l'usage de trames hexagonales, le dessin d'un hexagone de longueur 1 est immédiat puisque c'est le treillis qui contrôle la forme lorsqu'on surligne le contour d'une cellule de base. En cherchant à « faire plus grand » les élèves seront guidés par des lignes du réseau, mais il leur faudra veiller au contrôle de la longueur des côtés par exemple en dénombrant le nombre de cellules traversées. Et lorsqu'on cherche à faire « le plus grand possible », c'est la coordination entre les longueurs de côtés et les dimensions de la feuille qui demandera d'être contrôlée. On observe par ailleurs (cf. Figure 4) que lorsqu'il s'agit de « tracer un hexagone plus petit » que l'hexagone de la cellule de base, ce sont d'abord les milieux des côtés de cette cellule qui peuvent être utilisés comme contrôle. Et que pour « encore plus petit », c'est le parallélisme avec les bords de la cellule qui précède qui peut être privilégié, même si dans le cas particulier, ce contrôle atteint ses limites en produisant un... pentagone.

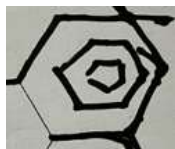


Figure 4 – Tracés d'hexagones de plus en plus petits réalisés par San

ÉTAT DES LIEUX EN VUE DE LA CONCEPTION D'UNE RESSOURCE INCLUSIVE POUR FORMER À L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

| PETITFOUR* ÉDITH

Résumé | Nos travaux visent à la conception d'une situation de formation à l'enseignement de la géométrie pour des élèves de 9-11 ans. L'étude présentée dresse un état des lieux des besoins d'étudiants de master et de professeurs des écoles en formation à l'enseignement spécialisé pour un enseignement de la géométrie s'adressant à la diversité des élèves et prenant en compte les obstacles liés au savoir enseigné.

Mots-clés : ressource, formation des enseignants, géométrie, diversité des élèves, enseignement spécialisé

Abstract | Our work aims to design a training situation for teaching geometry to students aged 9-11. The study presented takes stock of the needs of master's students and teachers training to become specialist teachers for geometry teaching that addresses the diversity of students and takes account of the obstacles associated with the knowledge being taught.

Keywords: Inclusive resource, teacher training, geometry, student diversity, special education

Cette recherche, menée au sein d'un institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM de Rouen, France) en collaboration avec des formateurs de professeurs des écoles, vise à la conception d'une situation de formation à l'enseignement de la géométrie à des élèves de 9-11 ans, en prenant en compte la diversité des élèves en classe et celle des professeurs des écoles en formation, initiale ou à l'enseignement spécialisé. Elle s'inscrit dans la continuité de nos travaux sur l'enseignement de la géométrie par la construction instrumentée dans le cadre de l'inclusion scolaire (Petitfour, 2017a, 2018, 2022, 2024). L'étude présentée constitue la première étape d'un projet¹ de production d'une *ressource pédagogique inclusive* dont l'objectif est double : outiller les enseignants à la prise en compte des besoins des élèves pour permettre des apprentissages géométriques ; outiller les formateurs à la prise en compte de la diversité des étudiants et enseignants se formant à l'enseignement de la géométrie.

Nous présentons les fondements théoriques de notre recherche et nos outils d'analyse, des éléments de contexte et de méthodologie, puis exposons nos analyses avant de conclure.

I. FONDEMENTS THÉORIQUES ET OUTILS D'ANALYSE

1. *Enseignement de la géométrie à la transition école-collège*

De nombreuses recherches en didactique ont étudié les difficultés des élèves à conduire un raisonnement en appui sur les figures. Houdement et Kuzniak (2006) ont pointé une rupture liée au paradigme géométrique de travail qui évolue d'une géométrie à l'école où l'on produit et vérifie les propriétés aux instruments (*Géométrie 1*) à la géométrie du collège où la validation se fait par des démonstrations (*Géométrie 2*). Houdement (2007) a mis en évidence certains malentendus en formation des maîtres liés à la coexistence de ces paradigmes, chacun propice à du raisonnement. D'autres recherches (Duval et Godin, 2005 ; Perrin-Glorian et Godin, 2014 ; Mathé, Barrier et Perrin-Glorian, 2020) ont pointé le rôle potentiel du dessin instrumenté dans la conceptualisation géométrique en étudiant des conditions pour favoriser une entrée des élèves dans la géométrie théorique *via* la

* Université de Rouen Normandie, LDAR, IREM de Rouen – France – edith.petitfour@univ-rouen.fr

¹ Projet *A³ Géom* soutenu par l'INSPE Normandie Rouen-Le Havre et par le PIA3 100 % IDT.

construction avec des instruments de tracé. Une condition concerne l'exclusion des instruments de mesure pour travailler d'abord sur les grandeurs géométriques (longueurs, angles) ; une autre concerne les instruments de tracé à disposition qui doivent suivre des *règles d'usage géométrique*. Un tel usage pour l'instrument « règle non graduée » est par exemple énoncé ainsi : « Pour placer la *règle*, il faut deux points ou un segment déjà tracé. » (Perrin-Glorian, 2024, p. 12)

Dans des recherches antérieures (Petitfour, 2017a, 2017b, 2018), nous avons porté une attention particulière aux difficultés rencontrées par des élèves dyspraxiques² dans des tâches de construction instrumentée, ayant un impact sur leurs apprentissages géométriques. Nous avons alors déterminé deux critères de réussite d'une construction instrumentée — la *justesse* et la *précision* —, la réussite nécessitant une articulation de différents types de connaissances activés lors d'une séquence d'actions instrumentées mises en œuvre. Précisons qu'une action instrumentée consiste en l'usage d'un objet technique (un instrument de géométrie), dans un environnement de travail donné, pour produire ou analyser un objet graphique (une partie d'un dessin) représentant un objet géométrique. Nous présentons dans la partie suivante ces critères de réussite et types de connaissances. Nous les utiliserons par la suite dans nos analyses.

2. Critères de réussite d'une construction instrumentée et connaissances en jeu

La *précision* d'une construction est liée à celle des instruments. Par exemple, pour le tracé d'un segment d'une mesure de longueur donnée, la précision permise par l'épaisseur de la mine du crayon et par les graduations de la règle correspond à un millimètre. Le tracé d'un angle droit est *précis* si les côtés de l'angle tracés suivent bien les côtés de l'angle droit de l'équerre.

La mise en œuvre de *compétences visuo-spatiales* permet d'apprécier la *précision* de façon perceptive en premier lieu : un dessin *non précis* diffère visuellement du dessin envisagé. Un contrôle instrumenté par vérification des propriétés géométriques représentées ou par superposition sur le dessin d'un calque du dessin attendu (fourni par l'enseignant, un manuel, etc.) permet de confirmer la qualité de la *précision*.

Des *connaissances manipulatoires* liées aux aspects matériels (mécaniques) des instruments et corporels de leur manipulation, ainsi que des *connaissances organisationnelles* concernant la planification des actions et l'organisation matérielle du tracé sont utiles pour obtenir de façon efficace un *dessin précis*. Voici quelques exemples de telles connaissances pour le tracé du second côté d'un angle droit de sommet A ou B, un segment [AB] étant donné. Tracer avec l'équerre un petit trait d'extrémité le sommet de l'angle droit (figure 1a) en vue de le prolonger à la règle permet une moins bonne *précision* que placer avec l'équerre un point éloigné du sommet de l'angle droit en vue de tracer une droite passant par ce point et le sommet de l'angle (figure 1b). Orienter le support par rapport à soi pour ne pas avoir les mains croisées lors du tracé et répartir les appuis en écartant les doigts sur l'instrument utilisé pour le maintenir pendant le tracé (figure 1c *versus* figure 1d) favorisent la production d'un *dessin précis*.

² Élèves porteurs d'un trouble développemental de la coordination, se manifestant principalement dans les habiletés gestuelles (INSERM, 2019).

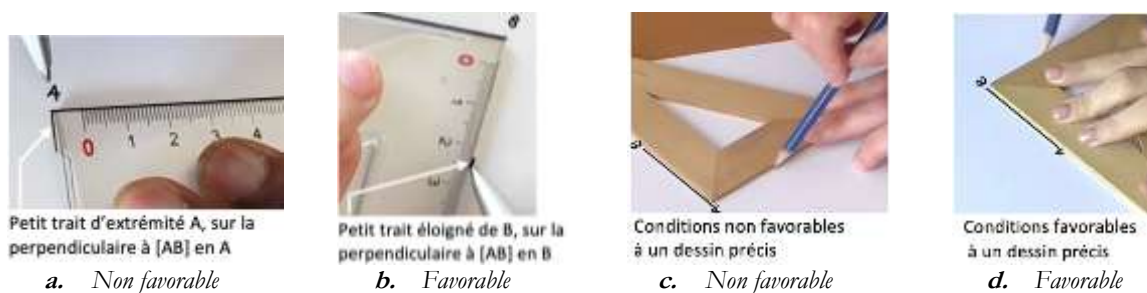


Figure 1 – Précision d'une construction : conditions favorables ou non

La *justesse* d'une construction porte sur l'action instrumentée et le dessin obtenu. Au niveau de l'action instrumentée, la *justesse* est déterminée par le choix de l'instrument approprié et par la mise en œuvre de l'usage spécifique de cet instrument pour produire ou analyser un tracé. Reprenons l'exemple précédent du tracé du second côté d'un angle droit. Nous pouvons observer une construction *juste* d'un angle droit en B sur la figure 2a : un côté de l'angle droit de l'équerre est sur le segment [AB] et le sommet de l'angle droit sur le point B. Les deux autres constructions en revanche ne sont pas *justes* : l'équerre est orientée de façon perceptive pour former un angle droit de sommet A, avec un bord placé sur le point A (figure 2b) ; le trait de la graduation 0 de l'équerre, détourné de son usage, est utilisé pour former un angle droit en B avec le bord gradué (figure 2c).

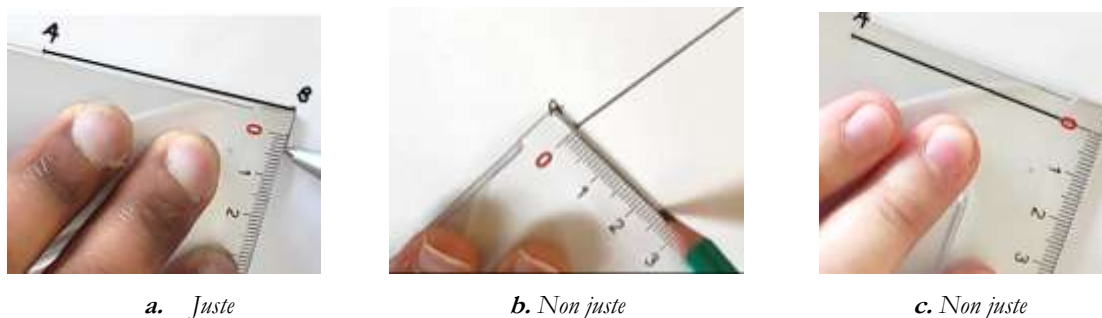


Figure 2 – Évaluation de la justesse d'une action instrumentée

Par ailleurs, le dessin obtenu est *juste* si les propriétés géométriques qui se déduisent de la construction instrumentée (les inférences) sont vérifiées sur le dessin. En *Géométrie 2*, ces propriétés se démontrent ; en *Géométrie 1*, elles se vérifient à l'aide des instruments (pour les angles ou les longueurs) ou de façon visuelle (pour des alignements, les points de concours). Par exemple, si on trace un quadrilatère ayant deux angles droits consécutifs et les côtés de ces angles de même longueur, on pourra apprécier la *justesse* du dessin comme représentant d'un carré, à la *précision* permise par les instruments, en vérifiant à l'équerre que les deux autres angles sont droits et le quatrième côté de même longueur que les trois autres. Des *connaissances techniques* sur les instruments, à savoir sur leurs fonctions et usages spécifiques, sont nécessaires pour réaliser une construction *juste*. Elles s'expriment dans l'action et peuvent se formuler dans un *langage technique géométrique*, par la mention de l'instrument adéquat et l'expression des relations entre certaines de ses parties et des éléments du dessin. Des *connaissances graphiques* (informations graphiques du dessin à interpréter géométriquement) sont aussi nécessaires, ainsi que des *connaissances géométriques* portant sur les objets, propriétés et relations géométriques.

II. ÉLÉMENTS DE CONTEXTE ET DE MÉTHODOLOGIE

Dans la perspective de concevoir une situation de formation à l'enseignement de la géométrie en fin d'école primaire - début de collège (élèves de 9-11 ans), le but de la présente étude est de faire un état des lieux des connaissances mises en jeu dans des tâches de construction instrumentée par différents publics : des élèves, des étudiants en formation initiale au professorat des écoles et des enseignants préparant le certificat d'aptitude professionnelle aux pratiques de l'éducation inclusive³ (CAPPEI). Il s'agit d'une part de repérer les difficultés et les réussites des élèves, et d'autre part d'identifier les besoins en formation des étudiants et des enseignants pour un enseignement s'adressant à la diversité des élèves et contribuant à lever les obstacles à la conceptualisation en géométrie. Par la suite, nous nous appuierons sur cet état des lieux pour développer une ressource pour la formation qui réponde aux besoins identifiés.

Ainsi, nous avons proposé des tâches de construction géométrique en fin d'année scolaire à une cohorte de 28 élèves de cours moyen (CM) provenant de deux écoles en réseau d'éducation prioritaire⁴ (REP et REP+). Nous nous intéressons à la première tâche (figure 3). Nous avons filmé 21 constructions, réalisées individuellement (14 élèves) ou en binôme (14 élèves).

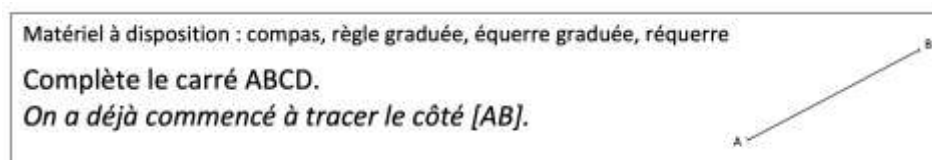


Figure 3 – Tâche de construction géométrique

Nous avons proposé cette tâche à 50 étudiants en fin de première année de master Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation (M1, master MEEF) et à 34 enseignants débutant leur préparation au CAPPEI. La consigne était pour eux de produire une capsule vidéo destinée à des élèves de CM comme correction ou aide à la construction instrumentée proposée. Les étudiants disposaient d'une équerre graduée et les enseignants des mêmes instruments que les élèves. Sur le support des élèves et des étudiants, le segment [AB] était en haut de la feuille ; sur celui des enseignants, il était au milieu. Les étudiants et les enseignants, tout comme les élèves, ont été filmés à partir du moment où ils ont découvert la tâche à réaliser, ils n'ont pas eu de temps de préparation, ni la possibilité de communiquer entre eux. Nos données sont composées de 105 courtes vidéos et des dessins obtenus. Nous les analysons en nous intéressant à la *justesse* des constructions, en appui sur l'analyse *a priori* présentée dans la partie suivante. Nous évaluons aussi la *précision* des dessins. Nous repérons les connaissances se manifestant dans la mise en œuvre des actions instrumentées, et, pour les étudiants et enseignants, se manifestant aussi dans le discours accompagnant ces actions, destiné à des élèves qui auraient eu des difficultés à réaliser la tâche.

III. ANALYSE A PRIORI

La tâche « compléter le carré ABCD à partir du côté [AB] » est une conversion (Duval, 2005) d'un texte en un dessin. L'objet géométrique est désigné par son nom : carré ABCD. Le côté déjà tracé contraint l'orientation du dessin sur le support uni. Il est incliné par rapport à la verticale et à

³ En France, ce certificat permet à un enseignant d'être affecté à titre définitif sur un poste qui relève de l'adaptation scolaire ou de la scolarisation des élèves en situation de handicap.

⁴ Les REP+ concernent les quartiers connaissant les plus grandes concentrations de difficultés sociales ayant des incidences fortes sur la réussite scolaire.

l'horizontale pour favoriser la mise en jeu de propriétés géométriques plutôt qu'un unique appui sur la perception visuelle qu'encouragerait une représentation prototypique du carré. Le côté a une longueur de 6 cm (mesure entière) pour limiter les imprécisions qui seraient liées à la lecture de la mesure. Deux tracés de carré sont possibles, l'un dans le sens direct (en dessous de [AB]), l'autre dans le sens indirect (au-dessus de [AB]). La position de [AB] en haut du support ne laisse donc qu'une possibilité de tracé : ABCD dans le sens direct.

Nous décomposons la construction du carré en actions élémentaires. Le tableau 1 présente la construction du côté [AD] consécutif à [AB]. La construction du côté [BC] est analogue. La première colonne exprime en langage géométrique les objets construits, la deuxième l'action instrumentée correspondante en *langage technique géométrique* et la troisième montre le dessin à obtenir, avec le codage des propriétés géométriques données par construction.

Tableau 1 – Actions instrumentées élémentaires pour la construction du côté [AD]

Langage géométrique	Langage technique géométrique	Dessin
Construction de l'angle droit du carré en A par le tracé de d_A demi-droite d'origine A perpendiculaire à [AB].	Action 1 - Prendre l' équerre et placer un côté de l'angle droit sur le côté [AB], avec le sommet de l'angle droit sur le point A. Tracer le long de l'autre côté de l'angle droit de l'équerre.	
Report de la longueur AB sur la demi-droite d_A à partir du point A : r_A (ou tracé d'un arc de cercle de centre A, de rayon AB)	Action 2a - Placer les graduations le long du côté [AB] avec la graduation 0 sur le point A et lire la mesure x_B au niveau du point B. Puis placer les graduations le long de d_A avec la graduation 0 sur le point A et mettre le point D au niveau de x_B . Action 2b - Prendre le compas , placer la pointe sur le point A, la mine sur le point B et tracer un arc de cercle qui coupe d_A en D. <i>NB : L'action 2b peut être réalisée avant l'action 1.</i>	

Nous exposons quatre techniques de construction du carré possibles à partir de deux côtés consécutifs, sans appui sur le tracé des diagonales et en utilisant l'équerre pour obtenir des angles droits⁵ (figure 4). La technique T₁ consiste à tracer la demi-droite d_B perpendiculaire à [AB] d'origine B, du même côté de (AB) que le côté [AD] (ou alors la demi-droite d_D perpendiculaire à [AD] d'origine D), puis à placer le point C sur d_B en reportant la longueur AB à partir du point B, et enfin à tracer [CD]. La *justesse* de la construction se contrôle en vérifiant que $CD = AB$ et que les angles sont droits en C et D. Une variante T₁* consiste, pour la dernière action, à tracer d_C perpendiculaire à [BC] en C. Le dessin est *juste* si d_C passe par le point D, $CD = AB$ et l'angle en D est droit. La technique T₂ consiste à tracer d_B et d_D , se coupant au point C. La *justesse* se contrôle en vérifiant que l'angle en C est droit et que $DC = CB = AB$. La technique T₃ consiste à tracer deux arcs de cercle de rayon AB, l'un de centre B et l'autre de centre D, se coupant en un point, sommet C du carré, puis à tracer [CD] et [CB]. La *justesse* se contrôle en vérifiant que les angles en B, C et D sont droits.

⁵ La construction de la médiatrice au compas n'est pas abordée en CM, elle l'est seulement en début de collège.

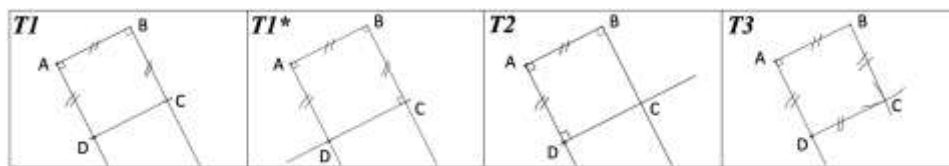


Figure 4 – Dessins codés selon les différentes techniques de construction instrumentée du carré ABCD

IV. ANALYSE

Nous présentons les résultats de l'évaluation des constructions instrumentées réalisées par les élèves, les étudiants et les enseignants. L'annexe 1 les récapitule.

1. Résultats des élèves de CM

Quatre élèves, soit 14 % de la cohorte, réalisent une construction *juste* (une est *précise*). Trois élèves ont utilisé la réquerre, une avec la technique T1 et un binôme avec la technique T1*, en traçant directement les côtés du carré de la longueur voulue une fois la réquerre bien orientée. Le positionnement de la réquerre n'est pas immédiat, plusieurs tentatives sont réalisées. Un élève utilise la technique T1 avec un usage conjoint et maîtrisé de la règle graduée et de l'équerre. Par ailleurs, aucun des quatre élèves ne contrôle la *justesse* du dessin obtenu.

Vingt-quatre élèves, soit 86 % de la cohorte, réalisent une construction *non juste* (Deux sont *précises*). Un élève construit un triangle au lieu d'un carré. Deux élèves (en binôme) utilisent l'équerre graduée pour tracer les côtés [BC] et [CD] du carré sans tenir compte du décalage de la graduation 0 par rapport au sommet de l'angle droit de l'instrument. L'un, percevant que le dessin obtenu ne convient pas (« Ça fait pas trop carré » [sic]), contrôle les quatre angles à l'équerre. Le binôme gomme et refait le dessin de la même façon, sans repérer la cause de l'erreur. Deux élèves utilisent le trait de la graduation 0 de l'équerre pour l'orienter afin de tracer [BC] et [CD] de longueur 6 cm ; ils ne réalisent aucun contrôle des angles droits à l'équerre. Dix-neuf élèves ne tiennent pas compte des angles droits du carré dans leur construction. Parmi eux, certains (5) tracent le carré à la règle de façon perceptive, ne tenant pas compte non plus des égalités de longueurs des côtés. Les autres élèves (14) se focalisent sur ces égalités en positionnant perceptivement la règle, l'équerre ou la réquerre pour tracer des côtés de longueur 6 cm. Onze d'entre eux n'effectuent aucun contrôle instrumenté ; une élève contrôle la mesure du dernier côté, gomme et refait le dessin et un binôme refait cinq fois le dessin, toujours « au jugé », suite à des contrôles perceptifs (« Ça fait trop écarté ») et instrumenté (mesure de la longueur du dernier côté).

2. Résultats des étudiants de M1

Trente-deux étudiants, soit 64 % de la cohorte, réalisent une construction *juste* avec l'équerre graduée : dix-neuf utilisent la technique T1, treize la technique T1*, aucun la technique T2. Dans les commentaires donnés par ces étudiants, des *connaissances géométriques* sont formulées sur les propriétés des angles et des longueurs des côtés du carré par dix étudiants et seulement sur les longueurs par six étudiants. Vingt-quatre étudiants ne donnent aucune information sur le positionnement de l'équerre et les huit autres n'en donnent que très peu. Concernant la *justesse* du dessin, cinq étudiants la contrôlent entièrement, douze partiellement (absence de la mesure du quatrième côté ou de vérification d'angles droits), quinze pas du tout. Une part non négligeable des constructions, quatorze contre dix-huit, est réalisée dans des conditions peu favorables à la *précision* comme présenté sur la figure 1a. En outre, parmi les dix-huit étudiants traçant dans des conditions favorables à la *précision*, seuls dix font des traits de construction permettant le report de longueur sur une demi-droite, les huit autres prolongent un

segment jusqu'à atteindre la longueur de 6 cm. Treize constructions sur cinquante manquent de précision. Six constructions parmi ces treize sont des constructions *justes*.

Dix-huit étudiants, soit 36 % de la cohorte, réalisent une construction *non juste*. Treize ont utilisé un trait de graduation pour tracer un côté de longueur 6 cm perpendiculaire à [AB] (figure 2c). Certains vérifient la *précision* de l'angle ensuite ; une d'entre eux procède par ajustements successifs : une fois l'angle droit tracé à l'aide du trait de graduation, elle en contrôle la *précision* avec l'angle droit de l'équerre, gomme s'il ne convient pas, le retrace avec le trait de graduation et vérifie de nouveau. Six constructions *non justes* proviennent d'une orientation perceptive de l'équerre (figure 2b) pour tracer un côté de longueur 6 cm. Deux étudiants ont procédé ainsi par défaut, ne parvenant pas à mettre le côté non gradué de l'équerre sur [AB] avec la graduation 0 sur le point A. Une étudiante enfin ne prend pas en compte les égalités de longueur des côtés. Elle trace à l'équerre deux segments perpendiculaires à la droite (AB), l'un d'extrémité A, l'autre d'extrémité B, d'une longueur prise perceptivement. Elle relie les deux autres extrémités des segments pour obtenir le côté [CD]. Elle vérifie les angles en C et en D à l'équerre et rectifie « au jugé » le tracé de [CD] pour rendre les angles droits. On peut remarquer dans sa façon de tracer des conditions non favorables à la *précision* telles la figure 1c. Elle nous précise à la fin : « J'ai toujours du mal à faire des traits droits, j'arrive jamais à tenir l'équerre ou la règle correctement » (*sic*). Elle attribue ainsi l'*imprécision* du dessin à ses difficultés manipulatoires, sans remettre en cause la *justesse* de la construction, alors qu'il le faudrait aussi.

3. Résultats des enseignants en formation CAPPEI

Vingt-huit enseignants réalisent une construction *juste*. Treize utilisent le compas pour les reports de longueur et quinze les graduations. Vingt-deux enseignants utilisent la technique T1, cinq la technique T1*, aucun la technique T2 et un la technique T3. Un sixième des enseignants ayant réalisé une construction *juste* contrôle la *justesse* du dessin, un tiers la contrôle de façon partielle et la moitié ne la contrôle pas. Parmi les vingt-huit constructions *justes*, huit sont *imprécises*. Trois des constructions *justes*, dont deux *imprécises*, ont été réalisées dans des conditions peu favorables à la *précision* comme présenté sur la figure 1a.

Six enseignants réalisent une construction *non juste*. Parmi ceux-ci, deux ont utilisé le trait de graduation 0 de l'équerre pour orienter l'instrument afin de tracer [BC] et [CD] de longueur 6 cm. Un des dessins est *précis*, l'autre non malgré un contrôle à l'équerre des quatre angles droits. Une enseignante, utilisant la technique T1, oublie de faire le report de longueur annoncé et obtient une construction *imprécise*. Une autre enseignante utilise l'équerre graduée pour tracer les côtés du carré sans tenir compte du décalage de la graduation 0 par rapport au sommet de l'angle droit. Enfin, une enseignante interprète mal la consigne en prenant le segment [AB] comme diagonale du carré à tracer et une autre ne sait comment terminer la construction après avoir tracé deux cercles de rayon AB, l'un de centre A, l'autre de centre B.

V. DISCUSSION ET CONCLUSION

Selon les programmes scolaires français du cycle 3 (élèves de 9-11 ans), les situations faisant appel à des types de tâches mettant en jeu des actions instrumentées sont proposées aux élèves « afin de faire émerger des concepts géométriques (caractérisations et propriétés des objets, relations entre les objets) et les enrichir. » (MEN, 2020, p. 97) Résoudre des problèmes de construction instrumentée doit donc conduire les élèves vers la conceptualisation en développant leurs connaissances géométriques et l'exercice du raisonnement. La tâche de construction instrumentée analysée dans notre étude — compléter un carré à partir d'un de ses côtés — nous permet d'avoir un premier aperçu sur les acquis

en géométrie d'élèves (28) après une ou deux années de cycle 3 d'une part, et sur les besoins en formation d'étudiants (50) se destinant au professorat des écoles et ceux d'enseignants (34) souhaitant exercer dans l'enseignement spécialisé d'autre part.

Nos analyses des constructions instrumentées, tant au niveau des actions instrumentées que du dessin produit, ont été réalisées suivant les critères de *justesse* et de *précision*. Nous avons relevé principalement deux types d'actions instrumentées ne validant pas le critère de *justesse* : celles réalisées avec une orientation perceptive de l'instrument pour produire des angles droits, et celles où la fonction d'une graduation est détournée de son usage. Le premier type d'actions témoigne d'un manque de connaissances géométriques relatives aux angles droits que possède un carré. C'est le cas pour 79 % des élèves et 12 % des étudiants qui se focalisent uniquement sur les égalités de longueur des côtés du carré, avec l'usage des graduations (à l'exception de 11 % d'élèves qui ne tiennent pas compte de ces égalités non plus). Un moyen de contrer cette centration sur la mesure serait d'exclure les graduations des instruments à disposition pour travailler sur les grandeurs, à l'instar de Perrin-Glorian (2024).

Le second type d'actions est réalisé par 7 % des élèves, 26 % des étudiants et 6 % des enseignants. Il peut être motivé par un souci d'*économie gestuelle* (Offre, Perrin-Glorian et Verbaere, 2006) pour tracer en un seul geste le second côté d'un angle droit de la mesure voulue. L'équerre matérielle à disposition, avec la graduation 0 décalée du sommet de l'angle droit, contraint en effet à deux actions distinctes si on respecte l'usage spécifique de l'instrument (ou alors à associer l'usage simultané d'une règle graduée). Un trait de graduation forme effectivement un angle droit avec le bord gradué de l'équerre ou de la règle. Cet angle, de par son très petit côté, offre des conditions peu favorables à la *précision* des tracés. Cela n'empêche pas d'obtenir un dessin *précis* – et donc valide en *Géométrie 1* – pour qui a de bonnes *compétences visuo-spatiales*, quitte à faire des vérifications instrumentées et réajustements si besoin. Nous excluons cependant cet usage des constructions *justes* car il ne favorise pas, pour les élèves, l'identification des propriétés géométriques mises en jeu. L'orientation de l'instrument suivant le trait de graduation est peu visible, si bien que les élèves peuvent facilement confondre ce positionnement avec un positionnement « au jugé » et évacuer la propriété que doivent vérifier les angles d'un carré (cas de 4 élèves sur 5). Ce détournement des graduations serait acceptable pour l'élève expert qui saurait précisément quelle propriété géométrique il met en jeu par ce procédé. L'enseigner aux élèves ne nous semble pas propice aux apprentissages visés, d'autant plus si la verbalisation est du type : « J'utilise l'équerre pour faire un angle droit », « Je mets bien mon équerre » (extraits de capsules produites par des étudiants et enseignants). Cet usage détourné du trait de graduation peut aussi être motivé par un évitement des traits de construction. Globalement, peu d'étudiants (20 %) et d'enseignants (44 %) ne s'autorisent à en faire et un seul élève en fait. Or les traits de construction permettraient d'associer à une action instrumentée une seule propriété et ainsi de mieux identifier les propriétés géométriques en jeu lors de la construction instrumentée (tracé d'une demi-droite, puis report de longueur sur cette demi-droite). Enfin, peu d'étudiants et d'enseignants contrôlent explicitement la *justesse* du dessin obtenu (12 % des étudiants et 18 % des enseignants font un contrôle, 24 % des étudiants et 29 % des enseignants font un contrôle partiel). Ce contrôle est certes inutile si le dessin réalisé est *précis*, cependant faire des inférences à partir de propriétés obtenues par construction nous semble utile pour pouvoir contribuer à l'exercice du raisonnement des élèves en vue du travail ultérieur au collège en *Géométrie 2*.

Nous avons mis au jour des erreurs et difficultés pour une part importante d'élèves de CM lors de la réalisation de la construction instrumentée analysée, mais aussi pour certains étudiants et enseignants. Une part non négligeable de ces derniers ne valident pas le critère de *justesse* quant aux actions instrumentées qu'ils réalisent et davantage encore quant au contrôle instrumenté du dessin. Par ailleurs, les explications données dans les capsules vidéo par les étudiants et les enseignants expriment peu de

connaissances techniques qui pourraient mener les élèves à la réalisation d'une construction *juste*, notamment pour l'usage de l'équerre. Notre situation de formation à l'enseignement de la géométrie pourrait donc cibler le développement de ces connaissances associées à l'utilisation des instruments et aux connaissances géométriques dont ils sont porteurs. L'utilisation d'un *langage technique géométrique* accompagné de gestes associés aux actions instrumentées est un moyen que nous avons exploité pour permettre des apprentissages en géométrie aux élèves dyspraxiques (Petitfour, 2017b). Ce pourrait être un levier du côté de l'enseignant pour favoriser l'identification des propriétés géométriques en jeu et l'exercice du raisonnement. Nous intégrerons donc ces éléments dans les scénarii d'enseignement de la géométrie à expérimenter, pour l'un en classe, pour l'autre en formation, dans les prochaines étapes de notre projet de conception d'une ressource inclusive pour la formation à l'enseignement de la géométrie.

RÉFÉRENCES

- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53. <https://bibnum.publimath.fr/IST/IST05010.pdf>
- Duval, R. et Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, (76), 7-27.
- Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.
- Houdement, C. (2007). À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères-IREM*, (67), 69-84.
- INSERM - Institut National de la Santé et de la Recherche Médicale (2019). *Trouble développemental de la coordination ou dyspraxie*. EDP Sciences.
- Mathé, A. C., Barrier, T. et Perrin-Glorian, M. J. (2020). *Enseigner la géométrie à l'école*. L'Harmattan.
- Ministère de l'éducation nationale [MEN]. (2020, 30 juillet). *Programmes du cycle 3, en vigueur à la rentrée 2020. D'après le BOEN n° 31 du 30 juillet 2020*. Ministère de l'éducation nationale de France.
- Offre, B., Perrin-Glorian, M.-J. et Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Grand N*, (77), 7-34.
- Perrin-Glorian, M.-J. et Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école*, (222), 26-36.
- Perrin-Glorian, M.-J. (2024). Enseigner la géométrie plane en cohérence de 6 à 15 ans. *Revisita Matematica, Ensino e Cultura-REMA TEC*, 47, article e2024001 <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/issue/view/51>
- Petitfour, E. (2017a). Outils théoriques d'analyse de l'action instrumentée, au service de l'étude de difficultés d'élèves dyspraxiques en géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 37(2-3), 247-288.
- Petitfour, E. (2017b). Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition d'un dispositif de travail en dyade. *Petit x*, (103), 5-31.
- Petitfour, E. (2018). Quel accompagnement en géométrie pour des élèves dyspraxiques ? *Grand N*, (101), 45-70.

Petitfour, E. (2022). Quel accès aux apprentissages géométriques pour les élèves dyspraxiques ? *Au fil des Maths*, (545), 5-13.

Petitfour, E. (2024). Approach to teaching geometry to dyspraxic students. Dans T. Lowrie, A. Gutierrez et F. Emprin (dir.), *Pre-proceedings of the 26th ICMI study conference “Advances in geometry education”* (p. 245-252). ICMI.

ANNEXE 1

Le tableau 2 recense l’évaluation des 105 constructions instrumentées analysées. La colonne « Précision » indique les effectifs d’élèves, d’étudiants et d’enseignants ayant produit un dessin *précis* ou *non précis*. La colonne « Justesse » indique ceux ayant produit une construction *juste* ou *non juste*. Cette dernière catégorie se décline en trois cas : les constructions dont les angles droits ont été produits avec un trait de graduation ou avec une orientation perceptive de l’instrument (« au jugé ») et les autres cas. La dernière colonne indique pour les constructions *justes* si un contrôle de la *justesse* du dessin a été réalisé par son auteur de façon complète, partielle ou pas du tout.

Tableau 2 – Évaluation des 105 constructions instrumentées

	Précision		Justesse					Contrôle		
	PRÉCIS	Non précis	JUSTE	Non juste			Oui	Partiel	Non	
				Angle avec graduation	Angle au jugé	Autre				
28 élèves	3	25	4	2		19	3	0	0	4
50 étudiants	37	13	32	11	2	4	1	5	12	15
34 enseignants	21	11	28	2		0	4	5	10	13

Les diagrammes en barres (figure 5) permettent de comparer la qualité des productions obtenues entre élèves, étudiants et enseignants. Les diagrammes circulaires (figure 6) donnent à voir le type d’erreur ayant abouti à une construction *non juste* pour chacun des trois groupes étudiés.

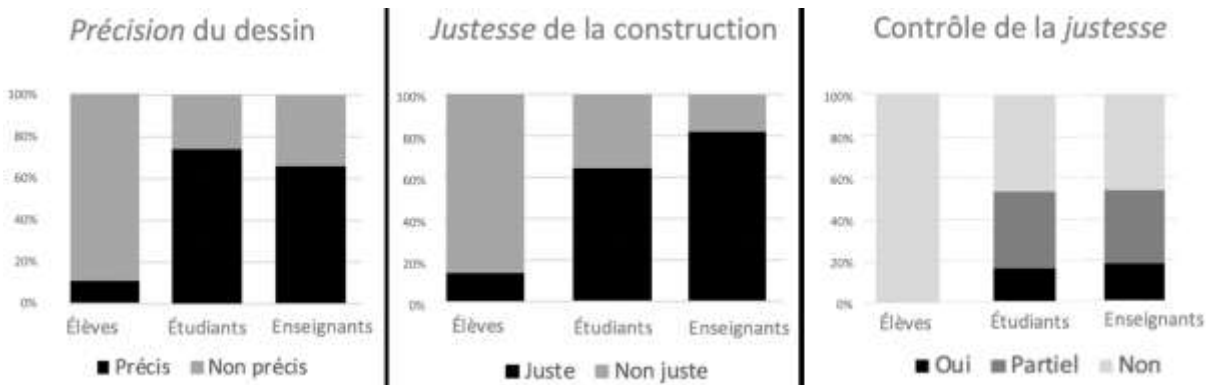


Figure 5 – Justesse et précision des constructions

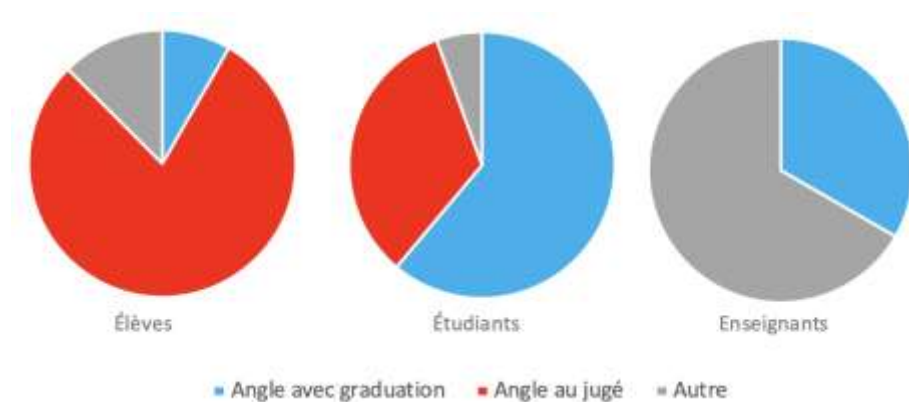


Figure 6 – *Origine de la non justesse des constructions*

MISE EN ŒUVRE DE LA SITUATION VOITURES/GARAGES DANS UNE CLASSE À SOUS-EFFECTIF D'UN ÉTABLISSEMENT SPÉCIALISÉ

| DUPRÉ* FRÉDÉRIC

Résumé | En France, bien qu'un « virage inclusif » soit amorcé depuis deux décennies, un peu plus de dix pour cent des élèves reconnus institutionnellement handicapés sont encore scolarisés exclusivement au sein d'établissements spécialisés. Notre contribution vise à étudier la mise en œuvre de la situation voitures/garages au sein d'un de ces établissements. Notre étude de cas portera sur deux séances filmées au sein d'une classe dans un IME (institut médicoéducatif). Dans cette classe, deux élèves travaillent en mathématiques en présence de deux enseignantes spécialisées. Dans ce contexte particulier, nous nous interrogerons pour savoir si le fait de recourir à une situation de travail conjoint (coenseignement) associée à une situation reconnue comme robuste sont des conditions suffisantes pour favoriser l'accès à l'étude des savoirs visés ; ou au contraire, si certains obstacles didactiques sont identifiables.

Mots-clés : coenseignement, voitures/garages, accessibilité didactique, établissement spécialisé, obstacle didactique

Abstract | In France, although an “inclusive turn” has been underway for two decades, just over ten percent of pupils recognized as institutionally disabled are still educated exclusively in specialized establishments. The aim of our contribution is to study the implementation of the car/garage situation within one of these establishments. Our case study will focus on two sessions filmed in a class at an IME (Medico Educational Institute). In this class, two pupils work on mathematics in the presence of two specialist teachers. In this particular context, we'll examine whether the use of a joint work situation (co-teaching), associated with a situation recognized as robust, are sufficient conditions to promote access to the study of the targeted knowledge, or on the contrary, whether certain didactic obstacles can be identified.

Keywords: Co-teaching, cars/garages, didactic accessibility, specialized facility, didactic obstacle

I. INTRODUCTION

En France, bien qu'un « virage inclusif » soit amorcé depuis deux décennies, environ 77 000¹ élèves reconnus institutionnellement handicapés sont encore scolarisés au sein d'établissements spécialisés. La scolarisation de ces élèves se déroule au sein des unités d'enseignement (UE) qui peuvent être externes ou internes. L'emploi du temps de ces élèves est partagé entre des temps scolaires, des temps éducatifs ou encore des temps rééducatifs. Généralement, la durée hebdomadaire de scolarisation de ces élèves est inférieure à la durée légale en milieu ordinaire, elle peut même parfois être limitée à quelques heures par semaines, ce qui peut constituer une première contrainte à l'enseignement. Notre étude se déroule au sein d'une unité d'enseignement interne implantée dans un institut médicoéducatif. Ce texte vise plus particulièrement à étudier la mise en œuvre de la situation voitures/garages dans une classe que nous qualifions à « sous-effectif » dans le sens où seulement deux élèves sont présents lors des séances de mathématiques relatives à cette situation.

La mise en œuvre de cette situation robuste a déjà été étudiée dans des classes pour l'inclusion scolaire (Clis) à l'école élémentaire (Assude et al., 2011, 2012). Les auteurs mettent en évidence que « cette situation a été adaptée pour des élèves qui ne reconnaissent pas globalement des petites quantités

* INSEI Groupe de recherche sur le handicap, l'accessibilité, les pratiques éducatives et scolaires – France –
frederic.dupre@inshea.fr

¹ Donnée disponible dans l'édition 2023 des repères et références statistiques publiés par le ministère de l'Éducation nationale.

et a permis à ces élèves de faire quelques progrès dans l'apprentissage du nombre et le dénombrement » (Assude et al., 2012, p. 1065). Il a également été montré que certaines modifications du milieu matériel ainsi que dans la définition du jeu pouvaient générer des obstacles pour les élèves. À notre tour, nous souhaitons analyser la mise en œuvre de cette situation en nous plaçant dans un autre contexte de l'enseignement spécialisé. Notre étude portera sur deux séances qui s'inscrivent dans une séquence qui en compte treize. Lors de ces séances, deux élèves sont en classe ainsi que deux enseignantes. Dans ce contexte particulier, nous souhaitons interroger deux aspects spécifiques à ces séances (i) une situation de travail conjoint (nous pouvons penser qu'il s'agit a priori de coenseignement²) et (ii) une classe à sous-effectif. La question que nous posons est la suivante : que produisent ces deux spécificités directement liées au contexte spécialisé sur la mise en œuvre d'une situation reconnue comme robuste (voitures et garages) du point de vue de l'accès à l'étude des savoirs.

II. CONTEXTE ET CADRE THÉORIQUE DE L'ÉTUDE

1. *Un contexte de scolarisation singulier, au sein de l'unité d'enseignement interne*

La scolarisation au sein des unités d'enseignement (UE) se distingue de la scolarisation en milieu ordinaire à plusieurs égards. Plusieurs contraintes qui organisent la classe en milieu ordinaire ne jouent pas dans ce contexte : temps légal de scolarisation, absence de programme, nombre d'élèves dans la classe. Ainsi, les enseignantes qui exercent en unité d'enseignement vont devoir réaliser un certain nombre de choix. Elles ont tout d'abord une responsabilité dans l'organisation des emplois du temps de l'élève pour définir un temps hebdomadaire de scolarisation ainsi que les moments où il se rendra au sein de l'UE. Elles vont également pouvoir choisir la composition des groupes. Dans notre étude, une des enseignantes explique certains choix dans l'entretien ante : « il vaut mieux qu'on soit deux [...] ça nous permet de faire du groupe en fait [...] je peux avoir deux enfants ». Nous comprenons à travers ses mots que le fait de travailler dans le même espace avec sa collègue lui permet d'accueillir deux élèves au sein de l'UE. Il s'agit pour elle d'une condition pour dépasser une situation de travail qui serait uniquement individuelle. Cette situation que nous pouvons qualifier a priori de coenseignement est fortement encouragée depuis quelques années³. L'une des enseignantes estime que cette modalité est intéressante, car cela permet de « voir des choses que l'autre ne voit pas [...] réfléchir après sur comment on veut réorienter la séance [...] ou encore quelles améliorations on veut lui apporter ». Parmi les choix que doivent faire les enseignantes, il y a également le choix des objets de savoirs à introduire au sein de l'unité d'enseignement. Un travail de transposition important repose sur les enseignants spécialisés afin de définir les objets mathématiques qui seront travaillés en l'absence de programme clairement défini (Maréchal, 2010). Dans notre étude, elles font le choix de s'appuyer sur une situation robuste, la situation « voitures et garages ».

2. *La situation voitures/garages*

La situation voitures garages (SVG) a été conçue par Guy Brousseau. Elle doit permettre la construction du nombre comme mémoire de la quantité. Il va s'agir pour les élèves de dénombrer une collection de garages pour produire une collection équipotente de voitures. La situation se déroule en trois étapes. Dans un premier temps les voitures et les garages sont proches spatialement. Dans un

² Nous nous appuyons sur la définition suivante « un travail pédagogique en commun, dans un même groupe ; temps et espace, de deux enseignants qui partagent les responsabilités éducatives pour atteindre des objectifs spécifiques » (Friend and Cook, 2006, cités par Janin et al., 2021, p. 4).

³ Le référentiel de compétences des enseignants spécialisés les invite par exemple à concevoir et mettre en œuvre des modalités de co-intervention (annexe du B0 n° 7 du 16 février 2017).

second temps, un éloignement spatial entre les deux collections empêche d'utiliser la correspondance terme à terme. Dans un troisième temps, un éloignement temporel nécessite de trouver un moyen pour garder en mémoire la quantité dénombrée. Dans les travaux précédemment cités (Assude et al., 2011), une triple analyse a priori a été réalisée. Celle-ci permet de mettre en évidence trois types de tâches : dénombrer les garages, produire une collection de voitures équipotente et représenter un nombre naturel. Plusieurs techniques peuvent être mises en œuvre : reconnaissance globale de la collection, dénombrement de la collection (avec ou sans pointage) ou encore la correspondance terme à terme.

3. *Cadre théorique*

Nous allons mobiliser des outils issus de la théorie anthropologique du didactique, il s'agira plus particulièrement des notions de système didactique principal et de système didactique auxiliaire (Chevallard, 1995) et de la notion de praxéologie (Chevallard, 1999) afin de décrire l'articulation entre les deux systèmes didactique en décrivant les tâches, techniques et technologies observables dans les deux systèmes⁴. L'une des enseignantes explique dans l'entretien *ante* que sa collègue va « aider l'enfant s'il en a besoin [...] si il y a besoin de renforçateurs [...] si il y a des problèmes de comportement ». Nous interprétons cela comme une fonction d'aide à l'étude vis-à-vis du système didactique principal, ce qui correspond donc à l'émergence d'un système didactique auxiliaire.

4. *Modélisation d'une situation de co-enseignement*

La figure 1 permet de modéliser cette situation de co-enseignement dans le contexte spécifique de cette unité d'enseignement. Deux systèmes didactiques coexistent dans un même espace-temps. Ils sont sous la responsabilité des deux enseignantes spécialisées (respectivement PEspé1 et PEspé2). Potentiellement, les deux élèves de la classe vont fréquenter le système principal (SDP) et le système auxiliaire (SDA). Les enjeux de savoir sont ceux de la situation voitures et garages.

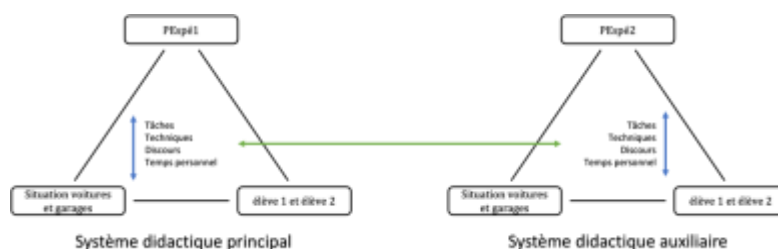


Figure 1 – Modélisation du système d'enseignement

Cette modélisation va nous permettre d'étudier les effets du coenseignement et de la classe à sous-effectif. Il s'agira pour nous de décrire les tâches, techniques et discours observables dans le système principal et dans le système auxiliaire puis d'analyser s'il existe une articulation horizontale entre les praxéologies identifiables dans le SDA et celles attendues dans le SDP. Nous pouvons penser a priori que la situation de coenseignement facilite cette articulation. Nous analyserons également les articulations verticales au sein d'un même système didactique pour voir dans quelle mesure les élèves synchronisent leur temps personnel avec les tâches, les techniques visibles et les discours produits. En résumé, il s'agit pour nous d'observer si la mise en œuvre d'une situation robuste dans ce contexte spécifique permet aux élèves d'accéder à l'étude des savoirs visés.

⁴ Nous avons eu l'occasion de présenter précisément ces outils dans une publication antérieure (Dupré, 2022).

III. ÉLÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES

1. *Présentation du dispositif de recueil de données*

Le recueil de données s'appuie sur un dispositif de captation filmique multisource. Les séances sont filmées à l'aide de trois caméras qui permettent de garder trace de trois plans différents : un plan large sur l'ensemble de l'espace classe, un plan resserré sur les gestes de l'enseignante en charge du SDP et un plan en contre-plongée sur la table où les élèves travaillent. Des enregistreurs équipés de micro-cravate permettent de garder traces des propos tenus par les deux enseignantes.

Nous disposons des données suivantes :

- La fiche séquence qui comporte 13 séances
- Deux séances filmées (séance 6 et séance 8), 15 jours les séparent
- Les entretiens *ante* et *post* séances réalisées individuellement avec PEspé1 et PEspé2

2. *Méthodologie d'analyse*

L'analyse débute par une mise à distance des films recueillis en procédant à une transcription des séances. Cette transcription est organisée de façon à garder traces des propos et des actions des deux enseignantes et des deux élèves. Ce tableau nous permet horizontalement une analyse synchronique à l'échelle du système d'enseignement et verticalement une analyse diachronique à l'échelle d'un système didactique ou d'un pôle de ce système. Les taches et techniques visibles sont systématiquement repérées afin d'étudier l'articulation entre les deux systèmes, mais également la manière dont chaque élève synchronise son temps personnel avec les cadres produits par le SDP. Dans le cadre de ce texte et de l'espace alloué, nous faisons le choix pour la séance 6 de présenter un synopsis qui rend compte de la structure générale de la séance et des actions des quatre acteurs présents. Pour la séance 8, nous présenterons un épisode qui retient particulièrement notre attention.

IV. ÉTUDE DE DEUX SÉANCES EN UNITÉ D'ENSEIGNEMENT

1. *Les choix didactiques des enseignantes à l'échelle de la séquence d'enseignement*

La séquence s'inscrit en référence aux programmes de l'école maternelle et deux objectifs sont annoncés : dénombrer une collection et réaliser une collection équipotente. Treize séances sont prévues, elles se répartissent entre le mois de février et le mois d'avril. Les séances sont décrites succinctement (objectif, modalité de travail, difficultés anticipées). Cet écrit professionnel ne nous donne pas d'information sur la manière dont les deux enseignantes vont se répartir les rôles ni sur la manière dont les élèves vont être amenés à travailler ensemble (ou non).

Les six premières séances correspondent au premier temps de la situation SVG (les voitures et les garages sont proches spatialement). Si pour la première séance la technique d'association terme à terme est attendue, pour les séances suivantes il est indiqué que « l'enseignante montre une technique experte, comptage avec rappel de la quantité », mais également que la quantité de garage pourra être représentée sous forme d'un nombre écrit en chiffres ou encore à l'aide des doigts.

Les séances sept et huit correspondent au second temps de la situation SVG (un éloignement entre la collection de garages et les voitures va nécessiter un déplacement des élèves).

La séance neuf est décrite comme identique à la séance sept avec « peut-être la suppression du déplacement afin de favoriser l'appropriation des compétences mathématiques ». La séance dix a pour

objectif une « pratique autonome du jeu », pour la séance onze un autre matériel est envisagé (des assiettes et des parts de pizza), la séance douze a pour objectif de « garder une trace de la quantité de garages » et la séance treize vise à « réaliser une collection équipotente à partir d'une trace écrite ».

L'analyse de la fiche de séquence permet également de connaître quelques informations sur les deux élèves. Nous apprenons pouvons lire par exemple que Élève1 récite la comptine numérique jusqu'à 29, dénombre jusqu'à 9, réalise une collection correspondant à un cardinal donné jusqu'à 9 également et arrive à utiliser la technique de correspondance terme à terme. Pour Élève 2, il est indiqué qu'il récite la comptine jusqu'à 39 et que le dénombrement d'une collection n'est pas acquis. Pour ce qui est de la technique de correspondance terme à terme, il est indiqué « en cours d'acquisition ». Il est également indiqué que les élèves travailleront avec un nombre de garages inférieur ou égal à 10.

2. Analyse de la séance 6 : proximité spatiale entre les voitures et les garages

Lors des entretiens ante, PEspé1 et PEspé2 rappellent les objectifs de cette séance : dénombrer une quantité, pouvoir lui associer un nombre (écrit en chiffre), comprendre que cette écriture chiffrée permet de mémoriser une quantité puis réaliser une collection équipotente. Le tableau 1 permet de décrire le synopsis de la séance, ce que font les différents acteurs ainsi que les variables utilisées.

Tableau 1 – Synopsis de la séance 6

Temps	Variable	Élève 1	Élève 2	PEspé1	PEspé2
0'00 à 3'46	6 boîtes	Observe de façon discontinue ce que fait l'enseignante.	Arrive en décalé dans la classe et s'installe spontanément pour observer ce que fait Élève 1	Rappelle ce que Élève 1 a réalisé la séance qui précède. Elle verbalise ce qu'il a fallu faire pour réaliser une collection de six voitures	Assise juste derrière Élève 1, ses bras de part et d'autre ne permettent pas à Élève 1 de quitter sa place
3'47 à 7'50	4 boîtes	Dénombre, trouve l'étiquette nombre, réalise une collection de 4 voitures et associe voitures et garages	Regarde un livre puis revient regarder ce que fait Élève 1 et indique qu'elle doit prendre 4 voitures	Décompose chaque étape : compte, prend le nombre, prend les voitures, place les voitures dans les boîtes	Assise juste derrière Élève 1, indique par certains gestes ce que Élève 1 doit regarder
7'50 à 10'12	2 boîtes	Se balade dans la classe	Dénombre 2, semble ne pas s'arrêter lorsqu'il s'agit de réaliser la collection, n'associe pas une voiture par boîte	Réalise la tâche en verbalisant ce qu'il faut faire puis demande à Élève 2 de reproduire à l'identique cette technique	Légèrement en retrait
10'13 à 13'26	6 boîtes	Dénombre 6, semble, trouve l'écriture chiffrée, réalise une collection de 6 voitures et les associe dans les boîtes	Regarde un livre sur une autre table	Réalise la tâche en verbalisant ce qu'il faut faire puis demande à Élève 1 de reproduire à l'identique cette technique	Assise juste derrière Élève1, indique par certains gestes ce que Élève1 doit regarder
13'27 à 16'10	3 boîtes	Se balade dans la classe	Récite la comptine sans s'arrêter ; Dénombre 3, réalise la collection, n'associe pas spontanément une voiture par boîte	Réalise la tâche en verbalisant ce qu'il faut faire puis demande à Élève 2 de reproduire à l'identique cette technique. Guide Élève 2 pour le pointage	Légèrement en retrait
16'11 à 20'42	8 boîtes	Dénombre 8, semble, trouve l'écriture chiffrée, réalise une collection de 8 voitures et les associe dans les boîtes	Regarde un livre sur une autre table	Réalise la tâche en verbalisant ce qu'il faut faire puis demande à Élève 1 de reproduire à l'identique cette technique.	Assise juste derrière Élève 1, indique par certains gestes ce que Élève 1 doit regarder

Temps	Variable	Élève 1	Élève 2	PEspé1	PEspé2
20'43 à 24'54	3 boîtes	Se balade dans la classe	Commence par dire « il faut mettre une voiture dans chaque boîte » ; S'impatiente et bouscule le matériel ; Dénombre difficilement ; réalise la collection ; n'associe pas spontanément une voiture par boîte	réalise la tâche en verbalisant ce qu'il faut faire puis demande à Élève 2 de reproduire à l'identique cette technique. L'aide à pointer en récitant la comptine.	Légèrement en retrait
24'54 à 29'53	8 boîtes	Réalise la tâche seule dans son cahier	Regarde un livre sur une autre table	Propose le même type de tâche, sans matériel, avec des étiquettes dans le cahier	Assise juste derrière Élève 1
29'54 à 32'34	3 boîtes	Se balade dans la classe	Dénombre, réalise la collection de 3 voitures	Propose le même type de tâche, sans matériel, avec des étiquettes dans le cahier ; l'aide à pointer en récitant la comptine	En retrait

Ce tableau permet de mettre en évidence : le morcellement du temps, la reconnaissance d'une unique technique ainsi qu'une fonction d'aide à l'étude extrêmement limité du SDA.

Le nombre de phases (9) pour une séance d'un peu plus de trente minutes effectives relève tout d'abord d'un choix, celui de l'individualisation. PEspé1 formule ce choix de la sorte lors de l'entretien ante « il n'y aura pas forcément d'interactions ce n'est pas grave [...] une fois que [élève 1] a terminé ça je fais exactement la même chose avec l'autre enfant ». Ce choix conduit tout d'abord à un temps d'engagement dans la situation limité à respectivement 20'30 pour Élève1 et 11'54 pour Élève2. Ce temps différent alloué nous questionne également dans le sens où l'élève qui bénéficie du temps le plus important est aussi celle qui synchronise son temps personnel avec les tâches proposées.

Tout au long de la séance PEspé1 attend des élèves qu'ils utilisent la technique qu'elle nous présente dans l'entretien *ante* : « je vais montrer ce qu'il faut faire, je prends le chiffre correspondant je le mets dans la boîte, je prends les voitures, et après je mets le tout dans la boîte ». Concrètement l'enseignante attend des élèves qu'ils utilisent cette technique en quatre étapes soit en les verbalisant avant qu'ils ne s'engagent dans l'action, soit en réalisant elle-même ces quatre étapes puis en demandant à l'élève ce qu'elle vient de faire avec la même quantité de boîtes correspondant aux garages. Les élèves n'ont donc pas la possibilité d'utiliser la correspondance terme à terme dans cette première phase de la situation SVG. L'extrait de verbatim suivant permet d'illustrer cela :

- PEspé1 (s'adresse à Élève1) : regarde je compte un, deux, trois, quatre. Je vais prendre le chiffre quatre, je le mets dans la boîte et je vais prendre quatre voitures.
- Élève 2 : [PEspé1] je veux prendre la voiture.
- PEspé1 (s'adresse à Élève2) : tu peux.
- PEspé1 (s'adresse à Élève1) : je vais mettre maintenant les voitures. Une dans cette boîte, une dans celle-ci, une dans celle-là et une dans celle-ci. Regarde j'ai mis une voiture dans chaque boîte. Regarde il y a quatre voitures dans une, deux, trois, quatre boîtes. À toi.

Au-delà de la forte guidance illustrée par cet extrait, l'intervention d'Élève2 montre qu'il s'intéresse à ce que fait sa camarade, qu'il formule une demande relative au matériel utilisé, mais que l'enseignante n'utilise pas cette demande pour favoriser les interactions entre les élèves ou encore contextualiser l'action à la situation SVG.

Le dernier élément qui ressort de cette première séance est la fonction d'aide du SDA qui apparaît comme très limitée, voire inexistante. PEspé2 n'intervient jamais oralement. Son action se limite à une présence à proximité de l'élève (juste derrière Élève1 et légèrement en retrait avec Élève2). Nous pouvons observer quelques gestes de pointage de sa part, mais ces gestes se superposent généralement à ceux de sa collègue. La figure 2 illustre cela.



Figure 2 – Similarité des gestes entre PEspé1 et PEspé2

Dans l'entretien *ante*, PEspé2 explique qu'elle est présente pour « gérer le comportement, préparer le matériel, donner les renforçateurs ». En effet, nos observations laissent à penser que la seconde enseignante est surtout positionnée pour répondre à d'éventuels débordements. Cependant, cette situation n'apparaît pas dans la séance, hormis lorsque dans la phase 6, Élève2 bouscule le matériel, mais dans ce cas c'est PEspé1 qui rétablit la situation pour le faire revenir dans le jeu.

3. Analyse d'un épisode de la séance 8

Dans cette séance, l'éloignement entre les voitures disponibles et la collection de boîtes représentant les garages est effectué. Les élèves vont donc utiliser le nombre pour mémoriser la quantité à aller chercher, car la correspondance terme à terme ne peut plus être utilisée dans cette seconde phase de la situation. Avant de décrire un épisode qui retient notre attention, précisons que la structure et les éléments mis en évidence dans la séance 6 se retrouvent à nouveau dans cette séance.

Nous présentons maintenant brièvement un épisode dans lequel Élève1 va devoir réaliser une collection de 12 voitures. La figure 3 illustre les différentes étapes que lui demande de respecter l'enseignante.



Figure 3 – Réalisation de la tâche en 4 étapes

On observe tout d'abord l'élève dénombrer (1) seules les 12 boîtes sans forcément les pointer avec le doigt. Ensuite, les enseignantes lui demandent de choisir l'étiquette nombre (2) avant d'aller réaliser la collection équipotente en se déplaçant (3). Lorsque la collection est réalisée, elle revient à sa place associer une voiture par boîte pour vérifier (4). La figure 3 met en évidence la grande proximité des enseignantes avec l'élève. À plusieurs reprises, l'élève est physiquement guidée et parfois même ses mouvements sont interrompus (par exemple lorsqu'elle ajoute la douzième voiture à l'étape 3, il lui est signifié de s'arrêter pour retourner à sa place vérifier). L'association voitures et boîtes à l'étape 4 se fait également de façon très guidée. La deuxième observation est directement liée au choix du matériel.

Nous observons tout d'abord que le choix des boîtes limite les nombres pouvant être travaillés et rend l'espace de travail bien rempli (voir instable, certaines boîtes tombent facilement). Les voitures en bois vont également constituer un obstacle dans le sens où lors de cette séance, Élève1 se montre particulièrement intéressé par les faire tourner sur l'axe des roues avant, ce qui l'éloigne à plusieurs reprises de la situation.

V. CONCLUSION

Dans ce texte nous interrogeons les effets de la mise en œuvre de coenseignement dans une classe à sous-effectif sur une situation reconnue comme robuste (voitures et garages). Nous allons revenir brièvement sur trois aspects : la situation, les effets liés au sous-effectif et la mise en œuvre du coenseignement.

La mise en œuvre dans cette classe de situation voitures/garages est fidèle aux objectifs initiaux qui sont triples (pouvoir dénombrer une collection, pouvoir en rendre compte et réaliser une collection équipotente). Cependant, l'enseignante choisit une position haute particulièrement guidante qui permet difficilement aux élèves de s'engager seuls dans la situation. Lors de la première phase (collections spatialement proches), le fait d'imposer aux élèves d'identifier l'étiquette nombre après le dénombrement ne permet pas de mobiliser la technique de correspondance terme à terme qui est possible dans cette phase de façon de façon à s'approprier le jeu. Cette forte guidance, associée au fait d'imposer une technique, ne nous permet pas de vérifier si les élèves ont pu s'approprier les règles du jeu. Lors de la séance 8, nous avons pu illustrer que Élève1 a très peu de liberté et qu'elle est guidée physiquement pour « réussir » les différentes étapes attendues. Ainsi, le milieu initialement pensé pour offrir une rétroaction à l'élève n'est pas utilisé, car l'enseignante valide en amont la collection constituée. Le fait de placer les voitures dans les boîtes perd donc une partie de sa fonction initiale de vérification.

Cette classe à sous-effectif correspond à une configuration que nous pouvons rencontrer dans de nombreux établissements spécialisés. Nous observons ici que le choix des enseignantes, malgré le petit nombre d'élèves, est de travailler individuellement à tour de rôle ce qui génère des difficultés spécifiques à ce contexte : l'absence d'interactions entre les élèves et un temps extrêmement réduit avec les objets mathématiques dans un emploi du temps déjà limité.

Si la séquence a été préparée conjointement, la mise en œuvre de ce que nous appelons a priori « coenseignement » met en évidence que la seconde enseignante spécialisée n'intervient pas dans la situation proposée sur les objets de savoir. Le système auxiliaire ne prend donc pas sa fonction d'aide à l'étude. Les actions et les discours de PEspé2 laissent à penser que sa présente résulte plus d'un rôle préventif si jamais certains comportements d'élèves ne répondraient pas à la norme attendue. Est-ce vraiment là une fonction attendue de la part d'un enseignant spécialisé ?

Pour conclure, il nous semble que ce travail permet de documenter des pratiques d'enseignement des mathématiques en IME qui privilégient une relation d'enseignement individuelle. Le recours à une situation robuste ne suffit pas à lever les obstacles induits par ce contexte spécifique.

RÉFÉRENCES

Assude, T., Perez, J.-M., Tambone, J. et Vérillon, A. (2011). Apprentissage du nombre et élèves à besoins éducatifs particuliers. *Éducation et didactique*, 5(2), 65-84.

- Assude, T., Tambone, J. et Vérillon, A. (2012). Situations d'enseignement spécifiques pour des élèves particuliers ? Problème et débat. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Actes du colloque EMF2012 « Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle », 3-7 février 2012, Université de Genève, Suisse* (p. 1058-1066).
<https://emf.unige.ch/application/files/6714/5320/9196/EMF2012GT8ASSUDE.pdf>
- Chevallard, Y. (1995). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (dir.), *Actes de la VIII^e école d'été de didactique des mathématiques, 22-31 août 1995, Saint-Sauve D'Auvergne* (p. 83-122). ARDM.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Dupré, F. (2022). Articulations entre deux systèmes didactiques : une étude de cas autour de l'objet fraction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 42(1), 103-148.
- Janin, M., Moreau, G. et Toullec-Théry, M. (2021). Le coenseignement dans une classe hétérogène promeut-il une différenciation pédagogique ? *Éducation et socialisation. Les Cahiers du CERFEE*, (60).
<https://doi.org/10.4000/edso.14674>
- Maréchal, C. (2010). *Effets des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé. Une analyse didactique à partir du cas de l'introduction à l'addition* [Thèse de doctorat, Université de Genève]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-00609830>

SITUATIONS MATHÉMATIQUES EN COENSEIGNEMENT ENSEIGNANTE-ORTHOPÉDAGOGUE AU PREMIER CYCLE DU PRIMAIRE

| HOULE* VIRGINIE ET GHAILANE** OUMAMA

Résumé | Les enseignantes et les orthopédagogues se sentent peu outillées pour enseigner conjointement dans une classe de façon à favoriser l'apprentissage de l'ensemble des élèves. Nous avons mené une étude dans laquelle diverses situations mathématiques ont été expérimentées en coenseignement enseignante-orthopédagogue dans des classes du premier cycle du primaire. Notre recherche permet de dégager certaines conditions didactiques qui apparaissent favorables au coenseignement en mathématiques.

Mots-clés : situations mathématiques, coenseignement, orthopédagogie, ingénierie didactique, hétérogénéité des connaissances, différenciation pédagogique.

Abstract | Teachers and orthopedagogues feel ill-equipped to co-teach a class in a way that promotes learning for all students. We conducted a study in which various mathematical situations were experimented with teacher-orthopedagogue co-teaching in lower primary school classes. Our research has identified a number of didactic conditions that appear to be conducive to co-teaching in mathematics.

Keywords: Mathematical situations, co-teaching, orthopedagogy, didactical engineering, heterogeneity of knowledge, educational differentiation.

I. INTRODUCTION

Dans le contexte de l'éducation inclusive, le coenseignement est souvent considéré comme un modèle pertinent pour répondre aux besoins diversifiés des élèves d'une classe. Cependant, peu d'études s'intéressent au coenseignement en mathématiques d'un point de vue didactique. Nous avons ainsi choisi d'explorer, sous un angle didactique, la forme que peut prendre le coenseignement enseignante-orthopédagogue pour favoriser l'apprentissage en mathématiques de l'ensemble des élèves d'une classe, malgré l'hétérogénéité de leurs connaissances. Dans ce texte, après avoir exposé le contexte dans lequel s'inscrit notre recherche, nous nous intéressons aux travaux portant sur le coenseignement. La question, la méthodologie et les résultats de notre recherche sont ensuite dévoilés.

II. CONTEXTE DE LA RECHERCHE

Dans le cadre de notre recherche, qui a été menée au Québec, nous nous sommes intéressées au coenseignement en mathématiques exercé par des dyades enseignante-orthopédagogue. Rappelons que les orthopédagogues ont pour rôle d'aider les élèves en difficulté scolaire. Dans les écoles québécoises, elles sont généralement assignées au dénombrement flottant (Gaudreau, 2010), qui consiste en une intervention réalisée dans un local à l'extérieur de la classe auprès d'un nombre restreint d'élèves. Ce modèle vise à faciliter la différenciation pédagogique et ainsi, à répondre aux besoins spécifiques de chaque élève. La nature de l'aide à apporter fait cependant l'objet de débats et varie considérablement d'une école à l'autre (Prud'homme, 2018). Depuis la création même de l'orthopédagogie, il y a effectivement une tension entre une perspective didactique, fondée sur la mise en œuvre des conditions d'enseignement-apprentissage qui tiennent compte de la spécificité des savoirs en jeu, et une

* Université du Québec à Montréal – Canada – houle.virginie@uqam.ca

** Université du Québec à Montréal – Canada – ghailane.oumama@uqam.ca

perspective cognitive, fondée sur la rééducation et/ou la compensation des processus cognitifs déficitaires chez l'élève en difficulté d'apprentissage (Houle, 2016).

Les critiques concernant le processus d'étiquetage des élèves ont conduit le Québec, comme la plupart des pays francophones d'Europe, à s'engager dans une perspective d'éducation inclusive, qui a pour objectif l'éducation de tous les élèves, peu importe leurs caractéristiques (Giroux, 2023). Il convient alors non pas de penser aux adaptations selon les besoins individuels de chaque élève, mais plutôt de penser aux adaptations pour répondre à des besoins communs (CSÉ, 2017). L'éducation inclusive nécessite ainsi de rompre avec une approche individuelle et d'adopter une approche globale qui permet de s'adapter à la diversité des élèves. Les défis que pose cette approche incitent à repenser les façons d'organiser les services éducatifs. Le coenseignement enseignante-orthopédagogue apparaît dès lors comme un modèle d'organisation pertinent pour répondre aux divers besoins d'apprentissage des élèves (Dubé et al., 2022). Pour que l'enseignement des mathématiques soit inclusif, il faut donc aménager les conditions permettant à l'ensemble des élèves de la classe de participer pleinement aux situations mathématiques proposées. Cela représente un défi de taille en raison, notamment, de l'hétérogénéité des connaissances des élèves.

C'est dans ce contexte que des conseillères pédagogiques (CPs) ont communiqué avec nous (les auteures de ce texte) pour réfléchir, avec des chercheuses en didactique des mathématiques, au coenseignement enseignante-orthopédagogue. Notons que nous avons travaillé avec ces CPs auparavant dans une recherche s'intéressant à l'étude d'une séquence d'enseignement sur la multiplication réalisée en dénombrement flottant. Considérant les limites de ce modèle d'intervention, telles que les difficultés à réinvestir en classe les apprentissages réalisés en dénombrement flottant et la stigmatisation de certains élèves, ces CPs ont manifesté leur intérêt pour le coenseignement dans les classes du premier cycle du primaire (élèves de 6 à 8 ans), souhaitant ainsi éviter d'étiqueter précocement des élèves comme étant en difficulté. Elles ressentent toutefois le besoin d'être accompagnées par des chercheuses pour soutenir les enseignantes et les orthopédagogues. Nous avons donc choisi de mener une recherche, avec des professionnelles du milieu scolaire (huit CPs, huit enseignantes du premier cycle et quatre orthopédagogues), afin d'explorer la forme que peut prendre le coenseignement enseignante-orthopédagogue en mathématiques pour favoriser l'apprentissage de tous les élèves dans des classes de premier cycle du primaire.

III. LE COENSEIGNEMENT

Le coenseignement, selon Friend (2008), se définit comme un partenariat entre deux enseignantes dans le but d'enseigner conjointement, en classe régulière, à un groupe hétérogène d'élèves. Les enseignantes partagent ainsi les responsabilités d'un groupe d'élèves pour atteindre des objectifs donnés, et ce, dans un même temps et un même espace (Friend et Cook, 2021). Le coenseignement peut être fait par deux enseignantes du régulier ou par une enseignante du régulier et une enseignante spécialisée telle qu'une orthopédagogue. Bien que des recherches supplémentaires seraient nécessaires pour montrer les bienfaits du coenseignement sur l'apprentissage des élèves, divers travaux montrent que tant les enseignantes que les élèves ont une perception positive du coenseignement. Les enseignantes considèrent notamment que le coenseignement permet d'accorder davantage d'attention aux élèves, ce qui concorde avec la perception des élèves, qui estiment recevoir plus d'aide (Benoit et Angelucci, 2011). De plus, le coenseignement, selon les enseignantes, permettrait une meilleure identification des besoins éducatifs des élèves et faciliterait par le fait même la différenciation pédagogique (Janin et Couvert, 2020). Il favoriserait ainsi l'apprentissage de tous les élèves, incluant ceux qui ont des besoins particuliers, et ce, dans un cadre peu stigmatisant (Tremblay, 2015).

Friend et Cook (2021) définissent six configurations de coenseignement, c'est-à-dire six façons dont les responsabilités peuvent être partagées entre les deux enseignantes : 1) Une enseigne/l'autre observe ; 2) Une enseigne/l'autre soutient ; 3) Enseignement en ateliers ; 4) Enseignement alternatif ; 5) Enseignement parallèle ; 6) Enseignement partagé. Selon Scruggs et ses collaborateurs (2007), dans le cas des dyades enseignante-orthopédagogue, la deuxième configuration serait la plus répandue, c'est-à-dire que l'enseignante aurait généralement comme fonction d'enseigner au groupe et l'orthopédagogue aurait en quelque sorte un rôle subordonné de soutien aux élèves. Tremblay (2015) note par ailleurs que le coenseignement entre une enseignante du régulier et une enseignante spécialisée favoriserait le développement professionnel à la fois des enseignantes du régulier, qui perfectionneraient leurs connaissances au regard de l'adaptation de l'enseignement aux besoins des élèves, et des enseignantes spécialisées, qui amélioreraient pour leur part leurs connaissances au regard des exigences d'une classe ordinaire.

L'étude de Janin et Couvert (2020) met quant à elle en évidence les difficultés rapportées par les enseignantes et les orthopédagogues en ce qui a trait à la préparation des séances. Le coenseignement augmenterait le temps nécessaire pour la planification et il serait difficile de trouver du temps commun pour préparer les séances. Ces difficultés sont préoccupantes considérant l'importance de la planification pour assurer la qualité du coenseignement (Dubé et al., 2022 ; Magiera et al., 2006). S'il apparaît fondamental de dégager du temps aux enseignantes et aux orthopédagogues pour préparer les séances, il convient également de s'interroger sur le contenu des temps de planification. Côté et Gauthier (2021) ont mené une étude portant sur le coenseignement enseignante-orthopédagogue en mathématiques dans deux classes de 4^e année (élèves de 9-10 ans) et une classe de 5^e année (élèves de 10-11 ans). La coplanification a été centrée sur l'utilisation d'une démarche de résolution de problèmes au détriment d'une analyse didactique des problèmes mathématiques proposés. Les interventions à mettre en place pour relancer les élèves en cas de difficulté sur les contenus n'ont donc pas été planifiées et coordonnées, ce qui a provoqué des malentendus. Cette étude montre ainsi l'importance de ne pas évacuer les aspects conceptuels en jeu dans les problèmes lors de la préparation des séances de coenseignement.

IV. QUESTION DE RECHERCHE ET MÉTHODOLOGIE

Notre recherche s'intéresse au coenseignement enseignante-orthopédagogue en mathématiques en considérant les caractéristiques des situations proposées, la façon dont elles sont pilotées, les stratégies et connaissances mathématiques engagées par les élèves et les contraintes qui pèsent sur l'enseignement. La question au cœur de notre étude est plus particulièrement la suivante : sur quelles conditions didactiques peut reposer un coenseignement enseignante-orthopédagogue en mathématiques pour favoriser l'apprentissage de l'ensemble des élèves d'une classe ?

Pour dégager des conditions didactiques favorables au coenseignement enseignante-orthopédagogue en mathématiques tout en prenant en compte l'adaptabilité de ces conditions à la réalité des enseignantes et des orthopédagogues, nous nous inspirons de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et de la méthodologie qui lui est associée, soit l'ingénierie didactique (Artigue, 1988 ; Perrin-Glorian et Bellemain, 2019). Nous avons ainsi retenu des situations mathématiques qui apparaissent intéressantes pour un coenseignement enseignante-orthopédagogue au premier cycle du primaire (élèves de 6 à 8 ans), et ces situations, qui s'étalent chacune sur deux ou trois séances d'environ une heure, ont été expérimentées par différentes dyades enseignante-orthopédagogue. Quatre équipes de travail ont été formées, chacune étant composée d'une orthopédagogue, d'une à trois enseignantes du premier cycle du primaire travaillant à la même école

que l'orthopédagogue, et de deux conseillères pédagogiques (CPs). Les séances de coenseignement ont été enregistrées par les CPs afin de permettre leur analyse.

Le projet, qui s'est étalé sur deux années, a débuté par une journée de formation aux participantes (orthopédagogues, enseignantes et CPs) sur les contenus mathématiques sensibles au premier cycle du primaire. Par la suite, il y a eu trois périodes d'expérimentation (à l'hiver 2023, à l'automne 2023 et à l'hiver 2024). Avant chacune de celles-ci, une journée regroupant les participantes et les deux chercheuses a été organisée. Lors de ces journées, la présentation et l'analyse de situations d'enseignement-apprentissage ont été réalisées et un moment a été consacré à la planification des séances de coenseignement. Chaque période d'expérimentation a de plus été suivie d'une journée de retour. Durant ces journées, les équipes de travail se sont d'abord exprimées librement sur l'expérience vécue et des photos des séances sélectionnées par les chercheuses ont ensuite été présentées afin de favoriser les discussions. Notons qu'au début du projet, la présentation de situations par les chercheuses visait à mettre en évidence certaines caractéristiques des situations qui apparaissent favorables à l'apprentissage des mathématiques et à rappeler/monttrer l'importance de procéder à une analyse a priori qui prend en compte l'articulation entre les caractéristiques des situations et les possibilités d'action des élèves. Nous souhaitons toutefois laisser les participantes libres d'expérimenter les situations de leur choix. Or, elles ont préféré mettre en place des situations présentées par les chercheuses. Elles ont d'ailleurs manifesté le désir que les situations soient présentées de façon détaillée, pour les aider dans la planification et le pilotage du coenseignement. Ainsi, dans la suite du projet, les chercheuses ont présenté des situations de façon beaucoup plus précise, notamment en suggérant pour chacune une progression possible.

V. RÉSULTATS ET DISCUSSION

La présentation des résultats se divise en trois grandes parties : nous abordons d'abord ce qui a orienté le choix des situations mathématiques ; nous présentons ensuite certains éléments qui se dégagent de l'analyse des interactions didactiques en séance ; et nous portons finalement notre attention sur le travail collaboratif indispensable aux pratiques de coenseignement et à son incidence sur le développement professionnel des enseignantes et des orthopédagogues.

1. *Le choix des situations pour le coenseignement*

Les échanges que nous avons eus avec les participantes nous ont conduites à réfléchir aux critères permettant de cibler les contenus mathématiques visés par les situations pilotées en coenseignement. Des participantes ont suggéré de profiter de la présence de l'orthopédagogue au sein de la classe pour travailler autour de contenus mathématiques complexes pour les élèves, tels que les fractions. Or, le fait que des élèves du premier cycle du primaire rencontrent des difficultés dans l'apprentissage des fractions n'apparaît pas problématique. Nous avons donc convenu qu'il importait non seulement de sélectionner des contenus sensibles, mais aussi des contenus au cœur de l'enseignement-apprentissage des mathématiques au premier cycle du primaire. Nous avons ainsi ciblé la suite orale et écrite des nombres, les structures additives (addition et soustraction) et la numération de position décimale. Ces choix s'expliquent par le fait que les apprentissages en mathématiques dans les cycles suivants reposent sur une bonne compréhension de ceux-ci. Enfin, pour cibler les contenus travaillés, il convient également de prendre en compte ce qui se fait en classe au moment du coenseignement. Le coenseignement peut par exemple être mis en œuvre pour introduire un contenu qui sera ensuite travaillé en classe ou encore pour visiter autrement un contenu mathématique en cours d'enseignement dans la classe. Notons que pour arrimer les situations proposées aux activités de la classe, en plus de prendre en compte les contenus, des participantes ont apporté des modifications à l'habillage des

situations. Par exemple, dans une des situations proposées, soit le jeu des étoiles (Giroux et Ste-Marie, 2008), une équipe de travail a modifié les étoiles bleues, rouges et jaunes sur les planches de jeu par des chevaliers, des princesses et des armures pour que la situation concorde avec le thème de la classe (les chevaliers), ce qui n'a eu aucun impact sur les possibilités d'action des élèves.

Nous avons également réfléchi aux caractéristiques que peuvent posséder les situations mathématiques pour favoriser des apprentissages signifiants et durables. Comme le montrent divers travaux en didactique des mathématiques, notamment ceux de Brousseau (1998), il convient de proposer des situations qui rendent utiles les savoirs mathématiques visés, qui suscitent la prise de décision des élèves et qui favorisent des interactions entre eux à propos d'idées mathématiques. Les situations proposées par les chercheuses ont été choisies sur la base de ces conditions, qui apparaissent tout aussi valides pour le coenseignement que pour l'enseignement. À titre d'exemple, l'une des situations proposées aux participantes pour les classes de 1^{re} année (élèves de 6-7 ans), qui s'appuie sur un texte de Buffin (2007), vise un travail autour de la suite écrite des nombres. Les élèves sont placés en équipes et chacune d'elles dispose de 130 étiquettes avec les nombres de 0 à 129. La situation se divise en trois grandes phases : dans la première phase, les élèves doivent classer les nombres en s'appuyant sur les critères de leur choix ; dans la deuxième phase, ils doivent ordonner les nombres ; et dans la troisième phase, un tableau de 10 x 13 est remis à chaque équipe et les élèves doivent ranger les nombres en ordre dans le tableau, visant ainsi à ce qu'ils dégagent les régularités de la suite numérique. Lors de chacune des phases, les élèves sont libres d'utiliser les stratégies de leur choix et un retour est ensuite effectué, en grand groupe, afin de permettre aux élèves d'échanger sur les stratégies mobilisées, avec le soutien de l'enseignante et de l'orthopédagogue.

Afin de répondre à l'hétérogénéité des connaissances des élèves au sein de la classe, nous avons par ailleurs choisi des situations qui ouvrent sur une diversité de stratégies pour que chaque élève puisse s'engager à partir de ses connaissances (Mary et Squalli, 2021) et nous avons proposé des situations qui permettent un jeu sur les valeurs des variables didactiques selon les stratégies mobilisées par les élèves, favorisant ainsi la différenciation pédagogique. Une de nos préoccupations était bien sûr également de retenir des situations pouvant bénéficier de la présence de l'enseignante et de l'orthopédagogue au sein de la classe. Les situations qui misent sur un travail en équipe d'élèves apparaissent intéressantes parce qu'en plus de favoriser le partage/débat d'idées, elles permettent à l'orthopédagogue et à l'enseignante de circuler entre les différentes équipes, de relancer les élèves au besoin et, aussi, de procéder à des institutionnalisations locales, en rendant explicites les modèles implicites engagés par les élèves dans l'action (Douady, 1984). Des moments de retour sont néanmoins nécessaires pour mettre en évidence, collectivement, les éléments mathématiques à retenir, participant ainsi à la construction de la mémoire didactique de la classe (Brousseau et Centeno, 1991).

Les enseignantes et les orthopédoques relèvent par ailleurs l'intérêt du coenseignement pour la mise en place de situations exigeant une gestion importante du matériel. Le coenseignement permet effectivement de partager les responsabilités entre l'enseignante et l'orthopédagogue relatives à la préparation du matériel et à sa gestion au moment du pilotage. Insistons sur le fait que l'idée est avant tout de présenter des situations qui rendent le savoir visé utile et favorisent une activité mathématique riche chez les élèves, mais certaines situations robustes, en particulier au premier cycle du primaire, nécessitent une gestion importante du matériel, qui peut être ardue à assumer par une seule enseignante.

2. *Les interactions didactiques au cours des situations mathématiques*

L'analyse des séances de coenseignement montre que les situations proposées favorisent la prise de décision des élèves et les amènent ainsi à tester leurs propres stratégies. Dans les situations

expérimentées, les élèves plus faibles et les élèves plus forts au sein des classes s'engagent généralement dans la recherche de solutions, ce qui favorise l'émergence d'une diversité de stratégies. Par exemple, lors de la première phase de la situation de Buffin (2007), qui consiste à classer les nombres de 0 à 129 écrits sur des étiquettes selon les critères de leur choix, des élèves regroupent les nombres qui ont un chiffre en commun sans prendre en compte la position de ce chiffre dans le nombre, des élèves regroupent les nombres qui commencent par le même chiffre, des élèves regroupent les nombres selon leur nombre de dizaines et d'autres élèves regroupent les nombres selon le nombre de chiffres qu'ils comportent. Le travail d'équipe et les moments de retour permettent aux élèves de formuler leurs stratégies et de les comparer avec celles de leurs camarades.

Les enseignantes et les orthopédagogues ont de plus joué sur les valeurs des variables didactiques pour que les situations proposées soient adaptées aux connaissances mathématiques des élèves. Par exemple, dans le jeu des étoiles, elles remettent des planches de jeu différentes (avec ou sans nombres manquants, nombres de 1 à 80 ou de 51 à 130) à chacune des équipes, dans un souci de différenciation pédagogique. Notre recherche, à l'instar de celles d'Assude et ses collaborateurs (2011) et de Houle et Bachand (2023), suggère qu'il est pertinent, pour proposer des défis intellectuels adaptés aux connaissances des élèves, de jouer sur les valeurs des variables didactiques de manière différente selon les connaissances engagées dans les équipes, tout en travaillant collectivement autour d'une même situation de référence. Ainsi, même si les élèves ne jouent pas avec la même planche de jeu, il est possible de faire un retour collectif au terme des séances en invitant les élèves à partager leurs stratégies pour favoriser une certaine homogénéisation des connaissances.

Toutefois, les élèves du premier cycle du primaire n'interagissent pas d'emblée entre eux. Par exemple, dans la première phase de la situation de Buffin (2007), bien que les élèves soient placés en équipe, plusieurs travaillent individuellement, c'est-à-dire qu'ils observent les étiquettes de nombres et les déplacent sur leur bureau sans nécessairement les regrouper selon des critères préétablis. Les enseignantes et les orthopédagogues, souhaitant favoriser les échanges entre les élèves, insistent généralement pour que ceux-ci expliquent leur stratégie à leurs camarades, ce qui ne provoque pas les effets souhaités. Tel que discuté avec les participantes, un temps de réflexion individuelle est parfois nécessaire avant que les élèves puissent formuler leurs idées et les confronter avec celles de leurs pairs. Il arrive par ailleurs que des élèves échangent entre eux et que l'enseignante ou l'orthopédagogue les interrompt en leur posant des questions pour les guider vers la stratégie attendue (ce type d'intervention est fréquent autant chez les enseignantes que chez les orthopédagogues). Or, lorsque les situations permettent aux élèves de mobiliser des stratégies par eux-mêmes, il n'apparaît pas nécessaire de poser des questions aux élèves, lesquelles peuvent d'ailleurs interrompre leur activité mathématique. Des échanges autour de ces questions ont eu lieu entre les chercheuses et les participantes lors des moments de retour sur les situations. Des enseignantes et des orthopédagogues ont mentionné leur malaise à simplement observer les élèves, sans intervenir, car elles ressentent le besoin de se rendre utiles, d'autant plus que le coenseignement vise à offrir un meilleur soutien aux élèves. Le coenseignement pourrait ainsi amplifier certains phénomènes didactiques jugés néfastes à l'apprentissage, tels que le surquestionnement des élèves, le morcellement des tâches et les effets Topaze. Cela étant dit, il arrive aussi que la présence de deux enseignantes au sein de la classe soit un atout précieux, en particulier lorsque l'appropriation d'une situation est difficile et que plusieurs élèves n'arrivent pas à mettre en place une stratégie de façon autonome.

Notons enfin que dans la plupart des dyades, les responsabilités entre l'enseignante et l'orthopédagogue sont partagées également. En effet, elles se relaient lors de la présentation des consignes et des retours en grand groupe, et elles circulent toutes les deux d'une équipe à l'autre durant

la phase de recherche. Certaines orthopédagogues portent toutefois une attention particulière aux équipes composées d'élèves plus faibles en mathématiques.

3. *La collaboration et le développement professionnel*

La collaboration entre l'enseignante et l'orthopédagogue débute avant les séances de coenseignement et se poursuit pendant et après celles-ci. Au début du projet, lors des moments de planification, les discussions entre les participantes portaient essentiellement sur des aspects techniques, tels que la répartition des tâches concernant la préparation du matériel. Le soutien des chercheuses a toutefois conduit les participantes à procéder à une fine analyse a priori des situations. Les journées organisées avant les séances de coenseignement ont ainsi permis aux enseignantes et aux orthopédagogues de partager une vision commune des objectifs d'apprentissage des situations et des interventions à privilégier pour faire évoluer les stratégies des élèves. Les enseignantes et les orthopédagogues collaborent également entre elles pendant les séances de coenseignement, en réagissant à ce qui se passe dans le feu de l'action. Elles discutent des conduites d'élèves qu'elles observent et des façons possibles de les relancer, ce qui les amène à faire des choix plus réfléchis. Et enfin, des journées de retour ont eu lieu au terme de chaque situation expérimentée. Ces journées ont permis aux participantes de partager leur expérience et d'analyser si la situation a eu les effets escomptés sur l'apprentissage des élèves. Des photos issues des vidéos ont été soigneusement choisies par les chercheuses et présentées aux participantes afin de revenir sur certaines conduites mathématiques d'élèves (anticipées et non anticipées). Cette façon de procéder a favorisé des échanges riches entre les participantes et les chercheuses autour des choix didactiques effectués avant et pendant le coenseignement.

Bien que les échanges entre les enseignantes et les orthopédagogues puissent certainement participer à leur développement professionnel, le soutien de spécialistes en didactique des mathématiques apparaît fondamental pour les amener à prendre en compte l'articulation entre l'enseignement et l'apprentissage ainsi que la spécificité des savoirs mathématiques en jeu. Il arrive que les participantes perdent de vue l'objectif d'apprentissage des situations. La compréhension des savoirs mathématiques visés par les situations a effectivement représenté un enjeu considérable dans le cadre du projet. Par exemple, le jeu des étoiles vise notamment à amener les élèves à rencontrer les limites des stratégies de dénombrement en addition et en soustraction afin qu'ils recourent à des stratégies de surcomptage. Les termes de l'addition ou de la soustraction n'ont alors plus à être représentés par des « objets » (doigts, traits sur une feuille, jetons...) ; l'élève peut additionner et soustraire en se déplaçant dans la suite numérique, ce qui exige de coordonner le rappel de la suite et les « pas » faits dans la suite (Fuson, 1991). Ainsi, pour faire $18 + 4$, l'élève peut compter 19 (1), 20 (2), 21 (3), 22 (4). L'analyse des séances montre que dans une dyade, lorsque les élèves mettent en place des stratégies de surcomptage pour calculer leur nombre total de points, l'enseignante et l'orthopédagogue les encouragent à revenir à des stratégies de dénombrement. L'importance accordée à la réussite semble ainsi se faire au détriment de la prise en compte des connaissances mathématiques engagées par les élèves. Cet exemple n'est pas anecdotique et montre l'importance de l'accompagnement de spécialistes en didactique des mathématiques.

Notons par ailleurs que de nombreux échanges entre les participantes et les chercheuses ont porté sur la façon de piloter les situations mathématiques pour laisser les élèves libres d'utiliser leurs propres stratégies tout en assurant l'avancée du savoir. La recherche d'un équilibre entre la dévolution et l'institutionnalisation représente un défi important, d'autant plus que les enseignantes et les orthopédagogues n'ont pas l'habitude de laisser autant d'espace aux élèves pour qu'ils se questionnent et mettent en place des stratégies de façon autonome. Les situations que nous avons proposées entrent

effectivement en rupture avec les pratiques courantes des enseignantes et des orthopédagogues dans la mesure où le modèle d'enseignement explicite, au Québec, est largement diffusé en tant que pratique efficace pour tous les domaines confondus, et est ainsi très répandu dans les milieux scolaires (Barallobres et Bergeron, 2020). Les enseignantes et les orthopédagogues nous ont indiqué que le coenseignement les encourageait à surmonter l'insécurité générée par la mise en œuvre d'un enseignement par la résolution de problèmes, qui se distingue considérablement de leur pratique habituelle.

VI. CONCLUSION

Enfin, considérant que le coenseignement enseignante-orthopédagogue peut être pertinent pour soutenir les élèves faibles en mathématiques dans un cadre peu stigmatisant, nous nous sommes intéressées à la forme que peut prendre le coenseignement pour favoriser l'apprentissage de tous les élèves. Nous avons notamment dégagé certains critères pour choisir les contenus mathématiques visés par le coenseignement, dont leur complexité pour les élèves et leur importance dans le cursus scolaire. Il apparaît de plus important d'établir le moment du coenseignement de sorte que les contenus travaillés soient liés à ceux investis dans la classe au même moment. Prenant appui sur les travaux en didactique des mathématiques, nous avons par ailleurs retenu des situations qui rendent utiles les savoirs mathématiques visés et qui conduisent les élèves à prendre des décisions par et pour eux-mêmes. Pour répondre à l'hétérogénéité des connaissances des élèves, nous avons plus particulièrement misé sur des situations qui ouvrent sur une diversité de stratégies et qui permettent un jeu sur les valeurs des variables didactiques. Le travail en équipes d'élèves apparaît, de plus, intéressant pour le coenseignement, car il permet à l'enseignante et à l'orthopédagogue de circuler au sein des équipes, et d'adapter leurs interventions en fonction des stratégies mobilisées par les élèves. Un intérêt non négligeable du coenseignement est par ailleurs qu'il encourage les enseignantes et les orthopédagogues à tester de nouvelles pratiques et à échanger sur celles-ci, favorisant ainsi leur développement professionnel. Un soutien par des spécialistes en didactique des mathématiques est toutefois souhaitable pour les accompagner dans le choix des situations, dans l'analyse a priori de celles-ci et dans l'analyse des interactions didactiques qui se tissent en séance.

Notons, en terminant, que notre recherche nous a conduites à étudier le potentiel d'un coenseignement partagé également entre l'enseignante et l'orthopédagogue. Dans des travaux futurs, il serait pertinent d'explorer, sous un angle didactique, des configurations de coenseignement qui prévoient des rôles différents pour l'enseignante et l'orthopédagogue. De plus, bien que nous ayons porté une attention à l'articulation entre le coenseignement et l'enseignement, comme aucun élève de premier cycle n'était suivi en orthopédagogie pour ses difficultés en mathématiques, nous n'avons pas pris en compte l'articulation entre le coenseignement et le dénombrement flottant. Le coenseignement enseignante-orthopédagogue pourrait toutefois être une avenue intéressante à explorer pour lier le travail en dénombrement flottant avec les activités de la classe.

RÉFÉRENCES

- Artigue, M. (1988) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Assude, T., Perez, J. M., Tambone, J. et Vérillon, A. (2011) Apprentissage du nombre et élèves à besoins éducatifs particuliers. *Éducation et didactique*, 5(2), 68-84.

- Barallobres, G. et Bergeron, L. (2020). Pratiques efficaces d'enseignement des mathématiques : une analyse du point de vue de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 40(1), 97-134.
- Benoit, V. et Angelucci, V. (2011). Réflexions autour du concept de coenseignement en contexte inclusif. *Éducation et francophonie*, 39(2), 105-121.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.
- Brousseau, G. et Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2-3), 14-26.
- Buffin, D. (2007). *Construire le tableau des 100 premiers nombres... et plus*.
<http://admin.segec.be/documents/7778.pdf>. Consulté le 7 janvier 2025.
- Conseil supérieur de l'éducation [CSE]. (2017). *Pour une école riche de tous ses élèves : s'adapter à la diversité des élèves, de la maternelle à la 5^e année du secondaire*. Gouvernement du Québec.
- Côté, C. et Gauthier, D. (2021). La collaboration enseignant-orthopédagogue dans la réalisation conjointe de situations d'enseignement-apprentissage portant sur la résolution de problèmes en classe. Dans P. Marchand, A. Adihou, J. Koudogbo, D. Gautier et C. Bisson (dir.), *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté. Quels enjeux et quelles perspectives ?* (p. 13-33). JFD.
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. [Thèse de doctorat, Université Paris 7].
- Dubé, F., Dufour, F., Cloutier, É. et Paviel, M.-J. (2021). Coenseignement orthopédagogue-enseignant : collaborer et coplanifier pour soutenir la différenciation pédagogique au primaire. *Éducation et socialisation*, (60). <http://journals.openedition.org/edso/14680>
- Friend, M. P. (2008). *Co-teach! A manual for creating and sustaining classroom partnerships in inclusive schools*. Marilyn Friend.
- Friend, M. P. et Cook, L. (2021). *Interactions: Collaboration skills for school professionals* (9^e éd.). Pearson.
- Fuson, K. (1991). Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. Dans J. Bideaud, C. Meljac et J. P. Fischer (dir.), *Les chemins du nombre* (p. 159-179). Presses universitaires de Lille.
- Gaudeau, L. (2010). Comment les commissions scolaires québécoises procèdent-elles pour que leurs écoles offrent des services aux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage ? Dans N. S. Trépanier et M. Paré (dir.), *Des modèles de service pour favoriser l'intégration scolaire* (p. 5-30). Presses de l'Université du Québec.
- Giroux, J. et Ste-Marie, A. (2008). *Cours ASS5830 : Orthopédagogie des mathématiques I (primaire)*. [Document inédit]. Université du Québec à Montréal.
- Giroux, J. (2023). Esquisse d'une problématique pour l'enseignement des mathématiques en contexte d'éducation inclusive et propositions didactiques. Dans *Actes du 49^e colloque COPIRELEM, Marseille* (p. 1-26).
- Houle, V. (2016). *Fondements didactiques pour une intervention orthopédagogique sur la notion de fraction* [Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal].
- Houle, V. et Bachand, S. (2023). Enseignement des mathématiques dans une classe d'élèves ayant une déficience intellectuelle légère : étude de deux situations adidactiques. *Didactique*, 4(1), 1-25.

- Janin, M. et Couvert, D (2020). Le coenseignement : bénéfices, limites et importance de la formation. *Éducation et francophonie*, 48(2), 200-219.
- Magiera, K., Lawrence-Brown, D., Bloomquist, K., Foster, C. Figueroa, A., Glatz, K., Heppeler, D. et Rodriguez, P. (2006). On the road more collaborative teaching: One school's experience. *Teaching Exceptional Children Plus*, 2(5), Article 6.
- Mary, C. et Squalli, H. (2021). Miser sur le potentiel mathématique des élèves en difficulté : fondements épistémologiques et didactiques. Dans P. Marchand, A. Adihou, J. Koudogbo, D. Gautier et C. Bisson (dir.), *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté. Quels enjeux et quelles perspectives ?* (p. 13-33). JFD.
- Perrin-Glorian, M.-J. et Bellemain, P. (2019). L'ingénierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maîtres. *Terias e metodos em didactica da matematica*, 9(1), 45-82.
- Prud'homme, J. (2018). *Instruire, corriger, guérir ? Les orthopédagogues, l'adaptation scolaire et les difficultés d'apprentissage au Québec, 1950-2017*. Presses de l'Université du Québec.
- Scruggs, T. E., Mastropieri, M. A. et McDuffie, K. A. (2007). Co-teaching in inclusive classrooms: A metasynthesis of qualitative research. *Exceptional Children*, 73(4), 392-416.
- Tremblay, P. (2015). Le coenseignement : condition suffisante de différenciation pédagogique ? *Formation et profession*, 23(3), 33-44.

LES POTENTIALITÉS ET DÉFIS D'UNE RECHERCHE PARTENARIALE VISANT À FAVORISER L'ACCESSIBILITÉ DIDACTIQUE DANS LE CONTEXTE D'UNE DÉMARCHE DE COENSEIGNEMENT DE TÂCHES VISANT LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÈBRIQUE

| BERGERON* LAURIE, DEVEAULT** AUDREY, BOILY*** ANDRÉE, BARALLOBRES****
GUSTAVO ET LAUZÉ***** STÉPHANIE

Résumé | Les milieux scolaires sont à la recherche de dispositifs collaboratifs permettant de promouvoir l'accessibilité didactique en mathématiques et de réduire les inégalités. L'objectif de cet article consiste à aborder le potentiel tout comme les défis d'une recherche partenariale visant à accompagner le personnel éducateur (conseiller pédagogique, enseignant de mathématiques et ressource ainsi qu'orthopédagogue) dans une démarche de coenseignement de tâches favorisant le développement de la pensée algébrique en contexte inclusif.

Mots-clés : recherche partenariale, accessibilité didactique, développement professionnel, inclusion scolaire, pensée algébrique

Abstract | Schools are looking for collaborative ways to promote didactical accessibility in mathematics and reduce inequalities. The aim of this paper is to explore the potential and challenges of a partnership-based research project designed to support educators (mathematics teachers, resource teachers and special education teachers) in co-teaching tasks that promote the development of algebraic thinking in an inclusive context.

Keywords: Partnership research, didactical accessibility, professional development, inclusive education, algebraic thinking

I. LE CONTEXTE D'UNE ÉCOLE À LA RECHERCHE DE MANIÈRES DE FAIRE DIFFÉRENTES POUR PRÉVENIR LES DIFFICULTÉS EN ALGÈBRE ET FAVORISER LA PARTICIPATION DE TOUS À LA VIE ÉDUCATIVE DE LA CLASSE

Depuis quelques années, bien que le ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur du Québec (MEES, 2017) aspire à un système plus inclusif, il importe de souligner que ces ambitions de reconnaître et de valoriser la diversité tout en favorisant la participation de toutes et tous à la vie éducative de la classe (Booth, 2000) sont fréquemment mises à mal en raison de la persistance de certains modèles hérités du mouvement de l'intégration scolaire (G. Bergeron et al., 2024). En effet, force est de constater que, bien que l'intégration d'élèves identifiés en difficulté soit mise de l'avant, des services ségrégués sont toujours en place (G. Bergeron et al., 2024). Ainsi, on repère, entre autres, que les services de soutien aux élèves sont bien souvent offerts à l'extérieur de la classe (orthopédagogie, enseignement ressource, etc.) éloignant l'élève d'une pleine participation à la vie

* Université du Québec à Montréal – Canada – bergeron.laurie.2@uqam.ca

** Université du Québec à Montréal – Canada – deveault.audrey.2@uqam.ca

*** Université du Québec à Montréal – Canada – boily.andree@courrier.uqam.ca

**** Université du Québec à Montréal – Canada – barallobres.gustavo@uqam.ca

***** Université du Québec à Montréal – Canada – lauze.stephanie@uqam.ca

éducative de son groupe, mais entraînant également diverses tensions (L. Bergeron, sous presse). Parmi les tensions, notons les dilemmes vécus par les intervenant·es de l'aide aux élèves lorsque celles-ci doivent trancher, face à un bassin d'élèves identifiés en difficulté qui ne cesse de s'agrandir ; à savoir qui bénéficiera de soutien spécialisé et qui ne pourra pas, faute d'effectifs (L. Bergeron, 2023). Cette organisation du travail entraîne également une nécessité de coordination des actions entre l'orthopédagogue et la personne enseignante ayant le potentiel d'alourdir le travail orthopédagogique. Pour les élèves, l'aide en aparté de la classe peut contribuer à les éloigner de l'avancée des savoirs de leur groupe et, voire, compliquer leur parcours d'apprenant : « en leur faisant vivre une histoire didactique parallèle qu'ils doivent ensuite tenter de conjuguer afin de pouvoir suivre le cours des apprentissages, une fois de retour dans leur classe » (L. Bergeron, sous presse, p. 3). Ces tensions sont d'ailleurs reconnues par le personnel éducatif de l'école ayant fait appel à nous pour développer un partenariat.

Au moment d'introduire le symbolisme algébrique, en secondaire trois, l'école partenaire de ce projet de recherche a constaté que les élèves vivent des difficultés marquées qui affectent les apprentissages en mathématiques et qui mettent en tension l'ensemble du service pédagogique. En effet, au secondaire, le passage à l'algèbre est identifié, à la fois par les chercheur·euses et le personnel éducatif, comme source de plusieurs obstacles pour l'enseignement-apprentissage (L. Bergeron, 2023 ; Kieran, 1992 ; Jeannotte, 2005). Pour l'équipe pédagogique de l'école en question, il s'agit d'une situation préoccupante, car le constat effectué est qu'une partie considérable des élèves ne possède pas les connaissances préalables nécessaires pour s'engager dans des raisonnements plus abstraits comme le requiert l'algèbre. Cette situation entraîne d'ailleurs une demande de services spécialisés hors classe disproportionnée, au regard de la population d'élèves, faisant resurgir plusieurs tensions et questionnements concernant le mode d'organisation de l'aide aux élèves identifiés en difficulté.

Nos rencontres avec le personnel éducatif de l'école nous ont permis de mettre en saillance qu'il y a un besoin de mettre en place une approche préventive des difficultés en algèbre et de proposer des tâches qui favorisent l'activité mathématique de tous les élèves. Nous y avons également constaté un désir de mettre sur pieds une approche collaborative entre le personnel éducatif (conseillères pédagogiques, enseignant·es de mathématiques, enseignant·es ressource et orthopédagogues) où l'expertise de chacun et chacune est mise à profit afin d'éviter d'avoir constamment recours à la mise en aparté de la classe.

Afin de répondre aux besoins de l'école et d'instiguer les changements souhaités, nous avons ciblé la première année du secondaire, afin d'accompagner le personnel éducatif dans une démarche de coenseignement de tâches visant le développement de la pensée algébrique. L'équipe reconnaît que cela implique un double changement de culture. D'une part, les tâches favorisant le développement de la pensée algébrique qui misent sur un travail arithmétique plus structuré qu'opérateur font peu partie de la culture scolaire (Jeannotte et Corriveau, 2020 ; Squalli, 2015). D'autre part, le coenseignement demande l'aménagement de moments de préparation conjointe afin de ne pas entraîner une co-intervention pouvant contribuer à exclure de la séance les élèves identifiés en difficulté (Dupré, 2020 ; Toullec-Théry et Moreau, 2020) ; des moments de libération, nécessaires pour cette approche, qui sont ardues à obtenir auprès de l'organisation scolaire. C'est dans ce contexte que nous avons déterminé, avec le personnel éducatif, qu'une démarche de recherche partenariale permettrait de mieux naviguer ces changements de culture.

Dans le cadre de cet article, notre objectif consiste à mettre en saillance le potentiel, tout comme les limites, de cette démarche de recherche partenariale au regard d'une meilleure accessibilité

didactique. Plus précisément, au cœur de notre démarche de recherche partenariale, nous souhaitons aborder la manière dont les différentes étapes préparatoires sont, en soi, porteuses pour favoriser l'accessibilité didactique du fait des réflexions engagées sur la robustesse des situations didactiques et les transformations au regard de l'épistémologie pratique des participant·es qu'elles engagent.

En premier lieu, nous aborderons certains des concepts du cadre de référence de l'accessibilité didactique qui ont guidé nos analyses dans le contexte de cet article. Ensuite, nous présentons la démarche de recherche partenariale menée en tant qu'objet d'analyse. Puis, à partir des différentes démarches de collaboration mises à contribution, nous mettons en saillance la manière dont ces dernières ont contribué à engager une réflexion sur l'accessibilité didactique chez le personnel éducateur partenaire. Nous concluons avec quelques pistes de réflexion, par rapport à l'amorce du développement de l'épistémologie pratique que ce travail de co-construction a engagé.

II. FAVORISER L'ACCESSIBILITÉ DIDACTIQUE : QUELQUES REPÈRES CONCEPTUELS

Notre recherche s'inscrit dans la théorie de l'action conjointe en didactique (TACD) (Sensevy, 2011). En cohérence avec les principes énoncés par la TACD (Sensevy, 2011), notre démarche ne vise pas seulement l'analyse de cette activité conjointe, mais surtout un travail d'ingénierie didactique coopératif où l'équipe de recherche et le personnel éducateur partenaire travaillent conjointement à la diffusion de savoirs (Morellato, 2019). Dans ce cadre, le dialogue d'ingénierie a notamment comme objet transactionnel de parvenir à une meilleure accessibilité aux savoirs pour l'ensemble des élèves. Nous nous appuyons sur la définition d'accessibilité didactique conceptualisée par Assude et ses collègues en tant : « [qu'] ensemble des conditions qui permettent aux élèves d'accéder à l'étude des savoirs : formes d'étude, situations d'enseignement et d'apprentissage, ressources, accompagnements, aides » (2014, p. 4).

Parmi les différentes conditions ayant le potentiel de favoriser l'accessibilité didactique, Dupré (2019) recense : la robustesse des situations ; le contrat différentiel ; les régulations favorisant à l'élève une place relativement aux savoirs et le développement des praxéologies professionnelles. Plus particulièrement, c'est aux concepts de robustesse des situations et de développement des praxéologies professionnelles que nous nous intéressons dans le cadre de cet article.

Puisque le projet partenarial concerne le coenseignement de tâches visant le développement de la pensée algébrique en contexte où nous souhaitons que l'ensemble des élèves puissent s'engager, la robustesse des situations est primordiale afin que tous puissent participer à l'avancée du savoir. La condition de robustesse des situations concerne l'importance des caractéristiques d'une situation qui permettent à l'ensemble des élèves d'entrer au sein de l'enjeu de savoir (Assude et al., 2015) et de développer un rapport de connaissance personnel envers celui-ci. Nous parlons, entre autres, de l'analyse épistémologique qui favorise l'identification claire des enjeux de savoirs, des variables didactiques de façon à moduler les tâches en fonction des stratégies et des connaissances des élèves et du milieu qui permet la validation (Assude et al., 2011 ; Dupuis-Brouillette, 2024). L'ensemble de ces éléments sont co-construits, dans le cadre de notre démarche partenariale.

Ensuite, puisqu'un des objectifs principaux du projet concerne l'accompagnement du personnel éducateur, la question du développement des praxéologies professionnelles est centrale. En effet, la démarche engagée, tout comme les tâches mises de l'avant, demande un certain changement de culture. Pour aborder ces mouvances et en cohérence avec la TACD (Sensevy, 2011), c'est au concept d'épistémologie pratique que nous ferons référence en tant que théorie d'action professionnelle de

chaque enseignant·e, en partie spontanée et implicite, qui émerge de l'action et l'oriente (Marlot et Toullec-Théry, 2014). Dans une démarche partenariale, tout comme pour les savoirs produits au regard de ces pratiques (Assude et al., 2018), la question des pratiques professionnelles est importante pour saisir les choix, les actions et les défis rencontrés par les participant·es. De plus, le concept d'épistémologie pratique nous permet de cerner les transformations chez les personnes participantes, tout comme de valoriser leur expertise professionnelle dans notre contexte de partage d'expertises.

Dans le cadre de cet article, nous considérons le travail partenarial autour du choix des tâches et de préparation au copilotage pour favoriser l'accessibilité didactique comme étant également le lieu de transformations professionnelles (pour le personnel éducateur tout comme les personnes chercheuses) à propos de notre objet transactionnel qui concerne, entre autres, la recherche d'une meilleure accessibilité didactique.

III. LA RECHERCHE PARTENARIALE COMME CADRE POUR SOUTENIR ET ACCOMPAGNER LE PERSONNEL ÉDUCATEUR DANS SA QUÊTE D'UNE MEILLEURE ACCESSIBILITÉ DIDACTIQUE EN MATHÉMATIQUES

Au cœur de notre démarche de recherche partenariale, nous visons un co-apprentissage et une co-construction des connaissances (Tremblay et Demers, 2018) entre les partenaires du milieu scolaire (les conseillères pédagogiques (CP), les enseignant·es de mathématiques et ressource ainsi que l'orthopédagogue) et de l'université (l'équipe de recherche). Pour ce faire, après quelques rencontres avec le personnel de l'école, notre premier partenariat s'est d'abord établi avec les CP avec qui nous avons co-élaboré les grandes lignes du projet avant de les remettre à négociation avec le personnel éducateur de l'école.

Nous développons particulièrement les étapes du projet dont il est question pour notre propos :

- 1- Le développement d'un répertoire de tâches pour favoriser le développement de la pensée algébrique en collaboration avec les CP et le personnel éducateur.

L'équipe de recherche¹ a d'abord proposé aux CP et au personnel éducateur² des tâches issues d'une recension des écrits sur le sujet et de nos propres travaux afin de discuter des notions mathématiques touchées, de leurs caractéristiques, de leur réalisation en classe par les élèves, de leur place relativement au programme de formation, des difficultés anticipées, de leur aisance relative au pilotage, etc. Les discussions concernant le choix des tâches et leurs caractéristiques se centrent également sur leur potentiel pour favoriser l'accessibilité aux savoirs. Ainsi, chaque personne participante y va de commentaires et de réflexions selon son expertise, son expérience, mais également ses conceptions de l'accessibilité didactique. Après trois rencontres avec l'ensemble des partenaires, l'équipe de recherche et les CP ont poursuivi un travail sur le répertoire, au regard des discussions et constats issus des rencontres de groupe, afin de choisir les tâches répondant aux préoccupations de tous et d'effectuer des modifications de variables didactiques lorsque cela était pertinent ainsi que de proposer une progression des savoirs. L'ensemble de ce travail a pris place sur une année et sur plus d'une dizaine de rencontres.

¹ L'équipe de recherche est composée de deux personnes chercheuses, deux assistantes de recherche qui sont étudiantes aux cycles supérieurs et d'une professionnelle de recherche.

² Au sein du projet, nous comptons trois personnes conseillères pédagogiques, trois personnes enseignantes et deux orthopédagogues. Nous bénéficions du soutien de la direction générale de l'école et de la direction adjointe.

- 2- La préparation avec les CP de formations-accompagnement sur le sujet de la pensée algébrique et du coenseignement.
- 3- La préparation avec les CP d'une journée de travail sur le répertoire de tâche afin d'en analyser les tâches et de planifier le coenseignement.

Étant dans une démarche où le partage d'expertises est mis de l'avant, il était important de remettre en question le répertoire de tâches auprès du personnel éducateur dans un contexte où nous pourrions effectuer un travail d'analyse didactique et de planification pour le copilotage. Nous avons ainsi préparé, avec les CP, une journée de travail collectif permettant à l'ensemble du personnel éducateur de s'approprier chacune des quinze tâches et de discuter à propos des manières possibles de les piloter, afin d'assurer la participation de l'ensemble des élèves. Les discussions instiguées lors de cette journée nous ont permis de partager au sujet des régulations et des possibilités d'action pour favoriser l'engagement de chaque élève envers les savoirs. De plus, la réflexion en amont a fait partie des éléments considérés comme importants afin de favoriser l'accessibilité didactique. Nous avons effectué plus de six rencontres pour préparer cette journée. Ce travail a été fait avec les CP, mais également, pour deux rencontres, avec l'orthopédagogue de l'école et certain·es enseignant·es de mathématiques et ressource qui voulaient participer aux réflexions didactiques et pédagogiques préalables.

- 4- La mise en place des journées de formation et de travail collectif.
- 5- La mise en place de travail de planification en dyade de coenseignement accompagné d'une CP et d'un·e membre de l'équipe de recherche.
- 6- Le copilotage filmé de quatre à six séances, entrecoupé de séances de planification et de retour accompagné d'une CP et d'un·e membre de l'équipe de recherche (classes de communication, douance et régulière).
- 7- La mise en place de deux groupes de discussion (à mi-parcours et à la fin des séances de copilotage) afin d'effectuer un retour critique constructif sur l'ensemble du projet.

Nous considérons que l'ensemble des étapes, pas seulement l'observation du copilotage, est producteur de connaissances au regard de notre objet. Dans ce cadre, c'est principalement à certaines étapes préparatoires que nous portons notre intérêt pour aborder des questions relatives à l'accessibilité didactique. Notre analyse des conditions de robustesse des situations ainsi que du développement de l'épistémologie pratique s'est effectuée à partir des récits, notes, artéfacts et enregistrements des rencontres partenariales (étapes 4 et 5) où l'ensemble des participant·es développe un répertoire de tâches robustes et planifie des manières de les piloter en classe.

IV. LES POTENTIALITÉS ET DÉFIS D'UNE DÉMARCHE DE RECHERCHE PARTENARIALE POUR L'ACCESSIBILITÉ DIDACTIQUE

Afin de favoriser l'accès de tous les élèves aux savoirs, dans le cadre d'une recherche s'intéressant à l'accompagnement du personnel éducateur, il nous a semblé pertinent d'appréhender notre démarche préparatoire pour ce projet partenarial comme étant productrice de savoirs en soi, par rapport aux conditions d'accessibilité didactique. En effet, au fil des rencontres visant à co-construire le répertoire de tâches et celles visant à préparer la journée de travail collectif pour analyser les tâches et planifier le copilotage, nous avons constaté que notre démarche favorisait non seulement un dialogue au regard de différentes conditions de l'accessibilité didactique, mais également certains changements de posture ou encore la remise en question de certaines façons habituelles de faire avec des élèves considérés en difficulté.

Nous avons fait le choix d'aborder deux moments qui nous semblent représentatifs afin de traiter tout autant la question des potentialités que celle des défis de notre démarche partenariale visant une plus grande accessibilité aux savoirs.

1. La préparation du répertoire de tâches : entre la robustesse didactique et l'expérience pratique

Parmi les tâches reconnues par les chercheur·euses comme ayant un potentiel pour favoriser le développement de la pensée algébrique, les situations de généralisation, qu'elles présentent des motifs (patterns) géométriques ou numériques, sont considérées hautement pertinentes (Kieran et al., 2016). Selon les CP, ce sont peut-être celles qui sont les moins mises en place, car elles sont plus éloignées de la culture scolaire et perçues comme ardues à piloter.

À la lueur de ces propos, l'équipe de recherche a proposé, dans une première mouture du répertoire, un nombre important de ce type de tâches (par exemple, la situation du carré bordé (Coulange et Grugeon, 2008 ou les séquences d'allumettes) dont plusieurs étaient présentées en contexte numérique et représentées par l'entremise d'un tableau identifiant le rang ainsi que la quantité d'objets assignés à ce rang. Au fil des énoncés, la visée de ces tâches consiste à ce que les élèves généralisent leur raisonnement, afin de développer une formule qui permettra de calculer le nombre d'objets associé à n'importe quel rang.

Si les tâches de généralisation de motifs géométriques ont suscité un grand enthousiasme, on ne peut en dire de même de celles en contexte numérique qui ont soulevé l'inquiétude chez les CP et l'orthopédagogue. En effet, c'est la représentation (tableau) et le langage utilisé (rang) qui posaient un problème de glissement de sens. Dans la culture scolaire, au début du secondaire, un travail important est fait en proportionnalité et le mode de représentation est hautement similaire au sein des tâches, tout comme le langage. Pour les CP, ceci est problématique, car cela risque d'engager certaines formes d'enseignement — une pré-algorithmisation des savoirs (Giroux et René de Cotret, 2001) — et d'activité mathématique une application de règles et non un engagement à résoudre le problème — qu'elles essaient de contrer depuis de nombreuses années.

En effet, le fait que les tâches de généralisation de motifs numériques présentées sous forme de tableau (p. ex., rang 1 = 16 allumettes, rang 2 = 23 allumettes) se confondent, dans certains cas, à des tâches de proportionnalité qui sont largement exploitées en classe pose certains obstacles puisque les élèves en viennent à appliquer un algorithme de proportionnalité à une situation qui ne l'exige pas. Ceci a donc des conséquences sur le plan du maintien des savoirs en jeu et de l'accessibilité didactique. D'une part, puisqu'elle est effectuée par l'entremise du produit croisé, la résolution des énoncés ne favorisera pas une démarche de généralisation chez les élèves et, donc, ne permettra pas d'atteindre les objectifs de la situation. D'autre part, pour l'orthopédagogue, cela entraîne une apparente inégalité pour l'entrée dans la situation entre les élèves qui peuvent appliquer l'algorithme (la recette, comme elle le nomme) et ceux qui peinent à le mettre en place, mais qui, par contrat, cherchent à le faire pour répondre aux attentes.

Au sein des transactions, l'expérience pratique et la connaissance fine de la culture d'enseignement des mathématiques au secondaire des partenaires ont permis de nuancer les analyses didactiques faites en amont par l'équipe de recherche. Ceci nous a menés à retirer le tableau comme mode de représentation et changer le terme « rang » pour « figure » ou « assemblage ». Ce travail commun, où les expertises de tous et toutes sont mises à profit et où l'approche est réellement distribuée, nous a permis de trouver des aménagements de variables didactiques permettant de maintenir les enjeux de savoirs et d'en assurer l'accès à tous et toutes, au lieu de retirer ces tâches.

2. *Quand l'épistémologie pratique dominante met en péril la robustesse des situations*

Au cours des rencontres où l'équipe de recherche, deux CP, deux enseignants de mathématiques, une enseignante ressource et l'orthopédagogue faisaient l'analyse du répertoire de tâches, un des sujets fréquemment mis de l'avant concernait les régulations possibles selon les tâches, afin d'assurer une entrée dans la situation pour chaque élève. Lors d'une de ces rencontres, l'orthopédagogue soulignait l'importance qu'il y ait du matériel de manipulation à la disposition des élèves le plus souvent possible. Faite de manière générique sans référence à une tâche particulière, cette intervention a suscité un débat. De notre posture de didacticien·nes ; l'introduction de matériel de manipulation était bien souvent peu possible en raison des variables didactiques (registre de représentation, nombres élevés, etc.). Surtout, cette introduction avait le potentiel de freiner la généralisation arithmétique pour certaines tâches sans parler de la possibilité de détourner l'enjeu de savoir de multiples tâches. Pour l'orthopédagogue et plusieurs autres enseignant·es, l'usage du matériel de manipulation est considéré comme un atout pour soutenir les élèves identifiés en difficulté et cette conception est renforcée par les nombreux documents ministériels et pédagogiques faisant l'éloge de son utilisation (L. Bergeron, 2017). Pour les CP, à la fois sensibilisées aux approches didactiques et aux contraintes du terrain, et pour l'équipe de recherche, il s'agit d'un terrain glissant où nous reconnaissons la pertinence de penser à des moyens d'assurer le maintien des élèves ayant plus de difficultés à entrer dans la tâche, tout comme de ne pas sacrifier les enjeux de savoirs.

Dans un souci de faire reposer ce débat sur « quelque chose de tangible » afin de collaborer à des fins communes, nous avons proposé d'analyser certaines tâches du répertoire afin d'anticiper les effets de l'introduction de matériel. Par exemple, pour la tâche du carré bordé (Figure 1), les élèves doivent d'abord chercher le nombre de carrés ombragés dans une ou plusieurs représentations illustrées.

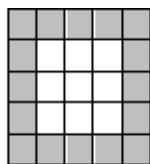


Figure 1 – *Le carré bordé*

Par la recherche du nombre de carrés ombragés pour des constructions similaires non illustrées où le carré a un côté comptant de plus en plus de petits carrés, les énoncés suivants visent à amener l'élève à dépasser l'induction naïve, afin de tendre vers une généralisation arithmétique (Vlassis et al., 2017). À la lueur de cet objectif, nous avons donc analysé l'impact de l'introduction du matériel (on proposait des petits cartons pour constituer la figure ou encore le dessin) au regard des enjeux de savoirs. Si le travail avec du matériel est pertinent en début de tâche, cette analyse a permis de constater qu'il peut rapidement devenir un obstacle au raisonnement non seulement parce que, à un certain point, le dessin ou l'assemblage devient impossible (ou fastidieux) en raison des grands nombres, mais également parce que cet usage peut contraindre la généralisation. En effet, l'introduction du matériel peut conditionner le dénombrement plutôt que la recherche d'invariants. Ces moments de travail ont permis de déterminer collectivement que cela avait le potentiel de miner la robustesse de la situation.

Si le travail d'analyse de l'introduction de matériel ou encore de la réduction des nombres sur différentes tâches a favorisé la remise en question de certaines pratiques, il n'en reste pas moins que ces dispositifs pour « aider » les élèves sont bien ancrés dans l'épistémologie pratique du personnel éducateur et que ce sujet revient fréquemment au cours des rencontres. En effet, lorsque nous évoquons les régulations possibles lors du pilotage, il était parfois difficile pour le personnel éducateur

d'envisager autre chose que certaines interventions fréquentes telles que la réduction des nombres, l'usage de matériel ou encore la démonstration de la marche à suivre par l'enseignant·e. Par exemple, lorsque les CP proposaient des modalités de pilotage différentes, comme le travail sur des tableaux verticaux (grandes surfaces blanches effaçables) en sous-groupe afin de favoriser le dialogue et la participation de tous ou encore des relances constructives pour éviter de prendre en charge l'activité mathématique des élèves en relançant l'enjeu de la tâche (ex. : confronter les élèves aux stratégies de leurs pairs), certain·es doutaient que cela soit une condition suffisante, mais soulignaient qu'en étant en contexte de coenseignement, ils et elles étaient prêt·es à en faire l'essai.

V. QUELQUES REMARQUES CONCLUSIVES AU REGARD DU DÉVELOPPEMENT DE L'ÉPISTÉMOLOGIE PRATIQUE

Au-delà des séances en classe où le personnel éducateur copilote les tâches du répertoire, les rencontres partenariales où les différents partenaires co-construisent le projet se sont avérées être le lieu d'intérêt afin de débattre certaines théories d'action professionnelle des participant·es à propos de leur conception de l'accessibilité didactique. Ce fut également l'occasion, pour nous, de mettre à l'épreuve nos analyses didactiques des tâches et de les confronter à la culture scolaire et à la contingence des situations.

Ainsi, ces moments de co-construction, en amont, nous ont permis de constater la pertinence de notre démarche partenariale où nous mettons en place une ingénierie didactique coopérative (Sensevy, 2011) pour enrichir les analyses de la robustesse des situations. Également, cela nous a donné la possibilité d'ouvrir le dialogue à propos des manières de favoriser l'accès aux savoirs à tous sans pour autant réduire les enjeux de savoirs. Les deux moments présentés pour illustrer notre propos sont un exemple parmi tant d'autres où ce travail vers des fins communes nous a permis d'engager un développement de l'épistémologie pratique au regard de l'accessibilité didactique. Il nous semble que c'est là tout l'intérêt de notre démarche.

Chemin faisant, nous avons observé, dans le discours du personnel éducateur participant à ces rencontres de co-construction, une plus grande attention à la question du choix des variables didactiques afin de maintenir l'enjeu de savoir lorsqu'il était question de réfléchir préalablement aux régulations possibles pour soutenir les élèves. En effet, si la question de l'introduction du matériel ou de la réduction des nombres revenait fréquemment lors des premières rencontres pour anticiper les adaptations pouvant être faites aux tâches afin d'assurer la participation de tous, ces propositions, bien qu'encore présentes, ont également laissé place à des discussions à propos des variables didactiques nécessaires pour maintenir l'enjeu de savoir et permis d'entrevoir de nouvelles avenues et aménagements de milieu pour parler d'accès aux savoirs pour tous. Plus encore, à force de travail conjoint sur le répertoire et ses tâches hors culture scolaire, certaines personnes ont amorcé une réflexion et une remise en question concernant certaines composantes de leur épistémologie pratique et ont souligné avoir envie de faire différemment. C'est d'ailleurs le cas de l'orthopédagogue qui, avant même le début de la mise en place des séances, a décidé d'aller coenseigner avec une enseignante de mathématiques et de sortir de sa zone de confort pour faire l'essai de tâches. Au cours de l'action de copilotage, bien que nous puissions considérer que certaines composantes de l'épistémologie pratique mises en question lors des rencontres soient hautement susceptibles de reprendre forme, il n'en reste pas moins que ce développement est amorcé, malgré qu'il puisse prendre du temps.

Pour conclure, notre expérience nous mène à penser, afin de favoriser une meilleure accessibilité didactique, que le travail conjoint avec le personnel éducateur est non seulement un atout, mais nécessaire dans le but que cette sensibilité développée envers l'accessibilité didactique se maintienne et se développe après le départ de l'équipe de recherche ou encore au-delà des tâches du répertoire.

RÉFÉRENCES

- Assude, T., Perez, J.-M., Tambone, J. et Vérillon, A. (2011). Apprentissage du nombre et élèves à besoins éducatifs particuliers. *Éducation et Didactique*, 5(2), 65-84.
- Assude, T., Perez, J.-M., Suau, G., Tambone, J. et Vérillon, A. (2014). Accessibilité didactique et dynamique topogénétique : une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 33-57.
- Assude, T., Perez, J.-M., Suau, G. et Tambone, J. (2015). Conditions d'accessibilité aux savoirs. Dans J. Zaffran (dir.), *Accessibilité et handicap : anciennes pratiques, nouvel enjeu* (p. 209-224). Presses universitaires de Grenoble.
- Assude, T., Perez, J.-M., Suau, G. et Tambone, J. (2018). Effets d'un dispositif de recherche sur la co-production de praxéologies inclusives en milieu scolaire ordinaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 44(1), 105–137. <https://doi.org/10.7202/1054159ar>
- Bergeron, G., Prud'homme, L., Fortier, M.-P., Ouellet, K., Bergeron, L., Gagné, M.-A. et Bilodeau, J. (2024). Vers une différenciation pédagogique intégrée à la pratique au secondaire : étude multicas de trois enseignant·e·s. *Éducation & Formation*, (e-323), 73-86.
- Bergeron, L. (sous presse). Faire des mathématiques ensemble : l'apport d'une approche d'ingénierie didactique coopérative pour favoriser la participation de l'ensemble des élèves à la vie éducative de la classe. *Revue hybride de l'éducation*, (numéro spécial).
- Bergeron, L. (2023). *Entre les contraintes de la relation d'aide et les impératifs de la diplomation : une étude de la dynamique du travail des orthopédagogues au secondaire dans leurs interventions en mathématiques* [Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. <https://archipel.uqam.ca/16747/>
- Bergeron, L. (2017). *Étude théorique sur la référence au processus d'abstraction en mathématiques dans la noosphère du champ de l'éducation au Québec* [Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal]. <https://archipel.uqam.ca/11131/>
- Bergeron, L. et Barallobres, G. (2019). Revendiquer sa légitimité en contexte de réclamation d'un ordre professionnel : le cas des orthopédagogues du Québec. *Revue canadienne de l'éducation*, 42(2), 322-349.
- Booth, T. (2000). Inclusion and exclusion policy in England: who controls the agenda? Dans F. Armstrong, D. Armstrong et L. Barton (dir.), *Inclusive education. Policy, contexts and comparative perspectives* (p. 78-98). David Fulton.
- Coulange, L. et Grugeon, B. (2008). Pratiques enseignantes et transmissions de situations d'enseignement en algèbre. *Petit x*, (78), 5-23.
- Dupuis-Brouillette, M. (2024). *Co-construction de situations mathématiques entre intervenantes et chercheuse pour des élèves ayant un trouble langagier en contexte d'inclusion scolaire* [Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS. <https://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/21364>
- Dupré, F. (2019). *Pratiques inclusives en mathématiques dans le second degré : études de cas en ULLS collège* [Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille].
- Dupré, F. (2020). Analyse didactique d'une séance de coenseignement entre un enseignant spécialisé et un enseignant ordinaire dans le cadre de pratiques inclusives au collège. *Éducation et francophonie*, 48(2), 160-179. <https://doi.org/10.7202/1075040ar>
- Giroux, J. et René De Cotret, S. (2001). Le temps didactique en classe de doubleurs. Dans *Actes de l'AFDEC, 7 et 8 juin 1999, Université de Montréal*.

- Jeannotte, D. (2005). *L'interprétation de la lettre et les erreurs commises en algèbre par des élèves du secondaire d'aujourd'hui et ceux de la fin des années 70 : une étude comparative* [Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS. <http://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/570>
- Jeannotte, D. et Corriveau, C. (2020). Étude de raisonnements mathématiques associés à la pensée algébrique chez les élèves avant l'introduction de l'algèbre. Dans H. Squalli, A. Bronner et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires* (p. 112-133). Livres en ligne du CRIRES.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans D. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 390-419). Macmillan Publishing Company.
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. et Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer Nature.
- Marlot, C. et Toullec-Théry, M. (2014). Normes professionnelles et épistémologie pratique de l'enseignant : un point de vue didactique. *Revue canadienne de l'éducation*, 37(4), 1-32.
- Ministère de l'éducation du Québec [MEQ]. (1999). *Une école adaptée à tous ses élèves : politique de l'adaptation scolaire*. Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur [MEES]. (2017). *Politique de la réussite éducative : le plaisir d'apprendre, la chance de réussir*. Gouvernement du Québec.
- Morellato, M. (2019). Ingénierie didactique coopérative : quelle pratique de collaboration entre professeurs et chercheurs ? Conditions pour la constitution d'une expérience collective. *Questions Vives. Recherches en éducation*, (32). <https://doi.org/10.4000/questionsvives.4438>
- Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir*. De Boeck Supérieur. <https://doi.org/10.3917/dbu.sense.2011.01>
- Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Actes de l'EMF2015, « Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage, 10-14 octobre 2015, Alger, Algérie* (p. 346-356). <https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF15122.pdf>
- Toullec-Théry, M. et Moreau, G. (2020). Co-enseignement et difficulté scolaire : étude didactique d'un cas en milieu inclusif. *Revue hybride de l'éducation*, 4(3), 55-87. <https://doi.org/10.1522/rhe.v4i3.1038>
- Tremblay, D.-G. et Demers, G. (2018). Les recherches partenariales/collaboratives : peut-on simultanément théoriser et agir ? *Recherches sociographiques*, 59(1-2), 99-120. <https://doi.org/10.7202/1051427ar>
- Vlassis, J., Demonty, I. et Squalli, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 131-155.

CO-ENSEIGNER EN RÉOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES : QUEL IMPACT SUR LES PRATIQUES DES ENSEIGNANT·ES ?

| PETEERS* FLORENCE

Résumé | L'étude explore l'évolution des pratiques d'un binôme d'enseignantes (enseignante spécialisée et enseignante de classe) au cours d'une année de co-enseignement en résolution de problèmes arithmétiques, en particulier en ce qui concerne l'exercice de leur vigilance didactique. Les résultats mettent en lumière que l'expertise de l'enseignante spécialisée et des pratiques de co-enseignement « efficace » permettent de faire évoluer les pratiques du binôme étudié.

Mots-clés : problèmes arithmétiques, co-enseignement, élèves en difficulté, pratiques, inclusion

Abstract | The study explores the evolution of the practices of a pair of teachers (a special education teacher and a classroom teacher) over a year of co-teaching in solving arithmetic problems, particularly regarding their exercise of didactic vigilance. The results highlight that the expertise of the special education teacher and effective co-teaching practices help to develop the practices of the studied teaching pair.

Keywords: Arithmetic problems, co-teaching, students with difficulties, practices, inclusion

I. CONTEXTE

L'inclusion des élèves à « besoins éducatifs particuliers » constitue actuellement un véritable défi pour l'école. La scolarisation de ces élèves a fait l'objet de plusieurs lois depuis une vingtaine d'années. Dans le paradigme actuel, ce n'est plus à l'élève en situation de handicap de s'adapter au contexte scolaire, mais à l'école d'aménager, pour lui, les situations d'apprentissage pour le faire progresser. En France, il existe différents types de dispositifs permettant de soutenir l'inclusion de toutes et tous les élèves, notamment le RASED (Réseau d'Aide aux Elèves En Difficultés). Les enseignant·es spécialisé·es affectés à ce type de dispositif prennent en charge les élèves du premier degré signalé·es par les enseignant·es de classe comme étant « en difficulté ». Ces enseignant·es spécialisé·es sont des personnes ressources et peuvent engager un partenariat avec leurs collègues de classe ordinaire sur le registre du co-enseignement. Défini comme un travail pédagogique en commun, dans un même groupe, temps et espace, de deux enseignant·es qui partagent les responsabilités éducatives pour atteindre des objectifs spécifiques (Tremblay, 2020), le co-enseignement permet de prendre en charge ces élèves signalés « en difficulté » au sein même de la classe. Selon plusieurs auteurs (Tremblay, 2020), le co-enseignement entre l'enseignant·e de la classe de référence et l'enseignant·e spécialisé·e peut être considéré comme le modèle de service le plus cohérent avec l'inclusion scolaire (Tremblay, 2017). Le rapport de l'IGÉSR de février 2021 sur l'organisation, le fonctionnement et l'évaluation des effets des réseaux d'aides spécialisées aux élèves en difficulté souligne l'intérêt du co-enseignement pour les enseignants de la classe de référence : « lorsque cette plus-value du regard croisé (ndlr avec l'enseignant spécialisé du RASED) est perçue, cela se traduit par des témoignages très positifs de la part des enseignants quant aux ajustements de pratique que cela leur permet » (voir également Davesnes, Ménard et Peteers, 2022).

* CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, Univ. Lille, Univ Rouen, LDAR, F-95000 Cergy-Pontoise – France – florence.peteers@cyu.fr

L'étude présentée ici s'inscrit dans le cadre du projet de recherche E(DI)²PE¹ (Élèves en difficulté : évolution du discours et pratiques des enseignants) qui vise à étudier l'évolution du discours des enseignant·es de classe vis-à-vis des élèves qu'ils qualifient d'« élève en difficulté » ainsi que les changements qui s'opèrent dans leurs pratiques pédagogiques et didactiques conséquemment à la mise en place d'un co-enseignement (en français ou en mathématiques) avec l'enseignant·e spécialisé·e du RASED. Pour ce faire, nous suivons depuis septembre 2023, 7 binômes constitués d'une enseignante spécialisée du RASED et d'une enseignante de classe pratiquant le co-enseignement de façon régulière.

En ce qui concerne les mathématiques, nous nous intéressons plus particulièrement à la résolution de problèmes arithmétiques. Il s'agit, en effet, d'une activité qui nécessite la coordination de plusieurs compétences (Bergeaut, 2012), ce qui la rend difficile pour de nombreux élèves, notamment ceux ayant des besoins éducatifs particuliers (BEP). Par exemple, les élèves avec des difficultés d'apprentissage en mathématiques ont plus de mal à résoudre des problèmes en plusieurs étapes que leurs pairs sans difficultés (Noël et Karagiannakis, 2020). Les recherches suggèrent que les aides méthodologiques actuelles sont insuffisantes (Houdement, 2017) et que l'apprentissage de la résolution de problèmes se fait en les résolvant dans leur intégralité. Cependant, les élèves « en difficulté » ont rarement l'occasion de mener à bien ce processus en classe, ce qui exacerbe leurs difficultés (Houdement, 2017). Nous faisons donc l'hypothèse qu'il existe un besoin d'intervention du RASED à ce niveau.

Dans cette communication, nous nous focaliserons sur l'évolution des pratiques d'un binôme d'enseignantes (enseignante spécialisée du RASED et enseignante de classe) au cours d'une année de co-enseignement en résolution de problèmes.

II. CADRE THÉORIQUE, QUESTION DE RECHERCHE ET MÉTHODE

1. *Double approche et vigilance didactique*

Notre objectif étant d'analyser les pratiques enseignantes, nous nous appuyerons sur le cadre théorique de la double approche développée par Robert et Rogalski (2002). Afin d'étudier la complexité de ces pratiques, Robert et Rogalski (2002) proposent une analyse en cinq composantes. La composante cognitive renseigne sur l'itinéraire cognitif élaboré par l'enseignant·e et la composante médiative englobe les analyses relatives aux interactions entre les acteurs. Les trois autres composantes (personnelle, institutionnelle et sociale) permettent de dégager les déterminants de ces pratiques en prenant en compte le métier et ses contraintes.

Dans leurs études sur les pratiques des enseignants professeurs des écoles en éducation prioritaire, Charles-Pézard et al. (2012) ont notamment montré que prendre en compte les différences entre les élèves requiert l'exercice de ce que Charles-Pézard (2010) a désigné par « vigilance didactique » et qu'elle définit comme « une sorte d'ajustement didactique permanent de la part du professeur » (Charles-Pézard, 2010, p. 211). L'exercice de la vigilance didactique implique une analyse rapide des productions des élèves en classe, afin d'adapter continuellement l'enseignement à leur cheminement cognitif. Pour Charles-Pézard (2010), une « bonne » vigilance didactique garantit que le déroulement de la classe est guidé avant tout par les mathématiques, en restant au plus près des apprentissages visés.

De son côté, Toullec-Théry (2020) a montré que le co-enseignement, en tant que processus de pratiques conjointes, pourrait accentuer la vigilance didactique des enseignant·es et permettre une

¹ Projet porté par Pascal Champain (Maître de conférences en sciences de l'éducation et de la formation) en partenariat avec Sonia Castagnet-Caignec (Maîtresse de conférences en langue et littérature françaises), Magaly Ruiz et Nathalie Jego (doctorantes en sciences de l'éducation)

« accessibilité renouvelée des situations d'apprentissage » dans la classe. C'est cette hypothèse que nous souhaitons mettre au travail dans cette recherche en posant la question de recherche suivante : Comment évoluent les pratiques du binôme d'enseignantes considéré au cours d'une année de co-enseignement en résolution de problèmes ? Peut-on observer des modifications en ce qui concerne l'exercice de leur vigilance didactique ?

2. *Méthode*

Nous ne détaillerons pas ici l'ensemble de la méthode déployée dans le projet global mais uniquement les éléments qui nous paraissent pertinents au regard de notre question de recherche. Le binôme considéré pour notre étude est constitué de Mélanie, enseignante spécialisée du RASED et de Cécile, enseignante de CE2 d'une école élémentaire du réseau d'éducation prioritaire renforcé (REP+) de l'Académie de Versailles. Cécile enseigne depuis 24 ans et Mélanie a obtenu son CAPPEI (certificat d'aptitude professionnelle aux pratiques de l'éducation inclusive²) en 2022 après plusieurs années dans l'enseignement ordinaire. Les deux enseignantes ont déjà eu l'occasion de travailler ensemble car Mélanie est co-intervenue dans la classe de Cécile l'année précédente (en lecture-compréhension). Mélanie a réalisé, en septembre et octobre 2024, des observations de séances de résolution de problèmes arithmétiques dans la classe de Cécile. Elle a également effectué une analyse des besoins des cinq élèves signalés « en difficulté » qui lui a permis de monter le projet de co-enseignement en collaboration avec Cécile. Le co-enseignement s'est déroulé sur les périodes 2 à 5 (entre novembre et juin) à raison de 2 fois semaine, avec l'ensemble des élèves. Deux séances ont été observées par le chercheur (en janvier et en mai 2024), chacune suivie d'un entretien avec Cécile et d'un autre avec Mélanie. Aucun apport didactique n'a été fourni par l'équipe de recherche, les enseignantes étaient libres d'effectuer leurs propres choix. En revanche un horizon d'attente en termes de co-enseignement a été posé au regard de la définition de Tremblay et des indicateurs qu'il identifie pour définir un co-enseignement « de qualité » (Tremblay, 2023). Chaque binôme s'est fixé, en cours d'année, des objectifs en termes de co-enseignement correspondant à 3 indicateurs (dans le cas de Mélanie et Céline : l'activité prévoit des rôles variés et variables pour les enseignants, les deux enseignants travaillent avec tous les élèves et les 2 enseignants communiquent verbalement ou non durant l'activité).

Pour caractériser les pratiques des enseignantes aux différents moments de l'année et identifier une éventuelle évolution, nous nous focaliserons, dans cette première analyse du corpus, sur certains éléments en lien avec l'exercice de la vigilance didactique de l'enseignante (d'après Charles-Pézar, 2010). En amont de la séance, nous nous intéresserons au projet global et à la manière dont la séance s'intègre dans la progression choisie. Nous porterons également notre attention sur les tâches proposées et sur la gestion a priori de la séance par les enseignantes (choix des variables didactiques, anticipation des procédures des élèves, des obstacles et des aides). Durant les séances, nous prendrons en compte la manière dont les enseignantes observent et interprètent l'activité des élèves ainsi que la façon dont elles explicitent, hiérarchisent et synthétisent les procédures. Enfin, nous considérerons l'institutionnalisation effectuée. Pour renseigner ces différents éléments des pratiques, relevant des composantes cognitives et médiatives, nous nous appuierons sur les observations des séances, les fiches de préparation fournies par Mélanie ainsi que sur les entretiens réalisés après les séances de co-enseignement.

² En France, le CAPPEI est un diplôme accessible aux enseignant·es titulaires du premier ou du second degré leur permettant d'exercer auprès d'élèves présentant des besoins éducatifs particuliers liés à une situation de handicap, de grande difficulté scolaire ou à une maladie.

III. EVOLUTION DES PRATIQUES EN AMONT DES SÉANCES

1. *Projet global*

En début d'année, on note des difficultés pour Cécile à construire une progression cohérente, comme le souligne Mélanie :

« Elle m'a dit, elle me dit je suis perdue parce que j'arrive pas à suivre une méthode, il y a rien qui me plaît du début à la fin quand j'en commence une, je décroche au bout d'un moment parce que il manque des choses, donc je vais commencer un truc et puis je vais aller chercher ailleurs, donc finalement ça n'aboutit jamais »³.

Pour le co-enseignement, Mélanie a construit, en accord avec Cécile, une séquence qui articule 2 séances de résolution de problèmes par semaine, une séance portant sur la résolution de problèmes arithmétiques verbaux (au sens de Feyfant, 2015) et l'autre sur des problèmes avec support photographique (comme développé par Cortay et Gilger, 2018). Ce choix s'appuie sur Berdonneau (2006) : « dans son livre justement, elle explique aussi que c'est important d'avoir un parallèle, d'avoir des problèmes avec des procédures éprouvées mais aussi des problèmes pour chercher. Pour donner l'envie et les stimuler et donner de l'intérêt ». La séquence portant sur les problèmes arithmétiques est principalement construite sur base de « problèmes référents » qui sont ceux travaillés en co-enseignement. Par période, entre 4 et 8 énoncés sont traités, à chaque fois les 4 opérations sont travaillées. Une grande variété de types de problèmes sont traités (relativement à la catégorisation de Vergnaud (1990) qui est explicitement utilisée par Mélanie). Les problèmes de référence sont des problèmes basiques au sens de Houdement (2017) sauf dans la période 5 (le problème de la séance observée en mai) qui est un problème complexe.

On observe également une évolution au cours même du co-enseignement, avec une prise de conscience, pour Cécile, de l'importance d'entraîner la mémoire des problèmes (au sens de Julo, 1995), de travailler sur des problèmes similaires au problème référent à d'autres moments que ceux dédiés au co-enseignement, en vue d'une automatisation, comme le signale Mélanie :

« Elle prend davantage de temps aussi pour systématiser. Chose qu'elle faisait pas, on essayait d'avancer et donc elle systématisait sur des temps... Pas forcément mis dans l'emploi du temps. C'était quand elle le pouvait et elle resystématisait sur 3-4 séances en arrière. Alors que maintenant, elle essaie de systématiser vraiment sur ce qu'on est en train de travailler ».

2. *Tâches proposées*

Avant le co-enseignement, il s'agit pour les élèves de résoudre une quantité importante de problèmes (de 5 à 10) au cours d'une même séance (voir le plus de problèmes possible). Les modalités proposées (binômes tuteur/tuteuré) ne permettent pas aux élèves à BEP de s'investir dans le temps de recherche. Durant le co-enseignement, l'accent n'est pas mis sur la résolution. Dans les séances observées, les objectifs déclarés étaient, pour la séance de janvier, de comparer les solutions de deux problèmes avec des énoncés proches et dont les données numériques sont identiques (voir Annexe 1) et, pour la séance de mai, de décomposer un problème complexe en sous-problèmes (en complétant le tableau présenté en Annexe 2). Mélanie justifie ses choix en disant que son objectif est d'« essayer de faciliter et d'axer sur la compréhension de l'énoncé, plutôt que de trouver un résultat pur ».

Cependant, on peut identifier des incohérences entre les objectifs annoncés et les tâches proposées aux élèves. Par exemple, lors de la séance de mai, l'intention des enseignantes était de travailler la décomposition d'un problème complexe or, dans la tâche proposée aux élèves (tableau en Annexe 2),

³ Dans le texte les propos des enseignantes seront transcrits tels que formulés durant les entretiens.

la décomposition du problème est déjà effectuée et le travail porte sur la formulation de questions pour chaque sous-problème et la schématisation de chacune des étapes.

3. *Gestion a priori*

Dans la gestion a priori des séances, on peut noter une réflexion de la part des deux enseignantes sur le choix des variables didactiques, notamment au niveau des variables numériques : « Finalement, là, on voulait vraiment travailler sur le vocabulaire “de plus”, “de moins” et donc finalement que ça n'avait pas d'importance en fait, que la donnée numérique soit importante ». L'habillage des énoncés est également pensé pour faciliter la représentation du problème par les élèves (par exemple, les villes choisies pour l'énoncé de la séance de mai sont des villes qui ont été abordées en classe dans le cadre d'un projet pédagogique sur l'eau). Cela contraste avec les énoncés choisis en début d'année qui faisaient référence à un contexte sans doute peu familier pour les élèves. On observe également un changement au niveau du placement de la question entre janvier et mai qui apparaît, à l'initiative de Mélanie, suite à la préparation de la séance faisant intervenir pour la première fois un problème complexe : « eux [en référence à Grandclément et al. (2020)] préconisaient de remettre la question en amont, de la redire, de se la rappeler, parce que le texte est tellement long, l'énoncé est tellement long, que du coup le problème, la question ils l'oublient ».

L'anticipation des difficultés semble relever essentiellement de Mélanie :

« Moi je vais chercher des difficultés par rapport aux besoins. Elle [Cécile], elle va pas chercher la difficulté, elle va chercher les modalités de séance en fait [...] Alors que moi j'ai le réflexe, OK je vais travailler quelque chose de nouveau, quelles difficultés vont être rencontrées ? ».

Les difficultés anticipées sont principalement relatives à des compétences qu'on pourrait qualifier de transversales ou liées aux fonctions exécutives : attention, écoute, mémoire, confiance en soi, planification, compréhension du vocabulaire, lecture, sentiment de compétence, flexibilité, frustration/rapport à l'erreur, ...

En ce qui concerne les aides anticipées par Cécile en amont du co-enseignement, elles relèvent principalement du tutorat ou de la simplification des consignes. Par simplification des consignes, on peut comprendre soit diminution du nombre d'exercices soit diminution des valeurs numériques :

« la consigne, elle sera plus simplifiée ou alors ils auront une tâche alors que les autres auront 2 tâches. Voilà, mais c'est vraiment. Enfin, c'est beaucoup, beaucoup de tutorat en fait, encore plus que la différenciation parce qu'ils ont vraiment besoin [...] moi quand je fais des séances toute seule, je différencie aussi les problèmes. Ils n'ont pas tous les mêmes données numériques ».

Pendant le co-enseignement, on peut distinguer les aides pour toutes et tous des aides spécifiques aux élèves à BEP, celles-ci sont majoritairement apportées par Mélanie. Au niveau des aides pour toutes et tous, on note de nombreux affichages réalisés en cours de séquence (démarche de résolution, catégorisation du matériel, schématisation, ...) ainsi que la mise à disposition de différents types de matériels. Pour le problème du bus (observé en mai), des étiquettes peuvent être données aux élèves pour remplir le tableau. Il n'y a pas d'étiquettes inutiles. Par exemple pour la colonne « schéma en barre », deux étiquettes présentant des schémas en barres sont proposées et il faut associer chacune des étiquettes à l'étape du problème qui correspond, ce qui peut entraîner une modification des procédures (si l'élève réussit à en placer une, le placement de la deuxième est automatique).

Un gros travail est fait par Mélanie au niveau de l'anticipation des aides pour les élèves à BEP (une colonne spécifique à cet effet est prévue dans la fiche de préparation de la séance). Ces aides sont en lien avec les difficultés liées aux compétences transversales et fonctions exécutives identifiées : relance,

valorisation, sollicitation, reformulation, rappel des étapes, vérification de la compréhension du vocabulaire, faire verbaliser les élèves, orienter « vers le matériel le plus adapté ». Il est également prévu deux temps d'externalisation (les élèves à BEP sont isolés dans un coin de la classe) gérés par Mélanie. En début de séance, il s'agit de fixer les objectifs individuels (non spécifiques aux mathématiques) et anticiper la séance (par exemple pour la séance en période 3 : « je suis repartie du bilan qu'on avait fait le mardi 14 novembre, qui concernait ce principe de comparer 2 énoncés pour que ça puisse engendrer. Afin de permettre en tout cas un meilleur investissement là dans la phase de rappel par la suite »). En fin de séance, il y a un retour sur les objectifs individuels. Ces temps sont considérés comme nécessaires du point de vue des deux enseignantes tout au long de la période de co-enseignement, comme le signale Cécile lors de l'entretien réalisé en mai : « Déjà que c'est compliqué pour eux d'intervenir, mais je pense que s'il y avait pas cette petite préparation là, ils interviendraient beaucoup moins et ils se sentiraient moins dans la réussite. Enfin, je pense que c'est vraiment important pour eux ».

Nous identifions également des éléments qui ne sont pas anticipés par les enseignantes. Tout d'abord, certains obstacles didactiques ne sont pas considérés ou pas assez (ce qui rejoint les constats effectués dans une précédente étude, cf. Peteers, 2023). Suite à la séance de janvier, Mélanie déclare : « Aujourd'hui, je sentais que c'était trop difficile. Je ne l'ai pas anticipé. Je savais que ça allait poser difficulté, le "moins que", "plus que". Mais je pensais pas à ce point-là, tu vois ? ». En ce qui concerne la séance de mai, le travail porte sur un problème faisant intervenir deux compositions de deux transformations de nature opposée avec recherche de la composée or, les problèmes basiques de ce type n'ont pas été traités en amont (ce qui constitue pourtant une condition nécessaire à sa résolution d'après Houdement, 2017). Il semble également que les procédures de résolution des élèves ne soient pas anticipées. En effet, dans les fiches de préparations, au niveau du bilan, il est mentionné « comparaison de différentes stratégies » sans plus de détails. Pendant les entretiens c'est quelque chose qui n'est pas évoqué non plus et qui paraît absent des éléments qui sont discutés durant la co-planification.

IV. ÉVOLUTION DES PRATIQUES PENDANT LES SÉANCES

1. *Observation et interprétation de l'activité des élèves*

Lors de la première séance de co-enseignement observée, Mélanie regarde essentiellement ce que font les élèves à BEP (ils forment un groupe à part et elle reste auprès d'eux pendant toute la phase de recherche) et Cécile ce que font les autres élèves de la classe :

« Elle [Cécile] m'a permis de faire le point quand on est passé à la phase du bilan, c'est elle qui m'a dit ce qu'il en était, de ce qu'elle avait pu percevoir parce que moi, j'avais le nez dans le guidon avec mes 4 donc en fait je ne vois absolument pas ce qui se passe derrière ».

On observe un changement dans les modalités de co-enseignement lors de la deuxième séance observée, comme l'explique Mélanie :

« On s'est rendu compte que pour pouvoir plus... enfin échanger plus facilement et se rendre compte des difficultés des différents niveaux, c'était mieux en fait que chacune se répartisse sur les différents niveaux et pas juste moi en bas et elle sur les autres ».

Cela oblige en quelques sortes Mélanie à verbaliser auprès de Cécile ce qu'elle doit observer chez les élèves à BEP :

« J'ai des questions très ciblées auprès de Cécile en lui disant, j'ai besoin que tu me dises. Tac, tac, tac. [...] est-ce qu'il va de lui-même participer, est-ce qu'il va aller chercher de lui-même du matériel pour manipuler comment il

aura réussi, est-ce qu'il aura, est-ce qu'il sera rentré en confrontation avec son binôme ou les autres élèves du groupe pour oser dire ce qu'il en a pensé ? ».

On peut également observer une augmentation des moments d'échange entre les enseignantes (micro-concertations durant la séance). Ce qui est remarqué également par Cécile :

« Par exemple, une fois qu'on les laisse discuter du problème, essayer de comprendre le problème, tac, on essaie de se voir, alors attends qu'est-ce qu'ils ont vu, enfin voilà et puis ensuite on les laisse résoudre et puis pareil, on se revoit toujours avant le bilan [...]. Ça c'est vrai qu'on le faisait moins, on essaie, voilà d'échanger plus. Voilà de plus communiquer pendant la séance ».

Ces micro-concertations leur permettent d'échanger sur leurs observations et de s'ajuster en fonction.

2. *Explicitation, hiérarchisation et synthèse des procédures*

Avant le co-enseignement, la mise en commun réalisée par Cécile portait principalement sur les difficultés rencontrées lors du travail de groupe et peu sur le contenu mathématique. Après la mise en place du co-enseignement, il est difficile de tirer des conclusions car pour les deux séances observées, il y a eu des imprévus qui sont venus perturber les fins de séances. En janvier, Cécile a dû s'éclipser de la classe au moment de la mise en commun et en mai, les élèves n'ont pas eu le temps de réaliser tout le travail prévu par les enseignantes. Néanmoins, dans les deux séances, les productions des élèves sont affichées au tableau (voir Figure 1) et constituent le point de départ de la discussion du groupe lors de la mise en commun (c'est explicite dans la fiche de préparation : « Des groupes viennent expliquer leurs démarches pour résoudre les pb »). On observe également un changement dans l'organisation au tableau des productions. Affichées de façon aléatoires en janvier, elles sont classées (selon le résultat anticipé dans la première colonne du tableau à remplir) en mai (par Cécile).

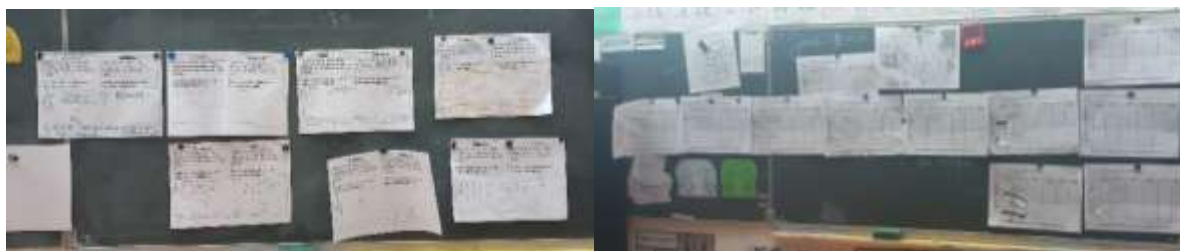


Figure 1 – Affichages des productions en fin de séance (séance de janvier à gauche et séance de mai à droite)

Une évolution est également pointée par Mélanie dans l'entretien réalisé en mai :

« Et quand elle me dit OK, alors je veux bien prendre en main le début du bilan, mais qu'est-ce que je dois analyser, qu'est-ce que je dois dire ? Et en fait je pense que avant c'était je fais un bilan sur bon bah comment vous vous êtes senti ? Est-ce qu'il y a eu des difficultés ? Est-ce que c'était réussi pas réussi, là maintenant elle se rend compte qu'un bilan c'est il faut cibler ses questions pour aboutir à revenir sur l'objectif de séance en fait. Chose qui avait pas avant ».

On peut donc identifier une prise de conscience de la part de l'enseignante de classe de la nécessité de diriger ce temps de mise en commun en fonction des objectifs poursuivis mais elle semble ne pas se sentir en capacité de le faire sans l'aide de Mélanie.

3. *Institutionnalisation*

Dans les deux séances observées aucun savoir n'est institutionnalisé. Un bilan est tout de même réalisé par Mélanie avec les élèves à BEP dans le temps d'externalisation de fin de séance. Les éléments

figurant dans ce bilan reprennent volontairement les propos des élèves mais restent parfois très contextualisés (« on savait pas combien Juliette avait de billes, j'ai compris avec le matériel que Juliette en avait 15 en plus que Léo que j'ai pris les dizaines et les unités pour faire $79 - 15$ ») et difficilement utilisable et transférable (« la prochaine fois je dois comprendre ce que veut dire en plus ou en moins »).

Les affichages utilisés lors des séances observées nous renseignent cependant sur les éléments institutionnalisés dans les séances antérieures. Par exemple, on peut voir sur l'Annexe 3 une classification des problèmes en fonction de ce que l'on cherche avec l'affichage en dessous des problèmes référents traités en co-enseignement. Cet affichage semble incomplet (on ne retrouve pas les problèmes de comparaison par exemple) et on peut se questionner sur son utilisabilité (si je cherche combien ça fait en tout, dois-je utiliser la multiplication ou l'addition ?).

On voit qu'il y a une volonté d'institutionnaliser des choses, de garder trace de ce qui a été travaillé dans les séances de co-enseignement (et au-delà du résultat, plutôt sur la démarche et les procédures). C'est pourtant un élément qui n'est pas évoqué par les enseignantes durant les entretiens, cela ne semble pas faire l'objet d'une co-planification et il n'y a pas d'élément non plus dans les documents relatifs à la séquence fournis par Mélanie. En effet, dans les fiches de préparation, figurent les questions à poser aux élèves au moment de la mise en commun mais pas les éléments à institutionnaliser.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ces premières analyses montrent une évolution des pratiques d'enseignement relative à la résolution de problèmes arithmétiques. Deux processus différents semblent se dégager. Tout d'abord, l'enseignante spécialisée, en tant que personne ressource pour l'éducation inclusive, vient bouleverser les pratiques de l'enseignante de classe. Cela s'observe notamment dans le choix des tâches proposées (avec une volonté de travailler davantage sur le raisonnement que sur le résultat), dans l'apport d'autres modalités de différenciation et de réponse aux besoins ainsi que dans l'exploitation des productions des élèves. C'est l'enseignante spécialisée qui est force de proposition (avec comme appui les gestes professionnels acquis durant sa formation et les recherches théoriques effectuées pour la préparation du projet de co-enseignement). L'enseignante de classe est d'abord en retrait et observatrice de ces pratiques mais il y a un glissement qui s'amorce au cours du co-enseignement avec une plus grande implication de celle-ci (notamment dans les phases de mise en commun). Ensuite, en cours d'année, le binôme va se fixer des objectifs en vue d'améliorer son co-enseignement (en référence aux items de Tremblay, 2023), ce qui va à nouveau faire évoluer leurs pratiques. Cela s'observe en particulier au niveau de la lecture et de l'interprétation des productions des élèves, qui sont rendues explicites grâce aux échanges entre les enseignantes durant la séance, nécessaires au vu des modalités de co-enseignement (les deux enseignantes travaillent avec tous les élèves).

Il est difficile à ce stade de l'étude d'interpréter ces changements de pratiques en termes d'exercice de la vigilance didactique. Des analyses plus pointues sont à prévoir, en appui, par exemple, sur les recherches de Guille-Biel et Mangiante (2023). Nous envisageons également de croiser ces résultats avec l'analyse des données recueillies pour le second binôme participant à la recherche et ayant mis en place un projet de co-enseignement autour de la résolution de problèmes. Par ailleurs, le suivi des binômes est renouvelé pour l'année 2024-2025, ce qui nous permettra d'étudier leur évolution sur une plus longue durée.

RÉFÉRENCES

- Berdonneau, C. (2006). *Aider les élèves en difficulté en maths CP et CE1 : Tome 1*. Hachette éducation.
- Bergeaut, J.-F. (2012). Résolution de problèmes et difficultés en mathématiques. *Bulletin de l'APMEP*, 499, 306-308.
- Charles-Pézard, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30(2), 197-261.
- Charles-Pézard, M., Butlen, D. et Masselot, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques ? Quelle formation ?* La pensée sauvage
- Cortay, C. et Gilger, C. (2018). *M@ths en-vie. La photographie au service de la résolution de problèmes*. Génération 5.
- Davesnes, A., Ménard, I. et Peteers, F. (2022). Inclusion mixte et résolution de problèmes. *Au fil des maths*, 545, 4-12.
- Grandclément, M., Roussel, N., Siard, R. et Xercavins, C. (2020). *Une démarche pour résoudre des problèmes arithmétiques au cycle 2*. Centre Alain Savary.
- Guille-Biel Winder, C. et Mangiante-Orsola, C. (2023). Contribution à l'étude de l'exercice de la vigilance didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 43(2), 199-240.
- Feyfant, A. (2015). La résolution de problèmes de mathématiques au primaire. *Dossier de veille de l'IFÉ*, (105), 4-18.
- Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, (100), 59-78.
- Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.
- Noël, M. P. et Karagiannakis, G. (2020). *Dyscalculie et difficultés d'apprentissage en mathématiques. Guide pratique de prise en charge*. De Boeck Supérieur.
- Peteers, F. (2023). Inclure les élèves à BEP en résolution de problèmes : travail d'anticipation en ULIS et en RASED. *Revue de Mathématiques pour l'école*, (240), 80-91.
- Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.
- Toullec-Théry, M. (2020). Ingénieries didactiques coopératives et coenseignement pour contribuer à une scolarisation inclusive. *Éducation et francophonie*, 48(2), 116-138.
- Tremblay, P. (2017). Co-enseignement : transformation des dispositifs inclusifs. *Diversité*, 190(1), 69-74.
- Tremblay, P. (2020). Le coenseignement: fondements et redéfinitions. *Éducation et francophonie*, 48(2), 14-36.
- Tremblay, P. (2023). *Coenseignement*. Academia.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-170.

ANNEXE 1
SUPPORT ÉLÈVE, SÉANCE DE COENSEIGNEMENT JANVIER 2024

Problème 1 :	Problème 2 :
Après la récréation, Léo et Juliette comparent leurs quantités de billes. Léo a 79 billes. Il en a 15 de moins que Juliette.	Après la récréation, Léo et Juliette comparent leurs quantités de billes. Léo a 79 billes. Il en a 15 de plus que Juliette.
Combien de billes Juliette a-t-elle ? Qui a gagné et pourquoi ?	Combien de billes Juliette a-t-elle ? Qui a gagné et pourquoi ?

ANNEXE 2
SUPPORT ÉLÈVE, SÉANCE DE COENSEIGNEMENT MAI 2024

Un bus part de Grigny à destination de Corbeil Essonne. En route, il fait un arrêt à Ris-Orangis puis un arrêt à Evry-Courcouronnes. A Grigny, 20 passagers montent.						
	JE COMPRENDS	QUESTIONS	SCHÉMAS	SCHÉMAS EN BARRES	CALCULS	PHRASES RÉPONSES
ETAPE 1 : A Ris-Orangis, 5 passagers descendent et 15 montent.	Est-ce qu'il y aura plus ou moins de passagers ?	 ?				
ETAPE 2 : A Evry, 10 passagers descendent et 5 montent.	Est-ce qu'il y aura plus ou moins de passagers ?	 ?				
Combien de passagers le bus transporte-t-il en arrivant à Corbeil-Essonnes ?						

ANNEXE 3

AFFICHAGE DES DIFFERENTS TYPES DE PROBLEMES



Résumé | Nous nous intéressons à l'acquisition des connaissances spatiales chez des élèves de cycle 3 (10 ans) utilisant un robot de sol, en France. Nous choisissons de mettre en œuvre une situation didactique dans une classe, dont certains élèves rencontrent des difficultés d'apprentissage durables. Notre étude exploratoire organisée en ingénierie coopérative va nous permettre d'analyser ces premières mises en œuvre et de concevoir des situations accessibles à tous les élèves.

Mots-clés : robot de sol, programmation, pratiques inclusives, connaissances spatiales, ingénierie coopérative.

Abstract | This paper focuses on the acquisition of spatial knowledge by cycle 3 students (10 years old) using a floor robot, in France. We have chosen to implement a didactic situation in two classes, some of whose students have long-standing learning difficulties. Our cooperative engineering exploratory study will allow us to analyze these first implementations and to design situations accessible to all students.

Keywords: floor robots, programming, inclusive practices, spatial knowledge, cooperative engineering.

I. INTRODUCTION

En France, depuis la rentrée 2016, l'algorithmique et la programmation (MEN, 2020) font désormais partie des programmes scolaires de mathématiques. La programmation est envisagée en lien avec des connaissances en géométrie « (Se) repérer et (se) déplacer en utilisant des repères et des représentations : programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran » (MEN, 2020, p. 62). Elle se poursuit au cycle 3 par l'action de « programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran en utilisant un logiciel de programmation » (MEN, 2023, p. 107). Mari (2022) établit des liens étroits possibles entre la programmation des robots et le développement des connaissances spatiales précédemment travaillées par Berthelot et Salin (1992). Elle explique que l'articulation entre les activités « papier-crayon et robot » semble être la plus pertinente pour développer le maximum de connaissances spatiales.

Par ailleurs, dans la perspective d'une école inclusive, nous envisageons de concevoir des situations didactiques, qui puissent être accessibles à tous les élèves (Suau et Assude, 2016 ; Assude et al., 2014), en nous appuyant sur l'accessibilité didactique, à savoir « l'ensemble des conditions permettant aux élèves d'accéder à l'étude des savoirs » (Assude et al., 2014, p. 36). Nous choisissons de mettre en œuvre une situation didactique dans une classe de CM2 (élèves âgés de 10 ans), dont certains élèves bénéficient du dispositif ULIS (Unité Localisée pour l'inclusion scolaire), en tant qu'« une des modalités de mise en œuvre de l'accessibilité pédagogique » (Circulaire n° 2015-129 du 21-8-2015). Cette structure permet aux élèves reconnus institutionnellement handicapés (ERIH) d'avoir une scolarité dans une classe ordinaire tout en bénéficiant d'un dispositif de soutien à cette scolarisation.

Pour concevoir des situations accessibles à tous les élèves, nous organisons une ingénierie coopérative (voir paragraphe II.2). Dans le cadre de cette communication, nous présentons la première année de cette ingénierie coopérative, comme étant une étude exploratoire. Nous allons décrire et analyser ce qui se passe en classe, en orientant notre attention sur des élèves, dont certains bénéficient

* ELLIADD – France – francine.athias@univ-fcomte.fr

** CREAD – France – aurelie.vergon-dartois@univ-fcomte.fr

*** CREAD – France – caroline.perraud@inspe-bretagne.fr

du dispositif ULIS, et sur la professeure, de manière à mettre en évidence les moments qui nécessitent une attention particulière, que ce soit au niveau de la situation et des contenus ou au niveau des échanges entre la professeure et l'élève. Cette attention nous conduira à modifier ou à adapter la mise en œuvre pour l'année scolaire suivante, dans un mouvement itératif caractéristique de l'ingénierie didactique coopérative telle que nous la concevons.

II. CADRE THÉORIQUE ET ÉLÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES

1. *Théorie de l'action conjointe en didactique*

Sur le plan épistémologique, nous nous inscrivons dans une perspective pragmatique et systémique. Dans cette perspective, un premier objet de notre étude est de comprendre comment les instances professeur, élèves et savoir interagissent et comment se coordonnent leurs interactions dans le contexte institutionnel qui les fonde. L'action sera modélisée par des éléments de la théorie de l'action conjointe en didactique (TACD, Sensevy, 2011 ; CDpE, 2019).

Différents moments dans le déroulement de l'action sont modélisés par la notion de jeux d'apprentissage successifs. Chaque jeu d'apprentissage est caractérisé par un nouvel enjeu de savoir. Pour décrire un jeu d'« apprentissage », il est nécessaire de décrire les habitudes d'action et de connaissances déjà-là, modélisés par la notion de contrat didactique (Brousseau, 1998 ; CDpE, 2019). C'est à partir de ce déjà-là que le professeur et les élèves vont agir pour résoudre ce qui fait problème. C'est en résolvant le problème que les élèves vont apprendre ce qui est à apprendre. Dans ce modèle, le milieu est vu comme la structure du problème, qu'il nous faut décrire de façon dynamique (Brousseau, 1998 ; CDpE, 2019). Nous choisissons de modéliser les différents moments en appui sur les concepts de contrat et de milieu didactiques (sans revenir au concept de jeu d'apprentissage).

2. *Ingénierie coopérative*

Pour concevoir des situations accessibles à tous les élèves et pour les mettre en œuvre, nous organisons une ingénierie coopérative (CDpE, 2024) qui réunit un collectif de professeurs et de chercheurs (Sensevy et al., 2013 ; CDpE, 2024). L'ingénierie coopérative est une ingénierie dont le but est la production conjointe par des professeurs et des chercheurs (qui s'intéressent à la pratique de professeurs) de dispositifs : il s'agit d'agencer un instrument (ici un instrument numérique tel que le robot de sol), une logistique (ici, l'usage de ce robot de sol dans la classe), des gestes d'enseignement (ici, prendre du temps avec chaque élève) et enfin une séquence d'enseignement-apprentissage (ici une séquence intégrant un robot de sol) (CDpE, 2024), permettant à tous les élèves (dont les élèves à besoins éducatifs particuliers) d'apprendre.

3. *Connaissances en jeu*

La robotique pédagogique se situe au carrefour de deux approches : les activités de manipulation des objets tangibles (robots) pour créer un environnement d'apprentissage, un micro-monde (Balacheff, 2017). L'activité de robotique consiste donc principalement à piloter le robot à l'aide d'un langage de programmation. Le robot programmable mémorise une suite de commandes et les exécute séquentiellement. Il peut permettre ainsi à l'élève d'explorer l'espace par l'intermédiaire de la technologie. La bluebot est un objet programmable (cf figure 1). Elle est contrôlée par une interface tangible, qui est sur la partie supérieure du robot (cf figure 2).



Figure 1 – La bluebot, vue de face



Figure 2 – La bluebot, vue de dessus

Les quatre boutons orange (sur la vue du dessus, cf fig.2) permettent de programmer l'orientation du robot (avancer d'un pas, reculer d'un pas, pivoter à droite, pivoter à gauche). Le bouton vert sert à exécuter les instructions ainsi programmées (« go »). Les deux boutons bleus organisent le contrôle de l'exécution du programme : « II » ou pause est une instruction d'interruption momentanée de l'exécution du programme ; « X » ou Clear est un effacement des commandes systématiquement enregistrées en mémoire. La manipulation de ces boutons doit amener les élèves à développer des connaissances liées à la programmation.

Dans le même temps, l'usage de la bluebot permet le travail des connaissances spatiales, en particulier le déplacement d'un objet extérieur à soi : il s'agit de s'approprier la notion de déplacement relatif (celui du robot, sachant que les yeux du robot donnent la direction du déplacement du robot) et de déplacement absolu (celui du robot en comparaison avec des éléments extérieurs au robot, par exemple le robot se déplace du « côté de la fenêtre »).

En appui sur ces éléments théoriques, nous cherchons à montrer ce qui se passe en classe lorsque des robots de sol sont utilisés dans le cadre d'une séquence élaborée au sein de l'ingénierie coopérative. Il s'agit également de mettre en évidence la place des élèves ayant des besoins éducatifs particuliers. En particulier, nous voulons montrer qu'à certains moments, il nous faudra envisager des adaptations pour permettre à chacun de pouvoir bénéficier des apports de connaissances spatiales, technologiques et algorithmiques.

4. Éléments méthodologiques

Pour tenter de répondre à notre questionnement, nous filmons les séances de classe sachant que nous organisons ces situations en classes ordinaires, dans lesquelles des élèves ont des troubles d'apprentissage reconnus. Nous établissons des tableaux synoptiques, à partir desquels nous dégageons des moments. Ces derniers concernent le déroulement de la classe, des actions d'un élève et du professeur ou des actions d'un élève à besoins éducatifs particuliers.

III. SITUATIONS DE CLASSE

1. La séquence

Le collectif d'ingénierie coopérative compte deux chercheuses, deux professeures qui enseignent en CE1 (deuxième année), deux professeurs de CM2 (cinquième année) qui interviennent ensemble en classe avec le coordonnateur de la classe ULIS. Nous envisageons le même plan de séquence pour tous les élèves. Dans le cadre de cet article, nous nous intéressons plus spécifiquement à une classe de CM2.

Nous présentons le plan de la séquence et nous proposons l'étude de deux moments spécifiques dans cette classe de CM2 (cf tableau 1).

Tableau 1

Séances	Objets
Séance 1	Découverte des robots
Séance 2	Codage simple du déplacement d'un robot
Séance 3	Décodage d'un programme simple (c'est au cours de cette séance que nous développerons quelques moments)
Séance 4	Codage complexe du déplacement d'un robot
Séance 5	Décodage d'un programme complexe
Séance 6	Évaluation

2. Un moment

Dans cette partie, nous allons d'abord présenter le problème posé aux élèves, puis proposer une analyse *a priori*. Nous décrirons l'action de deux élèves et nous l'analyserons.

Ce moment se situe au cours de la séance 3. L'élève dispose d'une feuille de route : une feuille de papier sur laquelle est écrit le programme, la position et l'orientation du robot sur un quadrillage réduit (cf fig.3).

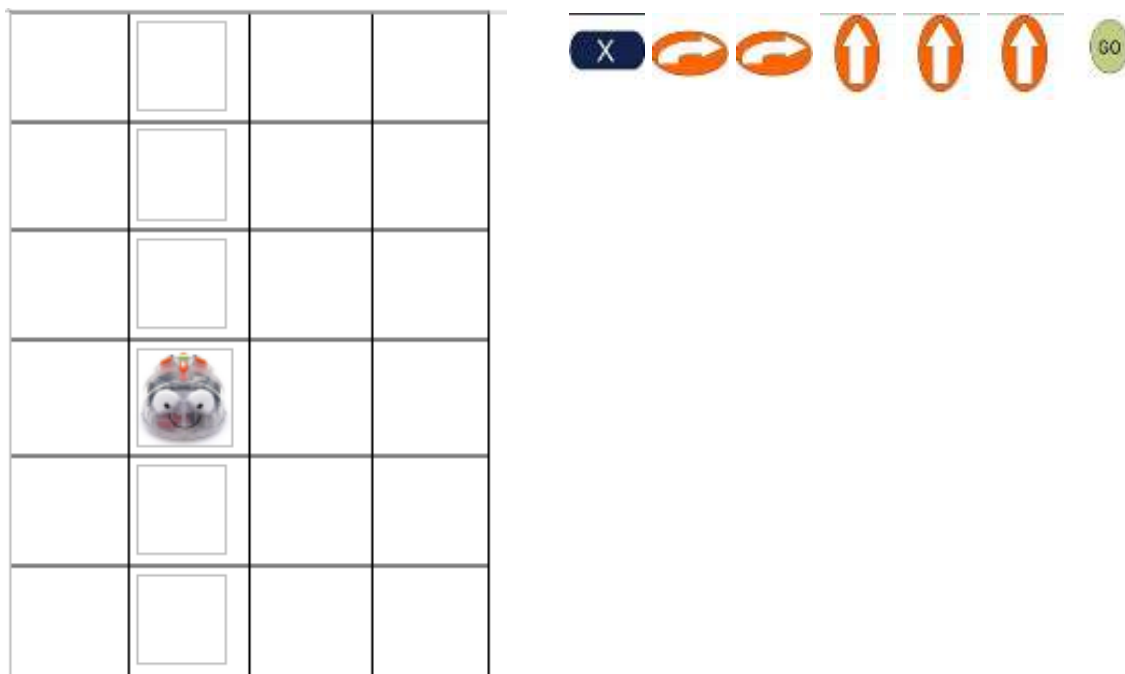


Figure 3 – Une feuille de route

Sur la table de travail, l'élève doit décoder puis tracer le chemin qui sera parcouru par la bluebot et noter la case d'arrivée sur la feuille de route. Lorsque l'élève a terminé, il se déplace vers le quadrillage sur lequel va se déplacer la bluebot. Puis, sur ce quadrillage en vraie grandeur, l'élève va placer le robot

comme indiqué sur la feuille de route, en respectant la position et l'orientation. Il place un objet (cube Lego) dans la case qui devrait être atteinte par le robot. Il programme le robot pour vérifier qu'il atteint la case proposée (matérialisée par un cube Lego).

Nous allons maintenant présenter une analyse *a priori* de ce qui est attendu de l'élève. Pour placer le robot sur le quadrillage réel, l'élève peut prendre des indices sur le quadrillage réduit (par exemple troisième ligne à partir du « bas »). Ces indices peuvent être repris sur le quadrillage réel, car les quadrillages sont les mêmes dans les deux espaces (micro-espace et méso-espace). Nous ne reviendrons pas sur le placement initial, car tous les élèves y parviennent. Le robot est placé de sorte que les yeux soient vers « le bas ». Il se trouve dans le sens opposé à l'élève (qui se place souvent face au quadrillage réel). Le programme à décoder est le même (croix, pivoter à droite, pivoter à droite, avancer, avancer, avancer, go). La position du robot n'est pas la même (quatrième colonne et deuxième colonne, cf fig 4 et 5). L'orientation du robot est la même (face à l'élève). Autrement dit, nous allons considérer que ces feuilles de route sont très proches et représentent les mêmes enjeux de savoir. Le double pivot (qu'il soit à droite ou à gauche) permet au robot de se mettre dans le même sens que l'élève. La flèche « avancer » conduit à un déplacement « en avant » par rapport à l'élève. Cette analyse rapide nous permet de dire que le décodage de programme est aisé : le double pivot permet de placer le robot dans le même sens que l'élève, l'avance de trois pas dans une telle position est facile.

Nous décrivons maintenant l'action de deux élèves, Enzo et Stan. Nous n'avons pas vu les élèves travailler sur la table (la professeure était ailleurs). Lorsqu'ils arrivent sur le quadrillage réel, ils ont dessiné le chemin¹, par un trait (pour Enzo) ou par trois flèches (pour Stan) (cf fig. 4 et 5).

Enzo place le robot au bon endroit. Il place le cube Lego indiquant l'arrivée. Il programme le robot, il appuie alors sur la touche « go » du robot. Il regarde le robot atteindre la case visée. Il prend le robot et s'en va.

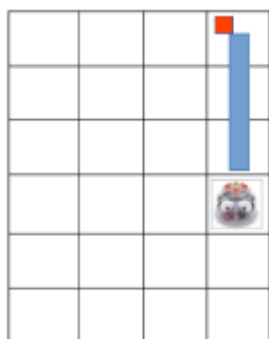


Figure 4 – La feuille de l'élève Stan

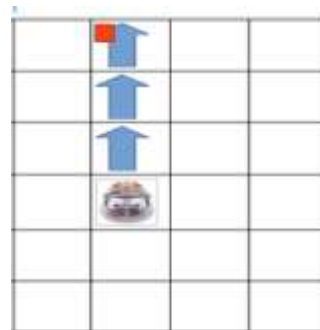
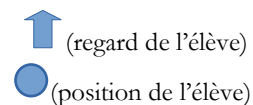


Figure 5 – La feuille de l'élève Enzo

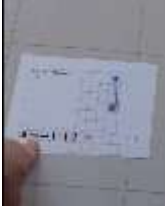


Nous nous intéressons maintenant à ce qui se passe avec Stan. Comme Enzo, l'élève a déterminé le chemin en étant sur la table (cf fig.4). Il pose la bluebot au bon endroit. Sur le quadrillage en vraie

¹ Les feuilles des élèves ont été reproduites pour être plus lisibles.

grandeur. Contrairement à ce qui s'est passé avec Enzo, la professeure qui est présente depuis le début, intervient. Elle demande à l'élève d'expliquer (cf tableau 2).

Tableau 2

– P : Qu'est-ce que le robot va faire d'abord ? – S : Il va pivoter à droite (<i>il montre le robot et pointe la touche pivoter à gauche, en utilisant sa main gauche. Puis il ajoute</i> euh à gauche, euh à droite, je ne sais plus.	
– P : Là c'est vers la gauche ? (L'élève pointe la touche pivoter à gauche, en utilisant sa main droite)	
– P : Et là c'est quoi comme flèche ? (En montrant la feuille de route)	
– P : C'est celle-là ou celle-là (en montrant les touches de changement de directions du robot). – E : C'est celle-là parce qu'elle est à l'envers	

Puis, l'élève place le cube dans une des cases du quadrillage. Il programme le robot. Il regarde le robot atteindre le cube.

Nous allons maintenant analyser ces deux moments, en appui sur les éléments théoriques que nous avons esquissés et en appui sur notre questionnement concernant les pratiques inclusives. Les deux élèves, Enzo et Stan, ont produit un chemin qui correspond à ce qui est attendu. Le milieu didactique, en tant que ce qu'il y a à faire, organisé entre la feuille de route (micro-espace) et le quadrillage réel (més-espace) est facilement accessible pour les deux élèves. Anticiper le chemin que la bluebot va réaliser lorsque le programme sera effectué est possible pour ces deux élèves. La feuille de route atteste de cette réussite. Les deux élèves connaissent la signification de la touche « avancer », lorsque le robot se trouve dans la même orientation qu'eux. Nous pouvons le voir sur les deux feuilles de route (avec une flèche ou avec un trait). Concernant la touche « pivoter », nous pouvons dire que l'effet de la touche pivoter deux fois correspond à un demi-tour et que les deux élèves semblent avoir compris que le double pivot vers la gauche ou vers la droite permet au robot de réaliser un demi-tour et de se placer dans le même axe qu'eux.

Une différence dans la relation didactique est notable : dans le premier cas, l'élève agit sans intervention de la professeure. Dans le deuxième cas, l'élève ne peut pas agir, car la professeure lui demande d'explicitier d'abord ce qu'il y a à faire. Les demandes de verbalisation de la professeure mettent en évidence les difficultés de l'élève : lorsque le robot est « en face de lui », l'élève a du mal à repérer la droite et la gauche. C'est donc la question de la professeure qui amène une difficulté, qui n'aurait pas été visible sans l'intervention de la professeure. C'est donc la question de la professeure qui rend visible le problème. Autrement dit, le milieu verbal (les questions de la professeure) vient densifier le milieu, qui devient alors inaccessible.

Une question se pose pour la professeure. Les deux élèves ont produit la même feuille de route. Pourquoi Stan doit-il expliciter ce qu'il fait ? Suite aux échanges avec la professeure, nous savons qu'elle veut vérifier si Stan a compris car Stan fait partie du dispositif ULIS (Enzo n'a pas de problème d'apprentissage particulier). En faisant cette demande, elle a une attention particulière pour Stan, ce qui n'est pas le cas avec Enzo. Elle nous a expliqué qu'elle ne s'attendait pas à à mettre Stan en difficulté. Nous savons que le rôle du langage permet de définir les objets et les propriétés (Vergnaud, 1991) et de développer un « jargon » (Sensevy et al., 2021) : un des enjeux dans l'usage de robot de sol est de parler un même jargon pour exprimer des connaissances spatiales dans des situations de programmation. En faisant cela, la professeure met en difficulté l'élève.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Un des enjeux de notre travail dans le collectif d'ingénierie coopérative consiste donc à mettre en évidence des moments pour lesquels les pratiques inclusives pourraient être documentées. Nous ne pouvons pas en rester à de tels constats. Permettre aux élèves bénéficiant du dispositif ULIS de développer de nouvelles connaissances doit nous conduire, professeurs et chercheurs, à aménager les situations de manière à ce qu'elles soient réellement plus accessibles. Le travail que nous avons présenté ici fait partie des premiers échanges dans le collectif. La professeure choisit de demander une explicitation à un élève et non à un autre. Cette demande de verbalisation est nécessaire (nous voyons que l'élève peut agir, mais qu'il ne sait pas expliquer). Dans le même temps, elle place l'élève dans une situation impossible. Et à ce moment, ni l'élève ni la professeure n'a les moyens de faire autrement. Une nouvelle piste est explorée dans les nouvelles mises en œuvre : il s'agit de permettre aux élèves de programmer le robot et de faire verbaliser les actions au fur et à mesure du déplacement du robot.

RÉFÉRENCES

- Assude, T., Perez, J.-M., Suau, G., Tambone, J. et Vérillon, A. (2014). Accessibilité didactique et dynamique topogénétique : une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 33-57.
- Berthelot, R. et Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* [Thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies – Bordeaux I]. HAL theses.
<https://theses.hal.science/tel-00414065/>
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques 1970-1990* (Textes rassemblés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield). La pensée sauvage.
- Balacheff, N. (2017). Seymour Papert (1928-2016). Aux sources d'une pensée innovante et engagée. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 37(2/3), 383-396.
- Collectif Didactique pour enseigner. (2019). *Didactique pour enseigner*. Presses universitaires de Rennes.
- Collectif Didactique pour enseigner. (2024). *Un art de faire ensemble*. Presses universitaires de Rennes.

- Mari, E. (2022). *Potentialités de la robotique pédagogique pour le développement de connaissances spatiales à l'école* [Thèse de doctorat, Université Aix Marseille]. <https://amu.hal.science/tel-03872631/>
- Ministère de l'Éducation Nationale. (2020, 30 juillet). Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2). *Bulletin Officiel*, (31). <https://www.education.gouv.fr/bo/20/Hebdo31/MENE2018714A.htm>
- Ministère de l'Éducation Nationale. (2023, 22 juin). Programme d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 3). *Bulletin Officiel*, (25). <https://www.education.gouv.fr/bo/2023/Hebdo25>
- Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir : éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck.
- Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S. et Morales, G. (2013). Cooperative engineering as a specific design-based research. *ZDM*, 45(7), Article 7. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0532-4>
- Sensevy, G., Le Henaff, C., Bloor, T., Joffredo-Le brun, S. et Gruson, B. (2021). La TACD et le langage : la notion de jargon, ses sources, ses raisons d'être et ses affinités. Dans M.-J. Gremmo (dir.), *Actes du 2^e Congrès TACD « Pour une reconstruction de la forme scolaire »* (Vol. 2, p. 221-240).
- Suau, G. et Assude, T. (2016). Pratiques inclusives en milieu ordinaire : accessibilité didactique et régulations. *Carrefours de l'éducation*, 42(2), 155-169. <https://doi.org/10.3917/cdle.042.0155>
- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-169.

ARTICULATION ENTRE SYSTÈMES DIDACTIQUES AUXILIAIRES ET PRINCIPAL DANS UN DISPOSITIF D'AIDE PRÉVENTIF

| GUILLE-BIEL WINDER* CLAIRE

Résumé | Nous avons développé un dispositif d'aide préventif visant à créer des conditions favorables pour que des élèves puissent prendre leur place en tant qu'apprenants et la garder tout au long d'une activité mathématique. Ce dispositif, qualifié de préventif, consiste à prendre en charge, avant et après une séance de classe, un même petit groupe d'élèves pouvant éprouver des difficultés. Notre communication vise à interroger l'articulation entre le système didactique principal et les deux systèmes didactiques auxiliaires.

Mots-clés : dispositif d'aide préventif, système didactique, mesogenèse, chronogenèse, topogenèse

Abstract | We have developed a preventive support scheme designed to provide favorable conditions for students to take their place as learners and maintain it throughout a mathematical activity. This preventive support scheme consists of taking charge, before and after a class session, of the same small group of students who may be experiencing difficulties. Our paper aims to question the articulation between the principal didactic system and the two auxiliary didactic systems.

Keywords: Preventive support scheme, didactic system, mesogenesis, chronogenesis, topogenesis

I. INTRODUCTION

Cette communication prend appui sur les recherches que nous¹ menons au Québec et en France depuis plusieurs années. Nous avons en effet développé un dispositif d'aide original visant à créer en amont et en aval d'une activité mathématique, des conditions favorables pour que des élèves puissent prendre leur place en tant qu'apprenants et la garder tout au long de l'activité (Theis et al., 2014, 2016 ; Assude et al., 2016a, 2016b). À ce titre il a été qualifié de *dispositif d'aide préventif* (Assude et Millon-Fauré, 2021). Ce dispositif consiste à prendre en charge (par un·e intervenant·e²) avant et après une séance de classe menée par un·e enseignant·e, un même petit groupe d'élèves pouvant, selon cet·te enseignant·e, éprouver des difficultés dans la résolution d'un problème que la classe aura à résoudre. La séance en amont vise à permettre à ce petit groupe d'élèves de rencontrer le problème, mais sans faire avancer le temps didactique, la séance en aval à revenir avec eux sur le problème traité en classe. Ces deux séances, planifiées en cohérence avec l'activité de classe — et conjointement par l'enseignant·e et l'intervenant·e le cas échéant —, ont pour but de valoriser l'engagement et la synchronicité des élèves en difficulté avec le temps didactique.

Nous inscrivons nos travaux dans la Théorie Anthropologique du Didactique, en convoquant tout d'abord la notion *d'organisation praxéologique* (ou praxéologie) (Chevallard, 1992). Nous adoptons en outre un point de vue systémique (Chevallard, 1999) en considérant la classe comme un système didactique principal (SDP) et les deux composantes du dispositif préventif comme des systèmes didactiques auxiliaires (SDA_{pré} et SDA_{post}) dépendant du SDP notamment à travers les enjeux de savoirs visés par le SDP qui pilotent également les SDA. La structure d'un tel dispositif peut alors se modéliser sous la forme suivante (figure 1). L'existence de ces trois systèmes didactiques pose la

* AMPIRIC, ADEF, Aix-Marseille Université – France – claire.winder@univ-amu.fr

¹ L'équipe de chercheur·e·s est actuellement composée de Teresa Assude (ADEF, AMU), Claire Guille-Biel Winder (ADEF, AMU), Jeanne Koudogbo (Université de Sherbrooke), Patricia Marchand (Université de Sherbrooke), Karine Millon-Fauré (ADEF, AMU), Marie-Pier Morin (Université de Sherbrooke), Jeannette Tambone (ADEF, AMU) et Laurent Theis (Université de Sherbrooke).

² Cet intervenant·e peut être l'enseignant·e de la classe ou un·e orthopédagogue.

question de leur articulation. Dans cette communication nous cherchons plus particulièrement à identifier des conditions favorisant l'articulation mésogénétique. Après avoir présenté nos points d'appui théoriques (partie II), nous explicitons les éléments de contexte relatifs à l'étude de cas (partie III). Nous réalisons enfin (partie IV) une première étude de l'articulation entre les différents systèmes didactiques en présence.



(Source : Guille-Biel Winder et al., 2023, p. 98)

Figure 1 – Dispositif d'aide préventif

II. POINTS D'APPUI THÉORIQUES

1. Notion de triplet de genèse

Dans nos analyses, nous convoquons la notion de *mésogenèse* (Chevallard, 1992 ; Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000 ; Sensevy et Mercier, 2007) qui porte sur la manière dont se construit la référence du savoir dans la classe par l'intermédiaire des objets du milieu et du rapport à ces objets. Nous distinguons les *ostensifs* (Bosch et Chevallard, 1999) qui sont dotés d'une certaine matérialité leur permettant d'être manipulés ou perçus, c'est-à-dire appréhendés par les sens (Bosch et Perrin-Glorian, 2013), des non-ostensifs (comme les concepts). Nous intéressons également à certains *objets migrants* (Tambone, 2014 ; Tambone et Mercier, 2003), qui passent d'un système didactique à l'autre et participent du milieu didactique propre à chaque système. L'étude du milieu permet ainsi de déterminer une certaine articulation pouvant exister entre les différents systèmes didactiques principaux et auxiliaires, que Assude (*à paraître*) qualifie d'*articulation mésogénétique*. Nous revenons sur les différents types d'articulation mésogénétique dans ce qui suit.

2. Typologie des articulations mésogénétiques SDA-SDP

Dans le prolongement des travaux de Leutenegger (2000) et Gobert et al. (2021), nous identifions quatre types d'articulation envisageables entre un SDA et un SDP (Guille-Biel Winder, 2025), caractérisés en fonction des objets de savoirs en jeu et de leur statut dans ces systèmes ainsi que des objets migrants. Les systèmes didactiques sont dits *accrochés* lorsque tous les objets de savoir sensibles — c'est-à-dire constituant des objectifs d'apprentissage relevés par l'institution pour les élèves du niveau de classe considéré Mercier (1995) — sont communs au SDA et au SDP et que les objets migrants sont nombreux entre SDP et SDA. Dans ce cas, les milieux didactiques présentent une réelle proximité (Gobert et al., 2021). *A contrario*, lorsque les objets de savoirs sensibles sont distincts ou certains sont communs mais travaillés de façon différente, et les objets migrants absents, les milieux didactiques sont disjoints et les systèmes didactiques sont dits *décrochés* (op. cit.). De plus, nous avons mis au jour deux types de systèmes didactiques dont les milieux sont partiellement conjoints. Nous parlons de systèmes didactiques *partiellement accrochés avec diversification du milieu didactique auxiliaire* lorsque les objets sensibles du SDP sont communs au SDA mais que d'autres objets de savoirs non sensibles viennent diversifier ou enrichir le milieu didactique du SDA, et que certains objets (mais pas tous) migrent du SDA vers le SDP (op. cit.). Ils sont dits *partiellement accrochés avec réduction du milieu didactique auxiliaire* (Guille-Biel Winder, *à paraître*), lorsque des objets de savoirs sensibles et éventuellement désensibilisés — c'est-à-dire anciennement sensibles (Mercier, 1995) — du SDA sont communs avec

certain du SDP, mais que d'autres objets de savoirs sensibles viennent enrichir le milieu didactique du SDP – certains objets (mais pas tous) migrant ainsi du SDP vers le SDA. Afin de réaliser l'analyse, nous prenons appui sur un exemple, issu d'une étude de cas (Guille-Biel Winder et al., 2023 ; Millon-Fauré et al., 2022), et présenté dans la partie suivante.

III. PRÉSENTATION D'UN EXEMPLE

La séance de classe considérée dans cet exemple s'inscrit dans le contexte de l'enseignement des fractions au Québec et porte sur le type de tâches « trouver le tout à partir d'un ou plusieurs quantités de ce tout » (Van de Walle et al., 2008). Durant cette séance, trois tâches sont successivement proposées aux élèves en appui sur du matériel : reconstituer le tout à partir d'un quart de ce tout (tâche 1) représenté par un petit carré en carton (figure 2a), d'un tiers d'un tout (tâche 2) représenté par une réglette Cuisenaire® (figure 2b), de trois cinquièmes d'un tout (tâche 3) représentés par un rectangle en carton (figure 2c).



Figure 2 – Trois tâches successives

1. Éléments d'analyse

L'analyse *a priori* de la situation, que nous ne reprenons pas ici³, met en lumière différentes difficultés envisageables (Guille-Biel Winder, 2025). Certaines sont liées aux savoirs en jeu (concernant la compréhension de la [des] signification[s] du concept de fraction ou du sens de l'écriture fractionnaire, la conception de fractions supérieures à 1, la connaissance ou la prise en compte de relations mathématiques sous-jacentes aux techniques employées ou la compréhension de l'enjeu d'apprentissage), ou aux savoirs anciens (comme la première signification du concept de fraction). D'autres difficultés sont relatives aux techniques et à leur mise en œuvre, conduisant les élèves à réaliser la tâche inverse, ou à reproduire un quantième un nombre erroné de fois, ou bien encore à ne pas réutiliser, dans la tâche 3, les techniques mises au jour dans les tâches 1 et 2. Il existe également des difficultés spécifiques à l'utilisation du matériel proposé, notamment pour les réglettes Cuisenaire® leur changement de statut (d'unités de dénombrement à « tout de référence »), ou la modification des nombres associés à une même réglette. Enfin, des difficultés de compréhension de la consigne peuvent apparaître (incompréhension des termes utilisés ou du sens même de cette consigne). Par ailleurs des difficultés relatives à la prise de position de l'élève dans son topos d'élève peuvent également faire jour : elles peuvent être consécutives au fait que le contenu de la séance est difficilement accessible pour cet élève, ou bien être corrélées au rapport que ce dernier entretient avec les mathématiques, voire avec l'école. À partir de ces difficultés, plusieurs pistes sont envisageables pour implémenter le dispositif d'aide préventif (Guille-Biel Winder, 2025 ; Millon-Fauré et al., 2022). Nous les présentons dans ce qui suit.

2. Différents SDA_{pré} envisageables dans le dispositif d'aide préventif

SDA_{pré} 1. Afin de pallier les difficultés relatives aux savoirs en jeu (sensibles et/ou désensibilisés), l'intervenant·e peut interroger les élèves sur le concept de fraction (savoir désensibilisé) : de quoi se

³ Voir (Guille-Biel Winder et al., 2023) pour une étude plus approfondie.

rappellent-ils à ce sujet ? Peuvent-ils donner des exemples de fractions ? Comment peut-on représenter une fraction donnée ? etc... Il est envisageable à cette occasion de revenir sur le lexique lié à ce concept mathématique (numérateur, dénominateur notamment), pour faciliter la description des techniques mises en place dans la classe.

SDApré 2. En lien avec les difficultés associées aux techniques nécessaires ainsi qu'aux savoirs désensibilisés, l'intervenant·e peut proposer aux élèves d'identifier un puis plusieurs quantités d'un tout (par exemple $\frac{1}{4}$ puis $\frac{3}{4}$) à l'aide d'un support matériel (au choix un papier cartonné rectangulaire impliquant l'aire, ou une bande impliquant la longueur). Une technique envisageable pour « trouver le quart d'une surface » avec un papier cartonné rectangulaire, consiste à plier le papier une première fois en deux (par rapport aux médianes ou aux diagonales, bord à bord dans le sens de la longueur ou celui de la largeur), puis de nouveau en deux. Il est aussi possible d'utiliser le marquage en traçant des segments (ou en découpant) pour représenter les quatre parties et ensuite en identifier le quart. En isolant le quart, il est possible de remarquer que les quatre parties sont égales étant donnée leur grandeur, mais aussi que la quantité restante (trois quarts) représente le complément pour constituer le tout. Pour « trouver les trois quarts du tout », l'élève peut alors compter le nombre de quarts.

SDApré 3. Pour anticiper des difficultés relatives à la compréhension de la consigne, l'intervenant·e peut présenter la consigne des tâches 1 et 2 aux élèves et les faire discuter sur ce qu'ils en comprennent. Mais ce choix peut se révéler ici difficile à mettre en œuvre sans déflorer la résolution des problèmes proposés.

SDApré 4. Afin d'anticiper des difficultés relatives à la compréhension de la consigne et de travailler sur les techniques en jeu, l'intervenant·e peut proposer la réalisation de tâches de même type que les tâches 1 et 2, mais plus simples, par exemple avec la fraction $\frac{1}{2}$ et une bande de papier rectangulaire.

SDApré 5. Pour remédier aux difficultés spécifiques liées à l'utilisation des réglettes Cuisenaire®, l'intervenant·e peut proposer des activités de mesurage visant à mettre en évidence l'existence de plusieurs nombres associés à une même réglette, et questionner le statut de ces réglettes. Par exemple (figure 3) : mesurer la longueur de la réglette noire avec la réglette blanche, puis avec la grise comme unité de longueur ; dans un troisième temps, exprimer la longueur de la réglette grise en fonction de celle de la réglette noire.



Figure 3 – Réglettes utilisées dans l'activité de mesurage

Il est à noter que toutes ces pistes visent également à aider l'élève à prendre position dans sa place/topos d'élève dans le SDP (Guille-Biel Winder, 2025).

3. Différents SDApré envisageables dans le dispositif d'aide préventif

SDApré 1. En lien avec les difficultés associées aux techniques mises en œuvre dans le SDP et aux savoirs en jeu (sensibles et peut-être désensibilisés), ou encore avec la compréhension des différentes consignes, l'intervenant·e peut faire réaliser des tâches du même type que les tâches 1, 2, puis 3 avec de nouveaux nombres (par exemple, trouver le tout de référence à partir d'un cinquième de ce tout représenté par une surface rectangulaire, puis à partir de deux cinquièmes d'un tout représentés par une autre surface rectangulaire).

SDApost 2. En lien avec les difficultés d'apprentissage des savoirs en jeu (sensibles), l'intervenant·e peut demander aux élèves de raconter le déroulement de la séance de classe, par exemple en s'appuyant sur des productions de certains élèves, des photos de la séance, voire des extraits d'un enregistrement vidéo de celle-ci.

SDApost 3. En lien avec les difficultés d'apprentissage des savoirs en jeu (sensibles), l'intervenant·e peut questionner les élèves sur ce qu'ils pensent devoir retenir de la séance de classe (SDP).

SDApost 4. Si l'obstacle relatif à la tâche 3 notamment a été constaté lors de la séance de classe pour les élèves en difficulté, l'intervenant·e peut faire le choix de proposer une tâche de même type, toujours à partir d'une surface rectangulaire en carton, d'abord avec une fraction plus simple, comme $2/4$, puis avec la fraction $3/5$. Il peut également utiliser les réglettes Cuisenaire© pour faire trouver le tout de référence à partir de la réglette gris clair représentant $3/5$ de ce tout, puis illustrer les différentes relations entre les nombres $1/5, 3/5, 2/5, 5/5$ et 1, à partir de la manipulation des réglettes, comme présenté figure 4.

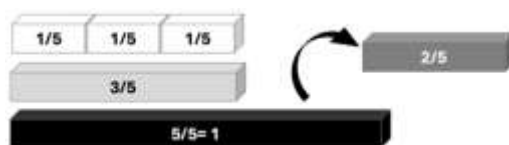


Figure 4 – Exemple de tâche 3 avec des réglettes

Nous remarquons que toutes ces pistes visent à resynchroniser l'élève avec la classe relativement à(aux) l'objet(s) de savoir sensible enjeux du SDP (*via* une reprise de ce qui a été institutionnalisé lors du SDP ou en insistant sur la technique ou le savoir nécessaire pour résoudre le problème du SDP), mais également l'aider à garder sa position dans sa place/topos d'élève notamment lors d'une séance de classe ultérieure.

IV. ANALYSE DE L'ARTICULATION MÉSOGÉNÉTIQUE DES SYSTÈMES DIDACTIQUES POTENTIELS

La structure du dispositif d'aide préventif nous conduit à prendre en compte une double articulation des différents systèmes didactiques : SDApré-SDP et SDP-SDApost.

1. Articulation mésogénétique SDApré-SDP

La réactivation dans le SDApré1, d'objets de savoirs désensibilisés conjuguée à l'absence de savoirs sensibles, la migration éventuelle de ces objets de savoirs désensibilisés vers le SDP, conduisent à identifier ces systèmes comme partiellement accrochés avec réduction du milieu didactique auxiliaire. Le travail sur des techniques qui s'avèreront pertinentes pour la résolution du problème posé (mais qui ne sont pas visées dans le SDP), a pour conséquence la présence dans le SDApré2 d'une partie des objets de savoirs sensibles et désensibilisés du SDP : les objets de savoir du SDA sont tous migrants vers le SDP. Il est également envisageable que les ostensifs du SDApré2 migrent vers le SDP. Ces systèmes sont donc partiellement accrochés avec réduction du milieu didactique auxiliaire. Lors de la présentation et du travail sur la compréhension de la consigne du problème qui sera posé dans le SDP, les objets de savoir sensibles du SDP sont en jeu dans le SDApré3, même s'ils n'y sont pas explicités : les objets migrants (évoqués) sont alors nombreux, et les systèmes didactiques sont accrochés. La réalisation, dans le SDApré4, d'une (ou plusieurs) tâche(s) de même type que celle(s) qui seront proposée(s) dans le SDP, implique l'existence d'objets de savoirs sensibles et désensibilisés communs aux deux systèmes didactiques et de nombreux objets migrants : les deux systèmes sont donc

accrochés, et nous avons précédemment souligné le risque qu'une trop grande proximité fait courir à l'intérêt du dispositif. Les ostensifs présentés lors du *SDApré5* (les réglettes par exemple) sont communs au SDP et les objets de savoir du *SDApré5* sont tous migrants : il s'agit de certains objets de savoir sensibles, mais pas forcément tous – et ils ne sont pas forcément explicités – ainsi que de certains objets désensibilisés ou transparents (Margolinas, 2014), c'est-à-dire non publiquement reconnus par l'institution mais s'avérant indispensables à la réalisation des tâches demandées ou à la construction des savoirs visés (comme l'utilisation des réglettes dans l'exemple). Ces systèmes sont donc partiellement accrochés avec réduction du milieu didactique auxiliaire.

2. *Articulation mésogénétique SDP-SDApost*

Dans le *SDApost1*, la reprise avec les élèves de tâches de même type que dans le SDP et pouvant se résoudre de la même manière a pour conséquence le fait que les deux systèmes sont accrochés. La narration du déroulement de la séance du SDP conduit à la mise en évidence, dans le *SDApost2*, des objets de savoirs sensibles, voire désensibilisés du SDP, ainsi qu'à l'évocation des ostensifs employés. Les objets de savoirs sont alors communs aux deux systèmes didactiques et les objets migrants nombreux : les deux systèmes sont donc également accrochés. Le questionnement des élèves sur ce qu'il faut retenir de la séance de classe induit une explicitation dans le *SDApost3* des objets de savoirs sensibles : ces objets de savoirs sont donc communs aux deux systèmes didactiques, qui sont alors accrochés. Le retour sur certaines difficultés rencontrées par les élèves dans le SDP implique une prise en compte dans le *SDApost4* d'une partie seulement des objets de savoir sensibles et désensibilisés du SDP : les objets du *SDApost4* sont alors tous migrants et les systèmes sont partiellement accrochés avec réduction du milieu didactique auxiliaire.

La figure 5 suivante synthétise ces analyses.

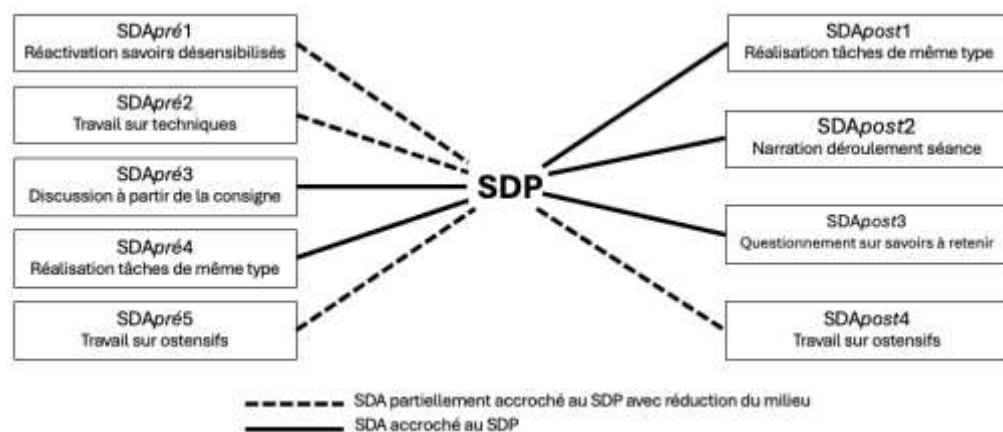


Figure 5 – Synthèse des articulations mésogénétiques possibles *SDApré-SDP-SDApost*

V. CONCLUSION

L'analyse de l'articulation mésogénétique des systèmes didactiques potentiels apporte de nouveaux éléments de compréhension du dispositif d'aide préventif. Elle met en évidence des systèmes didactiques accrochés ou partiellement accrochés avec une réduction du milieu didactique auxiliaire (figure 5). Or dans le cas de certains systèmes accrochés (comme pour le *SDApré4*), une vigilance est nécessaire pour éviter une trop grande proximité, car nous avons pu constater que celle-ci était source de perturbation (Guille-Biel Winder et al., 2023 ; Marchand et al., 2021). En outre certaines de nos expérimentations ont mis en lumière la nécessité que les systèmes didactiques ne soient pas décrochés :

nous avons en effet identifié des cas pour lesquels une trop grande distance pouvait venir perturber les fonctions du dispositif (Millon-Fauré et al., 2018), même lorsque l'enseignant·e était également intervenant·e. Par ailleurs comprendre ce qui est visé par le dispositif préventif et assurer un certain continuum entre les trois systèmes didactiques – notamment choisir judicieusement les tâches dans les SDA en lien avec ce qui se joue dans le SDP et en adéquation avec les difficultés des élèves qui y participent, aider à la dévolution du problème sans toutefois le déflorer, proposer des expositions de connaissances appropriées – nécessitent non seulement une compréhension fine du dispositif, mais également l'exercice d'une certaine vigilance didactique (Charles-Pézard, 2010), en amont (dans la préparation) et durant chaque étape du dispositif, de la part de l'enseignant·e et de l'intervenant·e. En outre, cette mise en œuvre requiert une transformation des pratiques relative à l'aide aux élèves en difficulté qui ne va pas de soi (Millon-Fauré et Assude, 2021). Cette piste fait l'objet de nos prochaines recherches.

Ces travaux ont été soutenus par le pôle pilote pour la recherche en éducation Ampiric, une opération financée par l'État dans le cadre de l'action « Territoires d'innovation pédagogique » du Programme d'investissements d'avenir/France 2030, opéré par la Caisse des Dépôts.

RÉFÉRENCES

- Assude, T. (à paraître). La question du handicap abordée du point de vue de la didactique des mathématiques. Dans F. Emprin et al. (dir.), *Actes de la 22^e école d'été de didactique des mathématiques, 16-22 octobre 2023, Bar sur Seine, France*. ARDM.
- Assude, T., Koudogbo, J., Millon-Fauré, K., Tambone, J., Theis, L. et Morin, M.-P. (2016a). Mise à l'épreuve des fonctions d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté en mathématiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 16(1), 1-35.
- Assude, T. et Millon-Fauré, K. (2021). Mise en œuvre d'un dispositif d'aide « préventif » : quelles fonctions et transformations ? Dans G. Pelgrims, T. Assude et J.-M. Perez (dir.), *Transitions et transformations sur les chemins de l'éducation inclusive* (p. 151-169). SZH/CSPS.
- Assude, T., Millon-Fauré, K., Koudogbo, J., Morin, M.-P., Tambone, J. et Theis, L. (2016b). Du rapport entre temps didactique et temps praxéologique dans des dispositifs d'aide associés à une classe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 36(2), 33-57.
- Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Bosch, M. et Perrin-Glorian, M.-J. (2013). Le langage dans les situations et les institutions. Dans A. Bronner, C. Bulf, C. Castela, J.-P. Georget, M. Larguier, B. Pedemonte, A. Pressiat et É. Roditi (dir.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. XV^e école d'été de didactique des mathématiques, 21-28 août 2011, Carcassonne, France* (volume 1, p. 267-302). La pensée sauvage.
- Charles-Pézard, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30(2), 197-261.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-111.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

- Chevallard, Y., Mercier, A. (1987). *Sur la formation historique du temps didactique*. IREM de Marseille.
- Gobert, J., Guille-Biel Winder, C., Assude, T. et Millon-Fauré, K. (2021). Statut des objets de savoir et modélisation du dispositif « devoirs-faits ». *Éducation et Didactique*, 15(3), 47-63.
- Guille-Biel Winder, C. (2025). *Point de vue systémique sur l'enseignement et la formation des professeurs des écoles en mathématiques : modélisations, analyses, développement de ressources* [Note de synthèse]. Aix-Marseille Université.
- Guille-Biel Winder, C., Assude, T., Theis, L., Millon-Fauré, K., Koudogbo, J., Thibault, M. et Marchand, P. (2023). Analyse du continuum d'un dispositif d'aide préventif – le cas de l'enseignement du concept de fraction au primaire. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 23(1), 96-119. <https://doi.org/10.1007/s42330-023-00265-2>
- Leutenegger, F. (2000). Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(2), 209-250.
- Marchand, P., Guille-Biel Winder, C., Theis, L. et Assude, T. (2021). Difficultés d'un système didactique à propos de l'enseignement du volume au primaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (26), 85–116. <https://doi.org/10.4000/adsc.1004>
- Margolinas, C. (2014). Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques ? *Revue Française de Pédagogie*, (188), 13-22.
- Mercier, A. (1995). Le traitement public d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoir mathématiques. Dans G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier et A. Tiberghien (dir.), *Différents types de savoirs et leur articulation* (p. 145-169). La pensée sauvage.
- Millon-Fauré, K., Marchand, P., Guille-Biel Winder, C., Assude, T., Koudogbo, J., Theis, L. et Thibault, M. (2022). Preventive support scheme for mathematics learning: possible ways to provide aid before and after the class session. Dans J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi et F. Ferretti (dir.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2-7 février 2022, Bozen-Bolzano, Italie (p. 4499-4506). ERME/Free University of Bozen-Bolzano.
- Millon-Fauré, K., Theis, L., Tambone, J., Koudogbo, J., Assude, T. et Hamel, V. (2018). Appropriation par un enseignant d'un dispositif d'aide pour l'enseignement des mathématiques. *Spirale – Revue de Recherches en Éducation*, (61), 41-56.
- Sensevy, G. et Mercier, A. (dir.). (2007). *Agir ensemble. Éléments de théorisation de l'action conjointe du professeur et des élèves*. Presses universitaires de Rennes.
- Sensevy, G., Mercier, A. et Schubauer-Leoni, M.-L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(3), 263-304.
- Tambone, J. (2014). Enseigner dans un dispositif auxiliaire : le cas du regroupement d'adaptation et de sa relation avec la classe d'origine de l'élève. *Les Sciences de l'éducation – Pour l'Ère nouvelle*, 47(2), 51-71.
- Tambone, J. et Mercier, A. (2003). L'articulation entre classe et groupe d'adaptation de l'aide à dominante pédagogique, en France, pose question sur la notion de système didactique. Dans G. Chatelanat et G. Pelgrims (dir.), *Éducation et enseignement spécialisé : ruptures et intégration* (p. 195-213). De Boeck Université.

- Theis, L., Assude, T., Tambone, J., Morin, M.-P., Koudogbo, J. et Marchand, P. (2014). Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ? *Éducation et francophonie*, 42(2), 160-174.
- Theis, L., Morin, M.-P., Tambone, J., Assude, T., Koudogbo, J. et Millon-Fauré, K. (2016). Quelles fonctions de deux systèmes didactiques auxiliaires destinés à des élèves en difficulté lors de la résolution d'une situation-problème en mathématiques ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (21), 9-37.
- Van de Walle, J. A., Lovin, L. H. et Kazadi, C. (2008). *L'enseignement des mathématiques : l'élève au centre de son apprentissage - Tome 2*. ERPI.

UN PARCOURS DIFFÉRENCIÉ INCLUSIF S’APPUYANT SUR DES RÉSULTATS EN DIDACTIQUE CONCERNANT L’AIRE DU RECTANGLE

| DE VARENT* CHARLOTTE

Résumé | Nous proposons une forme d’inclusion passant par l’identification de difficultés mathématiques et la mise en place d’un parcours personnalisé. Pour cela, nous nous appuyons sur une séquence d’enseignement de la mesure d’aire en classe de CM2 (10-11 ans). Celle-ci est déclinée selon trois niveaux de différenciation, en fonction de difficultés géométriques et liées au changement de cadre entre géométrie et formules. Des passerelles sont proposées selon que les progrès de l’élève lui permettent ou non de rejoindre le cursus « classique ».

Mots-clés : aire, unités de mesure, géométrie, algèbre, pavage

Abstract | We propose a form of inclusion based on the identification of mathematical difficulties and the implementation of a personalized program, through a teaching sequence on area measurement in the CM2 class (10-11 years old). The sequence is broken down into three levels of differentiation according to difficulties related to geometry and to the change of framework between geometry and formulas. Bridges are proposed, depending on whether or not the pupil is able to join the “traditional” curriculum, depending on his or her progress.

Keywords: Area, units of measurement, geometry, algebra, rectangle paving

I. INTRODUCTION

Nous proposons une forme d’inclusion passant par l’identification de difficultés mathématiques et la mise en place d’un parcours personnalisé. Nous prenons l’exemple d’une séquence d’enseignement de la mesure d’aire en classe de CM2 (10-11 ans, 5^e année). L’inclusion (Organisation des Nations unies pour l’éducation, la science et la culture, 2020) et la notion de retard scolaire peuvent prendre plusieurs formes (Dessertine, 2004). Nous abordons ici l’inclusion en classe classique et entière par la proposition d’un travail adapté à tous les élèves, qu’ils aient des besoins éducatifs particuliers (BEP) ou non. Nous nous plaçons dans le cadre d’une réflexion théorique sur la manière de réaliser des séquences inclusives en classe entière en nous appuyant sur des résultats de didactique. Nous proposons une séquence (théorique) différenciée d’enseignement de l’unité de mesure d’aire et des formules de l’aire du rectangle. Celle-ci est déclinée selon trois niveaux de différenciation, en fonction de difficultés préalablement observées lors d’un pré-test. Cette différenciation vise à proposer des modalités adaptées aux difficultés des élèves et réalistes, tout en gardant certains objectifs communs (à la classe classique) concernant l’apprentissage du mesurage et des grandeurs. Nous croisons des travaux ayant montré des difficultés liées à la visualisation de l’espace en deux dimensions (2D) avec des travaux sur la transition entre les cadres géométrique et algébrique. Des passerelles sont proposées à plusieurs stades de la séquence, si les progrès de l’élève lui permettent de rejoindre le cursus classique. Ainsi, l’inclusion passe ici aussi par le fait de réinterroger régulièrement le besoin, pour l’élève, de rester dans un parcours différencié et de remettre en question la pertinence mathématique de ce parcours (Roiné, 2009 ; Sensevy et al., 2006, Toullec-Théry, M., et Nédelec-Trohel, I., 2006).

Nous posons en conséquence deux questions de recherche. QR1 : est-il possible de proposer une séquence différenciée adaptée aux difficultés des élèves, du point de vue de la visualisation de l’espace et/ou de la transition de la géométrie aux formules ; qui permette de créer des passerelles vers le progrès

* LDAR – France – charlotte.de-varent@cyu.fr

pour les élèves qui auraient des difficultés, mêmes durables ? QR2 : la séquence pourrait-elle permettre, en proposant un diagnostic basé sur les difficultés mathématiques et un type de travail qui soit basé sur des objectifs de compétences partagées (en partie au moins) avec le groupe classe et des passerelles, une bonne inclusion des élèves à besoins particuliers ? Nous proposons d'adresser ici une partie de la QR1 en construisant une séquence différenciée qui permette potentiellement de favoriser des passerelles¹. Suite à cette étape nous mettrons en place dans un second temps (non adressé ici) une expérimentation, puis nous engagerons une réflexion sur l'adaptabilité de la séquence à des contextes variés d'enseignement spécialisé. Nous replacerons enfin cette recherche dans le travail qui a été réalisé sur les définitions des pratiques mathématiques inclusives.

1. *Type d'inclusion considéré*

Roiné (2014, p. 13) rappelle le risque de rester dans le paradigme d'interprétation de l'échec scolaire. Cela consiste à assigner à certains élèves des caractéristiques cognitives distinctes des autres, alors même que la notion d'élève en difficulté « ne correspond à aucune définition cohérente et suffisamment stable pour parler d'une catégorie précise d'élèves ». La conséquence serait de réaliser une analyse erronée des paramètres qui concourent à son échec scolaire. En conséquence, nous ne nous appuyons pas sur des propositions de travail sur la cognition des élèves en difficulté. Sans remettre en question ici leur utilité, nous nous plaçons du point de vue des savoirs disciplinaires. Nous proposons d'aborder les difficultés mathématiques par la didactique des mathématiques, autant du point de vue de l'observation de ces difficultés que de celui des remédiations apportées. Ainsi, nous ne nous chargeons pas ici d'aider une catégorie d'élèves rencontrant une difficulté diagnostiquée ; nous partons plutôt du constat de difficultés mathématiques à travers un pré-test. En effet, les difficultés abordées pourraient théoriquement affecter chaque élève à un moment de sa scolarité. Parmi ces difficultés, nous réalisons que certaines peuvent être durables pour une minorité d'élèves à BEP. L'inclusion proposée ici passe par la possibilité de s'y adapter, tout en réinterrogeant régulièrement le besoin pour l'élève — qu'il soit identifié comme rencontrant des difficultés cognitives ou non — de rester dans le parcours différencié proposé, en fonction des résultats obtenus tout au long de la séquence.

L'objectif est aussi d'éviter que chaque élève (identifié à BEP ou non) soit cantonné à des exercices annexes ne proposant ni passerelle ni point commun avec l'apprentissage du groupe classe. Il s'agit donc d'une certaine forme d'inclusion *dans les savoirs*. De plus, du point de vue de l'enseignant, nous considérons qu'il n'est pas possible de déterminer si les difficultés rencontrées par l'élève sont temporaires ou définitives. Nous prôtons donc ici une forme prudente d'inclusion qui vise à ne pas catégoriser définitivement un élève. Par ailleurs, des exercices s'avèrent plus complexes que d'autres pour tous les élèves et posent ainsi davantage de problèmes à certains élèves déjà fragilisés. Cela se produit indépendamment de difficultés cognitives, attentionnelles ou liées au contrat didactique, par exemple ici, dans le cadre des transitions entre géométrie et formules.

L'analyse des résultats aux évaluations nationales de 6^e indique en effet qu'en comparaison des autres collégiens, les élèves de SEGPA² ne sont pas différents des autres élèves d'un point de vue didactique. Certes leurs résultats sont plus faibles que ceux des élèves scolarisés en classe ordinaire, mais les épreuves échouées sont les mêmes pour tous les élèves. Si les élèves de SEGPA échouent à tel ou tel type d'exercice, ce n'est pas tant parce qu'ils seraient plus déficitaires dans la compréhension des consignes, le traitement de l'information ou les capacités d'attention (entre autres explications potentielles) que parce que ces exercices sont plus difficiles que les autres. (Roiné, 2014, p. 27)

¹ La séquence sera testée en classe en avril 2025.

² Section d'enseignement général et professionnel adapté qui accueille les jeunes de la 6^e à la 3^e présentant des difficultés scolaires importantes, sans handicap identifié.

Il s'agit donc d'une inclusion dynamique et non passive (Toullec-Théry et Marlot, 2013), qui permet de questionner la possibilité de rejoindre régulièrement le cursus ordinaire, et qui s'intéresse aussi aux nœuds épistémologiques (Artigue, 1989) comme la transition du calcul d'aire additif dans le cadre géométrique aux formules liées à la multiplication. Si certaines difficultés se révélaient durables, en raison de troubles cognitifs par exemple, une partie des objectifs d'apprentissage concernant les grandeurs, qui peuvent être atteints sur les longueurs sans passer par les aires et sa spécificité bidimensionnelle seraient proposés.

2. Difficultés et travaux pris en compte pour l'élaboration de la séquence

Nous distinguons ici des difficultés qui seront passagères et d'autres persistantes. Il ne s'agit pas d'assigner les difficultés persistantes à un certain type d'élève. Nous considérons que les difficultés que nous allons présenter peuvent être rencontrées par tous les élèves et que pour certains elles seront persistantes, qu'ils présentent ou non un trouble des apprentissages. Notre étude se fonde, d'une part, sur la caractérisation de nœuds qui rendent difficile l'accès à certaines notions mathématiques à tous les élèves, sans doute encore davantage aux plus faibles. Nous considérons que ces nœuds sont souvent liés à l'appréhension d'un concept lors de changements de cadre (ici, lors du passage entre la géométrie et l'algèbre). Ainsi, nous utilisons pour construire la séquence, le résultat d'une analyse de manuels scolaires présentée dans de Varent (2023). Nous y avons analysé la façon dont le centimètre carré est introduit dans treize manuels de CM2 (suivant les programmes français). Nous nous étions appuyée sur une analyse épistémologique d'exercices mathématiques historiques mobilisant des systèmes non métriques, sur une analyse des programmes actuels ainsi que sur une synthèse de travaux en didactique concernant le savoir à transposer pour analyser ces manuels. Nous avons ainsi constitué une grille d'analyse. Nous nous appuyons ici sur les résultats de cette analyse. Nous soulignons également dans cette analyse le fait qu'une partie des préconisations de didactique, contrairement à d'autres travaux, ont moins pénétré les manuels scolaires français. Ils semblent cependant nécessaires pour la compréhension de la mesure d'aire et nous les incluons dans l'expérimentation.

D'autre part, nous étudions des difficultés liées à la conception de l'espace en 2D, qui ont été décrites par Outhred et Mitchelmore (1992, 1996) qu'ils ont par ailleurs notées comme durables pour une partie des élèves. Nous prenons en compte ces difficultés pour construire un parcours différencié.

L'introduction classique de l'aire en cycle 3

Dans de Varent (2023), nous avons analysé l'introduction de la mesure d'aire dans treize manuels scolaires de CM2 (10-11 ans). Dans les programmes, il est demandé de travailler dans un premier temps sur le concept indépendamment de sa mesure, à l'aide de comparaisons directes (en confrontant, par exemple, l'aire de deux surfaces par découpage et recollement). Dans un deuxième temps, il est suggéré de procéder à des comparaisons indirectes à l'aide d'une unité de mesure intermédiaire de forme donnée, ce que nous retrouvons dans les treize manuels étudiés. Dans un troisième temps, il est préconisé (Éduscol, 2016, pp. 2-3) d'introduire la mesure de la grandeur à l'aide d'unités de mesure standard, dans tous les manuels. Ces recommandations s'appuient sur une distinction entre la grandeur, la mesure de la grandeur et l'objet dont elle est une caractéristique, en accord avec Perrin-Glorian (1990). À ce stade de la programmation, des activités comme le calcul de l'aire d'une même surface avec deux unités de mesure différentes sont proposées aux élèves. Elles permettent de distinguer l'aire de la mesure exprimée avec un nombre (valeur numérique de la mesure ; Comité commun pour les guides en métrologie, 2012, p. 13) et une unité donnée (Perrin-Glorian, 1990). La plupart des manuels proposent également des activités liées à la distinction entre surface et aire, par exemple l'introduction de figures de même aire mais ayant différentes formes, une mesure d'aire par encadrement ou des exercices visant la distinction entre l'aire et le périmètre.

L'unité de mesure d'aire prend ensuite la forme d'un carré, souvent un carreau du quadrillage dessiné en arrière-plan. Nous appellerons « pavage » la représentation qui permet le comptage de carrés sur la surface pour en mesurer l'aire. Dans les manuels, il est demandé d'exprimer le nombre d'unités d'aire (de forme carrée) que l'on peut compter sur la figure. La mesure d'aire est donc toujours liée à l'addition, ne prenant en compte que la dimension 2 (il faut se repérer dans le plan). Le mesurage est constamment perceptible : l'élève doit comprendre qu'il y a report d'un étalon. Il doit compter les unités de mesure d'aire reportables sur la figure (des carrés) comme il le faisait juste avant avec des unités de mesure non conventionnelles. Les additions qui portent sur les nombres sont encore associées à la juxtaposition de figures. Compter ces carreaux amène théoriquement l'élève à utiliser ensuite les multiplications côté par côté pour le carré et longueur par largeur pour le rectangle, et lui permet, à nouveau théoriquement, de dégager la formule.

Les difficultés prises en compte

Dans les manuels, l'introduction de l'unité de mesure d'aire conventionnelle (le centimètre carré) semble moins uniformisée. Premièrement, la transition entre addition itérée et multiplication pour le compte des carrés- cm^2 du pavage du rectangle n'est pas toujours explicitement demandée. La multiplication s'avère pourtant nécessaire pour la généralisation et l'introduction de la formule. Secondement, seuls trois manuels amènent l'élève à faire le lien entre le nombre de centimètres carrés du côté du rectangle et le nombre de centimètres, explicitant ainsi le lien entre la mesure du côté et le pavage, ce qui permet de comprendre la formule. Ce résultat nous amène à supposer que les élèves risquent de ne pas donner du sens à la formule ou d'oublier la notion de mesurage liée au pavage, au profit de représentations géométriques erronées. Cela rejoint le constat que les élèves ont des difficultés à donner du sens aux formules d'aires du rectangle et du carré, et à ne pas généraliser leur utilisation à d'autres figures, comme le triangle. L'étude réalisée montre ainsi que la question de la bidimensionnalité, de l'unité de mesure et du mesurage dans les transitions entre géométrie et formules représente un enjeu important.

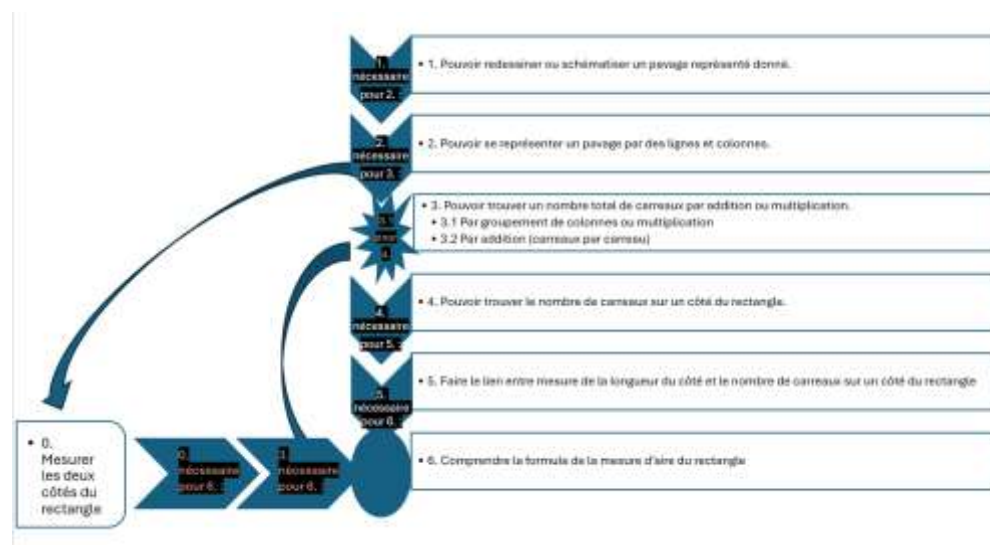


Schéma 1 – Étapes de compréhension nécessaires basées sur Outhred et Mitchelmore

L'ensemble des points sur lesquels il est demandé aux manuels de se prononcer conduit à une grande variété de pratiques à partir de l'introduction du centimètre carré. Par ailleurs, nous constatons que les propositions de Perrin-Glorian (1990) qui portent sur les relations bidimensionnelles et l'unité de mesure d'aire standard ne semblent pas avoir été intégrées dans les manuels scolaires. Nous

rappelons en annexe (tableau 2) certaines de ces pistes qui visent à renforcer la compréhension fine du mesurage dans un cadre bidimensionnel et nous les incluons dans la séquence testée en classe. Outhred et Mitchelmore (1992) ont remarqué que les élèves éprouvaient des difficultés lors de l'introduction de la mesure d'aire. Ils ont noté des phases nécessaires pour pouvoir lui donner du sens. Ils ont réalisé leur étude sur 155 élèves scolarisés dans quatre écoles issues d'un milieu socio-économique moyen de Sydney, en années 1 à 4 (6-7, 7-8, 8-9 et 9-10 ans).

Ils montrent que dessiner un rectangle pavé (carrelé avec des lignes et colonnes), même en ayant un modèle sous les yeux, est une activité problématique (50 % de réussite). Le point critique, selon eux, est de considérer le pavage d'unités carrées comme des groupes de lignes et de colonnes, ce qui est corroboré par Battista, et al., (1998). Sans cela, il s'avère impossible de comprendre le lien avec les longueurs des côtés du rectangle ou la multiplication. Les résultats confirment que les élèves qui ne se représentent pas la structure d'un pavage par des lignes et des colonnes sont en général incapables de déterminer le nombre d'éléments du pavage par multiplication ou comptage de groupes de lignes ou de colonnes. En effet, aucun des élèves qui ont dessiné le pavage comme des carreaux individuels n'a utilisé la multiplication, alors que la majorité des enfants qui ont dessiné des pavages structurés ont déterminé le nombre de carreaux par comptage de groupe de colonnes ou multiplication. Les résultats liés au mesurage semblent aussi fortement associés au dessin. Seuls les élèves qui ont dessiné des pavages structurés à l'une des étapes de l'entretien ont mesuré les côtés des rectangles. Par ailleurs, la capacité à déterminer le nombre de carreaux de chaque côté du rectangle a été observée seulement chez les élèves qui multipliaient les dimensions ou groupaient par lignes ou colonnes et dessinaient des grilles structurées ou partiellement structurées.

Il est évident, par ces résultats, que les jeunes enfants n'interprètent pas automatiquement les quadrillages en matière de lignes et de colonnes, et que cela pourrait entraver leur apprentissage de la mesure d'aire [...]. (Outhred et Mitchelmore, 1992, p. 200-201) [Traduction de l'auteur]

Outhred et Mitchelmore (1996) distinguent cinq principes qui définissent des niveaux d'apprentissage (p. 96) : 1. La couverture du rectangle par pavage est inadéquate, avec des trous, des juxtapositions ou une taille de l'unité de mesure qui n'est pas constante. 2. L'élève tente de couvrir correctement toute la surface du rectangle, mais il éprouve des difficultés à faire congruer ou à systématiser son étalonnage. 3. L'élève réalise qu'un pavage formé d'unités congruentes donne une couverture systématique de la surface, mais ne détecte pas la relation avec les côtés du rectangle. 4. L'élève voit la relation du pavage avec les côtés du rectangle, mais ne prend en compte qu'un côté du rectangle. 5. L'élève mesure les deux côtés du rectangle ou marque les unités de mesure sur les deux côtés. Cette étape semble essentielle pour utiliser une unité de mesure carrée plus compliquée, qui mesurerait par exemple 2 cm de côté. Lorsqu'il est demandé d'estimer le nombre d'unités de mesure qui peuvent couvrir le rectangle avec la règle (si l'unité de mesure n'est pas dessinée), 14 % des élèves mesurent une dimension du rectangle et estiment l'autre. Ils marquent les unités de mesure le long de la règle. Un seul de ces élèves réussit à trouver le nombre exact. Au contraire, 26 % des élèves mesurent les longueurs des deux côtés du rectangle et 85 % d'entre eux trouvent la bonne réponse. Quelques-uns utilisent la multiplication des mesures de longueur, et les autres marquent physiquement les unités de mesure sur les deux côtés. L'étude rappelle que la plupart des élèves d'année 1 n'arrivent pas au niveau 2, mais que certains des élèves d'année 2 y parviennent. *Seulement un quart des élèves d'année 3 et trois quarts des élèves d'année 4 atteignent le niveau 4 ou 5.* La multiplication n'apparaît pas cruciale pour la compréhension informelle de la mesure de l'aire du rectangle, « bien qu'elle soit bien sûr essentielle pour la compréhension de la formule » (Outhred et Mitchelmore, 1996, p. 96). Les auteurs notent que la recherche a mis l'accent sur les principes 1 et 4, et soulignent l'importance du principe 3 qui est le suivant : le nombre d'unités de chaque côté doit pouvoir être trouvé spontanément en mesurant les

longueurs. Ce principe apparaît comme négligé en recherche. « Il peut sembler évident aux adultes que les nombres dans la grille dépendent des mesures du côté, mais ce n'est clairement pas évident pour les élèves ». (Outhred et Mitchelmore, 1996, p. 96)

Le point suivant s'avère important pour que notre travail de différenciation soit efficace : ils font le lien entre cette capacité et celle de mesurer à la règle. Ils montrent que la mesure à la règle n'est pas automatiquement comprise comme correspondant à l'évaluation du nombre d'espaces de 1 cm. Or, cet aspect s'avère essentiel pour relier le nombre d'unités carrées à la longueur du côté, notamment si le carré ne fait pas 1 cm de côté (Outhred et Mitchelmore, 1996, p. 97). Rogalski (1984) rappelle par ailleurs le lien entre l'acquisition de la bidimensionnalité et le plan, l'espace apparaissant comme précurseur dans la construction de la bidimensionnalité, mais le plan étant une étape clé (p. 7). Nous résumons, dans la figure 1, en Annexe, les éléments nécessaires à la compréhension de la formule de l'aire du rectangle. Pour les enfants qui n'ont pas de problèmes d'apprentissage, les niveaux de mesure et de comptage sont liés à l'âge. *Cela n'est toutefois pas le cas des enfants en difficulté* : beaucoup d'entre eux dessinent des pavages et mesurent un côté correctement, mais ils comptent les pavages carreau par carreau en faisant souvent des erreurs.

En conséquence de ces études, nous choisissons de distinguer les groupes suivants : le groupe 2 correspond aux élèves rencontrant des difficultés durables (encore présentes en CM2) avec l'espace 2D, pour schématiser un pavage ou se représenter un pavage par des lignes et des colonnes. Le groupe 3 rassemble les élèves ayant des difficultés durables à trouver un nombre total de carreaux par multiplication. Le groupe 4 réunit les élèves cumulant ces deux premières difficultés. Le groupe 1 correspond aux élèves ne présentant pas ces difficultés. Pour les élèves de CM2 ayant du mal à faire le lien entre le nombre de carreaux et le côté du rectangle, ou entre la mesure de la longueur du côté et le nombre de carreaux d'un côté du rectangle, nous proposons, puisque cette difficulté est attendue et classique, des activités à l'ensemble du groupe. Nous proposons une séquence qui vise l'acquisition des principes 1 à 3 par les élèves ayant des difficultés. La séquence doit favoriser l'acquisition des principes 4 et 5 par tous les groupes. Nous avons en effet montré que seulement trois manuels favorisaient ces derniers. Si les principes 4 et 5 ne sont malgré tout pas atteints en fin de séquence, nous proposons un travail sur les longueurs visant l'acquisition de la notion de mesurage par report. Cela favorise ensuite la compréhension du lien entre mesure de longueur et mesure d'aire. En annexe, nous rappelons les activités qui favorisent la compréhension profonde des liens entre mesure de longueur et mesure d'aire, proposées par Perrin-Glorian (1990).

3. Séquence différenciée : de la géométrie aux formules

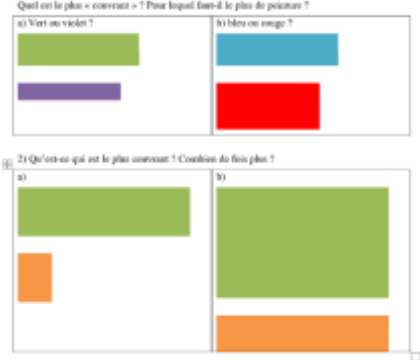
Pour cette séquence (présentée en Annexe), nous nous appuyons sur les relations de nécessité décrites dans la figure 1, sur les cinq principes décrits par Outhred et Mitchelmore (1992, 1996) et sur les résultats de l'analyse des manuels pour proposer des adaptations en fonction des résultats d'un pré-test qui sera ensuite proposé aux enseignants sous forme d'évaluation diagnostique³. Nous décrivons, dans le tableau, la manière dont un élève peut travailler un objectif lié à la mesure avec la règle même s'il n'a pas acquis l'un des principes. Par ailleurs, nous suggérons des passerelles pour permettre aux élèves en difficulté — si la difficulté ciblée se révèle éphémère — de rejoindre les autres niveaux. Nous situons cette séquence avant la mesure d'aire du rectangle avec un carreau et après des exercices (usuels en CM2) de rappel du travail réalisé en CM1 (4^e année) : comparaison indirecte des aires par

³ L'évaluation visera à identifier les connaissances mathématiques des élèves pour ainsi pouvoir offrir à chacun un enseignement adapté à ses connaissances.

découpage-recollement, mesure d'aire par l'addition, via l'utilisation d'une unité de mesure d'aire non standard. Le pré-test doit permettre de déterminer les 4 groupes et donc balayer tous les principes.

Tableau 1 – Séquence sur l'aire

	Groupe 1 (classique)	Groupe 2 (difficultés en 2D)	Groupe 3 (sans multiplication)	Groupe 4 (G2 et G3)
Définition du groupe	Les principes 1, 2 et 4 sont acquis.	Les principes 1 et 2 ne sont pas acquis mais la multiplication l'est.	Les principes 1 et 2 sont acquis mais pas la multiplication.	Les principes 1 et 2 ne sont pas acquis et la multiplication non plus.
<u>Séance</u> de révision des prérequis	Ce groupe fait un autre travail (décroché).	Retour sur les principes 1 et 2. Les élèves de ce groupe ont du mal à couvrir le rectangle par pavage. Nous proposons en annexe des étapes intermédiaires (rectangle ligné, coloriage de « translations progressives de déformations compensées sur carrés ») et le travail proposé par Chambris (voir tableau en Annexe).	Retour sur la multiplication et son lien avec la représentation sous forme de tableau. Par exemple, à travers les boîtes de chocolat et la représentation commutative (6x4 ou 4x6) dans J'apprends les maths CE1 (2008, p. 88-89) ou le lien entre multiplication, addition itérée et quadrillage associé dans J'apprends les maths CE1 (2008, p. 90, voir Annexes).	Retour sur 1 et 2 et sur la multiplication et son lien avec la représentation sous forme de tableau.
Séance 2	Principes 4 et 5	Principes 4 et 5 Si 1 et 2 peuvent être acquis : révisions et principe 5. Puis, retour dans G1 avec objectif 1. Si 1 et 2 toujours pas acquis : objectif 2.	Si la multiplication est acquise : principes 4 et 5 Puis, retour dans G1 avec objectif 1. Sinon : objectif 3.	Si 1 et 2 peuvent être acquis ainsi que la multiplication : révisions des principes 4 et 5. Puis, retour dans G1 avec objectif 1. Si l'un des 2 est acquis : voir une des colonnes précédentes. Si 1 et 2 toujours pas acquis et la multiplication n'est pas acquise : objectif 4.

Séance de découverte	Objectif 1 Mesurage en dimensions 1 et 2	Objectif 2 Mesurage en dimension 1	Objectif 3 Mesurage en dimensions 1 et 2	Objectif 4 Mesurage en dimension 1
	Principe 5 Le nombre d'unités de chaque ligne et colonne doit être déterminé depuis les longueurs et côtés du rectangle. Cela amène à dégager la formule. Utilisation de : La grille effacée dans J'apprends les maths CM2 (2008, p. 75) > Voir le tableau en Annexe.	Par exemple, (re)faire l'activité de construction de la règle pour la voir comme un outil permettant de compter le nombre de fois qu'une unité de mesure de longueur est reportée, plutôt qu'un numéro au bout d'une ligne graduée. C'est a priori abordé en cycle 2 et nécessaire pour comprendre le lien entre mesure des côtés du rectangle et compte de carreaux, donc pour comprendre la formule de calcul d'aire. (Voir le tableau en Annexe).	Voir Chambris⁴ 	
Réinvestissement Remédiation	Application de la formule.	Travail de géométrie pour acquérir 1 et 2.	Travail sur la multiplication.	Travail de géométrie pour acquérir 1 et 2. Travail sur la multiplication (suite).

Après cette séquence, nous prenons en compte la partie des travaux de Perrin-Glorian (1990) qui nous semble, d'après notre analyse, avoir été la moins intégrée dans les manuels scolaires. Nous distinguons quatre objectifs (un par colonne) que nous présentons dans le tableau 2 en Annexe. Nous présupposons une deuxième évaluation diagnostique, à la fin de la première séquence, afin de reformer les groupes en fonction des difficultés encore constatées ou surmontées à l'issue du premier travail. Ce travail peut être réalisé à une période différente de la première séquence, afin de laisser plus de temps à la remédiation concernant l'espace 2D ou la multiplication.

⁴ Dans son commentaire sur les projets de programmes, Chambris (2024, p. 11) rappelle l'importance du raisonnement multiplicatif. Elle propose d'insister sur les étapes suivantes, qu'elle juge indispensables pour travailler à la fois sur le sens de la multiplication et la visualisation du tableau en fonction à la fois de cases (pavage) et de lignes et colonnes. Selon Chambris, il faut que l'élève voie ces problèmes de façon unidimensionnelle, pour qu'il puisse ensuite les voir de façon bidimensionnelle. Il y a donc selon son point de vue, l'aire unidimensionnelle et l'aire bidimensionnelle.

II. CONCLUSION

L'inclusion que nous proposons est spécifique, car elle s'appuie sur des résultats en mathématiques, obtenus lors du pré-test, pour constituer des groupes de besoin. Ainsi, tous les élèves doivent pouvoir travailler sur un ou plusieurs objectifs d'apprentissage communs au groupe classe (en mobilisant ou non la bidimensionnalité suivant les possibilités de l'élève). Nous prenons ainsi en compte les nuances proposées par Roiné (2014) concernant une classification par remédiation uniquement cognitive, ou encore le fait de n'aborder les difficultés que par les aspects de contrat didactique ou attentionnel. Nous essayons, en effet, de prendre en compte les difficultés qui peuvent se poser d'un point de vue à la fois géométrique et d'un point de vue lié au mesurage dans un contexte bidimensionnel, en croisant notre étude de manuels avec les travaux de Perrin-Glorian (1990), Outhred et Mitchemore (1992, 1996). Par ailleurs, nous proposons des passerelles qui permettent de réinterroger régulièrement la possibilité qu'un élève ait dépassé ses difficultés au cours de la séquence, pour éviter qu'il ne soit associé définitivement à un niveau, sans que cela ne soit requestionné régulièrement. Cette séquence peut être adaptée à des dispositifs particuliers puisqu'il suffit de s'appuyer sur l'évaluation diagnostique qui sera fournie et d'en déduire le parcours à adopter. La mise en œuvre en classe, en revanche, semble complexe pour l'enseignant, qui doit réaliser deux évaluations diagnostiques et des évaluations continues pour juger si le groupe reste pertinent pour l'élève, ainsi qu'assurer la gestion d'une séquence longue avec un programme chargé. Ce point sera à réévaluer après l'expérimentation en classe et se place dans le débat plus large des conditions offertes aux enseignants pour qu'ils puissent mettre en œuvre la différenciation et l'inclusion. Nous avons proposé une séquence différenciée selon quatre niveaux de différenciation. Ceux-ci permettent une inclusion des élèves ayant des difficultés durables qu'ils soient ou non scolarisés dans des dispositifs spécifiques. La spécificité de ce type d'inclusion est que nous proposons des passerelles afin de réinterroger régulièrement la possibilité que l'élève ait dépassé ses difficultés. Si ces dernières ne peuvent être surmontées, nous conservons certains objectifs communs concernant l'apprentissage du mesurage et des grandeurs. Nous espérons éviter, de cette façon, de proposer uniquement des activités totalement décrochées aux élèves à BEP, voire à visée essentiellement cognitive. Les élèves risqueraient de ne suivre la classe que dans un univers parallèle, sans passerelle possible, en tout cas sur le plan des apprentissages.

RÉFÉRENCES

- Artigue, M. (1989). Épistémologie et didactique. *Cahier de DIDIREM*, 3, 1-29.
- Comité commun pour les guides en métrologie. (2012). *Vocabulaire international de métrologie – concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM)* (Publication n° JCGM 200 :2012).
- Dessertine, D. (2004). [Compte rendu du livre *L'« échec scolaire » : histoire d'un problème public*, par B. Ravon]. *Revue d'histoire de l'enfance « irrégulière »*, (6), 308-310. <https://doi.org/10.4000/rhei.119>
- de Varent, C. (2023). La mesure entre géométrie et formules : l'aire du rectangle en CM2 – analyse de manuels scolaires. *Grand N*, (112), 25-63. <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-112-grand-n/2-la-mesure-entre-geometrie-et-formules-l-aire-du-rectangle-en-cm2-analyse-de-manuels-scolaires-1387480.kjsp?RH=1708448823811>
- Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche [MEESR]. (2016). *Grandeurs et mesures au cycle 3*. <https://eduscol.education.fr/document/16513/download>
- Organisation des Nations unies pour l'éducation, la science et la culture [Unesco]. (2020). *Rapport mondial de suivi sur l'éducation : inclusion et éducation : tous, sans exception*. <https://doi.org/10.54676/BIEV1074>

- Outhred, L. et Mitchelmore, M. (1992). Representation of area: A pictorial perspective [Représentation de l'aire : une perspective picturale]. Dans W. Geeslin et K. Graham (dir.), *Actes de la 16^e conférence PME* (vol. 2, p. 194-201). International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Outhred, L. et Mitchelmore, M. (1996). Children's intuitive understanding of area measurement [La compréhension intuitive de l'aire chez les enfants]. Dans L. Puig et A. Gutiérrez (dir.), *Actes de la 21^e conférence PME* (vol. 3, p. 312-319). International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Perrin-Glorian, M.-J. (1990). L'aire et la mesure. *Petit x*, (24), 5-36. <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-24-petit-x/1-l-aire-et-la-mesure--567643.kjsp>
- Rogalski, J. (1984). *Acquisition de la bidimensionalité (combinatoire, espace, mesure) chez les élèves d'âge scolaire et préscolaire* [Thèse de doctorat, Université Paris VII]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-01267409/>
- Roiné, C. (2009). *Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en SEGPA : une contribution à la question des inégalités* [Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 2]. Theses.fr. <https://theses.fr/2009BOR21629>
- Roiné, C. (2014). L'élève en difficulté : retours sur une psychologisation du social. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, 66(2), 13-30. <https://doi.org/10.3917/nras.066.0013>
- Sensevy, G., Toullec-Théry, M. et Nédelec-Trohel, I. (2006). À propos de l'enseignement des mathématiques en adaptation et intégration scolaire : une étude de cas comparative en regroupement d'adaptation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(3), 151-206.
- Toullec-Théry, M. et Marlot, C. (2013). Les déterminations du phénomène de différenciation didactique passive dans les pratiques d'aide ordinaire à l'école élémentaire. *Revue française de pédagogie*, (182), 41-54. <https://doi.org/10.4000/rfp.3998>

ANNEXES

Séquence qui a été menée en classe entière

La séquence mentionnée ici comme différenciable a d'abord été expérimentée en classe entière et présentée comme des révisions. Voici les étapes de la séquence qui a été menée.



Figure 1 – Étapes des expérimentations en classe

Séquence de révisions à visée inclusive – Cycle élémentaire

Étape 1 : Travail sur la prise en compte des lignes et colonnes grâce aux tableaux

Les élèves apprennent à lier les entrées et les sorties : chaque case devient le résultat d'une prise en compte à la fois des lignes et des colonnes. Ce travail est réalisé via des jeux du commerce et des représentations de plus en plus abstraites.



Figure 2 – Jeux sur les tableaux issus du commerce



Figure 3 – Abstraction de la multiplication en tableau

Étape 2 : Introduction à la multiplication par l'organisation en tableau

Les élèves renforcent la notion de multiplication sur tableau à travers la prise en compte des lignes et colonnes de façon aidée via la représentation en paquets (Noums, J'apprends les maths). Cette étape demande d'identifier le lien entre le nombre de lignes, de colonnes, et le résultat du produit. Elle permet de revoir la structuration du raisonnement multiplicatif et d'inciter à éviter l'addition itérée lorsque la formule sera introduite.

Étape 3 : Prise en compte des deux dimensions du rectangle

Les élèves renforcent l'observation des dimensions du rectangle via le coloriage de translations progressives de déformations⁵ et des comparaisons d'aires qui demandent petit à petit de prendre en compte longueur et largeur à la fois (proposition de C. Chambris).

⁵ <https://fr.tessellations-nicolas.com/methode.php>

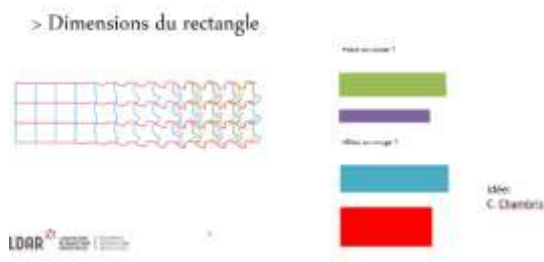


Figure 4 – Prise en compte des dimensions du rectangle



Figure 5 – Mesure par report⁶

Étape 4 : Mesure par report

Les élèves revoient la mesure (de longueur ici) par report afin de construire une représentation plus concrète des grandeurs. Ils reportent une unité de mesure (allumette) puis construisent une règle. Cette approche permet de faire le lien entre la répétition d'une unité (mesure) et la règle.

Items différenciables

Exemples de propositions pour les items mentionnés dans le tableau 1 - Séquence 1.

Tableau 2 – Propositions de Perrin-Glorian classées en fonction de nos objectifs

1.1 Travail sur le mesurage en dimension 1, favorisant aussi le principe 3 Cette étape permet de travailler sur la notion de mesure par report d'une unité pour les élèves qui ne pourraient pas travailler en dimension 2 (Outhred et Mitchelmore, 1992). Cela permet de voir la règle comme un outil permettant de compter le nombre de fois qu'une unité de mesure de longueur est reportée, plutôt qu'un numéro au bout d'une ligne graduée. Elle est nécessaire pour comprendre le lien entre mesure des côtés du rectangle et compte de carreaux, donc pour comprendre la formule de calcul d'aire.  Diapositive issue de la formation des futurs enseignants du premier degré, ESPE de Paris 2018	1.2 Travail visant à favoriser les principes 3, 4 et 5 et à déduire la formule – pour les élèves ayant acquis ou retravaillé sur la multiplication Exercice pour faire le lien entre le nombre de centimètres sur la longueur et le nombre de centimètres carrés. Dans cette phase, l'élève peut comprendre explicitement pourquoi il est possible d'utiliser la formule. Le pavage semi-effacé assure le besoin pour l'élève de mesurer la longueur avec la règle.  La grille effacée dans J'apprends les maths CM2 (2008, p. 75) La lecture de 16 cm sur la règle, lui permet d'imaginer les 16 carreaux du pavage de la première ligne. En mesurant la hauteur, il pourra imaginer le nombre de lignes. La formule apparaît ainsi comme un raccourci : je peux multiplier « longueur $\times$ largeur » plutôt que de quadriller, parce que le nombre de centimètres me donne le nombre de cm^2 sur une ligne ou colonne.

⁶ Exemple : formation de l'ESPE de Paris, règle de *J'apprends les maths*.

1.3 Exemple de travail de remédiation sur les principes 1 et 2.

Les élèves de ce groupe ont du mal à couvrir le rectangle par pavage ; il y a des trous, des juxtapositions ou une taille de l'unité de mesure qui n'est pas constante ; ou l'élève tente de couvrir correctement toute la surface du rectangle, mais il a des difficultés à faire congruer ou systématiser son étalonnage. Outhred et Mitchelmore (1996) montrent que ces points sont nécessaires pour voir le pavage comme des lignes et colonnes et pouvoir non seulement compter le nombre de carreaux au total mais aussi mesurer les côtés du rectangle et comprendre pourquoi le faire.



Du rectangle vierge à paver vers une première étape déjà lignée

Outhred et Mitchelmore ont montré qu'il était difficile de couvrir un carré par report, utilisant ou non la règle (tâches MT1 et MT2), en lien avec des élèves qui ne voient pas le pavage du point de vue des lignes et colonnes. Nous proposons de donner dans un premier temps un étalon unité carré tangible ainsi qu'un rectangle dont les lignes ou les colonnes sont tracées. Ainsi le geste de l'élève le conduit d'une part à reporter effectivement une unité tangible, mais par ailleurs à s'appuyer sur les lignes pour créer un pavage lui-même, donc à voir le rectangle ligné comme pavable.

La méthode de coloriage de « translations progressives de déformations compensées sur carrés » semblerait aussi pouvoir permettre de se représenter plus fortement le pavage en termes de lignes (la déformation amène le regard sur la ligne, ici).



Translations progressives de déformations compensées sur carrés.

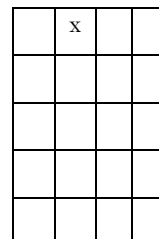
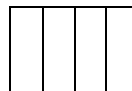
Nous nous inspirons du travail (de la théorie et de son exercice pratique) de Chambris (voir colonne de droite) pour proposer ces étapes qui nous semblent être proches de sa démarche.

1.4 Travail de remédiation sur la multiplication et le lien au tableau

Pour les élèves n'ayant pas fait le lien entre multiplication et quadrillage, il semble possible de proposer des activités issues de manuels de cycle 2 en remédiation. Voir par exemple : Multiplication et commutativité dans J'apprends les maths CE1 (2008, p. 88-90).

Étape 1/ Faire réaliser aux élèves que le fait de prendre 4 fois des boîtes de 5 cases remplies d'un chocolat peut se traduire par un ensemble de 4 colonnes. La boîte de chocolat est l'unité considérée, qui est prise 4 fois. La colonne a bien un sens épistémologique dans ce modèle, et représente les boîtes.

Les lignes n'ont pas de sens épistémologique dans ce modèle, ce sont les cases qui en ont. Ainsi, un travail en amont sur le positionnement (i,j) dans un tableau pourrait être facilitant pour la seconde étape. L'étape 2 est nécessaire pour faire le lien entre la conceptualisation de la multiplication, le pavage, les colonnes (boîtes de chocolat) et les lignes (qui n'ont de sens que pour donner une indication de position de la case).



Étape 2/ Faire réaliser aux élèves que, par exemple, le chocolat 1 de la boîte 2 se trouve sur la case positionnée en (2,1). C'est-à-dire entrer dans un raisonnement bidimensionnel qui prend en compte les lignes.

Certaines propositions (en italique) semblent accessibles à travailler en classe entière, puisqu'il est possible de travailler à partir du pavage sans travailler la prise en compte des lignes et colonne (aspect unidimensionnel en 2D). Nous ne les précisons pas ici. Pour les autres, qui impliquent l'aspect bidimensionnel, des modifications devront être proposées pour les groupes 2, 3 et 4. Les propositions sont numérotées sans notion de difficulté.

	Détacher la mesure du pavage	Distinction entre aire et surface	Relations entre l'aire de l'unité de mesure et la mesure de l'aire de la surface	Bidimensionnalité
1	<i>Proposer aux élèves une aire qui n'est pas mesurable avec les carrelages qui sont mis à leur disposition.</i>	<i>Travailler sur la conservation ou non de l'aire par transformation.</i>	Créer un tableau pour exprimer que toute aire mesurée avec une unité u peut être exprimée avec n'importe quelle unité en relation avec u .	Travailler sur la relation entre l'aire et les dimensions des côtés en fonction du pavage mis à disposition, et la variation de l'aire du rectangle en fonction des côtés.
2	<i>Travailler sur différents pavages possibles pour une même surface.</i>	<i>Travailler sur la distinction entre surface et aire pour l'unité de mesure elle-même.</i>	<i>Travailler sur les correspondances entre unités légales.</i>	Pointer les différences et les relations entre aires et longueurs. Travailler sur la relation entre les dimensions du rectangle et l'aire, ainsi que l'agrandissement.
3	<i>Travailler sur l'encadrement.</i>			Donner des consignes visant à discuter les erreurs suivantes : « un carré de côté 0,5 cm est un demi-centimètre carré » et « un parallélogramme d'aire 1 cm^2 a tous ses côtés de longueur 1 cm ».

DIFFICULTÉS SPÉCIFIQUES D'ÉLÈVES AVEC MLD SUR LES FRACTIONS

| GARDES* MARIE-LINE, BARROCA-PACCARD** FABIENNE, DERUAZ*** MICHEL,
GREGORIO**** FRANCESCA, LEMRICH***** CHLOÉ, OUVRIER-BUFFET***** CÉCILE,
PETEERS***** FLORENCE ET ROBOTTI***** ELISABETTA

Résumé | L'apprentissage des fractions pose des difficultés à de nombreux élèves, notamment ceux avec des troubles d'apprentissage en mathématiques (MLD). Dans le but d'identifier leurs difficultés spécifiques, nous avons conçu un test à choix multiple basé sur un modèle praxéologique et nous l'avons proposé à des élèves avec et sans MLD. Les résultats montrent que les élèves avec MLD réussissent moins bien, particulièrement dans la conversion de registres, la comparaison et dans la résolution de problèmes et produisent des erreurs spécifiques.

Mots-clés : troubles de l'apprentissage en mathématiques, difficultés d'apprentissage en mathématiques, fractions, test

Abstract | Learning fractions provide difficulties for many students, especially those with mathematical learning disabilities (MLD). In order to identify their specific difficulties, we designed a multiple-choice test on fractions based on a praxeological model and administered it to students with and without MLD. The results show that students with MLD perform less well than those without MLD, especially in converting, comparing and solving problems, and produce some specific errors.

Keywords: mathematical learning disorders, mathematical learning difficulties, fractions, test

I. INTRODUCTION

La plupart des systèmes éducatifs cherche à développer une école à visée inclusive. Ces politiques éducatives impliquent l'inclusion des élèves avec des troubles et des difficultés d'apprentissage ou des handicaps sensoriels et moteurs dans les classes ordinaires. L'inclusion des élèves à besoins particuliers a ainsi posé de nouveaux défis aux enseignants et a suscité un intérêt croissant dans le domaine de la recherche, notamment en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques. Dans cet article, nous nous intéressons spécifiquement aux élèves avec de grandes difficultés ou avec un trouble des apprentissages en mathématiques (nous utiliserons dans la suite l'acronyme MLD pour *Mathematical Learning Difficulties, Disorders or Disabilities*). Bien que ce sujet de recherche soit en plein essor dans notre communauté, comme en témoigne l'augmentation des publications dans les revues d'enseignement des mathématiques (e.g. Deruaz et al., 2020 ; Peteers et al., 2023), les études sur les élèves avec un trouble d'apprentissage en mathématiques restent relativement rares. Elles se concentrent sur les élèves en début de scolarité primaire, et sur des contenus arithmétiques (opérations et résolution de problèmes sur les nombres entiers). Toutefois, il existe quelques études qui s'intéressent à d'autres sujets

* Haute École Pédagogique du canton de Vaud – Suisse – marie-line.gardes@hepl.ch

** Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud – Suisse – fabienne.barroca-paccard@hepl.ch

*** Haute École Pédagogique du canton de Vaud – Suisse – michel.deruaz@hepl.ch

**** Haute École Pédagogique du canton de Vaud – Suisse – francesca.gregorio@hepl.ch

***** Haute École Pédagogique du canton de Vaud et Université de Genève – Suisse – chloe.lemrich@hepl.ch

***** Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris-Est Créteil – France – cecile.ouvrier-buffet@u-pec.fr

***** Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Cergy-Pontoise University – France – florence.peteers@cyu.fr

***** Université de Gênes – Italie – elisabetta.robotti@unige.it

mathématiques (par exemple l'algèbre, cf. Gregorio, 2023) ou à d'autres ensembles de nombres (par exemple les nombres rationnels, cf. Robotti, 2017 ; Bhatia et al., 2023 ; Hunt et al., 2019 ; Houle et Giroux, 2015). Afin de combler ce manque dans la littérature, cet article présente une étude sur l'apprentissage des fractions d'élèves avec MLD scolarisés en 7^e et 8^e année de l'école primaire en Suisse (5^e et 6^e Grade, élèves de 9 à 11 ans). Notre question de recherche est la suivante : quelles sont les difficultés spécifiques d'élèves avec MLD, comparées à celles d'élèves sans MLD, dans l'apprentissage des fractions ?

II. REVUE DE LITTÉRATURE

1. *Troubles de l'apprentissage en mathématiques*

Les troubles de l'apprentissage en mathématiques sont généralement associés à des déficiences cognitives entraînant des difficultés scolaires importantes et persistantes, non imputables à des méthodes d'enseignement inadéquates, à des influences socioculturelles, à des retards de développement ou à des déficiences sensorielles (APA, 2013). Dans le domaine des mathématiques, ces troubles affectent la compréhension des nombres, la mémoire des faits arithmétiques, la précision et la fluidité des calculs, ainsi que le raisonnement mathématique en général. L'acronyme MLD est, en anglais, utilisé de manière polysémique dans l'enseignement des mathématiques, englobant tous les élèves qui, quelles qu'en soient les causes, présentent des difficultés spécifiques ou persistantes dans l'apprentissage des mathématiques. Nous nous appuyons sur la revue de littérature de Deruaz et al. (2020), qui identifie trois utilisations principales de l'acronyme MLD. La première, *Mathematical Disorder*, désigne les élèves présentant un trouble d'apprentissage qui a été diagnostiqué par un professionnel de santé et qui est spécifique aux mathématiques (par exemple, la dyscalculie). La deuxième, *Learning disabilities*, désigne les élèves ayant reçu un diagnostic de trouble d'apprentissage non spécifique aux mathématiques (par exemple, la dyslexie) mais présentant des difficultés importantes en mathématiques. La troisième, *Severe math difficulties*, désignent des élèves qui n'ont pas été diagnostiqués avec un trouble d'apprentissage mais qui présentent d'importantes difficultés en mathématiques, identifiées par exemple par les enseignants ou par des tests passés à l'école.

2. *Apprentissage des fractions*

Les fractions peuvent être interprétées de diverses manières (par exemple comme la partie d'un tout, une division ou un rapport) et représentées sous différentes formes (dessins, écritures symboliques, code verbal ou graduation d'une droite numérique). Ces différentes interprétations et représentations engendrent chez les élèves de nombreuses difficultés d'apprentissage, identifiées et décrites dans de nombreuses recherches (pour une synthèse, voir Lortie-Forgues et al., 2015). Toutefois, seules quelques recherches s'intéressent aux difficultés spécifiques liées à l'apprentissage des fractions rencontrées par les élèves avec MLD. Par exemple, l'étude de Mazzocco et Devlin (2008) révèle que les élèves avec MLD ne maîtrisent pas les différentes représentations des fractions, qu'ils éprouvent des difficultés à associer une représentation visuelle à une représentation plus abstraite, telle que l'écriture symbolique et à utiliser la fraction $\frac{1}{2}$ comme point de repère (pour la comparaison par exemple). De plus, comparativement aux élèves sans MLD, les élèves avec MLD doivent fournir plus d'efforts et prennent davantage de temps pour ordonner des fractions, notamment parce qu'ils maîtrisent moins rapidement les représentations symboliques et privilégient plus longtemps les représentations sous forme de dessins (Mazzocco et Devlin, 2008). Bhatia et al. (2023) ont mené une étude sur les connaissances des fractions chez les adultes avec MLD et ont identifié des connaissances préservées (c'est-à-dire non impactées par leur trouble), par exemple la conversion des représentations

verbales en représentations symboliques, mais qu'ils rencontraient d'importantes difficultés dans les tâches impliquant une droite graduée, des opérations avec des fractions ou la résolution de problèmes et présentaient des patterns d'erreurs spécifiques par rapport aux adultes sans MLD.

III. MÉTHODE

Afin d'identifier les difficultés spécifiques d'élèves avec MLD dans l'apprentissage des fractions, nous avons conçu un test reposant sur un modèle praxéologique du concept de fraction. Nous l'avons ensuite proposé à des élèves avec ou sans MLD. Nous décrivons ci-dessous les différents éléments de notre méthode.

1. Contexte et participants

Nous avons mené une étude en Suisse romande auprès d'élèves scolarisés à l'école primaire. Comme dans de nombreux pays, le système éducatif vise à aller vers une école de plus en plus inclusive (DFJC, 2019). Malgré cette volonté politique, deux systèmes coexistent toujours, celui des écoles et classes inclusives, et celui des écoles ou classes spécialisées. Ainsi, les élèves avec MLD peuvent être scolarisés dans des classes ordinaires, parfois avec un programme adapté ou avec des aménagements spécifiques, mais ils peuvent également être scolarisés dans des classes spécialisées qui regroupent des élèves rencontrant des difficultés scolaires importantes (par exemple si l'écart entre le programme officiel et celui personnalisé de l'élève devient trop grand). Dans notre étude, les données ont été récoltées au sein de classes ordinaires inclusives et de quelques classes spécialisées, chaque classe ayant des élèves avec et des élèves sans MLD.

Dans cet article, nous nous concentrons sur les données d'un sous-ensemble des données collectées. Il s'agit de cinq classes ordinaires d'école primaire de Suisse romande, deux classes de 7^e année (5^e Grade, 9-10 ans) et trois classes de 8^e année (6^e Grade, 10-11 ans). Au total, nous présentons les données de 86 élèves, dont 24 avec MLD que nous avons catégorisés selon les trois types présentés plus haut : 4 élèves présentent un trouble d'apprentissage en mathématiques diagnostiqué (*mathematical disorder*), 8 élèves ont un diagnostic pour un trouble d'apprentissage (*learning disabilities*) avec un fort impact sur les mathématiques et 12 élèves ont des difficultés mathématiques sévères (*severe math difficulties*), sans diagnostic. Dans le programme scolaire suisse, les fractions sont introduites en 7^e année (5^e Grade). Suite à l'apparition de nouveaux moyens d'enseignement officiels (en 2023), les fractions sont introduites par des activités de mesure utilisant une bande d'unité¹. En 8^e année (6^e Grade), de nombreuses tâches de conversion entre registres sont proposées, notamment entre l'écriture fractionnaire et une autre représentation. Quelques résolutions de problèmes sont également proposées. Les opérations avec des fractions ne sont pas enseignées à ce niveau scolaire. Tous les élèves de notre échantillon (avec et sans MLD) ont suivi cet enseignement des fractions (même durée et objectifs communs, cependant, les exigences peuvent être moindres pour les élèves présentant un trouble diagnostiqué et disposant d'un programme personnalisé).

2. Construction du test

Le test utilisé s'appuie sur un test existant, qui a été conçu dans une recherche portant sur l'identification et la caractérisation des difficultés dans l'apprentissage des fractions chez des adultes avec MLD (Bhatia et al., 2023). Il a été construit en utilisant un modèle praxéologique (au sens de Bosch et Gascon, 2005) qui fournit un modèle de la connaissance « *fractions* ». Cinq genres de tâches ont été déterminés et chaque genre de tâches génère plusieurs types de tâches (Tableau 1), à partir de

¹ Il s'agit d'une bande en papier utilisée comme unité pour mesurer d'autres bandes.

différentes variables. Ces variables sont de nature didactique, c'est-à-dire qu'elles influencent la hiérarchie des procédures de résolution (Brousseau, 1997). Cela permet de mettre en évidence différentes stratégies de résolution et donc différentes difficultés, ce qui est essentiel pour un test visant à évaluer les difficultés des élèves. Voici quelques-unes de ces variables et les valeurs qu'elles peuvent prendre :

- Nature du dénominateur : familier (2, 3, 4), non familier (5, 6, 8, 11,...) ou décimal (10)
- Relation entre les fractions : mêmes dénominateurs, dénominateurs multiples ou dénominateurs premiers entre eux.
- Nécessité de trouver une fraction équivalente : oui ou non.
- Registre sémiotique : écriture fractionnaire, code décimal, code verbal, droite graduée.

Grâce à ce modèle praxéologique, 28 questions ont été créées, composées au total de 55 items. Les questions pour chaque type de tâches sont présentées dans le tableau 1 et quelques-unes sont détaillées en annexe (celles identifiées avec * dans le tableau 1).

Tableau 1 – Genres et types de tâches utilisés dans le modèle praxéologique pour la construction du test

Genre de tâches	Type de tâches	Questions du test correspondant
Convertir	Décoder une fraction : d'une quantité à une fraction Coder une fraction : d'une fraction à une quantité	Q1 à Q6, Q10 Q7, Q11
Associer	Associer une fraction à un code verbal Associer un code verbal à une fraction Associer une fraction à une autre fraction (fractions équivalentes) Associer une décomposition à une fraction Associer un code décimal à une fraction Associer une fraction à un code décimal	Q8 Q9* Q13 Q14 Q15* Q16
Ordonner	Comparer une fraction à 1 Comparer deux fractions Ordonner les fractions Intercaler une fraction entre deux nombres	Q12* Q17* Q18, Q19 Q20, Q21, Q22
Opérer	Ajouter des fractions Soustraire des fractions	Q23 Q24
Résoudre des problèmes	Résoudre des problèmes verbaux avec des fractions	Q25* à Q28*

3. Procédure

Le test a été administré en classe entière, par l'enseignant. Les élèves avaient à disposition 45 minutes maximum pour répondre aux questions. Aucun matériel n'a été mis à disposition des élèves, à l'exception du papier et du crayon. Il a eu lieu à la fin de l'année scolaire, les élèves avaient donc déjà étudié les fractions (des types de tâches tels que *convertir*, *associer*, en 7^e année (5^e Grade), *convertir*, *associer*, *ordonner* et *résoudre des problèmes* en 8^e année (6^e Grade).

Après la collecte des données, celles-ci ont été codées en fonction de la justesse des réponses données par les élèves. Cela nous a permis de calculer le taux de réponses correctes par question et par élève. Puis, nous avons partagé les élèves en deux groupes, ceux avec MLD et ceux sans MLD. Nous

avons calculé le taux moyen de réponses correctes par groupe d'élèves, par genre et par type de tâches (Tableau 1).

Dans la partie suivante, nous nous concentrons sur les genres et les types de tâches pour lesquels il existe une différence de performance supérieure de 25 % entre le groupe d'élèves avec MLD et le groupe d'élèves sans MLD. S'agissant de genres et de types de tâches pour lesquels il existe une grande différence entre les deux groupes, nous pouvons supposer qu'il s'agit donc de difficultés caractéristiques des élèves avec MLD.

IV. PRÉSENTATION ET ANALYSE DES RÉSULTATS

Dans les paragraphes suivants, nous allons tout d'abord présenter les réussites globales des groupes d'élèves par genre de tâches. Puis nous procéderons à une analyse plus fine des différences entre les deux groupes d'élèves, en suivant la praxéologie du tableau 1 : pour chaque genre de tâches, nous présenterons les résultats en fonction du type de tâches.

1. Réussite par genre de tâches

Si l'on considère le test dans son ensemble, la performance moyenne des élèves avec MLD (24 élèves) est inférieure à celle des élèves sans MLD (62 élèves) pour 54 items du test (qui en contient 55). Ce résultat, bien que peu surprenant, confirme la bonne répartition des élèves entre les deux groupes et la pertinence du choix des questions du test. En particulier, les élèves sans MLD ont en moyenne 58 % de réponses correctes, alors que les élèves avec MLD en ont 37 % (Tableau 2). La différence entre les scores des deux populations est donc importante, puisqu'elle est de 21 %.

Tableau 2 – Pourcentage de réponses correctes par type de tâches et par groupe d'élèves (avec ou sans MLD)

	Convertir	Associer	Ordonner	Opérer	Résoudre des problèmes	Total du test
Élèves avec MDL	45 %	25 %	43 %	4 %	17 %	37 %
Élèves sans MDL	62 %	48 %	67 %	16 %	43 %	58 %
Différence entre les deux groupes	17 %	23 %	24 %	12 %	26 %	21 %

En ce qui concerne le premier niveau de praxéologie, les genres de tâches n'offrent pas un modèle suffisamment fin pour révéler des différences significatives entre les élèves avec MLD et ceux sans MLD. Le genre de tâches *convertir* est plutôt bien réussi pour les deux groupes d'élèves (moyenne de 45 % de réponses correctes pour les élèves avec MLD et 62 % pour les élèves sans MLD). Le genre de tâches *opérer*, qui n'est pas enseigné à ce niveau scolaire, est moins bien réussi chez les deux groupes d'élèves (4 % pour les élèves avec MLD et 16 % pour les autres). Les trois autres types de tâches présentent des différences de réussite entre les deux groupes plus importants : *associer* (23 %), *ordonner* (24 %) et *résoudre des problèmes* (26 %). L'analyse en fonction du type de tâches permettra de mieux comprendre ce que révèlent ces premiers résultats.

2. Réussite par type de tâches

Le genre de tâches *associer* présente une différence de réussite de 23 % entre les deux groupes, mais deux types de tâches ont une différence de moyenne entre les deux groupes supérieurs à 25 %. Il s'agit de la tâche *associer un code verbal à une fraction* (36 % de différence, Q9) et *associer un code décimal à une fraction*

(36 % de différence, Q15). La question Q9, où il est demandé d'écrire en code verbal la fraction $\frac{6}{10}$, a posé beaucoup plus de difficultés aux élèves avec MLD comparativement à ceux sans MLD. Une erreur fréquente observée est l'inversion du numérateur et du dénominateur. Il s'agit d'une erreur commune concernant les fractions (Lortie-Forgues et al., 2015), que nous avons également retrouvée fréquemment dans des réponses à d'autres questions du test. Une deuxième erreur fréquente à la question Q9 est de confondre le dénominateur requis 10 (*dixième*) avec 2 (*demi*). Étant donné que nous n'avons pas eu accès au raisonnement des élèves, il nous est impossible de fournir une justification avec certitude. Une première explication possible est que les élèves ont choisi un dénominateur « habituel », qu'ils connaissent depuis de nombreuses années. Une seconde explication pourrait être liée à l'assonance entre les mots « dixième » et « demi » en français. Ce résultat, relatif au type de tâches *associer un code verbal à une fraction*, diffère de ce que Bhatia et al. (2023) avaient trouvé concernant les adultes, à savoir que les adultes avec MLD ne rencontraient aucune difficulté à nommer les fractions présentées sous forme symbolique. Cette différence s'explique peut-être par la différence d'âge et de parcours scolaire des participants des deux études. Nous pouvons donc faire l'hypothèse que cette difficulté typique rencontrée lors de l'introduction des fractions peut être surmontée avec le temps. Cette hypothèse est renforcée par le succès global de l'item parmi les élèves de l'école primaire interrogés : 46 % de réussite chez les élèves avec MLD et 82 % pour ceux sans MLD. La question Q15 demande d'écrire le code décimal de la fraction $\frac{1}{4}$ (soit 0,25). Une erreur courante a été de répondre 1,4, ce qui montre une confusion entre l'écriture fractionnaire et l'écriture décimale, et une mauvaise compréhension du sens de chacune d'elles. Au lieu de considérer un nombre écrit sous forme fractionnaire ou décimale comme un objet unique composé de plusieurs chiffres et symboles (la barre de fraction ou la virgule), il est considéré comme composé de deux nombres indépendants et séparés par un symbole graphique (Lortie-Forgues et al., 2015). En n'associant pas de signification aux formes d'écriture, elles semblent être interchangeables pour les élèves.

En ce qui concerne le genre de tâche *ordonner*, deux types de tâches ont une différence de réussite moyenne entre les deux groupes supérieure à 25 % : *comparer une fraction à 1* (37 % de différence, Q12) et *comparer deux fractions* (26 % de différence, Q17). La question Q12 est constituée de quatre items, chaque item est une fraction (inférieure, supérieure ou égale à 1) qu'il faut comparer à 1. Il s'agit des fractions : $\frac{7}{4}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{9}{6}$. Cette question est globalement bien réussie, en particulier parmi les élèves sans MLD. Ce type de tâches révèle non seulement une différence moyenne de réussite entre les deux groupes d'élèves lorsque les quatre items sont regroupés, mais aussi une différence importante pour chaque item, variant de 32 % à 42 %. Ces résultats corroborent ceux de Mazzocco et Devlin (2008), qui ont constaté que les élèves avec MLD éprouvent plus de difficultés à comparer des fractions par rapport aux élèves sans MLD. La question Q17 comporte quatre items et demande d'identifier la plus grande fraction dans les couples de nombres suivants : $\frac{6}{7}$ et $\frac{4}{7}$ (Q17a); $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ (Q17b); $\frac{2}{5}$ et $\frac{7}{3}$ (Q17c); $\frac{4}{7}$ et $\frac{4}{9}$ (Q17d). Il s'agit d'une question à laquelle les élèves (avec et sans MLD) ont relativement bien répondu, mais pour laquelle il existe une différence importante entre les deux groupes (26 %). Parmi les quatre items, il y a également une certaine variabilité dans les différences de réussite entre les deux groupes d'élèves. Pour la question Q17a, la comparaison entre $\frac{6}{7}$ et $\frac{4}{7}$, la moyenne des réponses correctes est très bonne tant pour les élèves sans MLD (84 %) que pour ceux avec MLD (67 %). La différence de réussite entre les deux groupes d'élèves est faible (17 %). Les fractions à comparer ont le même dénominateur, de sorte que l'appui sur la technique de comparaison valable pour les nombres naturels permet d'avoir la bonne réponse : le numérateur le plus grand correspond au nombre le plus grand. Pour les questions Q17b et Q17c, la réussite des élèves avec MLD diffère de 25 % de celle des

élèves sans MLD. L'item Q17d est beaucoup moins bien réussi que les trois autres : 66 % de réponses correctes pour les élèves sans MLD et 29 % pour les élèves avec MLD, soit une différence significative (37 %). Pour réussir l'item Q17d, il n'est pas possible de s'appuyer sur la technique qui permet d'ordonner des nombres naturels, contrairement à l'item Q17a. En effet, les numérateurs étant égaux, la plus grande fraction est celle qui a le plus petit nombre au dénominateur. Globalement, nos résultats concernant Q12 et Q17 sont cohérents avec la recherche de Bhatia et al. (2013) qui a trouvé que les adultes avec MLD ont plus de difficultés à ordonner et à comparer les fractions, ce qui, d'après nos données, semble déjà être vrai pour les élèves de l'école primaire.

Les élèves avec MLD ont eu beaucoup plus de difficultés avec le genre de tâche *résoudre des problèmes*. Le taux de réussite pour ce type de tâches est de 17 % pour les élèves avec MLD et de 43 % pour les élèves sans MLD. Il y a trois questions pour lesquelles il y a une grande différence entre les deux groupes : Q25 avec 44 % de différence, Q26 avec 25 % et Q27 avec 39 %. Le dernier problème (Q28), composé de deux items, montre moins de différence (Q28a : 13 % et Q28b : 11 %). Ce problème est par ailleurs mal réussi dans les deux groupes. Nous n'entrons pas plus dans les détails des problèmes, car il s'agit d'un genre de tâches qui a été difficile pour tous les élèves (avec MLD ou non). Une des raisons est sans doute que les élèves rencontrent peu de résolution de problèmes avec des fractions dans leur curriculum à l'école primaire. Les résultats que nous pouvons en tirer sont donc partiels. Malgré cette limite, la différence entre les deux groupes, en ce qui concerne la résolution de problèmes, est cohérente avec les résultats de l'étude de Bhatia et al. (2023), qui ont conclu que les adultes avec MLD présentent de moins bonnes performances en résolution de problèmes que les adultes sans MLD. Les difficultés liées à résolution de problème chez les élèves avec MLD semblent donc commencer à l'âge scolaire et perdurer à l'âge adulte.

V. CONCLUSION

Le modèle praxéologique du concept de fraction (Tableau 1), sur lequel est basé le test, utilisé dans notre étude a permis d'identifier certains types de tâches qui mettent en évidence des difficultés spécifiques et caractéristiques d'élèves avec MLD par rapport à des élèves sans MLD. Il s'agit notamment de l'association d'une fraction à un code verbal et décimal, de la comparaison d'une fraction à 1 ou à une autre fraction et de la résolution de problèmes.

Les résultats ci-dessus doivent être pris avec précaution, car ils ne constituent que le début d'un projet de recherche sur les connaissances des fractions d'élèves avec MLD. Seule une petite partie des données a été analysée pour cette communication : des résultats plus précis seront obtenus avec une analyse complète et une comparaison entre trois pays (Suisse, France et Italie). Cette analyse pourrait se poursuivre en utilisant notamment les variables utilisées pour construire le test : par exemple, la nature du dénominateur, la relation entre les fractions, la nécessité de trouver des fractions équivalentes ou le registre sémiotique. Cela permettrait une analyse plus fine et une description complémentaire des difficultés spécifiques des élèves avec MLD. Des analyses statistiques complémentaires et inférentielles seront également conduites afin de distinguer les différences significatives de réussite des différences non significatives (par exemple, une analyse par ANOVA permettrait de prendre en compte le facteur inter-sujets en groupe, avec et sans MLD).

L'identification des difficultés spécifiques des élèves présentant un trouble d'apprentissage en mathématiques sur les fractions est importante pour la prise en charge de ces élèves dans un enseignement à visée inclusive. En effet, sur la base de ces résultats, nous voulons concevoir un ensemble de « situations didactiques inclusives » pour l'enseignement des fractions, c'est à dire des situations pour tous les élèves, prenant en compte leur diversité, en cherchant à adapter leur milieu.

RÉFÉRENCES

- American Psychiatric Association [APA]. (2013) Specific learning disorder. Dans *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* (5^e éd., p. 66-74). <https://doi.org/10.1176/appi.books.9780890425596>
- Bhatia, P., Léone, J., Gardes, M. L. et Prado, J. (2023). Fraction knowledge in adults with persistent mathematics difficulties. *Learning Disability Quarterly*, 47(1), 30-43. <https://doi.org/10.1177/07319487231171380>
- Bosch, M. et Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier, et C. Margolinas (dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 107-122). La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Dans *Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal*. <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/06/MONTREAL-archives-GB1.pdf>
- Département de la formation, de la jeunesse et de la culture [DFJC]. (2019). Concept 360°. https://www.vd.ch/fileadmin/user_upload/organisation/dfj/dgeo/fichiers_pdf/concept360/Concept_360.pdf
- Deruaz, M., Dias, T., Gardes, M.-L., Gregorio, F., Ouvrier-Buffer, C., Peteers, F. et Robotti, E. (2020). Exploring MLD in mathematics education: Ten years of research. *The Journal of Mathematical Behavior*, 60, Article 100807. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100807>
- Gregorio, F. (2023). Algebraic generalisation of a student with MLD: Skills despite difficulties and implications for diagnostic tests. Dans P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi et E. Kónya (dir.), *Proceedings of the thirteenth congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (p. 552-559). Alfréd Rényi Institute of Mathematics ; ERME.
- Houle, V. et Giroux, J. (2015). Intervention orthopédagogique en mathématiques fondée sur une approche didactique. Dans A. Adihou, L. Bacon, D. Benoit et C. Lajoie (dir.), *Actes du colloque du GDM2015 « Regards sur le travail de l'enseignant de mathématiques », 20-22 mai 2015, Université de Sherbrooke* (p. 95-108).
- Hunt, J. H., Silva, J. et Lambert, R. (2019). Empowering students with specific learning disabilities: Jim's concept of unit fraction. *The Journal of Mathematical Behavior*, 56, article 100738.
- Lortie-Forgues, H., Tian, J. et Siegler, R. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201-221. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008>
- Mazzocco, M. et Devlin, K. (2008). Parts and 'holes': Gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Developmental Science*, 11(5), 681-691. <https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2008.00717.x>
- Peteers, F., Lemrich, C., Gregorio, F. et Gardes, M.-L. (2023). Cartographie de la recherche en Mathematics Education de 2007 à 2021 sur les troubles et difficultés d'apprentissage en mathématiques. *Revue de Mathématiques pour l'école*, (240), 3-15. <https://doi.org/10.26034/vd.rm.2023.4229>
- Robotti, E. (2017). How the representations take on a key role in an inclusive educational sequence concerning fraction. Dans T. Dooley et G. Gueudet (dir.), *Proceedings of the tenth congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10)* (p. 3992-3999). DCU Institute of Education ; ERME.

ANNEXE
EXTRAIT DU TEST SUR LES FRACTIONS

Genre de tâches : Associer – Type de tâches : Associer un code verbal à une fraction

Q9	Écris la fraction avec des mots. $\frac{6}{10}$:.....

Genre de tâches : Associer – Type de tâches : Associer un code décimal à une fraction

Q15	Écris l'écriture décimale de la fraction. $\frac{1}{4}$ =.....

Genre de tâches : Ordonner – Type de tâches : Comparer une fraction à 1

Q12	Écris à côté de la fraction si elle est plus petite que 1, égale à 1 ou plus grande que 1. $\frac{7}{4}$ est (item a) ; $\frac{3}{3}$ est (item b) ; $\frac{2}{5}$ est (item c) ; $\frac{9}{6}$ est (item d)

Genre de tâches : Ordonner – Type de tâches : Comparer deux fractions

Q17	Entoure la fraction qui est la plus grande. $\frac{6}{7}$ ou $\frac{4}{7}$ (item a) ; $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{4}$ (item b) ; $\frac{2}{5}$ ou $\frac{7}{3}$ (item c) ; $\frac{4}{7}$ ou $\frac{4}{9}$ (item d).

Genre de tâches : Résoudre des problèmes – Type de tâches : Résoudre des problèmes avec des fractions

Q25	Luca a regardé 21 épisodes d'une série télévisée. Chloé en a regardé le tiers. Combien d'épisodes Chloé a-t-elle regardés ?
Q26	Le livreur a déjà distribué 25 paquets. C'est le quart des paquets qu'il doit distribuer. Combien de paquets avait-il avant de commencer sa tournée ?
Q27	Un télésiège comporte 80 sièges. 20 sièges sont déjà occupés par des passagers. Quelle fraction du total des sièges les sièges occupés représentent-ils ?
Q28	Sarah, Pénélope et Adam se partagent une plaque de chocolat. Sarah prend un quart de la tablette, Pénélope en prend les cinq huitièmes et Adam prend ce qui reste. Quelle fraction de la plaque de chocolat Adam a-t-il prise ? (Q28a) Qui a eu le moins de chocolat ? (Q28b)

ÉLÉMENTS DE RÉFLEXION À PROPOS DE L'UTILISATION DU MATÉRIEL DE MANIPULATION EN MATHÉMATIQUES AUPRÈS D'ÉLÈVES D'ADAPTATION SCOLAIRE

| BÉLANGER-FORTIN* ARIANE

Résumé | Notre contribution a pour objectif de dégager d'écrits scientifiques des éléments importants quant à l'utilisation du matériel de manipulation en adaptation scolaire. La contribution de ce travail est double : il est possible de dégager plusieurs éléments de réflexion provenant d'articles scientifiques (4) et, au niveau méthodologique, nous décrivons la démarche par laquelle nous avons recueilli ces éléments pouvant être réinvestis avec les personnes enseignantes dans le cadre d'une recherche collaborative.

Mots-clés : matériel de manipulation, enseignement-apprentissage des mathématiques, élèves en difficulté, adaptation scolaire, recherche collaborative

Abstract | Our contribution aims to extract important elements from scientific writings regarding the use of manipulatives in special education. The contribution of this work is twofold: it is possible to identify several points of reflection derived from scientific articles (4), and methodologically, we describe the approach through which we collect these elements, which can then be reintegrated with teachers within the framework of a collaborative research.

Keywords: Manipulatives, mathematics education, learning disabilities, special education, collaborative research

Cette contribution vise à présenter une démarche d'analyse d'articles scientifiques en lien avec l'utilisation du matériel de manipulation en mathématiques en adaptation scolaire. Les éléments qui sont dégagés permettront d'alimenter les réflexions que nous mènerons avec des personnes enseignantes dans le cadre d'une recherche collaborative. Nous présentons, dans cet article, la problématique menant à la question qui a guidé notre démarche. Nous expliquons ensuite la constitution de notre corpus ainsi que l'analyse des textes retenus. Finalement, nous présentons des éléments de réflexion associés à l'utilisation du matériel de manipulation auprès d'élèves en difficulté qui ont été relevés dans les articles (4).

I. PROBLÉMATIQUE

Depuis plusieurs années, les préoccupations quant aux difficultés d'apprentissage des mathématiques sont grandissantes (Giroux, 2014). Ces difficultés représentent de réels défis pour les divers intervenants qui accompagnent les élèves. Tant au Québec (MEQ, 2006 ; MELS 2009) qu'à l'échelle internationale (ex. National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]), l'utilisation du matériel de manipulation est préconisée dans l'enseignement des mathématiques au primaire. Plus particulièrement, le matériel de manipulation est considéré comme une façon de soutenir les élèves qui éprouvent des difficultés (Roiné, 2012 ; Tjandra, 2023). Selon Roiné (2012), il s'agit de l'une des stratégies les plus utilisées pour aider les élèves d'adaptation scolaire en mathématiques. Dans le nouvel outil ministériel visant à donner des exemples disciplinaires de flexibilité pédagogique¹, les propositions en mathématiques pour le premier et le deuxième cycle du primaire sont les suivantes : l'enseignante

* Université Laval – Canada – ariane.belanger-fortin.2@ulaval.ca

¹ Différenciation pédagogique : soutenir tous les élèves pour favoriser leur réussite éducative. Exemples disciplinaires de flexibilité pédagogique : outil complémentaire n° 2 de 3.

peut, pour différencier au niveau des productions des élèves « permettre aux élèves de choisir un mode de représentation (ex. : des mots, du matériel de manipulation ou des schémas) [...] » (MEQ, 2021, p.88 et p.90) et l'élève peut « choisir un mode de représentation [...] » (MEQ, 2021, p.88 et p.90). L'utilisation du matériel de manipulation, vue comme une mesure de flexibilité pédagogique, est donc mise de l'avant par le ministère, sans que davantage de précisions ne soient données. Il est suggéré que l'élève choisisse un mode de représentation, sous-entendant que le matériel en est un mode parmi d'autres. Ces recommandations ministérielles influencent probablement le fait que l'utilisation du matériel de manipulation fait souvent partie des recommandations que l'on retrouve dans les plans d'intervention (PI). Nous avons observé que les recommandations faites pour les élèves dans les plans d'intervention ne vont pas au-delà de l'idée de fournir du matériel de manipulation. Le tableau suivant contient quelques extraits de PI d'élèves du primaire pour qui la manipulation a été identifiée comme un moyen de les aider.

Tableau 1 – Extraits de trois plans d'intervention dans lesquels l'utilisation du matériel de manipulation est recommandée pour aider les élèves²

Objectifs	Moyens
Développer sa compréhension des concepts et processus mathématiques.	Utiliser les outils de référence et le matériel de manipulation mis à sa disposition.
Améliorer les processus mathématiques ainsi que les stratégies de résolution de problèmes.	Utiliser du matériel de manipulation.
Améliorer sa compréhension des concepts mathématiques et être en mesure de les mettre en application dans les problèmes mathématiques.	Proposer à l'élève d'utiliser un matériel de manipulation connu pour favoriser la poursuite de la tâche.

Nous observons que les difficultés pour lesquelles l'utilisation du matériel est recommandée ne sont pas ciblées, ni le matériel à privilégier ou la façon de l'utiliser. Corriveau et Jeannotte (2015, 2020) ont également observé que les pratiques se limitent souvent à fournir le matériel aux élèves avec l'idée qu'il permettra, à lui seul, de « concrétiser » les apprentissages et d'aider les élèves. Pourtant, le fait de fournir aux élèves du matériel de manipulation n'est pas garant d'une adéquation entre l'apprentissage visé et ce qui est développé avec le matériel (Furman, 2017; Poirier, 2001, Roiné, 2012). Il existe peu de recommandations claires concernant l'apport du matériel quant aux difficultés et à l'apprentissage, ni sur la manière précise de l'exploiter efficacement avec les élèves pour dépasser tel ou tel obstacle mathématique. Déjà en 1992, Ball mentionnait que, malgré le fait que le matériel occupe une place centrale dans les programmes, il n'y a pas de débats sur le rôle qu'il joue dans l'apprentissage des élèves (Ball, 1992).

Bref, l'utilisation du matériel de manipulation n'est pas simple, ni pour les personnes enseignantes, ni pour les élèves. La complexité de son exploitation et du rôle que les personnes enseignantes doivent jouer dans son utilisation est souvent sous-estimée (Mariotti et Maffia, 2018). L'utilisation du matériel pourrait même amener un effet « Pharmakéia » (Roiné, 2012). Roiné (2012) a décrit ce phénomène selon lequel les dispositifs qui sont utilisés pour aider les élèves produisent parfois l'effet contraire à ce qui est souhaité et agissent comme un « poison » plutôt que comme un « remède » quand les conditions relatives à leur utilisation ne sont pas respectées. Les interventions en mathématiques auprès des élèves en difficulté ont longtemps consisté en un ré-enseignement des concepts en passant d'abord par la manipulation, puis par des représentations imagées avant de passer à des représentations symboliques

² Ces extraits de PI nous ont été partagés, anonymisés, lorsque nous avons travaillé comme conseillère pédagogique en mathématiques. Il arrivait alors souvent que des enseignants, orthopédagogues ou directions d'écoles nous consultent pour obtenir des conseils sur les moyens à privilégier pour aider certains élèves.

(Lemoyne et Lessard, 2003). Plusieurs résultats de recherches depuis une dizaine d'années montrent que faire des mathématiques avec du matériel n'est pas une unique concrétisation de ce qui se fait sans matériel (Corriveau et Jeannotte, 2015).

II. OBJECTIFS ET QUESTIONNEMENTS

Dans le cadre de notre recherche doctorale, nous souhaitons cerner ce qui favorise la compréhension des concepts mathématiques dans des situations pour lesquelles le matériel est utilisé afin de soutenir les élèves en difficulté. Nous souhaitons observer les éléments qui favorisent l'adéquation entre les difficultés des élèves, les tâches et le matériel de manipulation proposés ainsi que les interventions pendant l'accompagnement.

Une démarche collaborative sera adoptée dans le cadre de cette recherche³. Souhaitant éclairer un aspect de la pratique enseignante, nous considérons, comme Desgagné (1997, p.373) que « [...] la construction de connaissances liées à une pratique professionnelle donnée ne se fait pas sans considération du contexte réel où cette pratique est actualisée ». Nous travaillerons donc avec des enseignantes et enseignants en adaptation scolaire au primaire qui interviennent auprès d'élèves en difficulté pour qui l'utilisation du matériel de manipulation a été recommandée pour pallier certaines difficultés mathématiques. Ces personnes enseignantes prennent tous les jours des décisions face aux difficultés de leurs élèves et utilisent le matériel de manipulation avec l'intention de les aider. Ces « manières de faire » ou « savoirs d'action du praticien » (Schön, 1983), ne sont pas accessibles aux chercheurs autrement qu'en demandant aux personnes enseignantes de les expliciter. Ce savoir-faire, ancré dans le terrain de leur pratique d'enseignement des mathématiques (Proulx, 2013) porte une cohérence qui pourra être documentée dans le cadre de notre projet. Avant de mener des observations en classe, des rencontres de planification auront lieu avec les personnes enseignantes afin d'effectuer conjointement le choix des tâches et du matériel qui sera utilisé en fonction des intentions pédagogiques et des difficultés des élèves qu'ils accompagnent.

Nous savons que l'utilisation du matériel de manipulation amène son lot de défis. Dans le cadre de notre recherche doctorale, nous décrivons les différents enjeux associés à son utilisation que nous avons recensés dans la littérature. Nous les avons regroupés en catégories : enjeux de formation et d'aisance des personnes enseignantes, enjeux pratiques et logistiques, enjeux en lien avec le sens donné au matériel, enjeux d'adéquation entre l'utilisation du matériel et l'apprentissage visé et enjeux associés à la manière d'utiliser le matériel. Toutefois, il n'y a pas vraiment de recherche recensant les pratiques permettant d'outiller les enseignants vis-à-vis les choix à faire lorsque du matériel est utilisé. Or, quelques recherches menées dans le contexte de l'adaptation scolaire proposent l'utilisation du matériel comme piste d'intervention auprès des élèves en difficulté. Sur le plan méthodologique, il nous est apparu approprié d'analyser ces articles de recherche afin de dégager des éléments pouvant servir de base de discussion dans la collaboration avec les personnes enseignantes. À notre avis, cette analyse est aussi pertinente en elle-même, sur le plan théorique, puisqu'elle permet de dégager, de ces articles, des éléments à considérer sur le plan didactique lors de l'utilisation du matériel de manipulation auprès d'élèves en difficulté.

Nous nous sommes donc posé la question suivante : *Que peut-on dégager de certains écrits scientifiques en lien avec l'utilisation du matériel de manipulation en adaptation scolaire qui pourrait être réinvesti comme base de*

³ Considérant que cet article s'inscrit dans le cadre du groupe de travail 10 – Enseignement auprès de publics spécifiques ou dans des contextes particuliers, nous nous sommes centrés sur la problématique de l'utilisation du matériel de manipulation en mathématiques en adaptation scolaire et nous ne décrivons pas davantage les principes de la recherche collaborative.

réflexion commune dans notre recherche collaborative ? Autrement dit, est-ce que ces recherches peuvent alimenter les réflexions que nous mènerons avec les personnes enseignantes ?

III. MÉTHODOLOGIE

Pour relever des éléments pouvant éclairer la pratique qui se dégagent de ces recherches et pourraient également être parlants pour les personnes du milieu scolaire, notre démarche se veut heuristique (Gohier, 1998). En effet, nous souhaitons, à partir d'articles qui abordent indirectement les pratiques d'utilisation du matériel avec des élèves en difficultés, c'est-à-dire qu'elles ont un autre objet d'étude, faire apparaître « du sens ». Notre démarche ne doit pas être vue comme une chose imposée, mais vise, au contraire, à servir de base de discussion avec les personnes enseignantes. En effet, lors des rencontres avec les personnes participantes, notre rôle ne sera pas un rôle de formatrice qui transmet des savoirs, mais plutôt qui accompagne et guide le questionnement sur la pratique. Comme nous prendrons part aux échanges, en tant que chercheure, les connaissances et conceptions des personnes enseignantes seront également amenées à évoluer par la confrontation avec les « connaissances de scientifiques » (Lyet, 2016) que nous pourrions intégrer aux échanges. Si l'occasion se présente lors des échanges, ces éléments issus de la recherche pourront servir de bases à nos réflexions. Nous pourrions en discuter et voir comment ceux-ci s'opérationnalisent, se nuancent selon les circonstances et éclairent en quelque sorte les manières d'utiliser du matériel en contexte d'adaptation scolaire.

1. *Constitution d'un corpus*

À la lumière de la problématique et du contexte de la recherche, nous avons retenu plusieurs critères afin de constituer notre corpus, à partir de tous les articles trouvés lors d'une revue de la littérature menée pour notre recherche doctorale. 1) Nous avons sélectionné, dans notre banque, des articles dans lesquels des interventions mettant de l'avant l'utilisation du matériel de manipulation pour aider des élèves qui éprouvent des difficultés en mathématiques étaient décrites. Nous avons donc éliminé tous les articles dont l'objectif était de démontrer l'utilité du matériel auprès d'élèves en difficulté dans lesquels aucune intervention spécifique n'était décrite. 2) Nous avons retenu les articles ayant un contexte près du nôtre, soit des interventions dans le contexte de l'adaptation scolaire ou d'entretiens orthopédagogiques. 3) Nous avons retenu les articles dans lesquels les interventions se situaient dans le champ de l'arithmétique. 4) Le matériel utilisé pour les interventions devait être du matériel tangible et non virtuel. 5) Nous avons priorisé les articles proposant des observations sur l'utilisation du matériel ou des recommandations pour la pratique plutôt que traitant de l'utilisation du matériel sous l'angle d'enjeux ou sous un angle critique. 6) Les auteurs retenus adoptaient une posture didactique (plutôt que de provenir, par exemple, du domaine de la psychologie). 7) Nous avons priorisé, pour cette première boucle, des articles francophones, puis finalement, 8) des articles écrits dans les quinze dernières années. Nous avons finalement retenu quatre articles correspondant à tous ces critères (Giroux, 2013 ; Houdement et Petitfour, 2020 ; Roiné, 2012 ; Saboya et Tremblay, 2017) et desquels des éléments de réflexion pouvaient être dégagés. Il est important de noter qu'il s'agit d'un premier cycle d'analyse et que, pour la suite, nous élargirons nos recherches aux articles anglophones, au contexte de la classe régulière, aux articles de recherche présentés dans des revues professionnelles et nous renoncerons possiblement à d'autres critères (par exemple, les élèves en difficulté).

2. *Démarche d'analyse*

Notre démarche d'analyse est un processus cyclique. Nous présentons, dans cet article, notre première boucle. Notre cycle d'analyse est constitué de deux niveaux. Au premier niveau, nous avons

ciblé dans les articles les endroits où il y avait, données empiriques à l'appui, des éléments mentionnés par les chercheurs en lien avec l'utilisation du matériel. Nous avons ensuite reformulé ces éléments en termes de *réflexions* et *questionnements*. Il s'agit donc d'une approche inductive. En effet, souvenons-nous que nous souhaitons nourrir une réflexion conjointe et non apporter des réponses toutes faites. Nous avons ainsi dégagé neuf éléments de réflexion, que nous avons décrits et qui pourront être réinvestis avec les personnes enseignantes. Plus globalement, au deuxième niveau, nous avons cherché à savoir ce que nous apprenions de cette démarche, sur le plan méthodologique.

IV. ANALYSE ET SYNTHÈSE

Un certain nombre d'éléments de réflexion associés à l'utilisation du matériel de manipulation auprès d'élèves en difficulté ont été relevés dans les quatre articles. Nous considérons les « points d'attention » retenus comme étant applicables dans le contexte de notre recherche. Ces éléments, qui nous outillent comme chercheure collaborative avant nos rencontres avec les personnes enseignantes, sont présentés dans cette section. Pour chaque élément de réflexion, 1) nous décrivons d'abord le contexte dans lequel il émerge ; puis, 2) nous le transposons dans notre contexte en vue de mener une réflexion avec des personnes enseignantes. 3) Enfin, nous ouvrons à des questions supplémentaires que cet élément suscite.

1. *Réflexion autour du choix des nombres*

Une adéquation est nécessaire entre le choix des nombres et le choix du matériel. Dans la recherche de Saboya et Tremblay (2017), une enseignante participante relate que la résolution d'un problème avec des jetons a posé problème puisque « [...] le problème amenait à manipuler 50 jetons et que ce n'était donc pas un "bon" problème pour travailler avec des jetons [...] » (p. 100). Cela démontre que le choix des nombres et du matériel de manipulation doivent être en adéquation. L'enseignante mentionne aussi que la résolution, en raison de la manipulation des nombreux jetons, a pris beaucoup de temps. Nous ne connaissons pas le contexte du problème, ni ne savons si une réflexion avait été menée quant au choix du matériel en lien avec ce problème. Cependant, cela nous amène à réaliser l'importance de mener cette réflexion. Dans notre recherche doctorale, nous avons soulevé un enjeu similaire, soit l'adéquation entre l'utilisation du matériel et l'apprentissage visé. Par exemple, si l'intention de la personne enseignante est d'amener les élèves à faire des opérations qui nécessitent des échanges (par exemple, 10 unités pour une dizaine), alors les jetons ne sont pas un matériel adéquat *a priori*. Le matériel en base 10 conviendrait mieux pour cette intention. Dans notre contexte, nous devons garder en tête que la quantité de matériel est à prendre en considération, car elle pourrait elle-même générer des difficultés. Une réflexion est nécessaire pour que soient en adéquation les difficultés des élèves, les intentions pédagogiques, les tâches ou problèmes ainsi que le matériel de manipulation qui sera proposé aux élèves, notamment pour la quantité à manipuler.

2. *Réflexion autour des traces écrites laissées par les élèves*

L'utilisation du matériel de manipulation par les élèves soulève, chez les personnes enseignantes, un questionnement à propos des traces écrites. Ce questionnement est présent dans l'article de Saboya et Tremblay (2017). Suite à la résolution d'un problème avec des jetons, les enseignantes mentionnent « [...] qu'il n'y a pas eu de production de traces écrites de la part des élèves » (Saboya et Tremblay, 2017, p. 100). Nous nous attendons à ce que cet enjeu soit abordé lors de nos rencontres avec les personnes enseignantes. Ces questionnements à propos de l'utilisation du matériel et des traces écrites alimentent la réflexion entourant l'une des questions de notre recherche doctorale, qui concerne l'orchestration entre la manipulation et les symboles mathématiques. La réflexion présente dans l'article

de Saboya et Tremblay (2017) fait également émerger de nouvelles questions. Est-il toujours nécessaire d'avoir des traces écrites ? Est-ce que la compréhension du concept mathématique en jeu nécessite un passage par l'écrit ? Est-ce que la compréhension du concept mathématique en jeu pourrait être observée à l'aide du matériel de manipulation ? Si oui, comment ? Si nous souhaitons voir des traces écrites, comment peut-on faire en sorte que la tâche amène à en laisser ?

3. Réflexion sur la nature du savoir en jeu dans une tâche

L'exigence de passer par la manipulation peut changer la nature du savoir en jeu dans une tâche. La recherche de Saboya et Tremblay permet de « [...] mettre en évidence que l'introduction de matériel dans la résolution de problème transforme l'activité mathématique » (2007, p. 101). Dans le même ordre d'idées, Giroux (2013) explique que l'utilisation de matériel pour l'enseignement-apprentissage de la fraction peut amener les élèves en difficulté à réussir les tâches sans mobiliser de connaissances associées aux fractions :

« [c]es réussites locales sont possibles parce que ces modèles ne confrontent pas les élèves aux propriétés propres aux rationnels. Les élèves peuvent donc faire fonctionner avec succès leurs connaissances relatives aux propriétés des nombres naturels dans des tâches qui portent sur les fractions [...] » (Giroux, 2013, p. 54)

Il importera donc, dans notre recherche, de garder en tête que ce qui est développé avec le matériel doit être en adéquation avec l'intention pédagogique initiale des personnes enseignantes. Si la tâche est résolue sans matériel, quels concepts sont mobilisés ? Si la tâche est résolue avec du matériel, quels concepts sont mobilisés ? Les concepts mobilisés sont-ils les mêmes ou différent-ils ? Est-ce que l'adéquation tâche-matériel est adéquate en fonction de l'intention pédagogique ciblée ?

4. Réflexion autour de la modélisation

Dans l'article de Saboya et Tremblay (2017), l'enseignante et l'orthopédagogue avaient comme intention que les élèves modélisent le problème avec le matériel de manipulation. Elles ont alors rencontré des difficultés non attendues associées à l'utilisation du matériel. En effet, la modélisation d'un problème peut être une difficulté en soi et l'utilisation de matériel ne facilite pas nécessairement celle-ci. Quelques pistes intéressantes sont proposées par les auteures : l'idée de laisser aux élèves le choix du matériel afin de travailler avec celui qui, pour eux, fait le plus de sens ; l'idée de demander aux élèves d'expliquer aux autres leur utilisation du matériel et l'idée de questionner les élèves sur l'efficacité du matériel utilisé et sur les stratégies qui ont été les plus efficaces. Ces idées sont intéressantes pour le contexte de notre recherche collaborative. Le fait que la modélisation avec du matériel a représenté un défi dans la recherche de Saboya et Tremblay (2017) nous amène à nous poser quelques questions. Les difficultés associées à la modélisation peuvent-elles être anticipées ou évitées ? Si l'intention est de travailler une difficulté particulière (par exemple, la soustraction) et que modéliser est difficile en soi, pourrait-on choisir différemment les problèmes à proposer aux élèves ? Quelle est l'intention pédagogique et quelle est la fonction du matériel dans une tâche choisie (modéliser ou travailler un concept ciblé) ?

5. Réflexion autour de la place occupée par le matériel

L'utilisation du matériel de manipulation passe parfois au premier plan dans une tâche. Dans l'étude de Roiné (2012), les élèves étaient face à un problème de multiplication. Toutefois, l'enseignant a demandé aux élèves de réaliser la solution pour pouvoir la « voir » avec le matériel. Cette exigence a amené les élèves à construire une frise et à mobiliser la mesure et le dénombrement plutôt qu'un

raisonnement multiplicatif. Le retour en grand groupe a porté sur cette réalisation concrète de la frise, donc sur l'utilisation du matériel plutôt que sur la mobilisation du concept ciblé lors du choix de la tâche.

« [...] Le dispositif d'aide passe au premier plan dans la séance et focalise l'activité des élèves et du maître. Ce changement de focalisation (de la situation initiale vers l'outil d'aide) provoque deux effets majeurs : un changement de contrat didactique et une incertitude quant au savoir en jeu dans la situation ». (Roiné, 2012, p. 142)

Dans l'article de Giroux, une mise en garde est faite à cet effet : « [...] les tâches proposées aux élèves en difficulté d'apprentissage doivent permettre un engagement mathématique assez rapide et pour cela, les consignes, le matériel ou le contexte ne doivent pas "écraser" le savoir en tant qu'enjeu de savoir » (Giroux, 2013, p. 54). Cette réflexion rejoint la précédente concernant le savoir effectivement mobilisé lorsque le matériel est utilisé, mais va au-delà de celle-ci. Dans notre contexte il faudra se questionner sur l'objet d'attention pendant les séances en classe. L'attention portée à l'utilisation du matériel prend-elle la place de l'attention portée au savoir mathématique ? Est-ce que le matériel est utilisé comme un outil médiatisant l'activité mathématique des élèves ou est-il l'objet en soi de l'activité ?

6. *Réflexion autour du vocabulaire*

L'utilisation du matériel de manipulation peut amener l'utilisation d'un vocabulaire différent du vocabulaire mathématique. L'article de Houdement et Petitfour (2020) met en lumière des différences entre le vocabulaire utilisé pour traiter des concepts et le vocabulaire utilisé en manipulant. L'expression « dissonances sémiotiques » est utilisée pour traiter de ces décalages. L'enseignante dont il est question utilise avec les élèves des « paquets » de bâtonnets. Elle amène alors le passage de l'expression « paquets » à l'expression « dizaines ». Cela pourrait amener le vocabulaire mathématique à être associé uniquement au matériel utilisé :

« [...] par exemple le terme dizaine (de bâtons) n'est pas utilisé pour désigner une collection de dix bâtons isolés, mais seulement un paquet élastiqué de dix bâtons. L'unité de numération pourrait alors être comprise par l'élève uniquement comme une entité matérielle, et non comme un concept. » (Houdement et Petitfour, 2020, p. 189)

Dans notre contexte, il faudra donc se poser les questions suivantes : quel vocabulaire est utilisé avec le matériel ciblé ? Quel vocabulaire est associé au concept en jeu ? Y a-t-il des « dissonances » entre les deux ? Comment ferons-nous le passage de l'un à l'autre ?

7. *Réflexion autour des connaissances ou compétences inattendues sollicitées*

Les élèves d'adaptation scolaire ayant des difficultés variées, l'utilisation du matériel peut amener des défis inattendus, autres que mathématiques (par exemple, des difficultés motrices). Dans l'article de Houdement et Petitfour (2020), la coordination du geste et des mots est difficile pour l'un des élèves. L'article met aussi en lumière le fait que la manipulation amène une « double tâche » pour les élèves. L'un d'eux, en centrant son attention sur les aspects manipulatoires, ne parvient pas « [...] à faire le lien entre la manipulation qu'on lui demande de faire et la résolution du problème [...] » (p.214). Nous devons donc garder en tête que la manipulation est difficile en soi et que, pour certains élèves, des difficultés imprévues, qui ne sont pas mathématiques, peuvent être induites par l'utilisation du matériel.

8. *Réflexion autour des différents contextes*

Il peut y avoir un écart entre le contexte du problème et le contexte du matériel. Dans la recherche de Houdement et Petitfour (2020), l'enseignante propose un problème aux élèves dans lequel des

groupements de 10 doivent être faits. Le contexte du problème, des craies à commander en paquets de 10, ne permet pas les groupements de 100 alors qu'il est possible, avec le matériel utilisé (bâtonnets à grouper avec des élastiques), de faire de tels groupements. La résolution du problème des craies, telle qu'elle serait faite « dans la vraie vie » diffère de ce qui est réalisé avec le matériel choisi. Il se produit donc ce que Houdement et Petitfour (2020) nomment des « dissonances » entre les stratégies qui sont attendues par l'enseignante et celles qui sont utilisées par les élèves lorsqu'ils utilisent le matériel. Le contexte du problème, tout comme le contexte du matériel, influencent ou contraignent les stratégies qui sont utilisées par les élèves. Résoudre le problème des craies dans le contexte des bâtonnets demande une décontextualisation, puis une recontextualisation et amène l'utilisation de stratégies et connaissances différentes (Houdement et Petitfour, 2020). Dans notre contexte, il sera donc important de garder en tête que cet écart est possible entre le contexte des problèmes choisis et celui du matériel. Quelles stratégies le contexte suggère-t-il ? Quelles stratégies le matériel suggère-t-il ? Y a-t-il des dissonances entre les deux ?

9. *Réflexion autour de l'organisation du matériel de manipulation*

Pour un même matériel de manipulation utilisé, l'organisation de ce matériel influence la façon dont les élèves résolvent le problème en jeu. Dans leur étude réalisée auprès d'élèves en difficulté, Houdement et Petitfour (2020) suggèrent que l'augmentation des signes (par exemple, l'ajout de mouvements, de sons ou de la voix coordonnés avec l'utilisation du matériel) peut aider les élèves dans la résolution. L'ajout d'une boîte dans laquelle l'élève déplace le matériel au fil du dénombrement l'aide à réussir la tâche. Il effectue le mouvement de déplacement du matériel, le matériel fait un son en touchant le fond de la boîte et l'élève dénombre à voix haute (Houdement et Petitfour, 2020, p. 213). L'organisation physique du matériel s'ajoute donc aux éléments auxquels nous devons réfléchir avec les personnes enseignantes qui participeront à notre recherche collaborative. Est-ce qu'une organisation particulière permettrait de faciliter l'utilisation du matériel ? Faut-il laisser les élèves organiser le matériel à leur guise ou proposer une organisation particulière ?

V. CONCLUSION

Un dernier élément relevé dans la conclusion de l'article de Houdement et Petitfour (2020) suscite notre réflexion : « [...]il serait erroné de considérer toute manipulation comme une procédure de résolution simplifiée ou comme un passage obligé » (p. 217). Est-ce que la manipulation est un « passage obligé » pour tous les élèves ? Est-ce que la possibilité de ne pas l'utiliser devrait être considérée tout autant que la possibilité de l'utiliser ? Pour notre recherche, même si nous nous intéressons à l'utilisation du matériel de manipulation, l'idée de ne pas utiliser de matériel devrait tout de même faire partie des réflexions que nous aurons avec les personnes enseignantes.

L'analyse d'un si petit nombre d'articles limite le nombre de conclusions que l'on peut tirer jusqu'ici. Nous avons tout de même relevé plusieurs éléments de réflexion, qui sont des considérations à ne pas négliger dans la recherche qui sera faite et qui alimentent déjà le travail que nous pourrons faire avec les personnes enseignantes. Ces éléments ouvrent sur des questionnements plutôt que sur des certitudes, ce qui est typique de la démarche heuristique. Il sera pertinent de les réinvestir comme bases de réflexion dans notre recherche collaborative, en vue de coconstruire avec les personnes enseignantes des façons d'utiliser le matériel avec des élèves en difficulté. Cela étant dit, nous poursuivrons donc avec une seconde boucle dans laquelle nous analyserons de nouveaux articles. Cet article visait également à mettre en lumière le processus par lequel nous nous sommes outillés, comme chercheure, pour mener notre recherche collaborative. Nous avons analysé des textes ne portant pas directement sur le thème de notre recherche, soit l'utilisation du matériel de manipulation, pour en dégager des

éléments pouvant amener des réflexions intéressantes dans notre contexte. Ce processus pourrait être réinvesti dans d'autres recherches collaboratives.

RÉFÉRENCES

- Ball, D. L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator: The Professional Journal of the American Federation of Teachers*, 16(2), 14-18.
- Corriveau, C. et Jeannotte, D. (2015). L'utilisation du matériel en classe de mathématiques au primaire : quelques réflexions sur les apports possibles. *Bulletin AMQ*, 55(3), 32-49.
- Corriveau, C. et Jeannotte, D. (2020). Favoriser le raisonnement mathématique au primaire pour développer la pensée algébrique : le cas de la tâche Charrière. Dans H. Squalli, A. Bronner, I. Oliveira et M. Languier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire : recherches et perspectives curriculaires* (p. 111-132). Livres en ligne du CRIRES.
- Desagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, 23(2), 371-393. <https://doi.org/10.7202/031921ar>
- Furman, C. A. (2017). Making sense with manipulatives: Developing mathematical experiences for early childhood teachers. *Education and Culture*, 33(2), 67-86. <https://doi.org/10.5703/educationculture.33.2.0067>
- Giroux, J. (2013). Entretiens didactiques sur la fraction auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage. Dans *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec (GMD2013)*, Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue, Val d'Or (p. 52-61).
- Giroux, J. (2014). Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : historique et perspectives théoriques. Dans C. Mary, H. Squalli, L. Theis et L. DeBlois (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques* (p. 11-44). Presses de l'Université du Québec.
- Gohier, C. (1998). La recherche théorique en sciences humaines : réflexions sur la validité d'énoncés théoriques en éducation. *Revue des sciences de l'éducation*, 24(2), 267-284.
- Houdement, C. et Petitfour, É. (2020). La manipulation dans l'enseignement spécialisé : aide ou obstacle ? Une étude de cas autour de la numération décimale. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 40(2), 181-223.
- Lemoyne, G. et Lessard, G. (2003). Les rencontres singulières entre les élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques et leurs enseignants. *Éducation et francophonie*, 31(2), 13-44. <https://doi-org.acces.bibl.ulaval.ca/10.7202/1079586ar>
- Lyet, P. (2016). Les recherches conjointes : des tentatives pour construire des « connaissances composites » appropriables par les scientifiques et les intervenants. *Sociétés et jeunesse en difficulté : Revue pluridisciplinaire de recherche*, (16), 1-20. <https://journals.openedition.org/scjed/8084>
- Mariotti, M. A. et Maffia, A. (2018). From using artefact to mathematical meanings : The teacher's role in the semiotic mediation process. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 4, 50-63. <https://doi.org/10.33683/ddm.18.4.3.1>
- Ministère de l'Éducation du Québec [MEQ]. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire, enseignement primaire* (Version approuvée). Gouvernement du Québec.

- Ministère de l'Éducation du Québec [MEQ]. (2021). *Différenciation pédagogique : Soutenir tous les élèves pour favoriser leur réussite*. Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport [MELS]. (2009). *Progression des apprentissages. Mathématique. Primaire*. Gouvernement du Québec.
- Poirier, L. (2001). *Enseigner les mathématiques au primaire. Notes didactiques*. ERPI.
- Proulx, J. (2013). Réflexions épistémologiques sur la recherche collaborative en didactique des mathématiques : possibilités et excès. Dans N. Bednarz (dir.), *Recherche collaborative et pratique enseignante : regarder ensemble autrement* (p. 327-349). L'Harmattan.
<https://doi.org/10.3917/har.barry.2013.01.0327>
- Roiné, C. (2012). Analyse anthropo didactique de l'aide mathématique aux « élèves en difficulté » : l'effet Pharmakéia. *Carrefours de l'éducation*, 1(33), 131-147. <https://doi.org/10.3917/cdle.033.0131>
- Saboya, M. et Tremblay, M. (2017). Co-élaboration d'interventions entre enseignantes et chercheures visant le développement d'un choix éclairé de matériel auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage au primaire dans la résolution de problèmes additifs. Dans A. Braconne-Michoux, P. Gibel et I. Oliveira (dir.), *Étude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants* (p. 91-121). Livres en ligne CRIRES.
- Schön, D. A. (1983). *The reflexive practitioner*. Basic Books.
- Tjandra, C. (2023). Effectiveness of using manipulatives in mathematics teaching in inclusive education programs in an elementary school. *Dharmas Education Journal (DE Journal)*, 4(1), 168-178.
<https://doi.org/10.56667/dejournal.v4i1.944>

**GT11 | ÉVALUATION DANS
L'ENSEIGNEMENT ET
L'APPRENTISSAGE DES
MATHÉMATIQUES**

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL 11

ÉVALUATIONS DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

HOROKS* JULIE, OURAHAY** MUSTAPHA, RUMINOT*** CAROLINA ET CHANUDET****

MAUD

L'évaluation des apprentissages est devenue un aspect crucial de l'éducation contemporaine, mettant l'accent sur le soutien continu de l'apprentissage des élèves et sur l'adaptation des méthodes d'enseignement pour répondre à leurs besoins. L'implantation de nouvelles approches pédagogiques et d'évaluations s'inscrivant dans un processus dynamique visant à améliorer l'apprentissage tout au long du processus scolaire, est la base d'un modèle souhaité dans plusieurs systèmes éducatifs. Ce modèle complexe a commencé à se concrétiser d'un point de vue à la fois théorique et pratique (Black, 2013 ; Earl, 2012 ; Allal, 2008). Les colloques EMF ont enrichi ces travaux, explorant divers contextes éducatifs, abordant les évaluations internationales, les transitions scolaires, et questionnant les pratiques évaluatives enseignantes avec une attention portée aux spécificités culturelles et scientifiques. En 2022, le focus s'est porté sur l'évaluation située, les pratiques enseignantes, la formation et l'usage des outils numériques pour l'évaluation en mathématiques. Le GT11 en 2025 s'inscrit dans cette continuité thématique, mettant l'accent sur des enjeux et des opportunités de l'éducation mathématique face à un monde en accélération, à travers la question directrice : *peut-on envisager des évaluations à visage humain, prenant en compte la véritable nature des mathématiques ?* Nous interrogeons les effets des évaluations sur l'élève, des liens entre évaluation, enseignement des mathématiques et technologies au service de l'évaluation des apprentissages, selon les trois axes de travail développés ci-dessous :

- *Une évaluation au service de l'apprentissage et la place des élèves.* L'évaluation ne se limite plus à certifier les acquis : elle devient un levier de soutien à l'apprentissage, engageant l'élève de manière active et réflexive dans son propre parcours.
- *Des pratiques enseignantes en mutation.* Le GT11 s'intéresse à la manière dont les enseignants conçoivent et mettent en œuvre l'évaluation en mathématiques, en lien avec la didactique et les spécificités disciplinaires.
- *Technologies et innovations évaluatives.* Avec l'essor du numérique et de l'IA, de nouvelles formes d'évaluation apparaissent. Le GT11 explore les opportunités et défis liés à leur intégration dans les pratiques éducatives.

Onze contributions ont fait l'objet de discussion dans le groupe (dix communications et un poster) qui a accueilli jusqu'à 20 participants, de différents pays (Belgique, Suisse, Canada, France, Maroc) et de statut variés (chercheuses, formateurs/trices, enseignant.es). Ces contributions ont approfondi principalement deux des trois axes initialement proposés. Les questions traitées dans ces présentations,

* Coresponsable du groupe de travail n° 11 – France – julie.horoks@u-pec.fr

** Coresponsable du groupe de travail n° 11 – Maroc – mu.ourahay@uca.ac.ma

*** Coresponsable du groupe de travail n° 11 – Canada – cruminot@uottawa.ca

**** Correspondante du comité scientifique – Suisse – maud.chanudet@unige.ch

avec des études centrées sur l'évaluation sommative, les évaluations à grande échelle, ainsi que l'évaluation formative en formation initiale tournaient principalement autour des points suivants :

- Évaluer en résolution de problèmes (2 communications). Analyse des pratiques évaluatives en résolution de problèmes pour mieux réguler et dévoluer les apprentissages, notamment chez les élèves en difficulté.
- Analyse des évaluations à grande échelle (4 communications). Étude critique des dispositifs nationaux et internationaux (PISA, tests ministériels) pour questionner leur validité, leur conception et leurs enjeux didactiques.
- Représentations, pratiques et formation à l'évaluation (3 communications). Exploration des conceptions et difficultés des enseignants (débutants ou en formation) pour mieux former à une évaluation mathématique pertinente.
- Genre et évaluation (2 communications). Mise en évidence de l'impact des stéréotypes de genre sur les performances et pratiques évaluatives différenciées dès l'école primaire.

Nous avons choisi d'organiser nos sessions avec des temps de discussion après les présentations, avec un.e réactant.e assigné.e pour chaque communication. La suite de ce bilan porte sur une analyse croisée dans chaque des quatre thèmes et illustre les apports des différentes communications.

Évaluer en résolution de problèmes (2 Communications). Dans leurs travaux, **Beylot, Blanchouin et Grapin** étudient, au CP, l'activité évaluative d'une enseignante expérimentée face à un élève en grande difficulté pour résoudre des problèmes arithmétiques verbaux. Leur étude met en lumière comment ses gestes évaluatifs — questions, rétroactions et soutien matériel — visent à équilibrer aide et autonomie, mais révèlent aussi des limites quand l'enseignante prend trop en charge la tâche. De leur côté, **Chanudet et Favier** s'intéressent au secondaire I à Genève et explorent comment les enseignants peuvent réguler l'activité de recherche des élèves grâce à des discussions évaluatives qui ciblent à la fois leurs actions et leurs représentations mentales. Leur étude de cas montre que les élèves restent parfois bloqués dans de mauvaises représentations (ici la proportionnalité) malgré des contre-exemples, soulignant l'importance d'intervenir sur la compréhension du problème et les heuristiques mobilisées. Ensemble, ces recherches rappellent que l'évaluation formative, qu'elle passe par des gestes ou des régulations, doit ajuster en permanence guidance, questionnement et autonomie pour réellement soutenir l'apprentissage.

Analyse des évaluations à grande échelle (4 communications). Les communications de Chenevotot, Grapin, Grugeon-Allys, Mounier et Pilet, de Demonty, Bilodeau, Barallobres et Roiné, ainsi que de Bénard, Tremblay et Delobbe interrogent toutes, à leur manière, les tensions et enjeux de validité dans l'évaluation des mathématiques, du diagnostic précoce jusqu'à la certification finale. Le projet DiToM (**Chenevotot et al.**) développe un outil européen de diagnostic en mathématiques pour dépister très tôt les difficultés des élèves en numération, calcul et algèbre, posant la question de la validité didactique et de l'adaptation aux contextes nationaux. **Demonty**, de son côté, interroge les écarts entre les compétences sollicitées par PISA 2022 et celles réellement travaillées dans le curriculum belge francophone, soulignant la place de la résolution de problèmes ancrés dans la vie réelle et l'enjeu du numérique. **Bilodeau et ses collègues** adoptent une perspective anthropologique pour analyser l'activité de correction des épreuves au Québec : ils montrent que cette correction engage un travail interprétatif complexe, entre standardisation et reconnaissance de la diversité des raisonnements des élèves. Enfin, **Bénard, Tremblay et Delobbe** questionnent la validité des épreuves certificatives au Québec, notamment leur capacité à évaluer réellement le raisonnement mathématique, à partir d'une analyse croisée avec les cadres internationaux (PISA, TIMSS) et un modèle conceptuel québécois. Ensemble, ces travaux soulignent combien l'évaluation en mathématiques, qu'elle soit diagnostique,

formative ou certificative, constitue un terrain sensible où se jouent la reconnaissance des compétences complexes, la justice scolaire et la crédibilité des dispositifs institutionnels.

Représentations, pratiques et formation à l'évaluation (3 communications). Dans les recherches de Ruminot, de Horoks, ou de Mortaqi et Ourahay, la question de l'évaluation des apprentissages en mathématiques dans la formation des enseignant.es du primaire est explorée de différentes manières. **Ruminot** met en évidence que les futur.es enseignant.es reconnaissent l'importance de l'évaluation formative pour ajuster l'enseignement, mais restent marqué.es par une conception encore centrée sur la mesure sommative, soulignant ainsi la tension entre diagnostic et certification. **Horoks** s'intéresse aux représentations initiales des enseignant.es débutant.es et montre que celles-ci, influencées par leurs propres souvenirs d'élèves, orientent fortement leurs pratiques évaluatives ; elle propose de transformer ces représentations en leviers pour enrichir la formation et développer une vision plus formative et réflexive de l'évaluation. De leur côté, **Mortaqi et Ourahay** analysent, au Maroc, la performance des futur.es enseignant.es à une épreuve sommative en mathématiques et révèlent des lacunes importantes, en partie liées à une tradition pédagogique centrée sur la répétition d'exercices standardisés au détriment de la compréhension et de la résolution de problèmes. Ensemble, ces études mettent en lumière le défi commun de faire évoluer les conceptions et les pratiques évaluatives des enseignant.es en formation initiale, afin de mieux articuler évaluation formative et sommative et d'ancrer la résolution de problèmes au cœur de l'enseignement des mathématiques.

Genre et évaluation (2 communications). Dans leurs recherches, Brismontier d'une part, et Grapin et Sayac d'autre part, questionnent les inégalités de genre en mathématiques à l'école primaire à travers le prisme de l'évaluation. **Brismontier** s'intéresse à l'influence des stéréotypes de genre sur les interactions évaluatives en classe, en analysant comment les régulations didactiques, injonctives et affectives des enseignant.es peuvent renforcer ou atténuer les écarts de performance entre filles et garçons. De leur côté, **Grapin et Sayac** combinent une approche didactique et psycho-sociale pour expliquer pourquoi les filles, souvent meilleures en début de CP, deviennent moins performantes que les garçons dès le CE1, notamment sur le calcul mental. Leur étude montre que la pression évaluative et la menace du stéréotype jouent un rôle central : les filles produisent plus de non-réponses, s'appuient davantage sur des procédures visibles comme le comptage sur les doigts et manifestent une confiance moindre dans leurs réponses. Ensemble, ces travaux soulignent que les écarts de performance ne sont pas une fatalité mais le fruit de pratiques évaluatives et de contextes qu'il est possible de transformer pour limiter l'effet du genre dès les premières années de scolarité.

Conclusion

Les communications présentées lors de ce GT11 confirment que l'évaluation des apprentissages en mathématiques demeure un chantier essentiel et complexe, qui interroge sans cesse la place de l'élève, le rôle de l'enseignant, la validité des dispositifs et l'impact des contextes socioculturels. Les travaux discutés illustrent la diversité des échelles et des angles d'analyse : du geste évaluatif individuel à l'épreuve nationale standardisée, de l'influence des stéréotypes de genre aux enjeux de formation initiale, du diagnostic précoce aux pratiques de correction et de certification. Tous convergent vers une même exigence : penser une évaluation réellement au service de l'apprentissage, qui articule rigueur didactique, prise en compte de la complexité du raisonnement mathématique et attention aux dimensions humaines et sociales du geste évaluatif.

Pour prolonger ces dynamiques et enrichir les débats lors du prochain GT11, plusieurs pistes se dessinent :

- approfondir la question de l'évaluation des compétences spécifiques comme le raisonnement mathématique sous ses multiples formes (modélisation, géométrie, reformulation) ;
- interroger la mise en œuvre de pratiques différenciées, notamment sous l'angle du genre ou des besoins particuliers ;
- comparer les cultures évaluatives, leurs injonctions institutionnelles et leurs effets sur les apprentissages ;
- intégrer davantage le point de vue des élèves et leur rôle actif dans l'évaluation ;
- ouvrir la réflexion aux spécificités de l'enseignement supérieur et à la formation des futur·es enseignant·es, notamment quant à l'exemplarité et à l'harmonisation des discours entre théorie et pratique ;
- enfin, saisir les opportunités et les limites offertes par le développement des technologies numériques et de l'intelligence artificielle pour penser des formes d'évaluation plus adaptatives, plus transparentes et toujours plus centrées sur l'apprentissage.

Autant de questions vives qui invitent à poursuivre, ensemble, la construction d'évaluations à visage humain, respectueuses de la complexité des mathématiques et de la diversité des apprenant.es.

RÉFÉRENCES

- Allal, L. (2008). Évaluation des apprentissages. Dans A. Van Zanten (dir.), *Dictionnaire de l'éducation* (p. 311-314). Presses universitaires de France.
- Black, P. (2013). Formative and summative aspects of assessment: Theoretical and research foundations in the context of pedagogy. Dans J. H. McMillan (dir.), *SAGE handbook of research on classroom assessment* (p. 167-178). SAGE.
- Earl, L. M. (2012). *Assessment as learning: Using classroom assessment to maximize student learning*. Corwin Press.

GESTES ÉVALUATIFS EN RÉOLUTION DE PROBLÈMES AU DÉBUT DE L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE : ÉTUDE DE CAS AUPRÈS D'UN ÉLÈVE EN GRANDE DIFFICULTÉ

| BEYLOT* DAVID, BLANCHOUIN** ALINE ET GRAPIN*** NADINE

Résumé | Nous nous intéressons à travers une étude de cas à l'activité évaluative d'une enseignante experte en situation d'enseignement-apprentissage de résolution de problèmes arithmétiques verbaux en fin de CP (grade 1). Nous étudions au grain d'analyse de ses gestes évaluatifs ce qu'elle prend en charge ou laisse à l'initiative d'un élève en « grande difficulté scolaire » et identifions des facteurs limitant l'adaptation des rétroactions aux ressources de l'élève.

Mots-clés : évaluation formative, gestes évaluatifs, résolution de problèmes, co-activité, recherche collaborative

Abstract | Through a case study, we are interested in the assessment activity of an expert teacher who in a teaching-learning situation of verbal arithmetic problem solving at the end of grade 1. Using an analysis of her assessment gestures, we study what she takes on or leaves to the initiative of a pupil in “great academic difficulty”, and identify factors limiting the adaptation of feedback to the pupil's resources.

Keywords: formative assessment, assessment gestures, problem solving, co-activity, collaborative research

I. CONTEXTE

En France, depuis la loi d'orientation et de programmation pour la refondation de l'école (JORE, 2013), il est demandé aux enseignants de « privilégier une évaluation positive, simple et lisible, valorisant les progrès, encourageant les initiatives et compréhensible par les familles », c'est-à-dire une « évaluation constructive, qui régule les enseignements et soutient les apprentissages » (MENESR, 2016). Malgré des « frémissements » d'évolution en France constatés en maternelle comme en élémentaire, les enseignants français peinent encore à pratiquer dans leurs classes de telles évaluations (Hazard, 2023, p. 20). Par ailleurs, les évaluations nationales montrent que les élèves français à l'entrée au CP (grade 1), au CE1 (grade 2) et au CE2 (grade 3) rencontrent des difficultés importantes en résolution de problèmes arithmétiques verbaux (RPAV), c'est-à-dire des problèmes « numériques, résolubles avec une (ou plusieurs) des quatre opérations usuelles et dont l'énoncé est un texte, plutôt écrit » (Houdement, 2011, p. 68) et qui « racontent des histoires. Ils sont donnés avec des mots et font intervenir peu de symbolisme mathématique » (Feyfant, 2015, p. 9). Pour répondre à ces difficultés, dans le collectif de chercheurs-formateurs-enseignants auquel nous appartenons¹, en complément des séquences du manuel de mathématiques, divers dispositifs ont été expérimentés (Blanchouin et al., 2023) comme la mise en œuvre de rituels de résolution de problèmes pour chercher, la production d'énoncés par les élèves ou encore un cahier de mathématicien.ne. L'organisation de la classe en atelier

* Institut national supérieur du professorat et de l'éducation – France – david.beylot@univ-poitiers.fr

** Centre de Recherche sur l'éducation, les apprentissages et la didactique – France – aline.blanchouin@inspe-bretagne.fr

*** Laboratoire de didactique André Revuz – France – nadine.grapin@u-pec.fr

¹ Groupe IREM (Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques) constitué en 2023 de 7 formateurs dont 4 enseignants-chercheurs et de 7 enseignantes exerçant en début d'école élémentaire.

est également expérimentée pour favoriser des moments de travail dialogués, soutien aux apprentissages de chacun des élèves.

Dans cette communication, nous étudions l'activité évaluative (Jorro, 2016) en résolution de problèmes d'une enseignante de notre collectif considérée comme experte² à partir d'un temps de travail individuel avec un élève « en grande difficulté scolaire » : soit des difficultés détectées dès le début d'année qui s'inscrivent dans un temps scolaire conséquent (ici depuis au moins la dernière année de maternelle) et qui dès lors « sont telles qu'elles perturbent gravement les apprentissages scolaires et exigent une analyse approfondie permettant de déterminer les formes d'aides les plus adaptées » (MENESR, 2002). Nous allons commencer par exposer rapidement les modèles théoriques choisis pour analyser l'activité de l'élève en résolution de problèmes et l'activité évaluative de l'enseignant. Ceci nous permettra de formuler la problématique et le cadre méthodologique. A la suite de la présentation des résultats, nous concluons en formulant quelques perspectives pour la formation.

II. ÉLÉMENTS THÉORIQUES ET PROBLÉMATIQUE

En référence à Mottier Lopez, nous considérons dans notre cadre d'étude, cinq composantes constitutives de l'évaluation :

« l'objet à évaluer et ses dimensions à analyser ; les attentes vis-à-vis de cet objet [...] ; le recueil d'un ensemble d'informations en rapport avec l'objet au regard des possibilités du réel ; l'interprétation des informations recueillies [...] ; la formulation d'une appréciation qui doit pouvoir être communiquée et fonder des prises de décision. » (Mottier Lopez, 2015, p. 43)

L'analyse de l'activité évaluative de l'enseignant est ainsi fondée sur une référence didactique et cognitive permettant de cerner *a priori* les objets à évaluer en résolution de problèmes (cf. II.1) ; nous choisissons par ailleurs de mener cette analyse au grain du geste évaluatif (cf. II.2) et justifions nos choix en précisant nos questions dans le paragraphe II.3.

1. Les processus potentiellement en jeu dans l'activité de résolution de problèmes

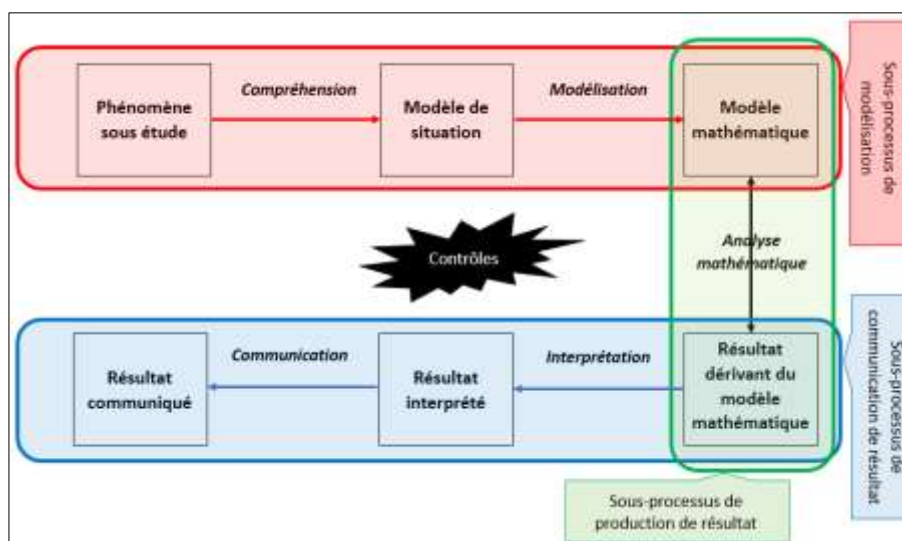
Nous avons choisi d'adapter le modèle de Verschaffel et ses collègues afin de tenir compte non seulement du type de problèmes considérés (des problèmes arithmétiques à énoncé verbal) mais aussi du niveau d'enseignement considéré — au début de l'école élémentaire (Mounier et al., 2024). Cette adaptation conduit à modéliser l'activité de l'élève à partir de trois sous-processus articulés et des contrôles intervenant potentiellement lors de la résolution (Figure 1) :

- le « sous-processus de modélisation » conduit à la production d'un modèle mathématique (par exemple sous la forme d'une écriture arithmétique avec des nombres et des opérations) via la compréhension (la situation ; l'objet à élucider -ce sur quoi porte la question-) ;
- le « sous-processus de production de résultat » consiste à produire un résultat numérique à partir du modèle mathématique (via l'utilisation d'une procédure de calcul ou de dénombrement à ce niveau scolaire) ;
- le « sous processus de production de réponse » consiste à interpréter le résultat numérique obtenu en le qualifiant et à communiquer la réponse.

Nous considérons les trois sous-processus tels que définis précédemment non comme des étapes chronologiques à vivre par l'élève mais comme des composantes constitutives en synergie de son

² Elise a 20 années d'ancienneté, est maître-formatrice depuis 10 ans et accorde dans son travail quotidien une place systématique au fait d'interroger la pertinence de ses choix de planification et de ses gestes en classe.

activité de résolution de problèmes. Ainsi, nous retenons avec Verschaffel et De Corte (2008) la notion de démarche superficielle pour comprendre et interpréter l'activité de résolution de l'élève. En effet, lorsque l'ensemble de ces composantes n'est pas sollicité systématiquement, nous retenons que des effets délétères à moyen ou long terme pour les apprentissages de l'élève existent. Notamment lorsque l'élève a comme motif principal de trouver une opération liant les informations numériques repérées dans l'énoncé et non de trouver une réponse vraisemblable au problème qui lui est posé.



(Source : Mounier et al., 2024)

Figure 1 – Sous-processus et contrôles intervenant potentiellement en RP/AV

Précisons qu'au niveau scolaire auquel nous nous plaçons, l'activité de résolution de problèmes peut s'appuyer sur l'utilisation de matériel mis à disposition de l'élève : représentation des objets en jeu dans le problème selon le contexte sous forme d'images unitaires (de vélos, de pommes par exemple) ou de matériel type jetons ou cubes afin de l'aider à se représenter la situation voire à trouver le résultat numérique (en procédant par dénombrement) ; du matériel de numération ou une bande graduée permettant de produire un résultat numérique ; une calculatrice pour trouver un résultat numérique ou le contrôler, etc.

2. Analyser l'activité évaluative de l'enseignant au grain de ses gestes évaluatifs

L'analyse de l'activité évaluative de l'enseignant (Jorro, 2016 ; Blanchouin et al., 2022a) au grain du geste nous permet de décrire-comprendre-interpréter les interactions entre enseignant et élèves en documentant finement les feedbacks de l'enseignant au regard de ce qu'il avait en tête quand il s'est projeté dans le moment de classe. Nous visons, par cette analyse, à contribuer de façon immédiate ou différée, au développement du pouvoir d'agir de l'enseignante impliquée dans notre collectif et à moyen terme à la formation des enseignants.

Nous définissons le geste évaluatif « comme une combinaison de deux gestes situés : l'un de recueil d'informations et l'autre de rétroaction sur les connaissances ou capacités ou compétences d'un - de certains- de tous les élèves, en lien avec l'objet évalué et relativement aux attentes de l'enseignant » (Blanchouin et al., 2022a). Les organigrammes placés en annexe 1 explicitent les choix possibles de l'enseignant pour observer et rétroagir relativement aux trois dimensions : à qui il s'adresse (un élève, un groupe d'élèves, etc.), comment (par exemple par un questionnaire oral ou une observation silencieuse pour recueillir des informations ; par de la communication verbale ou par l'introduction de

matériel pour rétroagir), le type d'information recherchée (concernant le recueil d'informations et la nature des rétroactions in situ faites sous forme de feedback).

3. *Problématique et question de recherche*

Les deux modèles retenus pour caractériser l'activité de résolution de problème d'un élève et l'activité évaluative de l'enseignant permettent de poser comme complexe le travail de chacun des acteurs (enseignant-élève). En effet, on peut supposer que le processus général que vit l'élève en résolution de problèmes rend particulièrement compliqué la prise d'informations, l'interprétation et la rétroaction de l'enseignant. C'est en tout cas ce qu'expriment les enseignants de notre collectif et ce que nous avons analysé ensemble dans différents contextes évaluatifs, en début d'année scolaire de CE1 (Beylot et al., 2023) ou encore en cours de séquence de résolution de problèmes au CP (Blanchouin, Grapin et Mounier, 2022b). Dès lors, construire et mettre en œuvre un contenu d'enseignement en résolution de problèmes au service de la découverte et l'utilisation d'heuristiques de recherche (Hanin et Van Nieuwenhoven, 2016) en début de l'école élémentaire (grades 1-2) apparaît comme un vrai défi. D'une part, cela exige de prendre en compte que l'élève est au début de ses apprentissages scolaires mathématiques et français (compréhension experte d'un texte lu ou oralisé, production d'écrits). D'autre part, cela nécessite de faire vivre en classe la fonction formative de l'évaluation via des choix : de tâches, de supports, de matériel, de contextes coopératifs avec l'enseignant et/ou les autres élèves, de dilatation-rétraction du temps didactique.

Pour documenter cette problématique de l'enseignant polyvalent lorsqu'il enseigne la RPAV en CP (grade 1), nous explorerons les deux questions suivantes lors d'une situation évaluative en fin d'année scolaire :

- Autour de quel(s) objet(s) de l'activité de résolution les gestes évaluatifs se déploient-ils ?
- Pourquoi et avec quels ajustements à l'activité de l'élève : quels gestes évaluatifs sont déployés ? Avec quel jeu de prises en charge-initiatives laissées à l'élève ? Avec quelle pertinence (effets « heureux ou délétères » [Bucheton, 2021]) pour le parcours d'apprentissage de cet élève ?

III. CADRE MÉTHODOLOGIQUE

Les données proviennent du traitement d'un recueil de traces composites de l'activité de l'enseignant durant les trois phases de son travail (la planification de la séance, la mise en œuvre, le bilan). Ainsi pour cette étude de cas, avant la séance, des entretiens avec l'enseignante ont été menés et la séance en classe a été filmée par l'enseignante. Celle-ci a également transcrit les échanges qu'elle a eus avec un élève durant cette séance ; cette transcription a été complétée par la suite par un chercheur en ajoutant des informations sur la communication paraverbale et non verbale des acteurs. Un premier entretien compréhensif a eu lieu dix jours après le moment filmé et un autre d'auto-confrontation six mois plus tard, à partir du film de la séance et de la première transcription réalisée par l'enseignante. Nous avons donc un corpus écrit et audio concernant l'activité réflexive d'Elise entre juin 2023 et février 2024.

La première étape de traitement du matériau consiste à caractériser la tâche évaluative proposée par l'enseignant. D'une part, nous la situons dans sa progression d'enseignement mais aussi précisons sa fonction dans le cadre d'une stratégie évaluative globale. D'autre part, nous menons une analyse *a priori* de la tâche à l'aide d'un cadre didactique et au regard de la progression de l'enseignante. La deuxième étape s'appuie sur la transcription de la séance afin de la découper en unités de temps étiquetées. Ce qui permet de faire apparaître les étapes de la résolution du problème dans le déroulement général :

ouverture du dialogue - présentation du problème - résolution - clôture du dialogue. (Annexe 2). Les échanges oraux correspondant à l'étape de résolution sont transcrits systématiquement en faisant apparaître les silences, hésitations, accentuation de certains mots et les gestes corporels. La troisième étape conduit à un codage sous la forme de gestes évaluatifs en lien avec les objets évalués. Ce codage s'effectue à l'aide des différentes composantes des gestes (Annexe 1) et prend en compte l'activité réflexive de l'enseignante.

IV. RÉSULTATS

L'étude de cas concerne la passation individuelle d'un problème arithmétique dans le cadre d'un dispositif d'évaluation de fin d'année de CP (juin 2022) conçu et mis en œuvre par Elise pour repérer les progrès de Carlos (Annexe 2). Elise dépeint au chercheur cet élève en début d'année comme étant avec elle *mutique, en fuite, répondant toujours à côté en prenant des indices non pertinents* et ne pouvant se concentrer sur quelque travail scolaire. En mathématiques, elle souligne : *Tu sens que rien n'a été construit tu as des bouts de machin partout. Faut tout remettre dans l'ordre. T'as l'impression d'avoir un Picasso devant toi.*

Les résultats concernant l'activité évaluative d'Elise (Jorro, 2016) sont organisés pour documenter son activité de planification hors la classe d'une part et d'autre part son activité en classe avec ses élèves.

1. Une planification sous le sceau de trois principaux choix : la définition des énoncés de problèmes, l'organisation de la classe, la posture évaluative

Elise a prévu une série de quatre problèmes (trois additifs et un multiplicatif avec recherche du tout) dont le premier est un problème additif de composition de mesures avec recherche du tout : « Je suis allé au marché. J'ai acheté des saucisses et des merguez. J'ai acheté 12 saucisses et 9 merguez. Combien de produits ai-je achetés ? »

Ce type de problème a été régulièrement travaillé en classe durant l'année avec des contextes différents, mais avec des nombres de taille similaire. De façon générale, Elise a choisi des énoncés qui lui semblent relever de contextes familiers pour les élèves, avoir une structure langagière simple et un lexique basique. Elle souhaite ainsi évaluer ce qui relève de son enseignement de la résolution du problème (faire des dessins-schémas, *procéduraliser avec du matériel*, vérifier un résultat avec la calculatrice,...) sans que les connaissances en maîtrise de la langue n'interfèrent. Ensuite, Elise a choisi d'interagir individuellement avec Carlos afin de recueillir des traces du processus de résolution de problème qu'il met en œuvre. Plus spécifiquement, elle souhaite apprécier ses progrès dans le fait d'utiliser le matériel pour *se lancer*. Cette préoccupation donne à voir l'importance qu'elle accorde à mesurer les effets de son action d'enseignement et témoigne ainsi du sens qu'elle donne à son travail qui est de faire réussir avant tout les élèves les plus éloignés des codes et des pratiques scolaires et/ou n'ayant pas un milieu familial dans lequel la langue française est première. Enfin, Elise désire partir au maximum de l'activité de Carlos, sans devancer ses actions, ses interrogations ou formulations de besoins. C'est avec une posture évaluative d'accompagnement (Jorro, 2016) qu'elle se projette dans cette situation évaluative en classe, avec le dessein de s'en servir pour renseigner le livret scolaire de fin d'année de CP de Carlos communiqué à ses parents et à disposition des collègues susceptibles d'accueillir cet élève l'année suivante en CE1.

2. La posture évaluative effectivement adoptée

L'analyse des principales actions d'Elise durant les quatre étapes (Annexe 2) montre que la façon avec laquelle elle initie le dialogue évaluatif est congruent avec ses choix de planification. En effet, lors de l'ouverture du dialogue (étape 1), elle commence par annoncer à Carlos qu'il va résoudre de

petits problèmes avant de dire qu'elle souhaite *regarder où il en est sur la résolution de problèmes*. Puis, elle lui signale que du matériel est à sa disposition mais sans en dire davantage, lui laissant l'initiative d'en faire ou non usage. De même à la suite de sa première lecture de l'énoncé, elle respecte le choix de Carlos de ne pas avoir une seconde relecture (étape 2), alors *qu'il ne sait pas lire seul*. Il en est de même au début de l'étape 3, quand Elise s'éloigne de la table laissant Carlos se lancer seul dans la tâche même si elle décide rapidement de revenir (après 25s). Elle constate alors que Carlos n'a laissé aucune trace sur son cahier et reste silencieux, n'offrant à Elise dans ses gestes corporels aucun indice d'un engagement cognitif dans la tâche, ni même d'un début d'actions avec le matériel à disposition. Si Elise avait l'intention avant la séance de *s'effacer (...), de laisser le lead à [Carlos]*, les interactions qui suivent pendant 9 minutes montrent qu'elle ne réussit pas à le faire alors que Carlos laisse des traces manifestes de son activité : actions sur la bande numérique, de prise de cubes et de placement sur la bande numérique puis d'organisation d'une seule collection, d'oralisation de résultats numériques (Figure 2).

Unité temporelle	Titrage à partir des objets de l'activité de Carlos (C°) au cœur des interactions entre lui et Elise (E*)	Environnement matériel évolutif, constamment présent (en plus du texte écrit collé sur le cahier ouvert sous les yeux de C°)
U1 2'20 42s-3'01	Production par C° d'un 1 ^{er} résultat « 3 » suivie d'un questionnement d'E* sur la validation de ce résultat	- BN de 30 petites cases mis à disposition par E* dans l'espace de travail de C°, sélectionnée par C° -Feutre Velleda sorti par C°
U2 2'57 3'01-5'58	Production par C° d'un 2 ^{ème} résultat « 20 » suivie d'une demande de justification orale d'E*	- BN de 20 grande cases demandée par C° -Boîte de cubes verts mise à disposition par E* dans l'espace de travail de C°, sélectionnés par C°
U3 1'52 5'58-7'50	Invalidation de la technique d'utilisation de la BN puis du 2 ^{ème} résultat « 20 » par E*, suivies de la (co) production justifiée du 3 ^{ème} résultat (réponse attendue) « 21 » et de son écriture chiffrée <i>sur le cahier</i>	- la BN de 20 grandes cases précédente - 9 cubes verts sortis par C° précédemment -Boîte de cubes bleus introduite par E*
U4 1'46 7'50-9'36	Justification du « 21 » avec deux collections de cubes, suivie de l'écriture chiffrée après le « ? » de la question de l'énoncé	-Barquettes vides introduites par E* -Cubes bleus et verts utilisés avec la BN saisis par C° - la BN de 30 petites cases
U5 1'18 9'36-10'54	Ecriture justifiée de l'opération (12+9=21) à l'aide de la calculatrice	-Calculatrice introduite par E*
U6 25s 10'54-1'19	Production de la phrase réponse « il y a 21 objets à manger » de façon orale puis écrite <i>sur le cahier</i>	

Code : vert initiative de C° ; violet : initiative E*

Figure 2 – Caractéristiques de l'environnement matériel lors de l'étape 3

C'est ainsi que Carlos produit successivement trois résultats numériques (3, 20, 21) en recourant à du matériel varié avec l'aide d'Elise après avoir sollicité une bande numérique avec de grandes cases. Elise propose à Carlos de revenir sur ses productions erronées en prenant en charge très vite la modification de l'environnement matériel. La place d'acteur qu'elle souhaitait lui laisser s'estompe au fur et à mesure de la résolution (U2 à U4) pour disparaître lors deux derniers moments (U5 et U6). Lors de la production de l'écriture arithmétique sur la calculatrice, avant de commencer à l'utiliser, Carlos interpelle Elise sur le signe qu'il doit mettre ; elle ne lui donne pas directement la réponse, mais lui demande *s'il en aura plus ou moins à la fin*. Alors qu'il répond *plus*, et voyant qu'il ne commence pas à écrire le calcul sur la calculatrice, Elise l'interroge sur le nombre de saucisses ; Carlos lui répondant 21, elle tape elle-même le calcul sur la calculatrice en explicitant oralement chacune des étapes. Elle qualifie elle-même le 21, lorsqu'elle lui demande d'oraliser la réponse au problème alors qu'il reste mutique.

3. Les objets effectivement évalués par Elise en classe

Les gestes évaluatifs se déploient autour de 16 objets lors de la résolution. Ces objets concernent pour moitié (8/16) des procédures de production d'un autre résultat numérique (U2- 3 et 4) à l'aide de matériel varié, et ce après la production du premier résultat numérique 3 et l'invalidation implicite de ce dernier par l'argument de non-vraisemblance par rapport à la situation (U1). La compréhension du

sens des différentes actions sur le matériel est évaluée de façon discontinue pendant tout ce temps (une fois lors de chacune des U2-3-4) en revenant à l'énoncé du problème. Ainsi la compréhension spécifique du texte de l'énoncé de problème n'est que ponctuellement évaluée en début de dialogue (U1) à partir de la lecture inaugurale d'Elise. En fin de dialogue sont évaluées l'écriture de l'opération (modèle mathématique) médiée par la calculatrice (U5) puis la communication du résultat sous forme orale et écrite ; l'interprétation du résultat étant appréciée ponctuellement en fin d'unité 1 afin d'invalider le premier résultat numérique.

Nous remarquons que les différents sous-processus ne sont pas évalués avec la même importance : le sous-processus de production d'un résultat numérique est prépondérant alors que celui de compréhension et de modélisation du problème est peu présent au début dans les échanges puis y est de façon « hybride » dès lors que Carlos propose une réponse numérique (sans qualification de ce résultat). Remarquons qu'en début et fin d'étape 3, Elise évalue finalement dans quelle mesure Carlos a construit des repères pour entrer dans la tâche scolaire « résolution de problèmes » (s'approprier le problème et utiliser ses outils mathématiques pour construire une réponse) et la clôturer (communiquer explicitement une réponse au problème).

4. *Focale sur les rétroactions*

Les rétroactions s'effectuent lors des 5 premières minutes de façon verbale et paraverbale quasiment exclusivement, sauf au moment où Carlos laisse une première trace avec des cubes (U2) et qu'Elise a fait un geste de pointage global de toute la collection pour lui demander ce qu'elle signifie. Ensuite, sont mobilisées de façon continue des actions de pointage d'une partie du matériel introduit (cases de la bande numérique, collection et-ou cube seul, écran de la calculatrice) couplées régulièrement au pointage ciblé de l'énoncé écrit qu'elle relit ; que ce soit pour valider-invalidier les actions de Carlos (le stylo qu'il prend ; la bande numérique avec grandes cases qu'il demande ; ses résultats numériques oralisés) ou pour revenir sur son activité (choix du matériel, placement des cubes sur la bande numérique, organisation des cubes en dizaines-unités). Finalement, à part quand Carlos propose la réponse « 3 » et qu'Elise l'oriente vers un nouveau raisonnement en l'invitant à repérer la classe de problème de référence, elle guide toujours Carlos en focalisant son attention sur le lien entre ce qu'il produit et les informations numériques et contextuelles. Ainsi relit-elle quatre fois des passages ciblés de l'énoncé en signalant les informations à prendre en compte par un changement d'intonation, un débit plus lent, une répétition. La fréquence élevée de ce type de feedback et le fait qu'Elise prenne en charge partiellement ou complètement la suite du travail (l'organisation de la collection de cubes, l'opération sur la calculatrice, la phrase réponse sur le cahier) montrent les limites de l'ajustement aux ressources de Carlos. Nous identifions quatre facteurs limitants :

- L'absence de rétroactions concernant la compréhension de la situation autres que le fait d'oraliser en les pointant les nombres 9 et 12 et les noms communs *merguez* et *saucisses*. Elise explique après coup qu'elle ne pensait pas que ces mots pourraient ne pas être connus et dit avoir eu du mal à choisir le mot étiquette *produits* pour formuler la question, ce qui l'a conduite à des formulations multiples auprès de Carlos (*en tout, choses à manger*). En fait, indépendamment des mots choisis pour cet énoncé ou des reformulations proposées, nous pointons l'absence de rétroactions pouvant aider Carlos à faire des liens entre les informations de l'énoncé, et à faire des liens entre ses actions sur le matériel et le sens du texte.
- La qualification du résultat numérique qui est à la fois peu prise en charge par Elise et peu sollicitée auprès de Carlos. Or cette qualification pourrait être, en particulier, une occasion ou un moyen possible de revenir sur le sens du texte.

- La double fonction d'aide à la résolution de la bande numérique, à la fois de représentation de la situation et de production d'un résultat numérique, qui complexifie le dialogue évaluatif autour du résultat erroné 20 (U2), d'autant plus que la bande du moment ne va que jusqu'à 20. Ainsi, alors que le raisonnement de Carlos est juste, pour revenir sur l'erreur de calcul tout en introduisant la deuxième collection de cubes (pour dénombrer), Elise décide tout de même de garder la nouvelle bande numérique de 30 cases (U3), surchargeant l'espace de travail de Carlos et rendant la manipulation matérielle plus difficile. En faisant ce choix, elle diffère le temps d'échange autour de la qualification du résultat qui aurait ponctué le dialogue plus tôt.
- L'enseignement-apprentissage antérieur à propos de la procéduralisation du matériel qui, d'une part, a peut-être occulté celui relatif au recours à d'autres représentations (dessins, schémas de référence...) et, d'autre part, a moins permis à Carlos de se doter d'un moyen pour construire un modèle de situation que d'une technique pour trouver un résultat numérique.

Signalons enfin qu'Elise recourt à des feedbacks offrant à Carlos des possibilités d'autorégulations, alors même qu'elle sait cette activité métacognitive difficile pour lui. Elle le questionne une fois sur la vraisemblance de son premier résultat (U1) et l'incite à raisonner en matière d'ordre de grandeur lorsqu'il l'interpelle sur le choix de l'opération (U5). Elle le fait également lorsque Carlos propose le résultat 20 et qu'elle lui demande de justifier en l'accompagnant par un questionnement oral régulier à propos du sens qu'il donne aux cubes posés sur la bande numérique (U2).

V. CONCLUSION : QUELQUES PERSPECTIVES POUR LA FORMATION

Le cadre théorico-méthodologique mobilisé nous a permis de dégager des éléments descriptifs et compréhensifs des gestes évaluatifs d'une enseignante (partie IV). Il s'est révélé comme un moyen pour qu'enseignants-formateurs-chercheurs explorent des questions d'enseignement-apprentissage de la résolution de problèmes en début d'élémentaire (grades 1-2) complémentaires aux questions scientifiques des chercheurs sur la RPAV. Il nous semble possiblement être un levier à exploiter pour développer l'analyse de l'activité évaluative (Jorro, 2016) en formation continue et la réflexivité des enseignants relativement à la dimension formative de l'évaluation. Ainsi, les résultats obtenus dans cette étude de cas, partagés avec notre collectif depuis septembre 2024, ont permis de dégager des pistes de solution pour la classe, au regard des facteurs limitants identifiés. En particulier :

- Des types de tâches non présents dans les ressources pédagogiques des enseignants, comme rédiger des énoncés dont le contexte est la vie de la classe pour s'assurer qu'il est connu des élèves ; résoudre un problème en trois étapes (sans matériel, avec matériel utilisé par l'enseignant puis par l'élève) contraignant l'élève à (re)questionner/prolonger sa recherche.
- Des types d'interventions en classe concernant la prise en compte de l'enseignement-apprentissage de la compréhension de texte en français ainsi que de spécificités des textes de problèmes arithmétiques verbaux, ou l'institutionnalisation des fonctions plurielles de la bande numérique et d'autres outils de résolution, de façon visuelle et corporelle, non nécessairement/uniquement lors de bilans collectifs.

Cela a motivé le suivi de certaines de ces pistes par trois enseignantes du collectif, de CP (dont Elise) et de CE1. Le collectif analyse actuellement leur pratique au regard de leur appropriation de ces solutions et du point de vue de leur activité évaluative.

RÉFÉRENCES

- Beylot, D., Blanchouin, A., Mounier, E., Ledan, L., Chenevotot, F. et Grapin, N. (2023). Accompagner les professeurs des écoles à la prise en compte de la diversité de l'activité des élèves en résolution de problèmes : potentialités et limites d'usages du modèle de Verschaffel et De Corte (2008). Dans *Actes du 49^e colloque de la COPIRELEM, 13-15 juin 2023, Marseille, France*. <https://hal.science/hal-04651501v1/file/Beylot%26al%202023%20COPIRELEM%20C31.pdf>
- Blanchouin, A., Grapin, N. et Mounier, E. (2022a). Documenter l'activité évaluative des professeurs des écoles à partir de leurs gestes évaluatifs. Étude de cas en mathématiques. *Évaluer. Journal international de recherche en éducation et formation*, 8(1), 3-28. <https://doi.org/10.48782/t5bdyt59>
- Blanchouin, A., Grapin, N. et Mounier, E. (2022b). Étude de gestes évaluatifs en situation de résolution de problèmes au cycle 2. Dans A. Adibou (dir.), *Actes du 8^e colloque EMF2022, 12-16 décembre 2022, Cotonou, Bénin* (p. 943-959). <https://doi.org/10.17118/11143/22516>
- Blanchouin, A., Grapin, N., Mounier, E., Chaffaa, L., Marques, C., Marques, S. et Prigent, L. (2023). Étude du travail collectif entre professeurs des écoles et chercheurs-formateurs autour de trois dispositifs d'enseignement concernant la résolution de problèmes au cycle 2. Dans F. Athias, D. Cariou, L. Coco, M. J. Gremmo, M. Le Paven et F. Louis (dir.), *Actes du 3^e Congrès international de la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique (TACD2023), 7-9 novembre 2023, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France* (p. 185-204).
- Feyfant, A. (2015). La résolution de problèmes de mathématiques au primaire. *Dossier de veille de l'IFÉ*, (105), 4-18. <https://veille-et-analyses.ens-lyon.fr/DA-Veille/105-novembre-2015.pdf>
- Hanin, V. et Van Nieuwenhoven, C. (2016). Évaluation d'un dispositif pédagogique visant le développement de stratégies métacognitives en résolution de problèmes en première secondaire. *Évaluer. Journal international de recherche en éducation et formation*, 2(1), 53-88.
- Hazard, B. (2023). La politique évaluative de la France : quelles évolutions engagées depuis 2014 et quels impacts dans les classes ? Dans Cnesco, *Conférence de consensus du Cnesco l'évaluation en classe, au service de l'apprentissage des élèves : notes des experts* (p. 23-45). Cnesco-Cnam.
- Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique des Sciences Cognitives*, 16, 67-96. <https://bibnum.publimath.fr/IST/IST11005.pdf>
- Loi n° 2013-595 du 8 juillet 2013 d'orientation et de programmation pour la refondation de l'école de la République (2013). <https://www.legifrance.gouv.fr/loda/id/JORFTEXT000027677984>
- Jorro, A. (2016). Se former à l'activité évaluative. *Éducation permanente*, (208), 53-64. <https://cnam.hal.science/hal-02290580v1>
- Ministère de l'Éducation nationale et ministère de la Recherche [MENESR]. (2002, 30 avril). *Les dispositifs de l'adaptation et de l'intégration scolaires dans le premier degré* (Circulaire n° 2002-113). <https://www.education.gouv.fr/botexte/bo020409/MENE0201158C.htm>
- Ministère de l'Éducation nationale et ministère de la Recherche [MENESR]. (2016). *Principes d'action pour évaluer les acquis des élèves*. <https://eduscol.education.fr/document/14089/download>
- Mounier, E., Beylot, D., Blanchouin, A., Chenevotot, F., Grapin, N. et Ledan, L. (2024). Repérer les démarches en résolution de problèmes d'élèves de grade 2 par l'analyse de leurs procédures : méthodologie et étude de cas. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 29, 121-129. <https://doi.org/10.4000/12ym3>

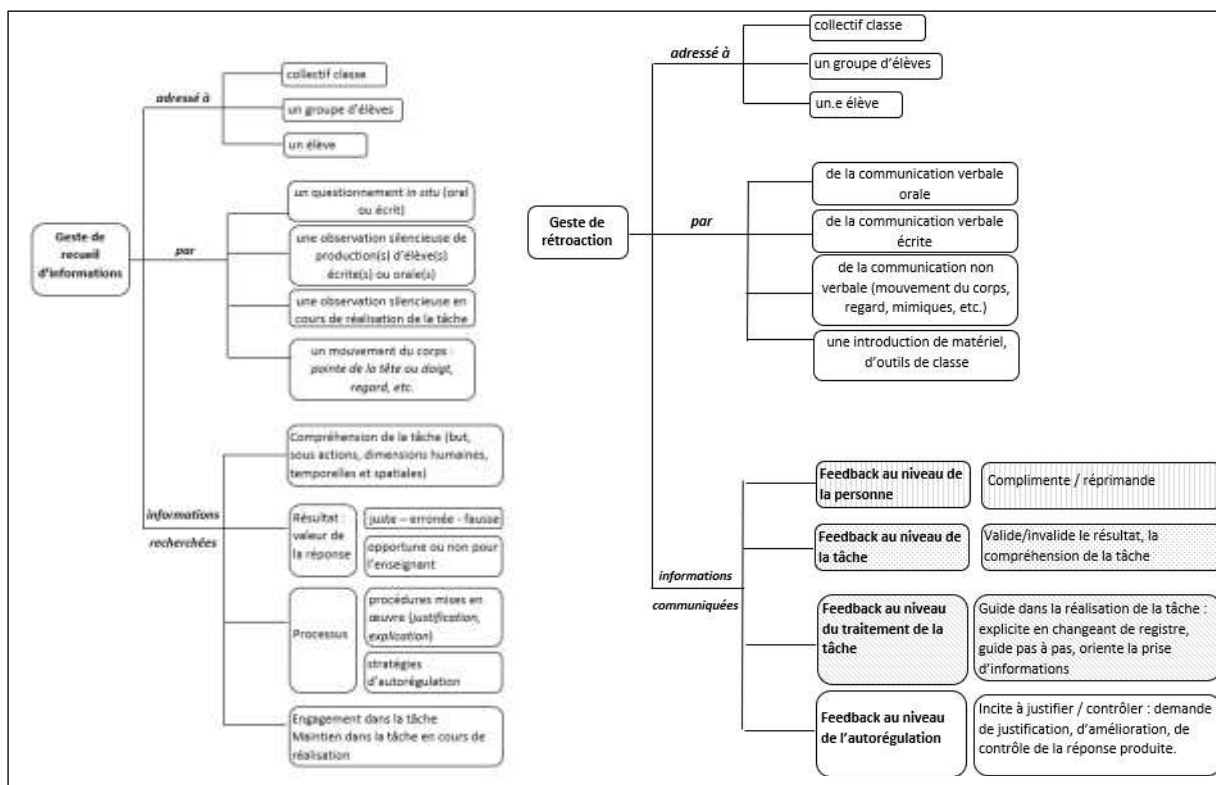
Mottier-Lopez, L. (2015). *Évaluations formative et certificative des apprentissages*. De Boeck.

Verschaffel, L. et De Corte, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte et J. Grégoire (dir), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (p. 153–176). De Boeck Supérieur.

ANNEXE 1

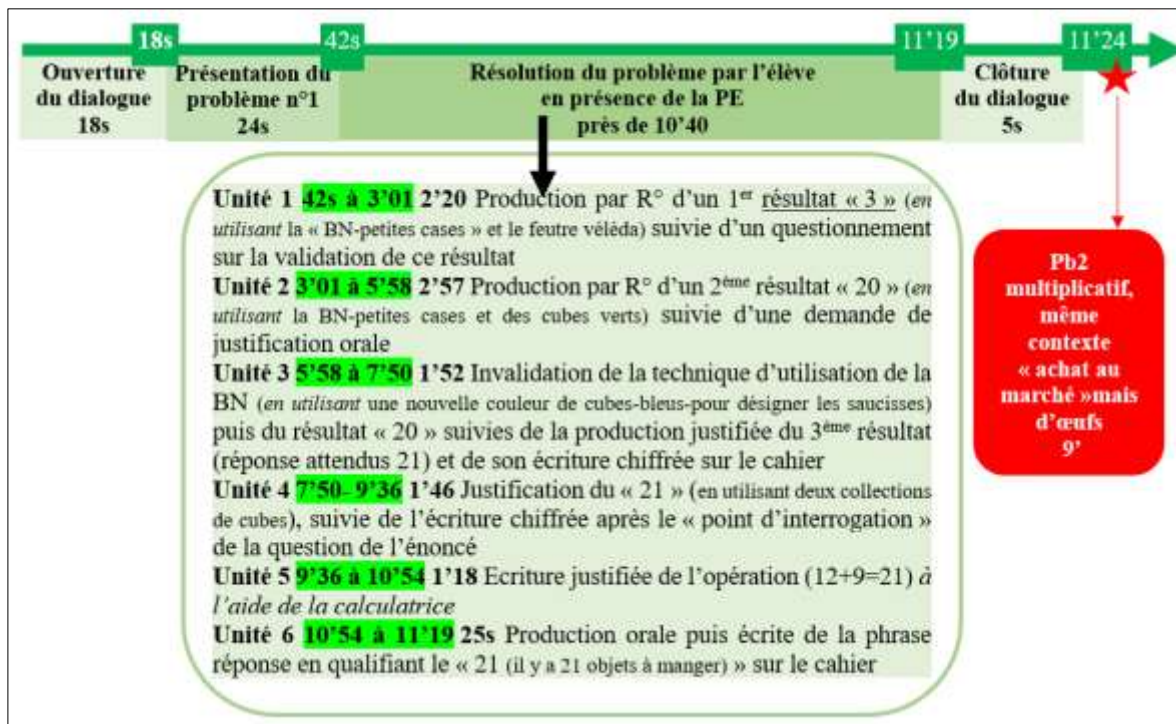
REPÉRER UN GESTE ÉVALUATIF À PARTIR DE TRACES FILMÉES EN TERMES DE COUPLE DE GESTES

extrait de Blanchouin, Grapin et Mounier (2022)



ANNEXE 2

SYNOPSIS DU MOMENT ÉVALUATIF AUTOUR DU PREMIER PROBLÈME



Nb : chaque Unité a été découpée *en sous unités* pour repérer les objets évalués par Elise en lien ou non avec ce sur quoi elle a rétroagi.

MISE À L'ÉPREUVE DE PISTES VISANT À SOUTENIR LES PRATIQUES D'ÉVALUATION FORMATIVE DANS LE CADRE D'UN ENSEIGNEMENT CENTRÉ SUR LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES EN MATHÉMATIQUES

| CHANUDET* MAUD ET FAVIER** STÉPHANE

Résumé | La recherche en cours présentée ici, de type collaboratif avec cinq enseignant·es genevois·es de mathématiques du secondaire I, porte sur un enseignement centré sur la résolution de problèmes et sur les moyens de soutenir l'activité et les apprentissages des élèves associés. Nous cibons en particulier la résolution de problèmes comme objet d'enseignement et d'apprentissage et l'étude des processus de dévolution et d'institutionnalisation dont les recherches ont montré qu'ils étaient sources de difficultés. Dans cette communication, nous nous centrons sur les sources potentielles de régulations de l'activité des élèves mises en œuvre par l'enseignant, et à leurs effets, et ce dans une perspective d'évaluation formative.

Mots-clefs : régulations, résolution de problèmes, pratiques enseignantes, heuristiques, représentation

Abstract | The current research presented here, a collaborative project involving five Geneva secondary I mathematics teachers, focuses on teaching problem solving and on ways of supporting the associated activity and learning of pupils. We focus on problem solving as a teaching and learning object and on the study of devolution and institutionalization processes, which research has shown to be sources of difficulties. In this paper, we look at the potential sources of regulation of student activity, and their effects, from a formative assessment perspective.

Keywords: Regulation, problem solving, teaching practices, heuristics, representation

I. INTRODUCTION

Le travail que nous présentons ici s'inscrit dans le cadre d'un projet de recherche collaborative soutenu par le Fonds national suisse pour la recherche¹, et cible le volet enseignement secondaire de ce projet. De manière globale, cette recherche s'intéresse à la question du soutien à l'activité des élèves et à leurs apprentissages dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques, et à l'étude des processus de dévolution et d'institutionnalisation associés.

La résolution de problèmes, en particulier dans sa dimension objet d'enseignement et d'apprentissage (dans la perspective des « problèmes ouverts » (Arsac et Mante, 2007), des activités de recherche et de preuve entre pairs (Georget, 2009) ou encore des problèmes pour apprendre à chercher (Houdement, 2009)), est donc au centre de cette recherche. Si sa place, notamment dans le plan d'études romand qui régit les attentes institutionnelles pour la scolarité obligatoire en Suisse romande, et donc à Genève qui constitue notre terrain d'étude, est explicite dans de nombreux curricula, il n'en demeure pas moins que des freins persistent quant à son implémentation effective en classe de mathématiques (Chanudet, 2019). Des recherches ont notamment identifié des difficultés associées au processus d'institutionnalisation (Allard, 2018 ; Coulange, 2012 ; Margolinas et Laparra, 2011), notamment en résolution de problèmes (Choquet-Pineau, 2014), et, bien que dans une moindre

* Université de Genève – Suisse – maud.chanudet@unige.ch

** Université de Genève – Suisse – stephane.favier@unige.ch

¹ Subside n° 100019_212761, projet « Étude des processus de dévolution et d'institutionnalisation dans le cadre d'un enseignement de la résolution de problèmes en mathématiques. Approche collaborative et élaboration d'une ressource pour les enseignants », de 2023 à 2027, co-requérant·es : Jean-Luc Dorier et Maud Chanudet.

mesure, au processus de dévolution notamment relié au processus de mathématisation c'est-à-dire de « la dévolution du choix des outils qui pourront être utilisés pour avancer dans la résolution des problèmes » (Aldon et al., 2014, p. 146). Un des aspects de notre recherche repose donc sur l'étude de ces processus dans le contexte de l'enseignement de la résolution de problèmes et sur les moyens de les favoriser.

Pour cela, nous collaborons depuis septembre 2023 avec cinq enseignant·es de mathématiques du secondaire I genevois. De manière très synthétique, et pour situer le contexte de cette recherche, après une phase de co-situation (Desgagné, 1997) visant à clarifier les attentes de chaque participant·es et les objets communs visés, nous sommes actuellement dans la phase de coopération. Cela nous amène à préparer collectivement des séances de résolution de problèmes puis à les expérimenter dans certain·es classes des enseignant·es impliqué·es. S'en suivent alors des séances collectives d'analyse a posteriori des expérimentations menées, à l'appui notamment des enregistrements audiovisuels des séances de classes, avec le double objectif d'investiguer nos questions communes et d'élaborer une ressource à destination des enseignant·es du canton en vue de les soutenir dans la mise en œuvre d'un enseignement de/par la résolution de problèmes. Même si elles mériteraient peut-être d'être discutées, nous ne revenons pas plus en détails sur la nature collaborative de cette recherche et la manière dont elle prend forme, car notre intérêt porte ici sur l'étude du rôle joué par les processus de représentation en résolution de problèmes et les heuristiques dans l'activité des élèves.

Le cadre théorique général qui structure cette recherche s'articule donc autour du concept de régulation des apprentissages, qui s'inscrit lui-même plus largement dans le cadre de l'évaluation formative. Nous revenons sur ces repères théoriques dans les parties suivantes.

II. L'ÉVALUATION FORMATIVE ET LE RÔLE DES RÉGULATIONS

À partir de la vision initiale du concept d'évaluation formative, attribué à Scriven (1967) dans le cadre de l'évaluation des programmes de formation, ensuite repris et élargi par Bloom (Bloom et al., 1971 ; Bloom, 1968) au contexte des apprentissages des élèves, de nombreuses recherches ont porté sur cette fonction de l'évaluation et ont permis son évolution. La synthèse établie par Allal et Mottier Lopez (2005) précise en quoi les travaux francophones sur l'évaluation ont permis d'élargir la conception de l'évaluation formative par rapport à celle initiée par Bloom et ses collaborateurs. Elles soulignent notamment que, outre l'intégration de l'évaluation formative dans toutes les situations d'apprentissage, la personne enseignante peut s'appuyer sur différents moyens et outils pour recueillir des informations quant à l'activité, aux difficultés, erreurs ou conceptions des élèves. Par ailleurs, le concept de régulation joue un rôle central dans cette acception plus large de l'évaluation formative. En effet, comme le rappelle Perrenoud,

Entre Piaget et Vygotsky, les approches constructivistes de l'apprentissage et les apports des didactiques des disciplines ont poussé les chercheurs francophones à développer des modèles plus sophistiqués et systémiques de l'enseignement et de l'apprentissage. Ils les ont conduits, depuis près de vingt ans, à placer au centre du champ conceptuel la notion de régulation des processus d'apprentissage (Cardinet, 1986a, 1986b ; Allal, 1988). L'évaluation formative devient une source de régulation. (Perrenoud, 1997, p. 2)

Les régulations interactives qui ont lieu lors des activités quotidiennes d'enseignement et qui se construisent grâce aux interactions de l'élève avec la tâche (Allal, 2020 ; Allal et Mottier Lopez, 2005) semblent particulièrement intéressantes à investiguer. Allal (2020) précise de plus que ces régulations peuvent être associées à différents éléments : la structure de la situation d'apprentissage (tâches proposées aux élèves, choix des valeurs des variables didactiques, articulation des tâches dans le temps, etc.) ; les interactions entre les élèves ; et les interventions de l'enseignant·e dans la situation

d'apprentissage et ses interactions avec les élèves. Allal précise de plus que, dans ce dernier cas, les interventions verbales directes de l'enseignant·e auprès des élèves sont une « puissante source de régulation potentielle des processus d'apprentissage » (Allal, 2007, p. 17). Au-delà du fait de faire passer des tests écrits aux élèves en cours ou en fin du chapitre, il est donc aussi possible de recueillir des informations de façon informelle, lors de discussions en classe (Shavelson et al., 2008), que nous appelons dans la suite *discussions évaluatives*. En lien avec le courant de l'assessment for learning (Earl, 2003), ces discussions évaluatives peuvent ainsi se produire lorsque l'enseignant·e saisit une opportunité, non planifiée, pour recueillir des informations sur « où en est l'élève dans son apprentissage ? » (Ruiz-Primo et Furtak, 2004, p. 2).

Nous nous intéressons donc à ces discussions évaluatives, à ce sur quoi elles portent et à leurs effets sur l'activité des élèves. Pour cela, nous identifions tout particulièrement les éléments en lien avec la représentation mentale que les élèves se font du problème et les heuristiques qui sont suggérées par l'enseignant·e. Cela constitue, selon nous, des pistes intéressantes pour soutenir l'activité et les apprentissages des élèves en résolution de problèmes.

III. LE RÔLE DE LA REPRÉSENTATION EN RÉOLUTION DE PROBLÈMES

Dans le modèle bien connu en quatre étapes de Pólya (1945), la première étape de la résolution d'un problème mathématique est la compréhension du problème. Même si différents chercheurs (Favier, 2022 ; Rott, 2012 ; Schoenfeld, 1985) ont depuis montré que le processus de résolution d'un problème n'est pas aussi linéaire et direct, la compréhension du problème, ou plus précisément la construction d'une bonne représentation mentale de celui-ci, est bien considérée comme une condition nécessaire à sa résolution (Goulet-Lyle et al., 2020).

Traitant des problèmes de transformation d'état (par exemple les tours de Hanoi²), Richard (1990) met en évidence le concept de représentation du problème, défini comme le résultat de l'interprétation du problème, qui comprend l'interprétation de la situation initiale, du but, et des actions permises par le problème. Ce qui semble intéressant pour mieux comprendre l'activité de résolution de problèmes des élèves est la différence qu'il souligne entre espace effectif et espace sémantique : si l'élève interprète correctement les données des problèmes, il évolue dans l'espace effectif, mais si l'espace dans lequel il investit n'est pas basé sur les contraintes réelles du problème, Poitreneau (1998) parle d'espace sémantique. Dans le contexte de la résolution de problèmes mathématiques, Favier et Dorier caractérisent l'espace sémantique comme « *a certain state of the representation that a problem solver constructs for himself of the problem he is solving.* » (2024, p. 410).

Pour aller plus loin, nous nous appuyons sur les travaux de Julo (1995), consacrés aux problèmes mathématiques. Ce dernier identifie deux aspects dans les processus psychologiques impliqués dans une activité complexe telle que la résolution de problèmes : la représentation et l'action. Il souligne en particulier l'importance du premier aspect, la représentation mentale lors de la résolution de problèmes, caractérisée comme le résultat d'une activité mentale impliquant toute une série de processus responsables du traitement de l'information : la sélection et l'interprétation des informations, la structuration et l'opérationnalisation. Dorier et Favier y voient un lien avec la notion d'espace sémantique au sens où il est « *dynamical and evolves according to what the problem solver is doing* » (2024, p. 410). En outre, Julo (1995, 2002) souligne que les difficultés que les élèves rencontrent lors de la résolution de problèmes sont principalement liées à la représentation. Malheureusement, il est généralement plus

² https://fr.wikipedia.org/wiki/Tours_de_Hano%C3%AF pour une explication du jeu.

facile d'aider un·e élève à résoudre un problème en lui fournissant des aides orientées vers l'action que des aides orientées vers la représentation. Nous rejoignons l'hypothèse de Julo selon laquelle aider les élèves sur le processus de représentation est, même si plus difficile, plus efficace et plus pertinent que de leur donner des indications orientées vers des actions.

IV. LES HEURISTIQUES COMME MOYEN DE RELANCER LA RECHERCHE

La vaste revue de la littérature menée par Favier sur le concept d'heuristique (Favier, 2022 ; Favier et Dorier, 2024) à l'appui de la définition de Rott (2014), met l'accent sur ses divers aspects : une opération mentale, une règle générale, une stratégie, une tactique, une connaissance spécifique à la résolution de problèmes ; et sur ses diverses caractéristiques, telles que son utilité, l'absence de garanties quant au fait de trouver la solution, le domaine d'application ou encore sa dimension métacognitive. Ainsi, Favier (2022) a identifié et caractérisé, à partir de la littérature et de ses propres analyses, de nombreuses heuristiques, telles que l'organisation des données et le test d'un cas particulier, la réduction d'un problème à un problème plus simple, le fait de simuler/jouer l'action du problème ou encore de faire le lien avec un outil mathématique (propriété, théorème,...).

L'étude du travail des élèves dans un contexte de classe ordinaire et son analyse en termes d'épisodes (planification, exploration,...) tel que développé par Schoenfeld (1985) vient confirmer les résultats obtenus par ce dernier. Il ressort (Favier, 2022) que les heuristiques sont surtout utilisées dans les épisodes qui sont au cœur de la recherche, et qu'elles mettent fin à un épisode pour en ouvrir un autre de nature différente, correspondant presque toujours aux épisodes de mise en œuvre ou d'exploration. Notre idée n'est pas, comme cela a déjà été testé avec des effets limités sur les performances des élèves (Schoenfeld, 1985), d'enseigner explicitement aux élèves les heuristiques pour elles-mêmes, mais de permettre aux enseignant·es de suggérer, en articulation avec l'activité des élèves, certaines heuristiques qu'ils et elles peuvent utiliser pour tenter d'avancer dans la résolution du problème.

V. QUESTIONS DE RECHERCHE ET MÉTHODOLOGIE

Nous cherchons donc, dans ce étude, à déterminer sur quoi portent les interventions de l'enseignant·e lors de ses discussions évaluatives avec les élèves et quelles régulations ces discussions pourraient entraîner chez les élèves (autrement dit quel est leur potentiel de régulation pour l'activité de l'élève). Cela nous amène à questionner en quoi le recours à des heuristiques et la prise en compte des processus de représentation mobilisés par les élèves peuvent être des moyens pour les enseignant·es de relancer l'activité et la recherche des élèves en résolution de problèmes.

Nous menons pour cela une analyse qualitative de nature compréhensive, centrée sur une étude de cas. En conséquence, cela signifie que nous n'avons pas mené d'étude systématique des interactions entre élèves et enseignant pour l'ensemble des séances observées. Nous avons profité de notre présence dans la classe lors de ces séances, pour identifier un moment clé visant à nous permettre d'investiguer nos questions de recherche.

Pour mener nos analyses, nous nous appuyons sur deux types de données, recueillies lors des expérimentations menées en classe. Ces séances de résolution de problèmes impliquent un premier temps de recherche en individuel, suivi d'un temps de recherche en groupe. Le premier type de données recueillies consiste en des vidéos de séances de résolution de problèmes en classe, ciblant l'activité de l'enseignant·e. Une caméra est donc dédiée au suivi des gestes de l'enseignant·e et à ses discussions évaluatives avec les élèves, qu'ils et elles soient seul·es, en groupe ou que cela concerne tout le groupe classe. Le second type de données cible l'activité des élèves. Pour cela, un·e élève de chaque groupe

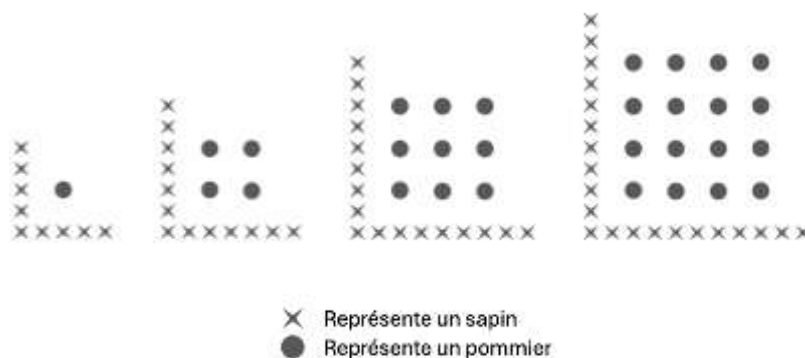
est équipé·e d'une caméra d'action qui permet de suivre l'ensemble de ce qui se dit, de ce que l'élève écrit, efface, montre ou a dans son champ de vision. Cela nous permet notamment aussi de suivre l'activité des élèves après les interventions de l'enseignant·e.

Afin de répondre à nos questions de recherche, nous étudions les discussions évaluatives qui s'établissent entre élèves et enseignant·e, l'utilisation que fait l'enseignant·e de l'information recueillie, et identifions en particulier la place accordée aux représentations mentales et aux heuristiques. Nous nous appuyons pour cela sur la liste d'heuristiques élaborée par Favier (2022).

VI. ANALYSES ET RÉSULTATS

Nous illustrons nos analyses à partir de l'expérimentation du problème « Pommes en carré » dont l'énoncé est présenté ci-après et qui vise à conduire les élèves à mobiliser une démarche de type expérimental (Favier et Chanudet, 2021) :

Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ses arbres contre les vents dominants, il plante des sapins sur deux côtés de sa plantation selon le nombre de rangées de pommiers.



- 1°) Dessiner la plantation avec 5 rangées de pommiers.
- 2°) Combien de sapins faudra-t-il pour protéger de la même manière 100 pommiers ? 900 pommiers ?
- 3°) Le fermier a une autre plantation avec des pommiers plantés en carré mais il ne se souvient plus du nombre de rangées. Comment lui expliquer le nombre de sapins qu'il doit acheter pour les protéger ?
- 4°) Combien de pommiers au maximum peut-on protéger ainsi avec 205 sapins ?

Après avoir décidé collectivement (les cinq enseignant·es impliqué·es et les deux auteur·es de ce texte) de la formulation de l'énoncé, du choix des questions, des valeurs des variables didactiques, des modalités de travail ainsi que des objectifs des phases de mises en commun, ce problème a été expérimenté par deux enseignant·es participant à la recherche, dans leur classe respective de 9^e (grade 7, élèves de 13 ans). Les élèves ont travaillé pendant 2 périodes consécutives de 45 minutes chacune, un premier temps individuellement puis par groupe de 2, 3 ou 4 élèves.

Nous ciblons ce qui s'est passé dans la classe de Charles, un enseignant expérimenté, avec un groupe de deux élèves, Lena et Téa. Précisons que l'algèbre a été brièvement introduite dans cette classe dans les séances précédant la passation de ce problème, mais que le chapitre traité durant la période au cours de laquelle s'est déroulée l'expérimentation traitait d'autres notions mathématiques.

Nous présentons en annexe (Annexe 1) une transcription d'un extrait de discussion évaluative entre Charles et le groupe de Lena et Téo pour illustrer nos analyses.

Les deux élèves, à l'instar de nombre d'élèves de la classe, semblent se construire une représentation du problème associée à un certain schéma de problème au sens de Julo (1995) (ceux relevant de la proportionnalité). Les élèves ne semblent toutefois pas conscient·es de leur recours à ce modèle mathématique, et presque aucun·e n'interroge la pertinence de recourir à ce modèle au vu de la situation étudiée. Charles, l'enseignant identifie l'heuristique à laquelle les élèves se réfèrent, à savoir « faire le lien avec un outil mathématique (la proportionnalité) ». Pour les conduire à la rejeter, il recourt à une autre heuristique « explorer des cas particuliers » qui met, selon lui, en défaut leur procédure. Dans un premier temps, il exploite la propriété multiplicative de la linéarité entre 1 et 4 (L6-L10). Il choisit ensuite de s'appuyer sur le coefficient de proportionnalité entre les deux grandeurs (nombre de pommiers et nombre de sapins) : si la situation est proportionnelle, alors comme pour passer de 1 pommier à 9 sapins on multiplie par 9, alors il doit en être de même pour passer de 4 pommiers à 13 sapins, or cela ne fonctionne pas (L23-L27). Charles s'appuie, de manière implicite, sur la contraposée de la proposition suivante : si une situation est proportionnelle alors les propriétés de la proportionnalité s'appliquent. Dans cet échange, il montre aux élèves à deux reprises que les propriétés de la proportionnalité ne s'appliquent pas sur les nombres donnés dans l'énoncé mais la conclusion de son raisonnement (L27) ne précise pas que cette situation n'est pas proportionnelle. Cela semble produire un malentendu entre l'enseignant et les élèves pour lesquelles l'erreur concernerait leurs calculs et non la remise en question du caractère proportionnel de la situation. Ainsi, les élèves ne semblent pas considérer cet exemple comme un contre-exemple mettant en défaut leur procédure. Elles soulignent que leur méthode est différente puisqu'elle ne s'appuie pas sur la mise en correspondance des mêmes duos de nombres. En effet, elles utilisent une relation entre les nombres de pommiers (pour passer de 1 à 100 pommiers on fait fois 100), qui va être ensuite appliquée au nombre de sapins (donc pour avoir le nombre de sapins correspondant à 100 pommiers, on multiplie le nombre de sapins nécessaires pour protéger 1 pommier par 100). Elles se réfèrent donc à une autre propriété de la proportionnalité, celle de la linéarité multiplicative, ce qui semble pouvoir expliquer qu'elles ne sont pas convaincues par le contre-exemple mis en avant par l'enseignant. La suite des enregistrements vidéo montre que ces deux élèves réitèrent ce raisonnement à l'appui de la propriété de linéarité multiplicative, sans sembler comprendre pourquoi cela ne fonctionne pas non plus. Elles restent, tout au long de leur recherche, dans le même espace sémantique.

Pour déclencher le doute sur le caractère non proportionnel de cette situation, une autre source potentielle de régulation serait de s'appuyer sur l'illustration qu'un raisonnement identique au leur, mais basé sur deux autres relations entre deux valeurs de pommiers, conduit à des résultats différents. Par exemple, pour protéger 4 pommiers il faut 13 sapins, et comme pour passer de 4 à 100 pommiers, on multiplie par 25, alors pour protéger 100 pommiers il faudrait 13 fois 25 sapins. Par ailleurs, le même raisonnement mené sur le passage de 1 à 100 pommiers conduit à 900 sapins.

Du point de vue des processus impliqués dans l'activité de résolution de problèmes, il apparaît que la proportionnalité est à la fois un moyen d'action, permettant de trouver une valeur qui ne peut pas être obtenue par dénombrement, mais aussi une manière de se représenter le problème, avec l'idée d'une forme de croissance régulière. Les deux volets, action et représentation, mis en avant par Julo (1995) dans les processus de résolution de problèmes, semblent ici articulés l'un à l'autre. D'ailleurs, dans cette situation, le volet représentation semble prendre le pas sur le volet action dans la mesure où, tant que cette représentation subsiste, l'espace sémantique au sein duquel les élèves évoluent ne s'élargit pas, et qu'ils et elles se limitent à mobiliser cet outil. Cela illustre l'idée de Julo selon laquelle une intervention sur le volet représentation est à privilégier. Néanmoins, la question demeure de savoir

comment l'enseignant peut amener les élèves à réguler ces deux dimensions impliquées dans leur démarche de résolution.

VII. CONCLUSION

Au vu de nos analyses dans les deux classes dans lesquelles ce problème a été proposé, la proportionnalité apparaît clairement comme la méthode privilégiée par les élèves pour le résoudre. En effet, la quasi-totalité des élèves a eu recours, a minima dans un premier temps, à des procédures basées sur l'application du modèle proportionnel. Dans la deuxième classe pourtant, un travail consistant avait été proposé aux élèves sur ce concept, avec la confrontation à des situations non proportionnelles et des discussions portant sur la pertinence de se référer à ce modèle. Mais cela ne semble pas avoir suffi pour que les élèves se questionnent d'eux et d'elles-mêmes lors de leur application en vue de la résolution d'un problème, en dehors du chapitre associé. Une question que se pose alors est de savoir si les élèves l'utilisent consciemment. En effet, nous n'avons identifié que deux groupes d'élèves sur l'ensemble des deux classes qui ont explicitement verbalisé y recourir, au moment de leur mise en défaut.

Les régulations proposées par l'enseignant dans le groupe étudié montrent que celles-ci ont davantage porté sur le volet action des processus impliqués lors de la résolution de problèmes que sur le volet représentation. En effet, l'enseignant a cherché à amener les élèves à invalider leur recours à la proportionnalité sur la base de l'étude de cas particuliers et de contre-exemples, mais sans revenir explicitement sur leur représentation du problème. Il apparaît ainsi que les régulations proposées par l'enseignant n'ont eu que peu d'effet sur les processus de résolution de problèmes erronés mis en œuvre par les élèves, et que leurs représentations mentales liées au problème ne semblent pas avoir changé. Pourtant, c'est bien sur cette dimension qu'il nous semble nécessaire d'intervenir, lors des discussions évaluatives avec les élèves, en ciblant leurs représentations mentales afin de permettre une remise en question des procédures erronées. Par ailleurs, sur le problème étudié ici, des difficultés liées aux différents types de variables en jeu (confusion entre le nombre total de pommiers et le nombre de rangées, et entre le nombre total de sapins et le nombre de sapins par côté) sont apparues. Nous faisons l'hypothèse qu'une intervention de l'enseignant en collectif et portant sur la structure de la situation d'apprentissage (la proposition d'un travail direct sur le nombre de rangées de pommiers plutôt que le nombre de pommiers au total) aurait pu faciliter la recherche des élèves.

VIII. PERSPECTIVES

Il nous semble intéressant de proposer à nouveau ce problème, avec une formulation modifiée, ne faisant intervenir explicitement que le nombre de pommiers et non plus aussi le nombre de rangées, afin de voir l'effet possible sur les représentations et sur les stratégies de résolution mobilisées par les élèves, et notamment sur le recours à la proportionnalité. C'est ce qui va être fait prochainement dans d'autres classes et qui donnera lieu à de nouvelles analyses complémentaires.

Enfin, les difficultés rencontrées face à ce problème par les élèves de ces deux classes nous amènent à faire l'hypothèse que la recherche d'un pattern, d'une régularité dans un schéma n'est pas simple pour les élèves. Elle constitue une sorte de savoir transparent qui pourrait faire l'objet d'un travail et d'un apprentissage en lien avec le processus de recherche de similitudes et de différences identifié par Jeannotte (2015). La nature de la recherche menée ici, à savoir collaborative avec des enseignant·es, nous semble être un contexte favorable pour investiguer en profondeur ces questions.

RÉFÉRENCES

- Aldon, G., Durand-Guerrier, V. et Ray, B. (2014). Des problèmes pour favoriser la dévolution du processus de mathématisation. Un exemple en théorie des nombres et une fiction réaliste. Dans G. Aldon (dir.), *Actes de la 66e CIEAEM "Mathematics and realities"* (p. 146-150).
<https://www.researchgate.net/publication/273461308>
- Allal, L. (1988). Vers un élargissement de la pédagogie de maîtrise : processus de régulation interactive, rétroactive et proactive. Dans M. Huberman (dir.), *Assurer la réussite des apprentissages scolaires. Les propositions de la pédagogie de maîtrise* (p. 86-126). Delachaux et Niestlé.
- Allal, L. (2007). Régulations des apprentissages : orientations conceptuelles pour la recherche et la pratique en éducation. Dans L. Allal et L. Mottier Lopez (dir.), *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation* (p. 7-23). De Boeck.
- Allal, L. (2020). Assessment and the co-regulation of learning in the classroom. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 27(4), 332-349. <https://doi.org/10.1080/0969594X.2019.1609411>
- Allal, L. et Mottier Lopez, L. (2005). L'évaluation formative de l'apprentissage : revue de publications en langue française. Dans *L'évaluation formative : pour un meilleur apprentissage dans les classes secondaires* (p. 265-290). OCDE. https://www.oecd.org/content/dam/oecd/fr/publications/reports/2005/01/formative-assessment_g1gh4c28/9789264007420-fr.pdf
- Allard, C. (2018). Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques effectives en fin d'école primaire : Le cas de l'enseignement des fractions. Dans J. Pilet et C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM* (p. 192-209). IREM de Paris.
- Arsac, G. et Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Scéren.
- Bloom, B. S., Hastings, J. T. et Madaus, G. (1971). *Handbook on formative and summative evaluation of student learning*. Mc Graw-Hill. <http://eric.ed.gov/?id=ED049304>
- Bloom, B.-S. (1968). Learning for mastery. *Evaluation Comment*, 1(2), 1-12.
- Cardinet, J. (1986a). *Pour apprécier le travail des élèves*. De Boeck.
- Cardinet, J. (1986b). *Évaluation scolaire et pratique*. De Boeck.
- Chanudet, M. (2019). *Étude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques* [Thèse de doctorat, Université de Genève]. Archive ouverte UNIGE. <https://doi.org/10.13097/archive-ouverte/unige:125833>
- Choquet-Pineau, C. (2014). *Une caractérisation des pratiques de professeurs des écoles lors de séances de mathématiques dédiées à l'étude de problèmes ouverts au cycle 3* [Thèse de doctorat, Université de Nantes]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-01185671/file/CHOQUET%20Christine%20Th%C3%A8se%20oct2014.pdf>
- Coulange, L. (2012). *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves* [Habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Diderot]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-00801863v1>
- Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : L'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, 23(2), 371-393.
<https://doi.org/10.7202/031921ar>

- Earl, L. M. (2003). *Assessment as learning: Using classroom assessment to maximize student learning*. Corwin Press.
- Favier, S. (2022). *Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève* [Thèse de doctorat, Université de Genève]. Archive ouverte UNIGE. <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:159466>
- Favier, S. et Chanudet, M. (2021). Les modes de raisonnement et de preuve comme apprentissages possibles de la résolution de problèmes en mathématiques. Dans *Acte du XXVII^e Colloque CORFEM pour les professeurs et formateurs de mathématiques, 15-17 juin 2021, Grenoble* (p. 50-63).
- Favier, S. et Dorier, J.-L. (2024). Heuristics and semantic spaces for the analysis of students' work in mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 115, 407-431. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10297-y>
- Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-00426603v1>
- Goulet-Lyle, M.-P., Voyer, D. et Verschaffel, L. (2020). How does imposing a step-by-step solution method impact students' approach to mathematical word problem solving? *ZDM*, 52, 139-149. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01098-w>
- Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 14, 31-59.
- Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* [Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. <https://archipel.uqam.ca/8129/>
- Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.
- Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, (69), 31-52.
- Margolinas, C. et Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. Dans J.-Y. Rochex et Y. Crinon (dir.), *La construction des inégalités scolaires* (p. 19-32). Presses universitaires de Rennes
- Perrenoud, P. (1997). *De l'évaluation formative à la régulation maîtrisée des processus d'apprentissage. Vers un élargissement du champ conceptuel*. http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_1997/1997_11.html
- Poitrenaud, S. (1998). *La représentation des procédures chez l'opérateur. Description et mise en œuvre des savoir-faire* [Thèse de doctorat inédite]. Université de Paris 8.
- Pólya, G. (1945). *How to solve It*. Princeton University Press.
- Richard, J.-F. (1990). *Les activités mentales*. Armand Colin.
- Rott, B. (2012). Models of the problem solving process. A discussion referring to the processes of fifth graders. Dans T. Bergqvist (dir.), *Proceedings of the 13th ProMath conference "Problem solving in the mathematics education: Learning problem solving and learning through problem solving", 2-4 septembre 2011, Umeå, Suède* (p. 95-109). Umeå Mathematic Education Centre.

- Rott, B. (2014). Rethinking heuristics: Characterizations and examples. Dans A. Ambrus et E. Vasarhelyi (dir.), *Proceedings of the 15th ProMath Conference "Problem solving in mathematics education"*, 30 août-1er septembre 2013, Eger, Budapest (p. 176-192). Eötvös Loránd University, Mathematics Teaching and Education Center.
- Ruiz-Primo, M. A. et Furtak, E. M. (2004, août). *Informal formative assessment of students' understanding of scientific inquiry* [Rapport] (CSE n° 639). <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED483406.pdf>
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press Inc.
- Scriven, M. (1967). The methodology of evaluation. Dans R. Mills Gagné, R. W. Tyler et M. Scriven (dir.), *Perspectives of curriculum evaluation* (p. 39-83). Rand Mc Nally.
- Shavelson, R. J., Young, D. B., Ayala, C. C., Brandon, P. R., Furtak, E. M., Ruiz-Primo, M. A., Tomita, M. K. et Yin, Y. (2008). On the role and impact of formative assessment on science inquiry teaching and learning. *Applied Measurement in Education*, 21(4), 295-314.

ANNEXE 1

TRANSCRIPTION D'UN ÉCHANGE ENTRE ÉLÈVES ET ENSEIGNANT

L1	Lena	Moi je pense que 100 et 1, c'est un peu la même chose parce que 100 sans les 0 c'est 1.
L2	Ens	Ouais.
L3	Téa	Non monsieur, moi j'ai une autre explication.
L4	Ens	Attends, laisse-la expliquer.
L5	Lena	1 fois 100 pour arriver à 100, il faut faire 9 fois 100 pour avoir les sapins, donc 900.
L6	Ens	Ok. Pour aller de 1 à 4 tu dois faire combien ?
L7	Téa	Fois...
L8	Ens	Fois 4. Et 9 fois 4, ça fait ?
L9	Téa	36.
L10	Ens	Est ce qu'on a 36 ici (<i>montre le dessin du cas 4 pommiers, avec 13 sapins</i>) ?
L11	Téa	Non. Tu vois (<i>à Lena</i>), je te l'avais dit. Regardez mon hypothèse, je disais là tu as 1 (<i>montre le cas 1 pommier</i>) fois combien ça fait 100 ? Voilà déjà là t'as un truc qui nous facilite (<i>montre le cas 9 pommiers</i>) parce que t'as 9 du coup 9*100 ça fait 900 et ici tu dois faire juste la même chose et du coup vu que ça fait 900 (<i>montre toujours le cas 9 pommiers</i>) ici ça va faire 1700 (<i>montre le 17 écrit au niveau des sapins du cas 9 pommiers</i>).
L12	Ens	Mais alors cela devrait marcher pour tout. C'est la même chose que ce que dit Lena, c'est de la proportionnalité.
L13	Téa	Ben oui.
L14	Lena	En fait moi ce que j'ai dit c'est pour la 1e question, elle, elle a dit pour la 2e question.
L15	Ens	Oui j'ai bien compris, mais déjà j'aimerais avoir la réponse pour la première question.
L16	Téa	900 sapins. (...)
L17	Ens	Mais tu imagines 900 ?
L18	Téa	Parce que pour 1 (<i>montre le dessin du cas 1 pommier</i>)...
L19	Ens	Ça j'ai compris.
L20	Téa	Et pour 9 (<i>montre les sapins pour le cas 9 pommiers</i>), ça fois 100 c'est 900.
L21	Ens	Toi tu dis, c'est fois 9 en fait ?
L22	Téa	Non c'est fois 100.

L23	Ens	Non mais tu dis pour passer de là (<i>nombre de pommiers sur le cas 1 pommier</i>) à là (<i>nombre de sapins sur le cas 1 pommier</i>) il y en a 9 fois plus donc je ferai 100 fois 9.
L24	Téa	Oui.
L25	Ens	Ok. Est-ce que là (<i>montre le dessin du cas 4 pommiers</i>) pour passer de 4 à 13 j'ai fait fois 9 ?
L26	Téa	Humm.
L27	Ens	Tu es d'accord que ça ne marche pas ?
L28	Téa	Non parce que là vous dites quelque chose d'autre.
L29	Ens	Ah non je dis comme toi, c'est toi qui me l'as dit.
L30	Lena	Non elle a dit de là (<i>montre le cas 1 pommier</i>), pas de là (<i>montre le dessin du cas 4 pommiers</i>).
L31	Ens	Oui mais il faut que ça marche pour tous les cas votre méthode.
L32	Téa et Lena	Non !
L33	Ens	On ne peut pas avoir une méthode qui marche là, qui ne marche pas là, qui ne marche pas là et qui remarche là.
L34	Téa	Ça c'est un nombre, ça c'est un autre, ça c'est différent (<i>elle montre successivement les dessins globaux des cas 1, 4, 9 pommiers</i>). Donc une méthode c'est quelque chose qui est différent là, qui est différent là (<i>elle remontre successivement les dessins globaux des cas 1, 4, 9 pommiers</i>).
L35	Ens	Ah non, nous on veut une méthode qui marche pour tous les cas. Donc réfléchissez à ça.

REGARD DIDACTIQUE SUR LA CONCEPTION D'UN OUTIL DE DIAGNOSTIC EN MATHÉMATIQUES

| CHENEVOTOT* FRANÇOISE, GRAPIN** NADINE, GRUGEON-ALLYS*** BRIGITTE,
MOUNIER**** ÉRIC ET PILET***** JULIA

Résumé | Le projet ERASMUS + DiToM (Diagnostic Tool in Mathematics) vise à concevoir un outil de diagnostic en mathématiques, composé de cinq tests (fin des grades 0, 2, 4, 6 et 8), pour dépister les élèves présentant des difficultés importantes en numération, calcul, résolution de problèmes arithmétiques et algèbre. Nous exposons les éléments du cadre de conception du diagnostic en tant que participants au projet ainsi que les questions de validité soulevées dans nos rôles de chercheurs en France.

Mots-clés : diagnostic, évaluation, arithmétique, algèbre, validité

Abstract | The ERASMUS + DiToM (Diagnostic Tool in Mathematics) project aims to design a diagnostic tool in mathematics, consisting of five tests (end of grades 0, 2, 4, 6 and 8), to screen students with significant difficulties in numeracy, arithmetic, problem solving and algebra. We outline the elements of the diagnostic design framework as participants in the project and the validity issues raised in our roles as researchers in France.

Keywords: Diagnostic, evaluation, arithmetic, algebra, validity

Ce poster a pour objectif de présenter notre travail mené dans le cadre d'un projet ERASMUS selon deux postures distinctes : celle de participant·es au projet et celle de chercheur·es en didactique des mathématiques. Nous exposons d'abord, dans les deux premières parties, le projet ainsi que son processus de conception, puis nous détaillons ensuite nos objectifs de recherche.

I. PROJET DITOM

1. Présentation du projet

DiToM, acronyme de Diagnostic Tool in Mathematics (outil de diagnostic en mathématiques), est un projet lancé en janvier 2023 dans le cadre d'un partenariat de coopération ERASMUS+ (DAAD ; KA220-HED-1194D587). Ce projet réunit des universités de sept pays : Allemagne, Croatie, Espagne, France, Grèce, Italie, Suède. L'objectif principal de DiToM est de développer cinq outils de diagnostic communs (fin des grades 0, 2, 4, 6 et 8) pour détecter les élèves potentiellement à risque en mathématiques, de l'école au collège.

* Université Lille, Université Paris Cité, Université Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Université Rouen Normandie, UMR 4434 – LDAR, F-59000 Lille – France – francoise.chenevotot@univ-lille.fr

** Université Paris Est Créteil, Université Paris Cité, CY Cergy Paris Université, Université Lille, Université Rouen Normandie, LDAR, F-94010 Créteil – France – nadine.grapin@u-pec.fr

*** Université Paris Est Créteil, Université Paris Cité, CY Cergy Paris Université, Université Lille, Université Rouen Normandie, LDAR, F-94010 Créteil – France – brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

**** Université Paris Est Créteil, Université Paris Cité, CY Cergy Paris Université, Université Lille, Université Rouen Normandie, LDAR, F-94010 Créteil – France – eric.mounier@u-pec.fr

***** Université Paris Est Créteil, Université Paris Cité, CY Cergy Paris Université, Université Lille, Université Rouen Normandie, LDAR, F-94010 Créteil – France – julia.pilet@u-pec.fr

Les résultats des études nationales et internationales révèlent que les élèves français rencontrent des difficultés croissantes en mathématiques. Des tendances similaires sont observées dans les résultats des enquêtes internationales PISA pour d'autres pays européens (OECD, 2020). Ce projet s'inscrit dans une réflexion européenne partagée visant à développer des outils de diagnostic permettant d'évaluer rapidement les compétences mathématiques de base afin de lutter efficacement contre cette hétérogénéité croissante et promouvoir l'inclusion de tous les élèves.

2. *Structure du projet*

Trois phases de conception structurent la réalisation du projet :

- de janvier 2023 à janvier 2024 : conception du cadre et des lignes directrices ;
- de novembre 2023 à juin 2025 : développement des tests et des guides pour l'enseignant ;
- de février 2024 à fin décembre 2025 : création du site web et diffusion.

Chaque phase du projet conduit à la création de documents synthétiques résumant les résultats obtenus en fonction des objectifs assignés. Ces synthèses sont alors examinées et commentées par un groupe de réflexion composé d'enseignants de chaque pays partenaire. Leurs retours permettent ensuite de faire évoluer les documents initiaux. Par ailleurs, une stratégie de diffusion est mise en place tout au long du projet afin de garantir la diffusion des résultats et des ressources produites.

3. *Cadre de conception : dépistage et compétences clés*

Le dépistage est un processus de diagnostic rapide visant à évaluer les compétences d'un élève. Conçu pour être appliqué à de grands groupes, il permet d'identifier rapidement les élèves à risque. Ne reposant pas sur une analyse approfondie (Tröster, 2009), il sert de première étape, suivie de procédures de diagnostic plus détaillées ou d'interventions pédagogiques ciblées, comme l'indique la figure 1.

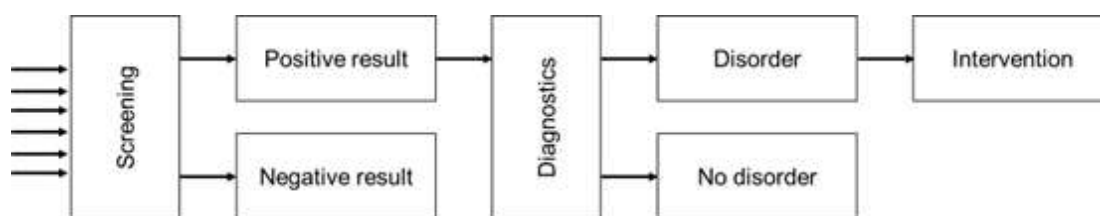


Figure 1 – Le dépistage en tant qu'élément du processus de diagnostic dans l'éducation (cf. Tröster 2009)

L'élaboration d'un outil de diagnostic implique une analyse didactique approfondie du contenu à évaluer et des attentes associées. Selon Niss et Højgaard (2019, p. 12), la compétence mathématique est définie comme la « volonté [...] d'agir de manière appropriée en réponse à toutes sortes de défis mathématiques dans des situations spécifiques ». En raison de la nature cumulative des connaissances mathématiques, il est crucial que certaines connaissances soient solidement ancrées et bien structurées, afin de servir de fondation pour les apprentissages ultérieurs. Nous définissons une compétence clé comme une compétence que les élèves doivent acquérir afin de constituer une base solide pour leurs futurs apprentissages. Il s'agit d'une compétence fondamentale et essentielle, nécessaire pour aborder sereinement l'année scolaire à venir.

II. CONCEPTION DES TESTS

1. *Structure des tests*

Selon le niveau, les tests accordent une attention variable à la numération, au calcul, à la résolution de problèmes arithmétiques et à l'algèbre. Le choix des domaines évalués a été débattu au sein de sous-groupes de travail, en tenant compte des programmes scolaires de chaque pays, ainsi que des compétences clés pour le niveau scolaire considéré. Par exemple, le test de fin de grade 2 porte sur la numération, l'addition et la soustraction, ainsi que la multiplication et la division (cf. tableau 1). En revanche, les tests de fin de grades 6 et 8 abordent le pré-algèbre et l'algèbre, la proportionnalité et les calculs.

Les livrets de tests sont accompagnés d'un guide pour l'enseignant, détaillant les modalités de passation, les consignes de codage et offrant des éclairages didactiques pour chacune des tâches, afin de faciliter leur compréhension et leur mise en œuvre.

Une série de tâches communes a été élaborée lors de différentes réunions de travail en recueillant les propositions considérées comme essentielles par chaque pays. Tous les partenaires ont exprimé leur avis sur ces tâches (à conserver, à éliminer, à discuter). Celles nécessitant une discussion ont été ajustées ou supprimées. Le test final évalue, en 45 minutes au maximum, les compétences mathématiques visées pour le grade concerné.

Tableau 1 – *Compétences évaluées à la fin du grade 2*

Numérations orale et écrite chiffrée	Addition / Soustraction	Multiplication / Division
Passer du nom du nombre à une écriture en chiffres (et réciproquement)	Connaître des faits numériques : addition et soustraction (nombres inférieurs à 10)	Connaître des faits numériques : double/moitié, multiplier par 5, par 10
Placer un nombre sur une droite graduée / lire sa position	Ajouter dans des cas plus complexes (34+5, 34+20, 34+6)	Connaître les différents sens de la multiplication et de la division (pas d'écriture symbolique attendue pour la division)
Passer d'une écriture en dizaines/unités à une écriture en chiffres (et réciproquement)	Soustraire dans des cas plus complexes (35-5, 70-4)	Résoudre des problèmes multiplicatifs
Comparer (un de plus / dix de plus)		
Composer / décomposer des dizaines en unités	Résoudre des problèmes additifs	

2. *Grille de description des tâches*

Chaque tâche (cf. tableau 2) est décrite selon le même modèle, incluant la réponse attendue et le score associé, la compétence clé évaluée, ainsi que la manière dont elle contribue au développement d'autres compétences au cours de la scolarité. Les erreurs prévisibles sont également mentionnées. Des informations complémentaires sur le format de la tâche sont fournies, telles que le mode d'administration (oral, écrit), le format de réponse attendu (ouvert ou à choix multiple), la présence éventuelle d'un exemple préalable pour faciliter la compréhension, ainsi que le temps estimé pour réaliser la tâche.

Tableau 2 – Exemples de tâches

Tâche pour la fin du grade 2		Tâche pour la fin du grade 6	
Entoure les images qui correspondent à 3×4 . Plusieurs images peuvent correspondre !		Quelle est la règle qui permet de continuer la suite de nombres suivante ? $256 - 128 - 64 - 32 - \dots$	A. Soustraire 32 B. Soustraire 128 C. Diviser par 4 D. Diviser par 2
		Réponse attendue : D A. C'est vrai pour le passage de 64 à 32, mais pas pour les autres B. C'est vrai pour le passage de 256 à 128, mais pas pour les autres C. C'est vrai pour le passage de 256 à 64 et de 128 à 32, mais pas pour les autres	Compétence : Reconnaître des motifs dans une séquence et les décrire Compétence clé pour : généraliser Format : QCM Exemple : non Durée : 2 minutes
Réponses attendues : A, C et D A. Vrai même si le multiplicateur et le multiplicande sont intervertis B. Confusion avec la représentation des nombres 3 et 4 C et D. Vrai E. Confusion avec la représentation du nombre 3 d'abord puis du nombre 4	Compétence : Compréhension opérationnelle de la multiplication Compétence clé pour : conversions dans la compréhension conceptuelle de la multiplication Format : QCM Exemple : non Durée : 1 minute		

III. ÉTUDE DE LA VALIDITÉ DIDACTIQUE DU TEST

En tant que chercheur·es en didactique, nous proposons d'étudier la validité didactique (Grapin et Grugeon-Allys, 2018) des tests afin d'identifier les éléments de vigilance à prendre en compte pour leur utilisation en classe. La méthodologie décrite dans (Grapin et Grugeon-Allys, 2018) repose sur une référence épistémologique du domaine mathématique à évaluer, fondée sur des recherches en didactique et sur les programmes scolaires. Au niveau local, elle évalue la pertinence et la représentativité de chaque tâche par rapport aux compétences ciblées. Au niveau global, elle garantit que l'ensemble du test couvre le domaine mathématique visé.

Au niveau global, nous constatons que les tests ne recouvrent pas parfaitement les domaines mathématiques concernés. Au niveau local, il apparaît que la forme écrite des tests ne permet pas d'évaluer l'ensemble des compétences clés, en particulier pour les grades 0 et 2. Par exemple, au grade 0, comment évaluer par écrit si un élève connaît oralement la suite numérique de 1 à 10 ou s'il est capable de dire oralement quel nombre vient après 3 ou avant 5 ?

De plus, le choix de ne pas analyser les procédures des élèves soulève des interrogations. L'incapacité à identifier précisément la procédure utilisée par l'élève ne garantit pas que la compétence clé visée soit réellement maîtrisée. Par exemple, au grade 2, bien que la connaissance des décompositions additives des nombres jusqu'à 10 soit testée, la limite de temps, bien qu'elle réduise les procédures de comptage, ne les élimine pas complètement.

IV. CONCLUSION

Les prochaines étapes du projet consisteront à tester les outils dans des classes, puis à les ajuster en fonction du contenu et de leur mise en œuvre. Afin d'assurer une diffusion durable, les livrets et les guides destinés aux enseignants seront mis à disposition sur une plateforme numérique, dans les langues des partenaires ainsi qu'en anglais.

La conception d'outils de diagnostic communs avec d'autres pays européens permet de partager des approches en matière d'enseignement et d'apprentissage, mais présente certaines limites dues aux divergences et aux écarts entre les programmes scolaires, ainsi qu'à des cultures de l'évaluation différentes. Au-delà des questions de validité qui se posent, il est également crucial d'étudier l'exploitation de ces outils en classe et leur intégration dans les pratiques des enseignants. En effet, contrairement à la France, la plupart des pays européens impliqués dans ce projet ne disposent pas d'évaluations diagnostiques nationales exhaustives. En France, les compétences des élèves en mathématiques sont évaluées à l'entrée de chaque grade du primaire et aux grades 6, 8 et 10 du secondaire. Il est donc nécessaire de s'interroger sur l'utilisation des tests développés dans le cadre de ce projet européen : comment s'articuleront-ils avec les ressources institutionnelles existantes ?

RÉFÉRENCES

- Grapin, N. et Grugeon-Allys, B. (2018). Approches psychométrique et didactique de la validité d'une évaluation externe en mathématiques : quelles complémentarités ? Quelles divergences ? *Mesure et évaluation en éducation*, 41(2), 37-66. <https://doi.org/10.7202/1059172ar>
- Niss, M. et Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- OECD. (2020). *PISA 2018 results (Volume VI): Are students ready to thrive in an interconnected world?* PISA, OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/d5f68679-en>
- Tröster, H. (2009). *Früherkennung im Kindes und Jugendalter. Strategien bei Entwicklungs-, Lern und Verhaltensstörungen*. 1. Aufl. Hogrefe.

PISA 2022 : ANALYSE DU LIEN ENTRE LES DÉMARCHES SOLLICITÉES EN MATHÉMATIQUES ET LES PERSPECTIVES CURRICULAIRES EN BELGIQUE

FRANCOPHONE

| DEMONTY* ISABELLE

Résumé | Cette communication s'intéresse à l'évaluation PISA 2022 en mathématiques. Après une présentation de la manière dont les mathématiques sont envisagées dans PISA 2022, la communication explore les liens entre le type de démarches sollicitées dans le programme PISA et les perspectives curriculaires en mathématiques en Belgique francophone. L'analyse permet ainsi de porter un regard nuancé sur la portée des résultats PISA dans le cadre de l'enseignement des mathématiques en Belgique francophone.

Mots-clés : PISA 2022, mathématiques, évaluation, perspectives curriculaires, nouvelles technologies

Abstract | This paper focuses on PISA 2022 in mathematics. After a presentation of how mathematics is envisaged in PISA 2022, the paper explores the links between the type of approaches requested in the PISA and the curricular perspectives in mathematics in French-speaking Belgium. The analysis thus allows a nuanced look at the scope of PISA results in the context of mathematics education in French-speaking Belgium.

Keywords: PISA 2022, mathematics, assessment, curricular perspectives, new technologies

I. INTRODUCTION

En 2022, la Fédération Wallonie-Bruxelles (FW-B) a pris part au huitième cycle de PISA. Cette vaste enquête internationale (81 pays participants lors de ce dernier cycle) évalue la compréhension en lecture, la culture scientifique et la culture mathématique, qui bénéficie cette fois d'un focus particulier. En mathématiques, les tâches d'évaluation de PISA 2022 ont pour but de déterminer dans quelle mesure les élèves de 15 ans sont préparés à utiliser leurs acquis mathématiques dans divers aspects de leur vie personnelle, civique et professionnelle, dans la perspective d'une citoyenneté du XXI^e siècle constructive, engagée et réfléchie. Il s'agit donc d'une évaluation prospective du bagage mathématique dont les élèves auront besoin dans leur vie d'adulte et non d'une évaluation centrée sur les mathématiques acquises durant l'année scolaire en cours.

Cette enquête, très médiatisée au moment de la diffusion des résultats, nous a amenée à nous intéresser à la question du lien entre les mathématiques telles qu'elles sont évaluées dans PISA et les compétences travaillées dans les cours de mathématiques en FW-B. Cette problématique est particulièrement cruciale en FW-B qui connaît actuellement une grande réforme de son enseignement, accompagnée d'une réécriture des référentiels de compétences dans les différentes disciplines du tronc commun destiné aux élèves de 6 (grade 1) à 15 ans (grade 9).

C'est à cette problématique générale que s'intéresse cette communication. Dans la foulée des travaux menés par Roditi (2015) et par Bodin et Grapin (2018), la communication se propose de porter un regard didactique sur les évaluations PISA 2022. Elle vise à documenter la manière dont PISA aborde la question des acquis mathématiques des élèves et les points de convergences possibles entre les mathématiques telles qu'envisagées dans PISA et les compétences prescrites dans les référentiels de mathématiques, en FW-B.

* Université de Liège – Belgique – isabelle.demonty@uliege.be

II. LES SPÉCIFICITÉS DU CADRE DE L'ÉVALUATION PISA 2022 ET LA VISION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN FW-B.

Du côté de PISA 2022, la volonté d'évaluer les compétences essentielles pour participer pleinement à la vie de nos sociétés modernes se traduit, dans le domaine des mathématiques, par une évaluation qui fait la part belle à la résolution de problèmes que les jeunes sont susceptibles de rencontrer dans la « vie réelle ». Ce ne sont donc pas les mathématiques en tant que telles qui sont au cœur de l'évaluation, mais plutôt la culture mathématique : elle se définit comme l'aptitude d'un individu à raisonner de façon mathématique, à formuler, à employer et à interpréter les mathématiques pour résoudre les problèmes dans un éventail de contextes.

La culture mathématique implique donc des concepts, des procédures et des outils travaillés dans les cours de mathématiques, mais ces derniers ne sont pas questionnés pour eux-mêmes. L'objectif est d'appréhender la connaissance qu'ont nos jeunes de 15 ans du rôle que ces concepts, procédures et outils peuvent jouer dans le monde et d'analyser leurs capacités à les utiliser dans la vie citoyenne, dans l'optique de porter des jugements et de prendre des décisions en toute connaissance de cause.

Du côté du curriculum en FW-B, plusieurs aspects de la culture mathématique apparaissent dans les intentions générales du cours de mathématiques s'adressant aux élèves du tronc commun (de 6 à 15 ans). Selon le référentiel de compétences en mathématiques, la discipline mathématique « développe l'aptitude à maîtriser et à appliquer progressivement un raisonnement et des outils mathématiques reposant sur des connaissances adéquates pour résoudre des problèmes. Elle permet de construire, d'utiliser et de relier entre eux des concepts et des procédures qui donnent accès à la compréhension de phénomènes et à la modélisation de situations. Tout au long du tronc commun, les élèves utilisent leurs acquis pour résoudre des problèmes mathématiques ou contextualisés, interpréter, expliquer, justifier ou argumenter. L'utilisation du numérique peut constituer une aide précieuse lors des apprentissages. » (Référentiel de mathématiques du tronc commun, p.18).

En résumé, le raisonnement mathématique, la capacité de résoudre un problème en valorisant différents processus (interpréter, expliquer, justifier ou argumenter) sont au cœur de l'évaluation PISA et sont également bien présents dans les visées des mathématiques en Belgique francophone. Les problèmes travaillés dans notre enseignement ne se limitent toutefois pas à ceux que l'on peut rencontrer dans la vie réelle : les problèmes purement mathématiques (démonstration géométrique par exemple) occupent également une place importante. En outre, nos élèves sont amenés à mobiliser des ressources mathématiques assez contrastées selon l'année d'étude fréquentée. Il convient donc d'approfondir l'analyse en s'intéressant cette fois aux contenus mathématiques dans lesquels les problèmes s'inscrivent.

Un groupe d'experts composé d'inspecteurs de mathématiques, de conseillers pédagogiques et d'une chercheuse en didactique des mathématiques a comparé les contenus abordés dans chacune des questions de PISA 2022 avec les contenus travaillés en F-WB aux différentes étapes clés de la scolarité. Il a conclu qu'environ 80 % des questions proposées dans l'enquête de 2022 relèvent de contenus travaillés principalement au premier degré de l'enseignement secondaire (grades 7 et 8) et parfois même en primaire. Environ 15 % des questions sont abordées chez nous au deuxième degré de l'enseignement général (grades 9 et 10) : elles portent souvent sur une utilisation en contexte du théorème de Pythagore ou du théorème de Thalès. Enfin, quelques questions (moins de 5 %) portent sur des contenus relevant du troisième degré de l'enseignement secondaire (grade 11) : il s'agit principalement de questions liées aux probabilités. Cela ne signifie pas que les élèves de 15 ans ne sont

pas capables de résoudre ces situations probabilistes ; ils n'en ont cependant pas encore fait une étude systématique au moment où ils ont passé le test PISA.

Si l'on peut se réjouir que la plupart des contenus abordés dans les épreuves PISA 2022 aient été enseignés aux élèves de 15 ans dans leur scolarité antérieure, cela ne veut pas dire que les questions sont simples et qu'un élève de 12 ou 14 ans pourrait y répondre sans difficulté majeure. En effet, la grande majorité des questions PISA 2022 sont ancrées dans des contextes peu travaillés dans les cours de mathématiques : problème de déforestation, analyse de la position des planètes dans le système solaire, exploitation de résultats d'un championnat sportif... Les contenus mathématiques, bien qu'élémentaires pour des jeunes de 15 ans, doivent donc être mobilisés dans les questions PISA 2022 dans des situations souvent peu travaillées dans les cours de mathématiques : elles apparaissent parfois davantage dans d'autres cours, comme en géographie ou en sciences par exemple. En conséquence, les performances des élèves au test PISA 2022 ne peuvent pas directement être mises en perspective avec la qualité des contenus des cours de mathématiques destinés aux élèves de 15 ans. En outre, l'enquête de 2022 fait la part belle aux technologies (tableurs, simulations...). Or, actuellement, les élèves en FW-B sont peu soumis à des évaluations impliquant directement l'utilisation de ces technologies à l'école.

Le décloisonnement des matières scientifiques, le renforcement des compétences de base et l'utilisation plus importante des technologies sont les préoccupations majeures des nouveaux référentiels de compétences du tronc commun. Les constats posés par l'enquête PISA 2022 pourront contribuer à éclairer les réflexions sur l'enseignement des disciplines mathématiques et scientifiques dans l'avenir.

III. LES NIVEAUX DE COMPÉTENCES ACQUIS PAR LES ÉLÈVES EN FW-B

Les méthodes statistiques utilisées pour analyser les résultats de l'enquête PISA permettent de placer sur un même continuum les scores des élèves au test et les items de l'étude. Sur cette base, le programme PISA dégage six niveaux de compétences, décrit le type de tâches que les élèves parviennent à réaliser à chacun de ces niveaux, et identifie la proportion d'élèves, dans chaque système éducatif, situés à chacun de ces niveaux. Ces derniers sont hiérarchisés et inclusifs, de sorte qu'un élève qui présente des performances caractéristiques d'un niveau est aussi capable de réussir les tâches des niveaux inférieurs.

Dans les niveaux 5 et 6 de l'échelle, on retrouve des problèmes abstraits, nécessitant souvent de faire preuve de créativité et de flexibilité dans la recherche de solution : il s'agit par exemple de mobiliser une technique mathématique dans un contexte tout à fait inhabituel. C'est également à ce niveau que les outils technologiques comme des feuilles de calculs ou des simulations informatiques doivent être utilisés de manière pertinente, en fonction du problème à résoudre. Ces niveaux les plus élevés confrontent en outre les élèves à des situations impliquant un nombre important de données à sélectionner. En plus de résoudre des problèmes, les items de ces niveaux nécessitent de communiquer clairement le raisonnement ou d'évaluer la pertinence de résultats mathématiques dans le contexte du problème à résoudre.

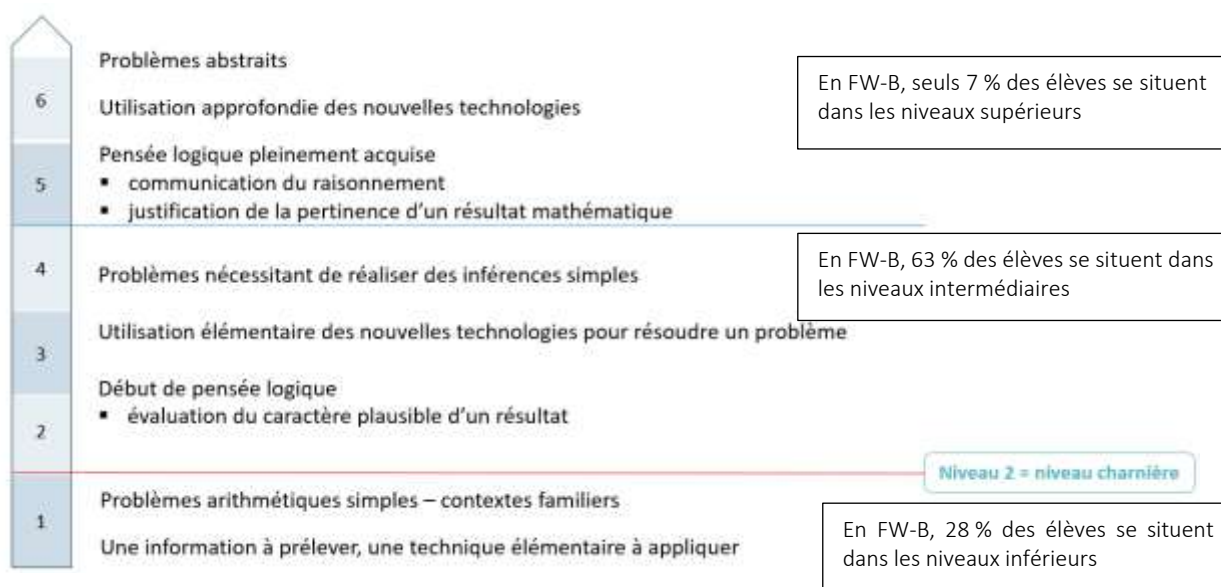
Dans les niveaux intermédiaires de l'échelle (entre 2 et 4), les situations proposées aux élèves sont plus directes que dans les niveaux les plus élevés : les inférences à réaliser sont simples. Elles nécessitent parfois de prendre du recul sur la solution mathématique d'un énoncé, en vue par exemple d'en dégager son caractère plausible. Quelques questions de ce niveau impliquent l'utilisation de technologies : les traitements des informations à réaliser sont toutefois élémentaires et assez intuitifs. Le niveau constitue

le niveau charnière, considéré comme indispensable pour pouvoir utiliser les mathématiques dans des situations issues de la vie réelle.

Enfin les items situés au niveau 1 nécessitent de choisir, parmi une série de 4 propositions, la réponse correcte à un problème arithmétique simple intégré dans un contexte familier où toutes les données sont explicitement décrites dans l'énoncé. Plusieurs items situés à ce niveau exigent de prélever une information explicite d'un tableau de nombres ou d'effectuer une opération élémentaire impliquant deux nombres entiers positifs. Aucune de ces questions ne nécessite une utilisation, même rudimentaire, des outils technologiques.

Des exemples de questions PISA 2022 permettant d'illustrer ces niveaux, sont disponibles à l'adresse suivante : www.pisa-fw.b.ucl.ac.be/resultats2022.

La figure 1 synthétise la description des six niveaux et présente la proportion d'élèves de FW-B situés respectivement dans les niveaux les plus élevés (5 et 6), dans les niveaux intermédiaires (2 à 4) et dans le niveau le plus élémentaire (1) de l'échelle PISA (adapté de Baye et al., 2023).



(Baye et al., 2022, p. 32)

Figure 1 – Description synthétique des niveaux PISA et proportion d'élèves situés dans les niveaux supérieurs, intermédiaires et inférieurs, en FW-B

IV. UNE PERSPECTIVE STEM DES MATHÉMATIQUES, VALORISÉE DANS L'ENQUÊTE PISA

La description des niveaux de compétences fait apparaître la volonté de PISA 2022 de s'inscrire dans une perspective STEM¹ en mathématiques. Outre la volonté de décloisonner les matières relevant des mathématiques, des sciences et des technologies, trois aspects caractérisent cette perspective en mathématiques : (1) valoriser **la compréhension des concepts** mathématiques. (2) **mobiliser ces concepts dans des situations variées**. (3) **utiliser, de manière raisonnée, les nouvelles technologies** pour résoudre ces situations (Maas et al., 2019). Ce courant est né d'une réflexion

¹ L'acronyme STEM reprend un ensemble de champs éducatifs et professionnels liés aux **S**ciences, aux **T**echnologies, à l'**I**ngénierie (**E**ngineering) et aux **M**athématiques.

approfondie autour des nouvelles technologies et de leur potentiel en matière de réalisation de tâches techniques : il devient indispensable d'amener les élèves à dépasser la virtuosité technique des mathématiques (prise en charge par les nouvelles technologies), au profit d'une réflexion plus conceptuelle permettant d'utiliser efficacement ces technologies, dans le cadre de situations variées.

PISA offre dès lors des situations permettant de poursuivre cet enjeu STEM dans l'enseignement des mathématiques. L'exemple présenté à la figure 2, libéré à la suite de l'enquête de 2022, illustre ce propos.

PISA 2022

Superficie forestière
Question 1 / 4

Comment utiliser le tableur

Référez-vous aux informations fournies sous « Superficie forestière » à droite. Aidez-vous du tableur pour répondre à la question ci-dessous. Pour répondre à chaque question, sélectionnez vos réponses dans les menus déroulants.

Dans le tableau ci-dessous, répondez à chaque question en sélectionnant un pays dans le menu déroulant correspondant.

Question	Pays
Quel pays a connu la plus grande hausse en points de pourcentage entre 2005 et 2015 ?	Sélectionnez ▼
Quel pays n'a connu aucune évolution globale entre 2005 et 2015 ?	Sélectionnez ▼
Quel pays a connu la plus grande baisse en points de pourcentage entre 2005 et 2015 ?	Sélectionnez ▼

SUPERFICIE FORESTIÈRE

Le tableau ci-dessous indique l'étendue de la superficie forestière de 15 pays, exprimée en pourcentage de la superficie totale de leur territoire. Les données concernent les années 2005, 2010 et 2015.

Colonne A	Colonne B	Colonne C	Colonne D	Colonne E	Colonne F	Colonne G
Pays	2005	2010	2015			
Algérie	0,54	0,81	0,82			
Allemagne	32,66	32,73	32,76			
Arménie	11,77	11,74	11,77			
Colombie	54,26	52,85	52,73			
Corée du Sud	64,42	64,08	63,69			
États-Unis	33,26	33,7	33,65			
Grèce	29,11	30,28	31,45			
Inde	22,77	23,47	23,77			
Kazakhstan	1,24	1,23	1,23			
Liban	13,34	13,38	13,42			
Panama	64,33	63,21	62,11			
Pérou	59,01	58,45	57,79			
Portugal	36,52	36,89	35,25			
Sénégal	45,05	44,01	42,97			
Thaïlande	31,51	31,81	32,1			

Calcul

Colonne Opération Colonne Exécuter

Moyenne Colonne Exécuter Effacer tout

Figure 2 – Exemple d'une question du PISA 2022 valorisant la vision STEM en mathématiques²

En outre, l'analyse de la proportion d'élèves situés à chacun des niveaux de compétences, fait apparaître qu'en FW-B, l'approche STEM des mathématiques n'est acquise que par une proportion très limitée d'élèves (7 %) puisque les questions nécessitant une utilisation approfondie et raisonnée des nouvelles technologies apparaissent aux niveaux supérieurs de l'échelle. Pour interpréter ce résultat, il convient d'analyser dans quelle mesure cette vision STEM des mathématiques est valorisée dans l'enseignement des mathématiques en FW-B.

Différents éléments indiquent que cette vision est valorisée dans les nouveaux référentiels.

² La résolution de ce problème nécessite de programmer le calcul des données de la colonne E (différence entre les données correspondantes des colonnes D et B) puis de trier les données de cette colonne E par ordre croissant et de sélectionner ensuite les données du tableau, en fonction des questions posées.

Tout d'abord, le décroisement est clairement assumé : en effet, les mathématiques s'inscrivent dans un domaine plus général qui reprend les savoirs, savoir-faire et compétences relevant des mathématiques, des sciences et des techniques (intégrant les aspects manuels, technologiques et numériques), permettant ainsi des connections entre ces différents champs disciplinaires.

En outre, l'analyse de certains savoirs ou savoir-faire clés montre une volonté de mettre l'accent sur la compréhension des concepts clés en mathématiques, en envisageant une progression tout au long de la formation des élèves de 6 à 15 ans. C'est par exemple le cas pour le travail sur les notions de périmètres, d'aires et de volumes. Alors que dans le référentiel précédent, ces notions devaient être abordée en 1^e et 2^e primaire (grades 1 et 2) puis systématisées dans les 4 autres années de l'école primaire (grade 3 à 6), le nouveau référentiel prévoit des objectifs particuliers à chaque année d'étude (entre la 3^e primaire [grade 3] et la 2^e secondaire [grade 8]), en accordant une place importante à l'explicitation de démarches et à l'exploitation de situations variées, visant ainsi à renforcer la compréhension fine de ces notions.

De plus, l'introduction du référentiel de mathématiques précise que, dans le cadre des mathématiques, les élèves sont amenés à résoudre des problèmes mathématiques ou contextualisés, pour lesquels l'utilisation du numérique peut constituer une aide précieuse lors de ces apprentissages.

Enfin, l'utilisation raisonnée des nouvelles technologies est envisagée, tantôt dans le cadre de la formation manuelle, technique, technologique et numérique, tantôt dans le cadre de la formation en mathématiques. Par exemple, comme l'illustre la figure 3, l'utilisation d'un tableur est travaillée dès la 5^e primaire (P5 – grade 5) dans ses volets techniques et se développe également en mathématiques en 2^e et 3^e année de l'enseignement secondaire (S2 et S3 - grades 8 et 9), en approfondissant à la fois le volet technique et la compréhension de concepts utilisés dans ces tableurs (moyenne, médiane,...).

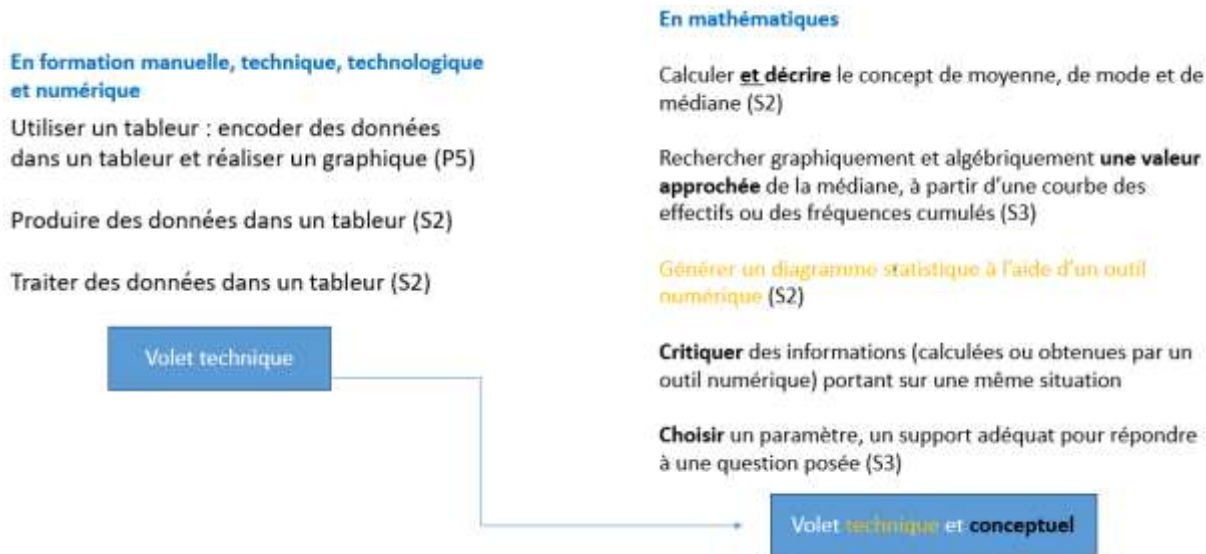


Figure 3 – L'utilisation du tableur, permettant d'aborder le volet technique et conceptuel, tant dans la formation manuelle, technique, technologique et numérique que dans la formation mathématique des élèves.

V. CONCLUSION

Les contenus évalués dans PISA convergent en partie avec les attendus des cours de mathématiques en Fédération Wallonie-Bruxelles. En suggérant une ouverture à une vision STEM des mathématiques, les résultats de l'enquête PISA 2022 peuvent également donner des pistes concernant les acquis des élèves dans ce domaine, à un moment où ils s'apprentent à quitter la scolarité obligatoire à temps plein.

En ce sens, les résultats PISA complètent ceux déjà compilés dans les autres évaluations externes proposées actuellement sous format « papier-crayon ». La méthodologie utilisée dans l'enquête PISA autorise une analyse fiable de l'évolution des performances d'un cycle à l'autre, permettant d'analyser la progression des élèves dans le temps face à des tâches qui peuvent elles-mêmes évoluer au fur et à mesure des enquêtes.

Enfin la comparaison offerte avec d'autres systèmes éducatifs permet de stimuler la réflexion sur l'enseignement des mathématiques, à différents niveaux : les contenus des référentiels, la philosophie des mathématiques, l'évaluation sur support numérique, voire sur certaines pratiques de classe puisque les résultats PISA peuvent être mis en perspective avec la perception qu'ont les élèves de différentes caractéristiques liées aux pratiques de leurs enseignants.

RÉFÉRENCES

- Baye, A., Bricteux, S., Crépin, F., Demonty, I., Hindryckx, G., Matoul, A. et Quittre, V. (2023). *Performances des jeunes de 15 ans en mathématiques, sciences et lecture à la sortie de la crise sanitaire*. Université de Liège.
- Bodin, A. et Grapin, N. (2018). Un regard didactique sur les évaluations du PISA et de la TIMSS : mieux les comprendre pour mieux les exploiter. *Mesure et évaluation en éducation*, 41(1), 67-96.
- Fédération Wallonie-Bruxelles (2022). *Référentiel de mathématiques*. Communauté française de Belgique, Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation.
- Maas, K., Geiger, V., Ariza, M. R. et Goos, M. (2019). The role of mathematics in interdisciplinary STEM education. *Zdm*, 51, 869-884.
- Roditi, E. (2015). Didactique et évaluation : un nouveau regard sur le PISA 2012. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF2015 « Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage », 10-14 octobre 2015, Université d'Alger, Algérie* (p. 1042-1051).

ÉTUDE DE L'ACTIVITÉ DE CORRECTION DES ÉPREUVES EN MATHÉMATIQUES : ÉLÉMENTS THÉORIQUES

| BILODEAU* JEANNE, BARALLOBRES** GUSTAVO ET ROINÉ*** CHRISTOPHE

Résumé | L'instauration de programmes scolaires axés sur les compétences a transformé la forme des épreuves de mathématiques dont la correction nécessite maintenant un travail d'interprétation des productions des élèves par les personnes enseignantes. Nous présentons certains éléments théoriques d'une recherche doctorale en cours portant sur l'évaluation scolaire en mathématiques. Nous abordons la correction des évaluations à partir d'une approche anthropologique en didactique. Nous nous intéressons à l'activité de correction que nous envisageons comme une action conjointe différée entre les composantes de la relation didactique.

Mots-clés : évaluation, correction, *action conjointe*, *forme scolaire*, mathématiques

Abstract | The introduction of competency-based curricula has transformed the form of mathematics assessment, the marking of which now requires teachers to interpret student' work. We present some theoretical elements of an ongoing doctoral research project on school assessment in mathematics. We take an anthropological approach, borrowing certain concepts from Marx's theory of value. We are interested in the activity of marking of exams, which we see as a deferred joint action between the components of the didactic relationship.

Keywords: assessment, marking, *action conjointe*, *forme scolaire*, mathematics

I. PROBLÉMATIQUE DE RECHERCHE

1. *Des évolutions institutionnelles des épreuves de mathématiques au Québec*

Au Québec, dans les dernières décennies, des évolutions institutionnelles importantes ont marqué l'évaluation scolaire en mathématiques et, plus précisément, les épreuves imposées par le ministère de l'Éducation et les centres de services scolaires aux ordres primaire et secondaire.

Depuis l'instauration d'un programme scolaire axé sur le développement de compétences au début des années 2000, l'évaluation est tenue de prendre en considération les caractéristiques de ces compétences, notamment leur complexité, leur globalité, les contextes où elles sont mises en œuvre ainsi que le temps que nécessite leur développement (Ministère de l'Éducation, 2003, p. 17). Cette nécessité de rendre compte de la complexité et de la diversité des apprentissages dans un programme par compétences est à l'origine de certains changements apportés aux épreuves (Ministère de l'Éducation, 2003). Les évolutions des épreuves sont ainsi liées à un équilibre recherché par le système scolaire entre simplicité de mise en œuvre et nécessité de rendre compte des apprentissages des élèves.

Traditionnellement, les épreuves consistaient en un questionnaire composé de questions à choix multiple (QCM) et de questions à réponse courte (QRC). Cette forme a évolué pour introduire, à côté des questionnaires, certaines tâches que le ministère désigne comme des *tâches complexes* (Ministère de l'Éducation, 2003). Ces tâches nécessitent une production plus élaborée de la part des élèves. Leur correction, encadrée par un guide de correction, est effectuée par les personnes enseignantes contrairement aux questionnaires dont le traitement des résultats est automatisé. Ces tâches complexes

* Université du Québec à Montréal et Université du Québec à Trois-Rivières – Canada – jeanne.bilodeau@uqtr.ca

** Université du Québec à Montréal – Canada – barallobres.gustavo@uqam.ca

*** Université de Bordeaux – France – christophe.roine@u-bordeaux.fr

s'ajoutent au questionnaire comportant des QCM et des QRC parce que celles-ci, bien qu'elles puissent être adaptées pour évaluer des activités de reproduction comme des calculs standards ou des exercices nécessitant essentiellement l'application immédiate d'une règle, sont reconnues comme peu pertinentes pour l'évaluation de compétences de niveau élevé (Richard, 2004).

Or, certaines analyses didactiques questionnent la validité des épreuves québécoises, dans leur forme actuelle, pour l'évaluation des compétences prescrites en mathématiques. Dans leur analyse d'épreuves de différents niveaux scolaires, Tremblay et Delobbe (2021) mettent en évidence un guidage important des raisonnements à mettre en œuvre, particulièrement dans les épreuves du primaire. Par exemple, la présence de sous-titres et de tableaux à compléter dans le cahier de l'élève de même que la formulation adoptée pour certains critères d'évaluation fournissent aux élèves des indications importantes quant à la résolution attendue. Pour Caron et René de Cotret (2007), qui se sont intéressées plus particulièrement aux épreuves du secondaire, le raisonnement mathématique, qui est officiellement objet d'évaluation¹, tend à être réduit à des actions simples dans les épreuves, comme celles de construire une translation, de calculer le volume d'un solide ou d'appliquer la loi des cosinus. L'une des raisons invoquées pour cette réduction est celle de la difficulté d'évaluer, de manière standardisée, la performance des élèves à des tâches plus complexes. Enfin, à partir de l'analyse d'une situation d'évaluation de la compétence *Résoudre une situation-problème* pour la 6^e année du primaire, Lajoie et Bednarz, (2016) montrent que la tâche est constituée de « petits sous-problèmes indépendants les uns des autres » (Lajoie et Bednarz, 2016, p. 14). Les connaissances à mettre en œuvre relèveraient d'une mise en fonctionnement technique, ce qui fait de chacun des sous-problèmes un problème d'application avec des exigences faibles sur le plan conceptuel, selon les auteures.

Par ailleurs, plusieurs soulignent des incohérences importantes entre les programmes scolaires et les épreuves de mathématiques (Caron et René de Cotret, 2007 ; Laurier, 2014 ; Tremblay et Delobbe, 2021). Dans un texte proposant des pistes de transformation des habitudes évaluatives en classe de mathématiques à partir de l'instauration du programme de formation axé sur le développement de compétences, Richard (2004) avait déjà remarqué que la conception des épreuves sous-entend souvent qu'à toute question, il ne devrait y avoir qu'une réponse, ce qui rend difficile l'évaluation de certaines procédures mathématiques. De nombreuses pratiques mathématiques seraient ainsi difficilement prises en compte dans les formes classiques de l'évaluation scolaire.

2. Correction des épreuves de mathématiques

Dans sa politique d'évaluation des apprentissages, le ministère de l'Éducation définit l'évaluation comme « le processus qui consiste à porter un jugement sur les apprentissages, à partir de données recueillies, analysées et interprétées, en vue de décisions pédagogiques et administratives » (ministère de l'Éducation, 2003, p. 4). Une démarche d'évaluation rigoureuse impliquerait de poser un jugement sur les apprentissages des élèves à partir d'informations pertinentes et suffisantes (Laurier, 2014).

Nous nous intéressons à la correction des évaluations de mathématiques, et plus particulièrement à la correction des tâches qui nécessitent un travail d'interprétation de la part des personnes enseignantes. Dans la littérature scientifique sur l'évaluation, les tâches que le ministère de l'Éducation désigne comme des tâches complexes relèvent de questions à correction subjective puisqu'elles nécessitent le travail d'interprétation d'une personne correctrice (Leclercq et al., 2004). Dans sa volonté d'objectiver ce travail d'interprétation, le ministère de l'Éducation fournit aux personnes enseignantes des grilles de correction des tâches complexes qui contiennent les critères d'évaluation ainsi qu'une échelle de

¹ Dans l'enseignement secondaire québécois, deux compétences sont évaluées en mathématiques. Il s'agit des compétences *Résoudre une situation-problème* et *Déployer un raisonnement mathématique*.

niveaux de performance pour chaque critère, spécifiée sous la forme de manifestations observables. Par exemple, la grille de correction des tâches visant à évaluer la compétence *Déployer un raisonnement mathématique* au secondaire contient les critères suivants : mise en œuvre d'un raisonnement mathématique adapté à la situation, utilisation correcte des concepts et des processus mathématiques appropriés, structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente, justification congruente des étapes d'une démarche pertinente et formulation d'une conjecture appropriée à la situation. Chacun de ces critères est spécifié en cinq niveaux de performance.

Malgré cet encadrement par une grille de correction, de nombreux enjeux didactiques relevant de l'évaluation émergent au moment de l'activité concrète de correction. Proulx (2016) a mis en évidence, à partir de la description d'activités de formation dans le cadre d'un cours universitaire pour la formation à l'enseignement des mathématiques, que les enjeux liés à l'application d'un barème de correction apparaissent de manière particulièrement importante : par exemple, les barèmes établis *a priori* ne permettent pas toujours d'apprécier adéquatement certains raisonnements et certaines solutions qui n'avaient pas été anticipés. Dans le même sens, des résultats rapportés par Vantourout et Goasdoué (2016) montrent des dilemmes importants relatifs au jugement sur la validité des productions des élèves : ainsi, le modèle de référence à partir duquel s'élabore le jugement ne semble pas pouvoir être entièrement construit avant l'activité de correction, mais également au cours de celle-ci. Par ailleurs, les auteurs soulignent que notation et jugement ne s'accordent pas dans l'activité de correction : des notations similaires ne supposent pas une plus grande convergence des jugements et, inversement, des jugements similaires ne supposent pas une convergence des notes attribuées.

II. OBJECTIF DE LA RECHERCHE

Les études en didactique des mathématiques qui se sont intéressées à l'évaluation ont souvent porté leur regard sur les outils servant à l'évaluation des apprentissages des élèves et à leur validité. L'analyse et la caractérisation des pratiques d'évaluation en classe restent encore peu étudiées (Horoks et Pilet, 2015). Remarquons que, parmi ces pratiques ordinaires, celles relatives à la correction ont été particulièrement peu étudiées dans une perspective didactique (Vantourout et Goasdoué, 2016). D'une manière similaire à Vantourout et Goasdoué (2016), le problème de notre recherche s'inscrit dans la continuité de la problématique des docimologues qui se sont intéressés aux questions de notation et de mesure, mais en partant, pour les comprendre, de l'activité effective de correction sous un angle didactique.

Certaines questions émergent concernant la correction des évaluations et l'interprétation que font les personnes enseignantes des productions des élèves. Considérant leur importance dans les processus de certification et d'orientation des élèves, quelles informations sont recueillies par les personnes enseignantes à partir des productions des élèves dans les évaluations sommatives de fin d'année et quelles interprétations en sont faites en vue de se prononcer sur les apprentissages ? Dans quelle mesure la prise d'informations et l'interprétation sont-elles liées aux mathématiques en jeu dans les tâches (Pilet et Horoks, 2018) ? Quel est le poids de ces évaluations dans le jugement élaboré par les personnes enseignantes ? De manière plus générale, quels types de verdict (Chevallard, 1989 ; Sensevy, 2008) les évaluations de fin d'année en mathématiques permettent-elles de poser et comment ces verdicts s'élaborent-ils ?

L'objectif de notre recherche est donc de décrire l'activité de correction d'une évaluation sommative en mathématiques.

III. CADRE THÉORIQUE DE LA RECHERCHE

1. *Une approche anthropologique de l'évaluation*

Nous interprétons les actes d'évaluation à partir d'un abord anthropologique en didactique, c'est-à-dire en les inscrivant dans un univers de pratiques sociales portées par des sujets institutionnels (Chevallard, 1989). Nous considérons l'évaluation comme un de ces gestes quotidiens de l'enseignement, devenu si usuel qu'il est tenu pour aller de soi (Chevallard et Mercier, 1987) et qui est pourtant caractéristique de la forme scolaire (Sensevy, 2019 ; Vincent et al., 2012) de l'activité de connaissance².

L'évaluation scolaire symbolise d'une certaine manière la dissymétrie caractéristique de la relation épistémique à l'école. Cette relation se réalise notamment par l'attribution d'une note aux productions des élèves. En effet, ce qui distingue l'acte d'évaluation d'autres énoncés de jugement, c'est sa fonction de mesure. « Dans la note que le professeur assigne à l'élève, avec tout l'apparat que cette opération exige, il y aurait bien mesure ; ou, du moins, tentative de mesure » (Chevallard, 1989, p. 8). Cette opération de mesure participe activement à produire des positions particulières dans l'institution scolaire et à organiser la nature des relations entre les constituants du système didactique. L'obligation de se soumettre aux évaluations nous apparaît emblématique de la position de l'écopier.

Depuis les premières études docimologiques, les différences et les divergences dans la notation des personnes correctrices ont été interprétées par la recherche dans le domaine de l'évaluation scolaire comme des biais (Chaumont et Leroux, 2018) et des « défaillances du jugement des enseignants » (Mottier Lopez, 2009, p. 16). Chevallard (1989) propose de réinterpréter ces variations à partir de la diffraction des institutions et de la non-congruence corrélatrice des rapports institutionnels. Ainsi, les objets de savoir sont sujets à un traitement différent d'une institution à une autre (différentes classes, différents niveaux d'enseignement, etc.) et engendrent ainsi des rapports institutionnels à ces objets tout aussi divers.

Une autre particularité de l'évaluation scolaire est qu'elle constitue un énoncé de jugement porté non seulement sur les élèves mais également sur la personne enseignante puisque les résultats des élèves cautionnent ou rejettent ce qui a été construit dans le travail d'enseignement en classe (Chevallard, 1986) et exerce à cet égard une forte pression. Dans une certaine mesure, la réussite des élèves à l'évaluation sert informellement, parmi d'autres dispositifs de contrôle, à juger de la qualité de l'enseignement prodigué (Caron et René de Cotret, 2015). En fait, l'évaluation en est une pour l'ensemble des constituants de la relation didactique : pour l'élève, pour la personne enseignante, mais également pour le savoir qui s'est construit dans la classe. Nous posons l'hypothèse que cette caractéristique pèse sur l'activité de correction des personnes enseignantes.

2. *Les catégories d'analyse de la TACD pour décrire l'activité de correction*

Nous mobilisons certains outils théoriques de la théorie de l'action conjointe en didactique (TACD) (Sensevy, 2008) afin de spécifier l'activité de correction comme une action conjointe différée, c'est-à-dire comme une partie de la communication didactique se déployant sur le mode écrit. En effet, la correction est « une lecture singulière et approfondie de la copie où l'élève est présent à travers son texte » (Vantourout et Goasdoué, 2016, p. 34), une forme de dialogue différé (Amigues, 1996 dans Vantourout et Goasdoué, 2016).

² Le concept de *forme scolaire* a été développé par Vincent pour qui toute forme sociale est à la fois un espace, un temps et une relation sociale spécifique.

L'action de correction est analysée selon les trois composantes du contrat didactique : la *mésogenèse*, la *chronogenèse* et la *topogenèse*, (Assude et al., 2007 ; Chevallard et Johsua, 1991 ; Schubauer-Leoni et al., 2007 ; Sensevy, 2007 ; Sensevy et al., 2001). La catégorie de mésogenèse permet de caractériser la mise en place d'un milieu initial dans la correction – constitué de l'évaluation soumise aux élèves et des documents à l'attention de la personne correctrice – ainsi que les réaménagements subis par ce milieu initial à travers la lecture des productions des élèves. La catégorie de chronogenèse permet d'étudier la manière dont les interprétations qui sont faites par les personnes enseignantes dans l'activité de correction dépendent de l'*histoire didactique de la classe* (Schubauer-Leoni, 1991) et de son avancée mathématique, et non sur une validité mathématique qu'on pourrait considérer comme universelle. Enfin, la catégorie de topogenèse permet d'identifier comment le contenu épistémique des transactions didactiques est effectivement réparti entre les instances *élèves* et *professeur*, soit la part de l'action didactique sur ces contenus assumée par chacun (Sensevy, 2007). Dans la correction, la topogenèse permet de décrire les réaménagements du partage initial en cours d'action : par exemple, par l'abandon d'une certaine exigence devant des performances plus faibles qu'attendues.

En étudiant l'activité de correction comme une action conjointe différée qui s'élabore dans la durée à travers des transactions didactiques fonctionnant sur le mode de l'écrit, nous proposons de penser l'action didactique au-delà du *hic et nunc* des interactions en classe et en prenant en compte, dans l'étude de l'action didactique, les contextes de correction qui se trouvent à la périphérie des séances d'enseignement.

IV. MÉTHODOLOGIE

Nous avons choisi d'étudier l'activité de correction d'une évaluation de fin d'année en mathématiques de 2^e secondaire (fin du premier cycle du secondaire, élèves de 13-14 ans). Le choix du secondaire repose sur les enjeux de certification et d'orientation qui y sont plus importants qu'au primaire. Ces enjeux nous semblent par ailleurs essentiels à considérer pour comprendre l'activité de correction en mathématiques. Au Québec, des épreuves de mathématiques sont imposées par le ministère au deuxième cycle du secondaire (4^e secondaire) pour l'obtention du diplôme d'études secondaires. Les évaluations du premier cycle du secondaire sont plutôt coordonnées par les centres de services scolaires ou par les équipes enseignantes dans les écoles : leur importance pour la constitution de la note au bulletin et donc, du jugement global porté sur les élèves, n'est pas aussi clairement balisée que ne le sont les épreuves ministérielles. La plus grande marge de manœuvre offerte aux personnes enseignantes apparaît intéressante pour étudier la manière dont se constituent les verdicts posés sur les élèves. Enfin, la transition entre le premier cycle et le deuxième cycle du secondaire est un moment particulièrement sensible dans l'orientation des élèves, puisque les élèves qui n'ont pas atteint les objectifs des programmes d'étude du premier cycle du secondaire en mathématiques et dans la langue d'enseignement sont orientés vers un parcours de formation axée sur l'emploi, lequel ne donne pas accès au diplôme d'études secondaires (Éditeur officiel du Québec, 2023).

Quatre personnes enseignantes de mathématiques de 2^e secondaire ont été recrutées pour participer à la recherche. Puisque la correction est une activité muette, essentiellement privée, il n'est pas possible d'y accéder directement par l'observation en cours d'action ou par l'analyse des traces de correction laissées par les personnes enseignantes. Certaines réflexions issues d'activités de formation menées par Proulx (2016) montrent bien les difficultés à comprendre les choix effectués par la personne correctrice, à partir de l'interprétation des traces de correction. Sans explications et justifications de la personne correctrice, les choix effectués sont sujet à spéculation pour les personnes qui en font l'analyse à partir des copies corrigées. Ils apparaissent, dans une certaine mesure, injustifiés et incompréhensibles.

Pour cette raison, des entretiens individuels avant et après la correction des évaluations ont été menés avec les personnes enseignantes. En ce qui concerne les entretiens suivant la correction, il s'agit d'entretiens d'explicitation (Vermersch, 2019) portant sur la tâche réelle de correction. Ce type d'entretiens vise à dégager certains savoirs pratiques préréfléchis de l'action, laquelle est *a priori* opaque à la personne qui l'accomplit en tant qu'elle est une « connaissance en acte » (Vermersch, 2019, p. 61). Voici quelques exemples de questions du canevas d'entretien :

- Peux-tu me décrire ce qu'a produit cet élève ? ;
- Est-ce que cela correspondait à tes attentes pour cette tâche ? ;
- Y a-t-il des choses qui te surprennent dans la copie de cet élève ? ;
- Peux-tu me décrire la correction que tu as faite ? ;
- Quelles informations à propos des apprentissages de [savoirs impliqués] tires-tu de la copie de cet élève ? ;
- Qu'est-ce que cette évaluation te dit sur les connaissances de cet élève par rapport à ce que vous avez fait en mathématiques cette année ?

Les données d'entretiens sont complétées par une analyse de l'ensemble des documents de l'évaluation (cahiers de l'élève, guide de correction, grilles, traces de correction, etc.).

La démarche d'analyse des données comporte deux grandes étapes. D'une part, une analyse *a priori* (Assude et al., 2007 ; Sensevy, 2007) des tâches complexes de l'évaluation sera menée selon le point de vue de la chercheuse et selon le point de vue des personnes enseignantes participants à la recherche. D'autre part, les données recueillies durant les entretiens postcorrection permettront de produire une description de l'action de correction dans une sémantique naturelle de l'action, dans un premier temps, puis en utilisant les catégories d'analyse de la TACD, dans un deuxième temps (Schubauer-Leoni et al., 2007 ; Sensevy, 2007 ; Sensevy et al., 2001).

Les résultats attendus sont une meilleure connaissance des enjeux et des conditions didactiques de la correction des évaluations de mathématiques, mais également une meilleure compréhension des rapports entre enseignement et évaluation dans la forme scolaire de connaissance. En rapport avec certaines questions formulées dans l'axe 2 de l'appel à contribution du GT11 du colloque de l'EMF 2025 concernant, d'une part, la prise en compte des raisonnements des élèves dans l'évaluation et, d'autre part, les liens entre évaluation et didactique, notre travail pourrait permettre de construire un modèle de l'action de correction comme une action didactique conjointe dont la spécificité est d'être différée dans une communication didactique sur le mode de l'écrit. Plus spécifiquement, la recherche pourrait permettre de comprendre la nature, certaines conditions et certains enjeux spécifiques des transactions didactiques dans l'activité de correction.

V. CONCLUSION

La recherche présentée au colloque de l'EMF 2025 est en cours d'élaboration et aucun résultat n'a été produit jusqu'à présent. Il nous semble toutefois que les éléments théoriques qu'elle a permis de construire pourraient contribuer à la réflexion collective dans le cadre de l'axe 2 *L'évaluation pratiquée en classe de mathématiques* de l'appel à contribution du GT11. L'analyse des données se poursuivra après le colloque. Nous espérons que la recherche pourra contribuer à une meilleure prise en compte des moments d'évaluation dans la compréhension des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques à l'école.

RÉFÉRENCES

- Assude, T., Mercier, A. et Sensevy, G. (2007). L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(2), 221-252.
- Caron, F. et René de Cotret, S. (2007). Un regard didactique sur l'évaluation en mathématiques : Genèse d'une perspective. Dans P. Marchand, D. Tanguay et L. Theis (dir.), *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec « La didactique des mathématiques au Québec: genèse et perspectives »*, 6-8 juin 2007, Université du Québec à Rimouski, Canada (p. 123-134).
<https://www.dropbox.com/s/9vqk179pd08yimu/2007%20GDM%20Caron%20et%20Ren%C3%A9%20de%20Cotret.pdf?e=1&dl=0>
- Caron, F. et René de Cotret, S. (2015). Regards sur l'enseignant observé. Dans A. Adihou, L. Bacon, D. Benoit et C. Lajoie (dir.), *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec « Regards sur le travail de l'enseignant de mathématique »*, 20-22 mai 2015, Université de Sherbrooke, Canada (p. 73-86).
<https://www.dropbox.com/s/f3bdxb9w7yi0s9q/2015%20GDM%20Caron%20et%20Ren%C3%A9%20de%20Cotret.pdf?e=1&dl=0>
- Chaumont, M. et Leroux, J. L. (2018). Le jugement évaluatif : subjectivité, biais cognitifs et postures du professeur. *Pédagogie collégiale*, 31(3), 27-33.
<https://mobile.eduq.info/xmlui/bitstream/handle/11515/37430/chaumont-leroux-31-3-2018.pdf?sequence=2&isAllowed=y>
- Chevallard, Y. (1986). Vers une analyse didactique des faits d'évaluation. Dans J.-M. De Ketele (dir.), *L'évaluation : approche descriptive ou prescriptive* (p. 31-59). De Boeck.
- Chevallard, Y. (1989). Évaluation, véridiction, objectivation : la relation didactique comme caprice et miniature. Dans J. Colomb et J. Marsenach (dir.), *L'évaluateur en révolution* (p. 13-36). INRP.
- Chevallard, Y. et Johsua, M.-A. (1991). *La transposition didactique : Du savoir savant au savoir enseigné ; suivie de Un exemple de transposition didactique* (2e éd., revue et augmentée). La pensée sauvage.
- Chevallard, Y. et Mercier, A. (1987). *Sur la formation historique du temps didactique*. IREM d'Aix-Marseille. <https://publimath.univ-irem.fr/IMA87003>
- Loi sur l'instruction publique. RLRQ, c. I-13.3. (2023). Régime pédagogique de l'éducation préscolaire, de l'enseignement primaire et de l'enseignement secondaire (r. 8, a. 447).
<https://www.legisquebec.gouv.qc.ca/fr/document/rc/I-13.3,%20r.%208>
- Horoks, J. et Pilet, J. (2015). Étudier et faire évoluer les pratiques d'évaluation des enseignants de mathématiques en algèbre au collège dans le cadre d'un léa. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF2015 « Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage »*, 10-14 octobre 2015, Université d'Alger, Algérie (p. 791-804).
<https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF15154.pdf>
- Lajoie, C. et Bednarz, N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du XXI^e siècle au Québec : rupture ou continuité ? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 16(1), 1-27. <https://doi.org/10.1080/14926156.2014.993443>
- Laurier, M. (2014). La politique québécoise d'évaluation des apprentissages et les pratiques évaluatives. *Éducation et francophonie*, 42(3), 31-49. <https://doi.org/10.7202/1027404ar>

- Leclercq, D., Nicaise, J. et Demeuse, M. (2004). Docimologie critique : des difficultés de noter des copies et d'attribuer des notes aux élèves. Dans M. Demeuse (dir.), *Introduction aux théories et aux méthodes de la mesure en sciences psychologiques et en sciences de l'éducation* (p. 273-292). Les éditions de l'Université de Liège. <https://hal.science/hal-00844778>
- Ministère de l'Éducation du Québec [MEQ]. (2003). *Politique d'évaluation des apprentissages*. https://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/dpse/evaluation/13-4602.pdf
- Mottier Lopez, L. (2009). Introduction. L'évaluation en éducation : des tensions aux controverses. Dans L. Mottier Lopez et M. Crahay (dir.), *Évaluations en tension* (p. 7-25). De Boeck Supérieur. <https://doi.org/10.3917/dbu.motti.2009.01.0007>
- Pilet, J. et Horoks, J. (2018). Effets potentiels d'une évolution des pratiques enseignantes d'évaluation sur les apprentissages algébriques des élèves au collège. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMF2018 « Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines », 22-26 octobre 2018, Gennevilliers, Paris* (p. 1030-1038). Éditions de l'IREM de Paris. https://emf.unige.ch/files/7215/7503/8293/GT9_PILET_Horoks_actes_EMF_2018.pdf
- Proulx, J. (2016). Pratiques d'évaluation par la didactique des mathématiques : construire, appliquer et justifier un barème de correction. *Bulletin de l'ADMEE*, 2, 29-44. <https://www.researchgate.net/publication/338779224>
- Richard, P. R. (2004). Évaluation des compétences en classe de mathématique : Une activité complexe. Dans F. Caron (dir.), *Actes du colloque du GDM 2004 « Affronter la complexité : nouvel enjeu de l'enseignement des mathématiques ? », 27-28 mai 2004, Université Laval, Canada* (p. 123-134). <https://www.dropbox.com/s/wqnhbprjz88g7p/2004%20GDM%20Actes.pdf?e=1&dl=0>
- Schubauer-Leoni, M. L. (1991). L'évaluation didactique : une affaire contractuelle. Dans J. Weiss (dir.), *L'évaluation : problème de communication* (p. 79-95). DelVal ; IRDP.
- Schubauer-Leoni, M. L., Leutenegger, F., Ligozat, F. et Fluckiger, A. (2007). Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves : Les phénomènes didactiques qu'il peut/doit traiter. Dans G. Sensevy et A. Mercier (dir.), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (p. 51-91). Presses universitaires de Rennes. <https://access.archive-ouverte.unige.ch/access/metadata/0dee43a5-97df-4e4a-aa4c-1805212035da/download>
- Sensevy, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. Dans G. Sensevy et A. Mercier (dir.), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (p. 13-49). Presses universitaires de Rennes.
- Sensevy, G. (2008). Le travail du professeur pour la théorie de l'action conjointe en didactique. *Recherche et formation*, (57), Article 57. <https://doi.org/10.4000/rechercheformation.822>
- Sensevy, G. (2019). Forme scolaire et temps didactique. *Le Télémaque*, 55(1), 93-112. <https://doi.org/10.3917/tele.055.0093>
- Sensevy, G., Schubauer-Leoni, M. L. et Mercier, A. (2001). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. À propos de la course à 20. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 38(1), 263-304.
- Tremblay, M. et Delobbe, A.-M. (2021). Une étude comparative des évaluations ministérielles en mathématique du primaire, du secondaire et de l'éducation des adultes. Dans N. Talbot et S. El Euch (dir.), *L'évaluation des compétences : une pluralité de défis. De la description à la compréhension psychodynamique* (p. 111-134). JFD.

- Vantourout, M. et Goasdoué, R. (2016). Évaluations et jugements des enseignants. Dans A.-C. Mathé et É. Mounier (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques (ARDM2015), 13-14 mars 2015, Université Paris Diderot, France* (p. 27-37). ARDM.
- Vermersch, P. (2019). *L'entretien d'explicitation*. ESF sciences humaines.
- Vincent, G., Courtebras, B. et Reuter, Y. (2012). La forme scolaire : débats et mises au point. Entretien de Guy Vincent avec Bernard Courtebras et Yves Reuter. *Recherches en didactiques*, 13(1), 109-135. <https://doi.org/10.3917/rdid.013.0109>

ÉTUDE DU DISPOSITIF ÉVALUATIF QUÉBÉCOIS POUR LES ÉPREUVES UNIQUES DE MATHÉMATIQUE AU 2^E CYCLE DU SECONDAIRE : ANALYSE DE LA COMPÉTENCE À RAISONNER

| BÉNARD* CHLOÉ, TREMBLAY** MÉLANIE ET DELOBBE*** ANNE-MICHÈLE

Résumé | Ce texte est proposé dans le cadre d'une recherche visant une analyse didactique du dispositif évaluatif des épreuves uniques de mathématique au Québec. La problématique prend appui sur certains doutes relatifs à la validité des résultats issus des épreuves ministérielles quant à leur capacité à solliciter et à évaluer la compétence associée au raisonnement mathématique (RM). Ce texte vise l'élaboration d'une grille d'analyse qui permettra de porter un jugement sur la validité du dispositif d'évaluation. Pour ce faire, sont examinées puis comparées les conceptions du RM dans les cadres théoriques des épreuves internationales, comme PISA et TIMSS, le modèle conceptuel du RM proposé par Doris Jeannotte (2015) et les documents de référence ministériels.

Mots-clés : Raisonnement mathématique, évaluation certificative, validité, compétence, épreuve québécoise

Abstract | This text is proposed as part of a research aimed at a didactic analysis of the evaluation system for the purposes of validating the institutional mathematics tests in Quebec. The problem is based on certain doubts relating to the validity of the results from the ministerial tests with regard to their capacity to solicit and evaluate the competence associated with mathematical reasoning (MR). This text aims to develop an analysis grid that will be used to assess the validity of the evaluation system. To do this, the conceptions of the MR in the theoretical frameworks of international tests, such as PISA and TIMSS, the conceptual model of the MR proposed by Doris Jeannotte (2015) and the ministerial reference documents are examined and compared.

Keywords: Mathematical reasoning, assessment, validity, competency, institutional tests

I. INTRODUCTION

Au Québec, le ministère de l'Éducation (MEQ) impose à la fin de la 4^e année du secondaire (15-16 ans) une épreuve unique de mathématique pour chacune des trois séquences du programme (Sciences naturelles [SN], Technico-sciences [TS] et Culture, société et technique [CST]). L'épreuve standardisée certificative, sous la responsabilité du MEQ, évalue le développement de la compétence 2 soit, *Déployer un raisonnement mathématique*, et se veut récapitulative des contenus prescrits à ce niveau d'enseignement dans la *Progression des apprentissages* (MEQ, 2023). Les épreuves produites depuis 2011 se composent toutes du même modèle de 16 questions réparties en trois sections. Les deux premières sections, constituées de 6 questions à choix multiples et de 4 questions à réponses courtes, visent « à évaluer la maîtrise des concepts et des processus mathématiques » (MEQ, 2023, p. 6). La dernière section est composée de 6 situations d'application « qui privilégient l'explicitation du raisonnement mathématique [RM] et demandent d'organiser et d'appliquer, dans un référentiel clairement circonscrit, des concepts et des processus mathématiques » (MEQ, 2023, p. 6).

* Université du Québec à Rimouski – Canada – Chloe.Benard@uqar.ca

** Université du Québec à Rimouski – Canada – Melanie_Tremblay@uqar.ca

*** Université du Québec à Rimouski – Canada – Anne-Michele_Delobbe@uqar.ca

1. *Constats et questionnements de départ*

Dans un rapport produit par l'Association mathématique du Québec (AMQ), un comité formé de 9 enseignants et 3 didacticiens des mathématiques a porté un regard sur les épreuves ministérielles de 4e secondaire produites en juin 2011. Dans son analyse, on constate une appréciation mitigée des membres quant au potentiel RM sollicité par les différentes questions. Les épreuves des séquences SN et TS en particulier ne comptent chacune qu'une seule question, sur les 16 contenues dans l'épreuve, faisant l'unanimité parmi les membres quant au critère : « la question sollicite bien le raisonnement mathématique » (AMQ, 2011). Les membres du comité émettent par ailleurs de sérieuses réserves à l'endroit de plusieurs questions des épreuves qui solliciteraient davantage la substitution de valeurs dans une formule ou la traduction de registres de représentation, offrant ainsi une vision plutôt réductrice de la composante « application des concepts et processus requis » de la compétence 2 (AMQ, 2011).

Il semblerait alors y avoir des doutes quant à ce que mesurent réellement les tâches proposées par le ministère, et donc, concernant la validité des résultats obtenus par les élèves à celles-ci. Les épreuves évaluent-elles réellement ce qu'elles cherchent à évaluer, soit la capacité à déployer un RM ? Plus encore, les membres du comité de l'AMQ remettent en cause les outils et les balises données pour la correction des épreuves uniques. L'approche utilisée pour la correction des deux premières parties des épreuves ou une seule bonne réponse est attendue pour chaque question, sans égard aux processus mobilisés pour y parvenir, semble difficilement se concilier avec l'approche par compétences (AMQ, 2011). Si l'on considère que la compétence est complexe (Legendre, 2001 ; MEQ, 2002), qu'elle est contextualisée (Roegiers, 2000 ; Tardif, 2006) et qu'elle est évolutive et intégrative (Laurier, 2005 ; Legendre, 2001 ; MEQ, 2002 ; Tardif, 2006), considérer chaque score individuellement sur un nombre restreint d'items ne permet pas de rendre compte de l'ensemble des caractéristiques d'une compétence. De même, il est pertinent pour juger de la validité de l'épreuve de questionner les indicateurs utilisés pour décrire les éléments observables de la compétence dans les situations d'application. Considérant que la compétence se rapporte à l'action et qu'elle permet d'agir efficacement ou de manière opérationnelle vis-à-vis une tâche ou une situation (MEQ, 2002 ; Perrenoud, 1997 ; Rey et al., 2010 ; Sayac et Grapin, 2015), un travail d'adaptation est nécessaire pour en rendre compte dans une démarche écrite. Comment les critères d'évaluation, repris dans les grilles de correction des épreuves, permettent-ils de juger du processus dynamique qu'est la compétence à raisonner à partir de la production écrite de l'élève ? Le ministère propose une grille critériée, pour l'ensemble des situations d'application, qui associe chaque critère d'évaluation à des manifestations observables retrouvées dans la production de l'élève. À chaque échelon est attribué un score et à chaque critère une pondération, le cumul des scores de chaque situation étant alors présenté sous forme de résultat chiffré permettant, avec le cumul des deux autres sections de l'épreuve, de juger la compétence à *Déployer un raisonnement mathématique*. Il apparaît alors difficile dans les trois sections de l'épreuve de déterminer à partir du score cumulé si l'échec de l'élève relève d'un manque de compréhension, d'un manque de connaissances ou d'un manque de compétences adaptées (ou des 3) (Sayac et Grapin, 2015).

2. *Objectifs de la recherche*

C'est à partir de ces constats et préoccupations qu'il est proposé de porter un regard critique sur les épreuves uniques produites entre 2012 et 2024 pour la séquence Sciences naturelles. Les doutes relevés jusqu'à présent s'avèrent suffisamment importants pour que l'on remette en question la validité des épreuves uniques, soit leur capacité à rendre compte avec justesse des caractéristiques de l'objet mesuré (Laveault et Grégoire, 2002). Ainsi, cette recherche vise dans un premier temps à identifier quelle conception de la compétence à raisonner est véhiculée dans les tâches et guides d'administration des

épreuves et, dans un deuxième temps, à déterminer dans quelle mesure les épreuves permettent de porter un jugement adéquat sur l'expression de la compétence à déployer un RM. Pour ce faire, une approche didactique de la validité de contenu par le biais d'une analyse *a priori* semble des plus pertinente (Grapin, 2015 ; Grapin et Grugeon-Allys, 2018 ; Vantourout et Goasdoué, 2014). Cet article présente des éléments permettant de répondre au premier objectif de la recherche en définissant le RM dans la littérature et en utilisant cette définition comme levier pour interpréter le sens accordé au RM par le ministère. Puisque la compétence à déployer un RM ou la compétence à raisonner plus généralement n'est pas propre aux programmes scolaires québécois, il est proposé d'analyser ce qui constitue le RM selon deux institutions à l'international, soit le cadre d'évaluation du PISA et le cadre d'évaluation du TIMSS. Nous nous intéresserons par la suite au modèle conceptuel du RM pour l'enseignement et l'apprentissage au primaire et au secondaire en contexte québécois proposé par Doris Jeannotte (2015) avant de mettre en relief les caractéristiques du RM dans les documents du MEQ. Le croisement des différentes conceptions du RM permettra ultérieurement d'établir une grille articulée selon des modèles praxéologiques de la théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard, 1999) afin d'étudier plus finement les tâches et les guides d'évaluation des épreuves afin de mieux saisir les balises données pour l'exercice du jugement évaluatif sur le développement de la compétence à raisonner.

II. LES CADRES DE RÉFÉRENCE DU PISA ET DU TIMSS

Les évaluations proposées dans le cadre du programme PISA ont pour objectif de déterminer le niveau de compétence d'élèves de 15 ans dans diverses disciplines scolaires, dont les mathématiques et les sciences. Dans le domaine de la mathématique, le cadre d'évaluation PISA est guidé par la culture mathématique qui caractériserait la capacité d'un individu à raisonner, de même qu'à formuler, employer et interpréter les mathématiques pour résoudre des problèmes dans un contexte réel (Organisation de coopération et de développement économiques [OCDE], 2023). La culture mathématique décrit la relation entre le RM et l'habileté à résoudre des problèmes comme étant un cycle autour duquel gravitent différents contextes ; personnels, professionnels, sociétaux et scientifiques, ainsi que les habiletés jugées essentielles au 21^e siècle telles que la pensée critique, la créativité, la communication, l'initiative et la persévérance. Tous ces éléments interagissent avec différents contenus mathématiques sélectionnés pour les épreuves du PISA : variations et relations, espace et formes, quantité et incertitude et données.

Il semblerait ainsi que le RM se trouve au centre de ce modèle, donc au centre de la culture mathématique et chevauche chacun des trois processus de résolution de problème (formuler, employer, interpréter). Selon le cadre d'évaluation du PISA, le RM « implique d'évaluer des situations, de sélectionner des stratégies, de tirer des conclusions logiques, d'élaborer et de décrire des solutions et de reconnaître comment ces solutions peuvent être appliquées » (OECD, 2023). Plus encore, on précise que les élèves raisonnent mathématiquement lorsqu'ils :

- identifient, reconnaissent, organisent, lient et représentent ;
- construisent, résument, évaluent, déduisent, justifient, expliquent et défendent ;
- interprètent, portent des jugements, critiquent, réfutent et nuancent.

En addition à cette liste d'habiletés, on précise dans le cadre d'évaluation les actions attendues des élèves lorsqu'ils raisonnent. Les verbes employés sont, pour la plupart, identiques à ceux listés précédemment à l'exception des verbes : sélectionner, utiliser, comprendre, réfléchir et analyser. Les processus de résolution de problème sont aussi décrits à l'aide d'actions attendues des élèves, mais nous n'en ferons pas la présentation détaillée. Toutefois, il est mentionné qu'en contexte de résolution

de problème, la réalisation de décisions stratégiques à propos de la sélection des outils et l'ordre de leur application peut manifester un RM. On précise aussi que la transformation d'une situation réelle en un problème mathématique bien défini requiert un RM et que le raisonnement est une façon d'évaluer des interprétations et des inférences à propos d'énoncés et de solutions de problèmes.

Pour leur part, les évaluations du TIMSS visent à rendre compte, tous les quatre ans, des acquis des élèves de 4e année (9-10 ans) et de 8e année (2e secondaire au Québec, 14-15 ans) dans plusieurs pays du monde. En 2023, le cadre d'évaluation en mathématiques est développé en deux parties, les domaines de contenus et les domaines cognitifs. La première partie décrit les savoirs qui se rapportent aux différents domaines mathématiques (géométrie, arithmétique, probabilité, etc.) alors que la deuxième réfère plutôt à des habiletés, appelées compétences cognitives. Ces domaines cognitifs sont présentés selon trois catégories : savoir, appliquer et raisonner, regroupant chacune des habiletés pouvant être mises à contribution dans la résolution de problèmes mathématiques.

Le premier domaine cognitif (savoir) réfère aux faits, aux concepts et aux procédures mobilisables par l'élève. Ces éléments fournissent le langage de base des mathématiques et les fondements de la pensée mathématique. Les processus mémorisés permettent non seulement de se rappeler d'une procédure et de son exécution, mais aussi de reconnaître un ensemble de situations dans lesquelles la procédure peut être utilisée. Ce domaine inclut l'habileté à se rappeler, à identifier, à ordonner et à calculer. Le deuxième domaine cognitif proposé dans le cadre d'évaluation du TIMSS (appliquer) fait particulièrement appel aux capacités de l'élève à effectuer des choix adéquats, propices à la résolution de problèmes, et à les appliquer ou les exécuter correctement. Il peut s'agir de choix d'opérations, de stratégies ou d'outils qui pourront nécessiter de faire appel à diverses représentations. Les habiletés de ce domaine sont : formuler, appliquer et représenter.

Le dernier domaine cognitif (raisonner) réfère à des habiletés et des processus cognitifs nettement plus complexes. Selon la TIMSS, raisonner implique l'habileté à observer et à faire des conjectures, à faire des déductions logiques basées sur des hypothèses et des règles précises. Le raisonnement est aussi impliqué dans l'analyse, la généralisation et la justification des résultats. Le raisonnement peut être intuitif ou inductif et il est basé sur des récurrences et des régularités. Il est par ailleurs mentionné que des preuves de processus de raisonnement « peuvent se trouver dans l'explication ou la justification d'une méthode de solution, ou dans la formulation d'inférences valides sur la base d'informations et de preuves » (Mullis et coll., 2023, p.16, traduction libre). Ce domaine regroupe les habiletés cognitives : analyser, intégrer, généraliser et justifier.

Dans le cadre d'évaluation du TIMSS, les trois domaines cognitifs, bien qu'ils soient distincts, ne sont pas nécessairement indépendants. Il est mentionné en effet que sans connaissances de base relative au langage, aux représentations et aux conventions, l'activité mathématique (le raisonnement) perd son sens (Mullis et coll., 2023). Par ailleurs, on remarque à la fois dans PISA et dans TIMSS que le RM est sous-jacent à la résolution de problèmes. Ce constat s'applique également au *Programme de formation de l'école québécoise* (PFEQ) dans lequel on mentionne que les trois compétences du programme (communiquer, raisonner et résoudre) sont interdépendantes (Tremblay et Delobbe, 2022).

Les cadres d'évaluation du TIMSS et du PISA abordent le RM avec certaines similarités. Le RM réfère principalement à des processus : formuler, interpréter et employer dans PISA et : analyser, intégrer, généraliser et justifier dans TIMSS. Si dans PISA le raisonnement renvoie plus généralement à l'idée d'une compétence, comprenant plusieurs habiletés de complexités différentes, dans TIMSS, raisonner semble plutôt référer seulement à des habiletés cognitives complexes. Dans les deux cadres d'évaluation, le raisonnement implique de faire des inférences dans la compréhension des informations fournies dans le problème et d'évaluer des solutions à des problèmes. On précise aussi dans les cadres

d'évaluation les formes ou la nature discursive du raisonnement. Pour le TIMSS, il s'agit de « déductions logiques » qui s'appuient sur des hypothèses et des règles précises, ou il s'agit d'un RM intuitif ou inductif lorsqu'il se base sur des récurrences ou des régularités. Dans le cadre PISA, il s'agit soit d'une forme inductive ou déductive et elles impliquent toutes deux l'évaluation et la sélection de stratégies dans l'objectif de tirer une conclusion logique.

III. UN MODÈLE CONCEPTUEL DU RM

Pour apporter un nouvel éclairage sur la multitude de termes employés pour décrire le RM, il est proposé de puiser dans les travaux de Jeannotte (2015) afin de dégager le sens accordé à ces termes. Pour Jeannotte, le RM se définit comme :

« un processus commognitif, c'est-à-dire de communication avec les autres ou avec soi-même, qui permet d'inférer des énoncés mathématiques à partir d'autres énoncés mathématiques. Ces énoncés portent sur les objets mathématiques. Ce processus est organisé en une certaine structure qui est contingente par des règles discursives partagées, et est porteur d'une valeur épistémique. Le RM peut alors être caractérisé selon deux aspects qui sont à la fois complémentaires et liés dialectiquement : l'aspect structurel et l'aspect processuel. » (2015, p. 276)

Nous relevons de cette définition l'idée que le raisonnement, ou l'action de raisonner, est dynamique à considérer sous son aspect processuel et qu'il implique un discours à propos d'énoncés mathématiques, discours qui est contingenté à l'intérieur d'un groupe de personnes. Ce discours mathématique doit obéir à des règles de construction, un regard est alors porté sur la manière dont les éléments discursifs s'agencent et se coordonnent pour en former la structure (Jeannotte, 2015). La structure ou l'aspect structurel, du RM réfère aux objets mathématiques, qu'il s'agisse de données, d'affirmations, de règles ou de fondements, et les relations qu'ils entretiennent à l'intérieur d'un pas de raisonnement ou d'un enchaînement de pas (Jeannotte, 2015). Ce faisant, le raisonnement permet d'inférer, l'inférence étant définie par Legendre comme « opération mentale qui consiste à établir des liens logiques entre des propositions jugées comme vraies et d'autres propositions dont la vérité dépend de leur filiation avec les premières » (Legendre, 2005, cité dans Jeannotte, 2015, p. 17). La structure du RM peut être déductive, inductive ou abductive ou, s'il s'agit d'une combinaison d'au moins deux types de structures, un raisonnement par analogie. Ce qui distingue ces structures est la nature de la conclusion et la valeur épistémique qui lui est attachée :

« Le pas déductif permet d'inférer une affirmation à partir de données et d'une règle. Le pas inductif permet d'inférer une règle à partir de données et d'une affirmation. Le pas abductif permet, soit d'inférer des données à partir d'une affirmation et d'une règle, soit d'inférer des données et une règle qui a le potentiel d'expliquer l'affirmation. » (Jeannotte, 2015, p. 159)

Remarquons qu'il n'est pas fait mention des raisonnements par disjonction de cas, par contradiction ou par réfutation à l'aide d'un contre-exemple dans ce modèle puisque ces structures sont des cas particuliers découlant des structures déductives (MÉES, 2018 ; Jeannotte, 2015). La structure du raisonnement, particulièrement lorsqu'elle est schématisée, lui donne une allure statique. Pour comprendre la dimension dynamique du raisonnement, qui n'est ni stable ni fixe, il est nécessaire selon Jeannotte (2015) de s'intéresser à l'aspect processuel.

Les processus de raisonnement retenus par Jeannotte (2015) dans son modèle se regroupent en deux catégories, les processus de recherche de similitudes et de différences et les processus de recherche de validation. Elle y ajoute aussi le processus d'exemplification qui, sans appartenir à l'une ou à l'autre de ces catégories, vient supporter les autres processus de raisonnement (Jeannotte, 2015). L'ensemble de ces processus sont métadiscursifs, c'est-à-dire qu'ils « décrivent des énoncés à propos d'objets ou de relations mathématiques par l'exploration des relations qui les unissent » (Jeannotte,

2015, p. 169). Les processus de recherche de similitudes et de différences permettent d'inférer un énoncé à propos : d'un ensemble d'objets mathématiques (**généraliser**) ; d'une régularité ou d'une relation ayant une valeur épistémique vraisemblable (**conjecturer**) ; d'une relation récursive entre différents objets ou relations (**identifier une régularité**) ; de la comparaison d'objets et de relations (**comparer**) ; de classes en s'appuyant sur des propriétés ou des définitions (**classifier**) (Jeannotte, 2015).

Les processus de validation pour leur part visent à changer la valeur épistémique d'un énoncé (Jeannotte, 2015). Jeannotte (2015) identifie trois processus de validation qui sont **justifier**, **prouver** et **démontrer**. Le processus de justification permet de changer la valeur épistémique d'un énoncé « par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique » (Jeannotte, 2015, p. 271). À l'image des poupées russes, le processus de prouver est un cas particulier de la justification où la valeur épistémique de l'énoncé est modifiée de vraisemblable à vraie. Ce changement de valeur est toutefois contingenté par certaines règles qui lient le processus à la communauté dans laquelle il s'exerce (la classe par exemple). Autrement dit, les énoncés sont vrais et acceptés par la communauté et les réalisations sont accessibles à la classe (Jeannotte, 2015). De même, prouver en tant que processus de RM doit observer une structure finale déductive (Jeannotte, 2015). Si les énoncés sont systématisés dans une théorie mathématique et que les réalisations sont formalisées et acceptées par la communauté d'experts (mathématique), il s'agira du troisième processus : démontrer.

IV. LE RM AU SENS DU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC

Déployer un RM consiste « à formuler des conjectures, à critiquer, à justifier ou à infirmer une proposition en faisant appel à un ensemble organisé de savoirs mathématiques » (MELS, 2007, p. 28). Dans la documentation destinée au secondaire (cadre de référence, document d'information, programme de 2e cycle), ce RM est présent sous plusieurs formes. Notamment, il est fait mention de raisonnements inductif, déductif, par analogie, par disjonction de cas, par contradiction et par réfutation à l'aide d'un contre-exemple (MELS, 2007). De même, le raisonnement peut être rattaché à des champs des mathématiques ; raisonnement algébrique, arithmétique, géométrique, statistique et probabiliste (MELS, 2007). Toutefois, comme le mentionne Jeannotte (2015), ces raisonnements ne se démarquent pas par leur structure ou les processus qu'ils mobilisent, mais plutôt par la nature des savoirs en jeu. Le RM est, à certains moments, associé à des actions, considérées ici comme activités intellectuelles ou processus, mobilisés quand l'élève raisonne : conjecturer, justifier, abstraire, valider, analyser, examiner, visualiser, combiner, etc. (MELS, 2007). Le RM est aussi associé au produit de cette activité par son expression écrite ou orale : énoncer une conjecture, mettre en forme les résultats d'une démarche, critiquer, justifier, argumenter, expliquer, etc. (MELS, 2007).

Le RM décrit par le ministère présente certaines similarités et différences avec les cadres de référence internationaux et le modèle de Jeannotte. Un tableau comparatif est présenté à cet effet en annexe. Notons d'abord que les structures de raisonnement réfèrent généralement à la déduction et à l'induction. D'autres structures sont aussi présentes, mais ne semblent pas faire l'unanimité quant à leur importance dans le développement du RM. Si plusieurs structures du RM sont présentées dans les composantes de la compétence, elles ne semblent pas suivre dans les critères d'évaluation. En effet, les critères d'évaluation de même que les grilles et balises de correction des épreuves ne font pas mention de structures particulières du RM, mais on y mentionne plutôt la structure des étapes d'une démarche. Le critère porte alors sur la capacité de l'élève à présenter des traces claires et complètes qui respectent les règles et conventions du langage mathématique (MELS, 2011). Ainsi, tout comme Jeannotte (2015), on remarque un manque de continuité entre les éléments de définition qui composent la compétence dans le programme et les attentes en matière d'évaluation.

Le tableau synthèse présente aussi les différents processus qui réfèrent au RM. Il est à noter que le sens accordé aux processus n'est pas uniforme dans l'ensemble des cadres de référence. Les processus dans le cadre du PISA réfèrent plus généralement aux démarches ou aux types d'activités mis en jeu lors de la résolution de problèmes en contextes « réels » (Bodin, 2009). Pour Jeannotte, rappelons qu'un processus de raisonnement réfère à un processus commognitif qui est métadiscursif et donc le processus doit « aller au-delà de l'énoncé pour inférer une information additionnelle pour la personne qui raisonne ou son interlocuteur » (2015, p. 169). Le sens de processus semble davantage tourné vers la distinction entre la dialectique des dimensions conceptuelle et processuelle d'un savoir, ce qui n'est pas étranger au travail mené par le National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) lors de la parution du programme. Dans la documentation produite par le MEQ, le terme processus apparaît dans la composante *construire et exploiter des réseaux de concepts et de processus mathématiques* de la compétence à raisonner (MELS, 2007). Le jumelage « concepts et processus » se retrouve systématiquement dans le PFEQ de même que dans les critères d'évaluation et les grilles de correction où l'élève utilise, sélectionne, fait appel ou applique « des concepts et des processus ». Aucune précision n'est donnée quant au sens que l'on accorde alors à ces processus ou à leur nature, mais le survol des différents documents ministériels laisse sous-entendre qu'il s'agirait davantage de procédures, ou de suites d'opérations, plutôt que de processus au sens de Jeannotte (2015).

Il est intéressant par ailleurs de souligner que, dans les grilles d'évaluation descriptives génériques fournies par le ministère, on ne retrouve pas de vocables pouvant renvoyer aux actions associées aux processus de RM. Sous le critère de *mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation*, les manifestations observables portent sur l'identification des aspects importants de la situation, le recours à des stratégies appropriées, la sélection de concepts et de processus mathématiques requis et la formulation d'hypothèses de travail (MELS, 2011). Il semble alors que la compétence à déployer un RM s'observe dans les épreuves par la mobilisation efficace, structurée, de concepts et de processus dans l'objectif de résoudre un problème (Tremblay et Delobbe, 2022).

V. CONCLUSION

Rappelons que l'objectif de ce texte était de croiser la signification du RM à travers les cadres d'évaluation internationaux tels que PISA et TIMSS, le modèle conceptuel de Jeannotte (2015) et les documents de références du MEQ. De cette comparaison, il ressort que le RM doit être perçu comme un processus dynamique et intégré, répondant à une structure principalement déductive ou inductive. Si cette description est unanime à l'ensemble des documents consultés, il ressort toutefois de l'analyse certaines divergences quant à la notion de processus. Bien que le terme soit souvent associé au RM, sa conception n'est pas explicite et engendre des écarts quant au sens qui lui est accordé. Dans la documentation du MEQ, les processus de RM semblent davantage liés à des procédures qu'à une réflexion métadiscursive. Les résultats de cette comparaison seront réinvestis dans la conception d'une grille qui permettra de porter un regard didactique sur la validité du dispositif évaluatif des épreuves ministérielles québécoises.

Cette recherche est possible grâce à l'appui financier du Fonds de recherche du Québec – Société et culture (FRQSC) <https://doi.org/10.6977/329870>

RÉFÉRENCES

- Association Mathématique du Québec. (2011). *Rapport d'analyse des épreuves de 4^e secondaire en mathématiques*. <https://archimede.mat.ulaval.ca/amq/ancien/ArchivesMemoires/RapportComiteEpreuves2011.pdf>
- Bodin, A. (2009). *Comment classer les questions de mathématiques ?* Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP) https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Classification_maths.pdf
- Bottani, N. et Vignaud, P. (2005). *La France et les évaluations internationales* [Rapport]. Haut Conseil de l'Évaluation de l'École.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Grapin, N. (2015). *Étude de la validité de dispositifs d'évaluation et conception d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves de fin d'école* [Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot].
- Grapin, N. et Grugeon-Allys, B. (2018). Approches psychométrique et didactique de la validité d'une évaluation externe en mathématiques : quelles complémentarités et quelles divergences ? *Mesure et évaluation en éducation*, 42(2), 37-66. <https://www.erudit.org/fr/revues/mec/2018-v41-n2-mec04520/1059172ar/>
- Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* [Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal].
- Laurier, M. D. (2005). Évaluer des compétences : pas si simple... *Formation et profession*, 77(1), 14-17.
- Laveault, D. et Grégoire, J. (2002). *Introduction aux théories des tests en psychologie et en sciences de l'éducation* (2^e éd.). De Boeck Université.
- Legendre, M.-F. (2001). Sens et portée de la notion de compétence dans le nouveau programme de formation. *Revue de l'AQFS*, 23(1), 12-31.
- Maingain, A. (2019). Articuler connaissances et compétences. Dans A. Maingain (dir.), *Quelles écoles pour demain ? Construire ensemble un enseignement humain, inclusif et ouvert sur le monde* (p. 183-197). Mardaga.
- Ministère de l'Éducation du Québec [MEQ]. (2002). *L'évaluation des apprentissages au préscolaire et au primaire. Cadre de référence*. Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation du Québec [MEQ]. (2023). *Document d'information. Épreuves uniques, mathématique 4^e année du secondaire*. Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement Supérieur [MEES]. (2018). *Précisions sur les types de raisonnement à exploiter en mathématique au secondaire*. Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation, des Loisirs et du Sport [MELS]. (2007). *Programme de formation de l'école québécoise enseignement secondaire, deuxième cycle : parcours de formation générale, parcours de formation générale appliquée*. Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation, des Loisirs et du Sport [MELS]. (2011). *Cadres d'évaluation des apprentissages*. Gouvernement du Québec.

- Mullis, I., Martin, M. et von Davier, M. (2023). *TIMSS 2023 Assessment Frameworks*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). <https://timssandpirls.bc.edu/timss2023/frameworks/index.html>
- Organisation de coopération et de développement économiques [OCDE]. (2023). *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en>
- Perrenoud, P. (1997). *Construire des compétences dès l'école*. ESF.
- Rey, B., Carette, V., Defrance, A. et Kahn, S. (2010). *Les compétences à l'école : apprentissage et évaluation*. De Boeck.
- Roegiers, X. (2000). *Une pédagogie de l'intégration. Compétences et intégration des acquis dans l'enseignement*. De Boeck Université.
- Sayac, N. et Grapin, N. (2015). Évaluation externe et didactique des mathématiques : un regard croisé nécessaire et constructif. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35(1), 101-126.
- Tardif, J. (2006). *L'évaluation des compétences. Documenter le parcours de développement*. Chenelière.
- Tremblay, M. et Delobbe, A.-M. (2022). Une étude comparative des évaluations ministérielles en mathématique du primaire, du secondaire et en éducation aux adultes. Dans N. Talbot et S. El Euch (dir.), *Évaluation des compétences : défis et perspectives* (p. 111-131). Presses de l'Université du Québec.
- Vantourout, M. et Goasdoué, R. (2014). Approches et validité psycho-didactiques des évaluations. *Éducation et formations*, (e302), 140-156.

ANNEXE

TABLEAU COMPARATIF DES TERMES UTILISÉS POUR DÉCRIRE LES STRUCTURES ET LES PROCESSUS DE RM

PISA (2022)	TIMSS (2023)	MEQ (2007)	Jeannotte (2015)
Structures du RM			
Déductive Inductive	Déduction logique Inductive Intuitive	Déductive Inductive Par analogie	Déductive Inductive Abductive Par analogie
Processus de RM			
Formuler des situations de façon mathématique (identifier, reconnaître, organiser, lier, représenter) Employer des concepts, des faits, des procédures (construire, résumer, évaluer, déduire, justifier, expliquer, défendre) Interpréter en appliquant et en évaluant des résultats mathématiques (interpréter, porter des jugements, critiquer, réfuter et nuancer)	Analyser Conjecturer Généraliser Intégrer Justifier	Abstraire Analyser Argumenter Combiner Conjecturer Critiquer Examiner Expliquer Infirmer Justifier Mettre en relation Organiser Valider Visualiser	<u>Processus de recherche de similitudes et de différences :</u> Généraliser Conjecturer Identifier une régularité Comparer Classifier <u>Processus de validation :</u> Justifier Prouver Démontrer <u>Processus d'exemplification :</u> Exemplifier

MOBILISATION DES CONCEPTIONS DES FUTURS ENSEIGNANTS EN ÉVALUATION DES MATHÉMATIQUES

| RUMINOT* CAROLINA

Résumé | Cet article examine les conceptions des futurs enseignants du cycle premier moyen sur l'évaluation en mathématiques. Les résultats montrent qu'ils reconnaissent l'importance de l'évaluation formative pour ajuster l'enseignement et soutenir le développement des élèves. Cependant, l'évaluation est encore souvent perçue comme un moyen de mesurer les apprentissages de manière finale. Les mathématiques sont vues à travers trois conceptions : hiérarchie de concepts, motifs et résolution de problèmes. L'article suggère de repenser l'équilibre entre évaluation formative et sommative.

Mots-clés : évaluation en mathématique, conceptions des futurs enseignants, évaluation formative, évaluation sommative.

Abstract | This article examines the conceptions of future primary and intermediate teachers regarding assessment in mathematics. The results show that they recognize the importance of formative assessment in adjusting teaching and supporting student development. However, assessment is still often perceived as a means of measuring learning in a final manner. Mathematics is viewed through three conceptions: hierarchy of concepts, patterns, and problem-solving. The article suggests rethinking the balance between formative and summative assessment.

Keywords: Mathematics assessment, future teachers' conceptions, formative assessment, summative assessment.

I. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

L'article met en lumière les récentes évolutions des politiques évaluatives à travers divers pays, y compris les États-Unis, le Canada et l'Europe, en mettant l'accent sur l'intégration continue des évaluations dans l'enseignement pour améliorer l'apprentissage des élèves. Ces évolutions valorisent l'évaluation pour l'apprentissage (Assessment for learning), une stratégie reconnue comme puissante pour soutenir les élèves (Sayac, 2020 ; Suurtamm, 2018). L'idée centrale est que l'évaluation ne devrait pas se limiter à une simple mesure des acquis à la fin d'un cycle, mais devrait être un processus continu qui informe et ajuste l'enseignement. Cette perspective sur l'évaluation met l'accent sur l'amélioration de l'apprentissage tout au long du parcours scolaire, en stimulant un processus dynamique où les évaluations formatives jouent un rôle essentiel. L'évaluation formative favorise l'implication active des élèves dans la définition des objectifs d'apprentissage et des critères d'évaluation, ce qui les rend acteurs de leur propre apprentissage. Elle stimule leur développement métacognitif et leur motivation, ce qui contribue à de meilleurs résultats scolaires (Davies et al., 2020; Earl, 2013).

Cependant, malgré les avantages largement reconnus de l'évaluation formative, les enseignants continuent de rencontrer des difficultés à interpréter et à appliquer les politiques d'évaluation formative dans leur pratique quotidienne (DeLuca et Klinger, 2010). La mise en œuvre de ces politiques pose des défis en matière de l'intégration des pratiques en classe, notamment en raison de la complexité de la coordination avec d'autres types d'évaluation, comme les évaluations à grande échelle (OCDE, 2011). De plus, de nombreux enseignants manquent encore des connaissances et des compétences nécessaires pour aligner correctement les tâches d'apprentissage sur les objectifs d'évaluation (Sayac, 2020).

* Université d'Ottawa – Canada – cruminot@uottawa.ca

Dans le domaine des mathématiques, l'évaluation des apprentissages est une préoccupation croissante pour les chercheurs et les praticiens de l'éducation (Grugeon-Allys et al., 2018). Les recherches portant sur la relation entre la didactique des mathématiques et l'évaluation des apprentissages sont encore rares, bien que des travaux importants aient fait progresser la question (Suurtamm, 2018). Ces travaux suggèrent que l'évaluation en mathématiques ne devrait pas se limiter à la mesure des acquis des élèves, mais gagnerait à inclure une analyse de leurs processus d'apprentissage. Une telle approche pourrait aider les enseignants à orienter les prochaines étapes pédagogiques en tenant compte à la fois du développement du raisonnement mathématique et de l'appropriation progressive des concepts par les élèves (Suurtamm et al., 2010). Une évaluation des mathématiques devrait donc non seulement refléter les concepts clés à maîtriser, mais également capturer le processus d'apprentissage dans toute sa complexité. Pour ce faire, une diversité de stratégies d'évaluation est nécessaire, incluant l'évaluation des processus cognitifs des élèves lorsqu'ils résolvent des problèmes (Suurtamm et al., 2010).

L'Ontario, ainsi que d'autres provinces au Canada, a intégré ces changements de paradigme dans sa politique d'évaluation du cycle primaire et secondaire (MÉO, 2010). Cette politique est essentielle, car elle guide les pratiques évaluatives dans le système éducatif de la province, influençant à la fois la formation des enseignants et les normes pédagogiques mises en place par l'Ordre des enseignants. De nombreuses recherches menées ont contribué à éclairer des concepts clés de cette politique, en soulignant l'importance d'une évaluation formative intégrée dans l'enseignement et un équilibre entre l'évaluation formative et sommative (Laveault, 2014).

Cette recherche explore l'importance de l'évaluation dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, en mettant l'accent sur les conceptions des futurs enseignants. Son objectif principal est d'examiner les connaissances et les perceptions d'un groupe de futurs enseignants du cycle élémentaire en Ontario francophone concernant l'évaluation des apprentissages en mathématiques. Les questions centrales incluent : quelles conceptions et connaissances ont-ils sur l'évaluation et l'apprentissage des mathématiques ? Comment perçoivent-ils la relation entre enseignement et évaluation dans ce domaine ? Quels liens font-ils entre leurs expériences d'évaluation en tant qu'élèves et leur approche actuelle ? Ces interrogations visent à éclairer leur position face aux défis pédagogiques liés à l'évaluation et à explorer l'impact de leurs expériences personnelles sur leurs pratiques professionnelles émergentes.

II. CADRE CONCEPTUELLE

Cette recherche s'appuie sur plusieurs notions théoriques clés à savoir l'évaluation formative, sommative, et certificative et l'évaluation en mathématique qui permettent d'approfondir la compréhension des phénomènes étudiés et offre une perspective complémentaire pour analyser les données et les résultats.

1. *L'évaluation formative*

Les experts en évaluation, comme Black et Wiliam (2015), définissent « l'évaluation au service de l'apprentissage » (Assessment for Learning) comme tout processus visant à améliorer l'apprentissage de l'élève. Elle permet de recueillir des preuves pour informer l'enseignant et l'élève sur les progrès réalisés et les prochaines étapes à suivre. Ce concept englobe diverses pratiques formelles et informelles utilisées pour soutenir les apprentissages (Suurtamm et al., 2016). Black et Wiliam (2009) identifient cinq stratégies d'évaluation formative, nécessitant la collaboration entre l'enseignant, l'élève et les pairs : établir des critères d'apprentissage clairs, encourager les discussions en groupe, fournir des

rétroactions constructives, promouvoir le travail en collaboration et amener les élèves à se responsabiliser dans leur apprentissage. Ces stratégies, aujourd'hui perçues comme des pratiques évaluatives, reflètent le savoir-évaluer des enseignants (Laveault, 2016). L'évaluation formative est étroitement liée à la régulation des apprentissages (Mottier Lopez, 2007 ; 2015), qui consiste à surveiller et ajuster les processus pédagogiques. Deux pratiques clés sont l'évaluation diagnostique, qui identifie les connaissances préalables, et la rétroaction, qui guide l'amélioration des élèves (Hattie et Timperley, 2007 ; Allal et Mottier Lopez, 2005). De plus, « l'évaluation en tant qu'apprentissage » (Assessment as Learning) favorise l'autorégulation des élèves à travers l'autoévaluation et l'évaluation par les pairs, les incitant à juger leurs compétences et celles des autres (Earl, 2013 ; Suurtamm et al., 2016).

2. *L'évaluation sommative et certificative*

L'évaluation sommative et certificative juge la qualité du travail des élèves en fonction de standards de performance afin de déterminer la note finale, utilisée pour communiquer les résultats aux parties prenantes, comme les parents et les autorités scolaires. Elle incarne le principe de reddition de comptes et est influencée par les réformes politiques. Les enseignants doivent interpréter et expliquer ces résultats de manière transparente (Rocque, 2014). Bien que de nombreux auteurs établissent plusieurs liens entre évaluation sommative et certificative (Allal, 2007 ; Mottier Lopez et Laveault, 2008) ou utilisent simplement l'un de ces termes pour parler de l'évaluation des apprentissages (Mottier Lopez, 2015), dans le cadre de cette recherche, nous utilisons de manière différenciée les concepts d'évaluation certificative et sommative. Notamment en raison des politiques évaluatives de l'Ontario (Faire croître le succès, 2010) et du concept de triangulation (Davies et al., 2020). Les preuves d'apprentissage incluent des observations, conversations et productions, permettant de recueillir des données fiables tout en tenant compte des divers styles d'apprentissage. Cette approche diffère de l'évaluation certificative, souvent utilisée pour mesurer la qualité des apprentissages à des fins de classification. L'évaluation certificative peut être basée sur des objectifs définis (référence critériée) ou des comparaisons entre élèves (référence normative). Selon Issaieva et Crahay (2010), l'évaluation normative remplit trois fonctions : identifier les capacités des élèves, dresser un bilan des acquis et établir une hiérarchie des performances. L'évaluation critériée, quant à elle, mesure si les objectifs d'apprentissage sont atteints sans considération pour le classement (Issaieva et al., 2015).

3. *L'enseignement des mathématiques et l'évaluation*

Nous avons élaboré une définition des mathématiques et de leur enseignement en nous inspirant de Schoenfeld (2016). Selon lui, les mathématiques sont une discipline vivante, visant à comprendre les motifs du monde et de l'esprit humain. Apprendre à penser mathématiquement implique de développer un point de vue mathématique, en valorisant les processus de mathématisation, d'abstraction et la maîtrise des outils du métier. Cela signifie rechercher des solutions plutôt que de mémoriser des procédures, explorer des motifs au lieu de simplement retenir des formules, et formuler des conjectures plutôt que de réaliser des exercices. L'enseignement des mathématiques devrait ainsi permettre aux élèves d'apprendre de manière exploratoire et dynamique, favorisant leur capacité à interpréter des données et à appliquer les mathématiques de manière pratique et analytique.

III. MÉTHODOLOGIE

Ce projet s'inscrit dans une étude à visée descriptive interprétative (Fortin et Gagnon, 2016). Cette approche répond aux objectifs de ce projet, qui vise à examiner les conceptions et les connaissances en évaluation de l'enseignement des mathématiques avec la participation des enseignants débutants du premier cycle moyen (de la 1^{re} à la 6^e année). Nous avons adopté une méthode mixte, combinant des

analyses quantitatives et qualitatives d'un questionnaire (Creswell et Plano Clark, 2018). Sur le plan quantitatif, des statistiques descriptives et des analyses de corrélation ont été effectuées, suivies d'une analyse factorielle exploratoire (AFE) avec rotation oblique pour identifier des facteurs latents. Sur le plan qualitatif, l'analyse thématique (Braun et Clarke, 2006) a été utilisée pour identifier des thèmes dans les données. Cette approche combinée inductive et déductive permet d'intégrer théorie et données, offrant une compréhension plus profonde et nuancée du phénomène étudié.

Nous avons invité des étudiants de première année du programme professionnel de formation à l'enseignement d'une faculté d'Éducation ontarienne de langue française à participer. Nous avons ciblé ces participants, car ils et elles ont été récemment exposés à des notions théoriques lors de leur formation, ce qui, éventuellement, permettra une meilleure appropriation des aspects théoriques et pratiques de la profession. Le projet a été présenté à 175 étudiant.es, 51 ont répondu au questionnaire, et 33 l'ont complété. L'échantillon se compose de 76 % de femmes et de 24 % d'hommes. En ce qui concerne leur diplôme universitaire, 27 % des futurs enseignants ont obtenu leur diplôme au Canada, tandis que les 73 % restants l'ont obtenu à l'extérieur du Canada. Parmi les participants, 39 % ont déjà de l'expérience en enseignement des mathématiques, 33 % ont de l'expérience dans le domaine de l'enseignement en général, 39 % possèdent un diplôme de maîtrise, et 66 % ont un baccalauréat.

Le questionnaire utilisé dans cette étude combine des questions fermées à échelle de Likert, des questions à choix multiple et des questions ouvertes. Les questions ont été des travaux de Issaieva et Crahay (2010), Fagnant et Goffin (2017) et de DeLuca et al., (2016). Le questionnaire explore plusieurs volets. Les données démographiques des participants ont été recueillies via cinq questions ouvertes sur l'âge, le sexe, le campus et l'expérience en enseignement. Le parcours académique et professionnel a été précisé par cinq questions fermées. Les conceptions et les connaissances en évaluation des apprentissages ont été évaluées à travers trente-deux questions fermées utilisant une échelle de Likert (annexe 1). L'articulation des pratiques d'évaluation et apprentissage et les expériences des participants en évaluation formative en tant qu'élève ont été examinées par deux questions ouvertes. Le questionnaire a été hébergé sur la plateforme SurveyMonkey et la durée estimée pour le remplir a été d'environ 20 à 30 minutes.

IV. RÉSULTATS ET INTERPRÉTATION

1. *Conception de l'évaluation des apprentissages*

Trois principales catégories ont été mises en évidence selon la théorie, chacun représentant une dimension distincte des perceptions des futurs enseignants concernant les pratiques d'évaluation.

Catégorie 1 – Évaluation formative et sommative : Cette catégorie met en avant l'importance d'une évaluation formative continue pour ajuster et améliorer l'enseignement en fonction des besoins des élèves. L'évaluation formative est perçue comme un outil permettant d'identifier les difficultés et d'adapter les stratégies pédagogiques. Les enseignants sont encouragés à surveiller et réviser leurs pratiques évaluatives (items 38, 46) pour optimiser l'apprentissage. La personnalisation des apprentissages est essentielle (items 35, 39, 33), en particulier pour répondre aux besoins individuels des élèves. De plus, une évaluation diagnostique permet d'anticiper les difficultés (items 22, 25, 19). En somme, l'évaluation formative est vue comme un guide pour l'amélioration des pratiques pédagogiques et l'acquisition des compétences des élèves.

Catégorie 2 – Évaluation certificative critériée : Ce facteur souligne l'importance de l'évaluation certificative axée sur les standards, souvent à travers des tests standardisés. L'évaluation est utilisée pour vérifier si les objectifs du programme sont atteints (item 43) et pour comparer les résultats des

élèves à des normes curriculaires ou sociétales (items 29, 28). Elle mesure la performance des élèves en fonction des attentes établies, mettant l'accent sur le classement et la hiérarchisation (item 21). Les tests standardisés sont perçus comme essentiels pour évaluer non seulement les performances individuelles, mais aussi le système éducatif global (items 34, 44), en positionnant les élèves selon des critères prédéfinis.

Catégorie 3 – Évaluation sommative avec approche normative : Ce facteur révèle une approche normative de l'évaluation sommative, axée sur la comparaison en fonction des résultats et, parfois, la sanction des élèves. L'évaluation est perçue comme un moyen de contrôler et ajuster les progrès (item 18), mais aussi de sanctionner les élèves en fonction de leur investissement ou de leur performance (items 20, 30). Elle joue un rôle régulateur, où les résultats servent à classer et différencier les élèves (item 42). Certains items (item 24) soulignent une vision plus formative, mais moins dominante, tandis que d'autres mettent en avant une approche traditionnelle et punitive, où l'évaluation devient un outil pour distinguer et sanctionner les élèves selon leur niveau de réussite.

2. *Analyse des questions ouvertes*

Pour la question « Dans l'enseignement, "évaluation" et "apprentissage" sont liés de différentes façons. Au moyen de trois phrases courtes, exprimez les différents liens que vous percevez entre ces deux termes, ceux-ci devant apparaître dans chaque phrase. » Nous avons créé 14 différents codes sur Nvivo suivant la méthode classique d'analyse thématique (Braun et Clarke, 2006 ; Willig, 2013)). Une première analyse des réponses a permis d'établir des codes basés sur les idées principales des discours des participants. Les résultats montrent que « la mesure de l'apprentissage » (18 occurrences) et « l'ajustement de l'enseignement » (11 occurrences) sont les éléments les plus cités, suggérant que les évaluations sont principalement utilisées pour évaluer les acquis des élèves et adapter les méthodes d'enseignement. « L'amélioration de l'apprentissage » et « le diagnostic » suivent, chacun avec 8 occurrences, indiquant que les évaluations servent aussi à identifier les lacunes. En revanche, des aspects comme la « motivation » (1 occurrence) et les « stratégies d'évaluation » (2 occurrences) sont moins évoqués. L'évaluation formative émerge comme un outil crucial pour l'amélioration des apprentissages des élèves. La question « Expliquez brièvement vos expériences en évaluation formative vécues en tant qu'élève », met en lumière plusieurs aspects clés du parcours éducatif des participants. La « forme d'évaluation » (10 occurrences) et la « préparation pour les évaluations » (9 occurrences) sont les éléments les plus fréquemment mentionnés, indiquant une diversité de démarches évaluatives, comme les évaluations papier-crayon et les présentations orales. Les participants soulignent l'utilisation de l'évaluation formative pour se préparer à l'évaluation sommative. La « rétroaction et encouragement » (8 occurrences) ainsi que le « développement des habiletés » (6 occurrences) mettent en avant l'importance des commentaires constructifs et des compétences pratiques. D'autres aspects notables incluent la « consolidation des connaissances » et le « diagnostic » (4 occurrences chacun), ainsi que l'attention portée à « combler les lacunes d'apprentissage » (5 occurrences).

3. *Conception des mathématiques et de son enseignement*

Concernant l'expérience en enseignement des mathématiques, 60 % des répondants n'en ont pas, bien que la même proportion ait appris les mathématiques au secondaire et au Cégep (Collège d'enseignement général et professionnel dans la province du Québec). Sur la conception des mathématiques, 52 % les voient comme une hiérarchie de concepts, tandis que 46 % les considèrent comme l'étude de modèles, et 25 % les perçoivent comme un ensemble de procédures. En matière d'enseignement, 90 % des participants estiment que le but principal est la résolution de problèmes,

suivi par 70 % qui mentionnent le développement de la pensée logique. Concernant l'évaluation en mathématiques, les répondants préfèrent l'évaluation formative et rejettent l'évaluation normative, avec environ 85 % d'accord sur les questions liées à l'évaluation formative. Cela indique une vision de l'apprentissage comme un processus personnalisé, favorisant le développement continu des compétences plutôt que la simple mémorisation de procédures. Les résultats montrent une forte opposition à l'évaluation critériée normative, avec des réponses indiquant « pas d'accord » sur les questions concernées. Ainsi, les participants voient les mathématiques comme un ensemble de connaissances en évolution, avec un élève perçu comme un apprenant unique qui progresse à son rythme, où l'évaluation n'est pas un outil de classement ou de sanction.

V. DISCUSSION ET CONCLUSION

Les données révèlent des relations significatives entre les pratiques évaluatives et l'amélioration de l'apprentissage des élèves. L'évaluation formative est fréquemment utilisée pour diagnostiquer les besoins des élèves et ajuster l'enseignement, ce qui se reflète dans la haute prévalence des codes « mesure de l'apprentissage » et « ajustement de l'enseignement ». Cela montre une intégration entre l'évaluation et l'enseignement, où les résultats des évaluations servent de guide pour adapter les méthodes d'enseignement. De plus, les expériences des enseignants avec des formes variées d'évaluation, telles que l'évaluation formative et sommative, illustrent l'importance de la rétroaction constructive et du développement des compétences pratiques. L'évaluation diagnostique indique que les évaluations sont également perçues comme des outils pour identifier les lacunes et améliorer les performances des élèves. L'évaluation par les pairs est moins fréquemment citée, suggérant qu'elle joue un rôle moins central dans les souvenirs des participants.

L'évaluation est vue comme un outil essentiel pour surveiller et ajuster l'enseignement en fonction des besoins des élèves. Cela est particulièrement pertinent dans le contexte des mathématiques, où les enseignants en formation reconnaissent l'importance de plans d'apprentissage personnalisés et de la révision continue des pratiques d'évaluation. La planification et le développement de stratégies d'apprentissage, avec un accent sur l'encouragement des élèves à élaborer leurs propres plans d'apprentissage, sont soulignés. Les évaluations sont utilisées non seulement pour mesurer les acquis des élèves, mais aussi pour identifier les éléments à retravailler.

Les résultats montrent une prépondérance de certains aspects dans les réponses des participants. La « mesure de l'apprentissage » et « l'ajustement de l'enseignement » apparaissent comme les éléments les plus fréquemment cités. L'utilisation des tests standardisés pour évaluer les élèves par rapport à des critères définis est également discutée. Les participants mentionnent l'utilisation de l'évaluation formative comme une stratégie pour se préparer à l'évaluation sommative. En outre, les perceptions des futurs enseignants sur l'utilisation des tests standardisés montrent une tension entre l'évaluation des acquis par rapport aux critères définis et la reconnaissance de l'importance des plans d'apprentissage personnalisés. Ces relations soulignent la nécessité d'une approche équilibrée qui valorise à la fois la standardisation des évaluations et l'individualisation des parcours d'apprentissage. L'évaluation normative suscite davantage de réserves, bien qu'elle reste présente dans les conceptions des futurs enseignants, notamment en ce qui concerne le contrôle des acquis.

L'analyse a montré que la conception de l'apprentissage des mathématiques est un processus dans lequel chaque élève est capable d'apprendre et de développer des compétences en mathématiques tout au long de son parcours scolaire. De plus se constate une conception des mathématiques variée, avec une tendance générale à les voir comme une hiérarchie de concepts et d'habiletés, un ensemble de procédures et une étude de patrons ou schémas et l'idée d'une manière de penser semblent moins acceptées par les participants. Les participants considèrent que le but de l'enseignement des

mathématiques est la résolution de problèmes. Ces conceptions diffèrent de celles développées par Schoenfeld (2016), qui mettent l'accent sur une démarche exploratoire et l'abstraction.

Les résultats de cette recherche mettent en lumière les conceptions et les connaissances des futurs enseignants franco-ontariens concernant l'évaluation des apprentissages, ainsi que le lien étroit entre ces évaluations et l'enseignement des mathématiques. Les futurs enseignants reconnaissent l'importance cruciale de l'évaluation formative et sommative dans le processus d'enseignement et d'apprentissage. Ils perçoivent l'évaluation comme un outil essentiel pour surveiller et ajuster l'enseignement en fonction des besoins des élèves, favorisant ainsi une amélioration continue de l'apprentissage. L'utilisation des évaluations pour diagnostiquer et améliorer les apprentissages, ainsi que pour ajuster l'enseignement en fonction des résultats obtenus, est également fortement valorisée par les futurs enseignants. Ils soulignent l'importance de méthodes d'évaluation diversifiées pour répondre aux attentes curriculaires et aux normes sociales, bien que certaines lacunes subsistent, notamment en ce qui concerne la connexion entre l'enseignement et l'évaluation ainsi que la motivation des élèves.

Cette recherche présente certaines limites, notamment un échantillon restreint de trente-trois futurs enseignants, ce qui limite la généralisation des résultats. De plus, les résultats reposent principalement sur les auto-évaluations, pouvant entraîner des biais de désirabilité sociale. Pour mieux comprendre les conceptions des mathématiques et de leur enseignement, il serait souhaitable d'adopter des méthodes complémentaires, telles que des entretiens ou des scénarios d'enseignement, afin d'approfondir la compréhension des futurs enseignants sur ce sujet.

RÉFÉRENCES

- Allal, L. (2007). L'évaluation formative dans l'enseignement scolaire. Dans M. Crahay et D. Lafontaine (dir.), *L'évaluation des compétences* (p. 57-74). De Boeck Supérieur.
- Allal, L., et Mottier Lopez, L. (2005). La régulation des apprentissages : origines et perspectives d'un concept. *Educational Psychology Review*, 17(2), 9-38.
- Black, P. et Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5-31.
- Black, P. et Wiliam, D. (2015). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 5(1), 7-74.
- Braun, V. et Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77-101.
- Creswell, J. W. et Plano Clark, V. L. (2018). *Designing and conducting mixed methods research* (3^e éd.). SAGE.
- Davies, A., Herbst, S. et Reynolds, B. (2020). *Assessment literacy: Foundations for teacher education*. Ministry of Education.
- DeLuca, C. et Klinger, D. A. (2010). Assessment literacy development: Identifying gaps in teacher candidates' learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 17(4), 419-438.
- DeLuca, C., LaPointe-McEwan, D. et Luhanga, U. (2016). Teacher assessment literacy: A review of international standards and measures. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 28(3), 251-272.

- Earl, L. M. (2013). *Assessment as learning: Using classroom assessment to maximize student learning* (2^e éd.). Corwin Press.
- Fagnant, A. et Goffin, C. (2017). Les conceptions des futurs enseignants du secondaire en matière d'évaluation : Entre un accord de principe et une vision limitée de l'évaluation formative. *Mesure et évaluation en éducation*, 40(1), 1-32. <https://doi.org/10.7202/1041002ar>
- Fortin, M. F. et Gagnon, J. (2016). *Fondements et étapes du processus de recherche* (3^e éd.). Chenelière.
- Grugeon-Allys, B., Thievenaz, J. et Salles, C. (2018). L'évaluation en classe de mathématiques : modèles théoriques et outils pratiques. *Revue des Sciences de l'Éducation*, 44(2), 321-339.
- Hattie, J. et Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81-112.
- Issaieva, A. et Crahay, M. (2010). Évaluation normative versus évaluation critériée : comparaisons des pratiques et des perceptions des enseignants. *Journal of Educational Research*, 3(1), 54-68.
- Issaieva, A., Crahay, M. et Lafontaine, D. (2015). L'évaluation certificative et les compétences à développer en mathématiques. *Pédagogie Collégiale*, 28(1), 14-21.
- Laveault, D. (2014). L'évaluation formative : un levier pour l'amélioration des apprentissages scolaires. *Formation et profession*, 22(1), 23-35.
- Laveault, D. (2016). Assessment policy enactment in education systems: A few reasons to be optimistic. Dans D. Laveault et L. Allal (dir.), *Assessment for learning: Meeting the challenge of implementation* (p. 21-34). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-39211-0_2
- Ministère de l'Éducation de l'Ontario [MÉO]. (2010). *Faire croître le succès : évaluation et communication du rendement des élèves fréquentant les écoles de l'Ontario*. Queen's Printer for Ontario.
- Mottier Lopez, L. (2007). L'évaluation formative : de la notion à la mise en œuvre. *Revue Française de Pédagogie*, 161(1), 5-16.
- Mottier Lopez, L. (2015). *L'évaluation au cœur des apprentissages*. De Boeck.
- Organisation de Coopération et de Développement Économiques [OCDE]. (2011). *Examens des politiques nationales d'éducation : réformes de l'évaluation en vue d'améliorer l'apprentissage*. OCDE.
- Rocque, R. (2014). La transparence dans l'évaluation : enjeux et perspectives. *Revue de l'évaluation en éducation*, 7(3), 45-56.
- Sayac, N. (2020). L'évaluation formative en mathématiques : nouveaux enjeux et perspectives pédagogiques. *Les Dossiers des Sciences de l'Éducation*, 43(1), 25-40.
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 108(4), 589-597.
- Suurtamm, C. (2018). Évaluation des apprentissages en mathématiques : une perspective pour l'amélioration des pratiques. *Revue canadienne de l'éducation*, 41(1), 102-124.
- Suurtamm, C., Koch, M. et Arden, A. (2010). Assessment in mathematics education: Large-scale assessments and classroom assessments. *ZDM*, 42(3), 263-276.
- Suurtamm, C., Koch, M. et Arden, A. (2016). Assessment and evaluation in the teaching of mathematics. *Mathematics Teacher Education*, 23(1), 1-12.

ANNEXE 1

QUESTIONS FERMÉES DU QUESTIONNAIRE

Méthode d'extraction : Maximum de vraisemblance/ Promax	Facteurs		
	1	2	3
38-Il est important de surveiller et de réviser la pratique d'évaluation pour améliorer la qualité de l'enseignement.	.862		
35-Il est important de passer en revue les attentes d'apprentissage avec les élèves et de les encourager à développer leur plan d'apprentissage et d'évaluation pour l'unité en cours.	.776		
31-Les évaluations visent à déterminer ce que l'enseignant peut faire pour aider les élèves à progresser.	.775		
22-Les évaluations en maths permettent de repérer ce qu'il faut retravailler avec mes élèves.	.764		
25-L'évaluation doit permettre d'identifier les difficultés des élèves pour construire une séquence d'enseignement.	.716		
36-Pour bien évaluer, il est important d'avoir des objectifs clairement définis.	.713		
19-L'analyse des résultats des élèves aux évaluations permet d'ajuster l'enseignement en fonction de leurs faiblesses en maths.	.667		
32-Les évaluations visent à inciter les élèves à ajuster leurs stratégies d'apprentissage.	.664		
39-Chaque élève est encouragé à développer un plan d'apprentissage personnel en fonction de ses forces, de ses besoins d'apprentissage et des objectifs d'apprentissage.	.599		
16-Les évaluations en maths permettent de repérer les élèves qui ont besoin d'une explication supplémentaire.	.597		
41-Il est important que les élèves apprécient et évaluent leurs travaux.	.539		
40-Les tests standardisés peuvent fournir des commentaires sur l'apprentissage des élèves par rapport aux normes éducatives et aider à orienter l'enseignement et l'apprentissage.	.539		
27-Il faut concevoir une approche d'évaluation qui tienne compte de chaque enfant et de son interaction avec son environnement.	.464		
45-Les informations tirées des évaluations formatives sont utilisées pour la création des leçons futures, des activités d'apprentissage, et des tâches d'évaluation sommative.	.455		
33-Les méthodes et types d'évaluation permettent aux étudiants de démontrer leurs apprentissages de diverses manières.	.437		
46-Il est important de surveiller et de réviser les pratiques d'évaluation afin d'améliorer l'apprentissage des élèves.	.378		
21-Les évaluations sont l'occasion pour les élèves de montrer ce qu'ils valent en maths.		.716	
43-Les évaluations permettent de voir si les objectifs du programme sont atteints.		.624	
29-Évaluer l'apprentissage d'un élève, c'est avant tout le situer par rapport aux normes acceptées par une société donnée.		.614	
28-La position de l'élève par rapport aux résultats du reste de la classe est un indicateur fiable de son niveau scolaire.		.554	
26-Les résultats scolaires des élèves doivent être exprimés par rapport à des objectifs réussis.		.542	
44-Le test standardisé permettra aux étudiants de développer des stratégies d'apprentissage, des compétences en préparation aux examens et des objectifs pour leur apprentissage		.524	
34-Les tests standardisés fournissent une mesure importante de la manière dont le système scolaire fonctionne pour tous les élèves		.492	
37-En analysant les résultats des évaluations, l'enseignant propose un enseignement renforcé des concepts difficiles, offrant aux élèves des occasions d'appliquer leurs apprentissages.		.400	

Méthode d'extraction : Maximum de vraisemblance/ Promax	Facteurs		
	1	2	3
18-Les contrôles en maths permettent à l'enseignant de savoir s'il peut avancer dans la matière ou s'il doit reprendre certaines notions ou certains exercices.			.768
20-Les évaluations en maths sanctionnent les élèves qui n'ont pas travaillé			.640
30-Les évaluations permettent de repérer les bons et les mauvais élèves ou encore de sanctionner les élèves qui n'ont pas travaillé.			.571
42-Pour chaque élève, j'utilise plusieurs évaluations bien conçues pour mesurer l'apprentissage afin d'avoir confiance dans les notes que j'attribue			.348
24-Lors des évaluations en maths, les réponses des élèves permettent de cerner les progrès qu'ils ont réalisés depuis le début de l'année.			.225

PARTIR DES REPRÉSENTATIONS SUR L'ÉVALUATION EN FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANT.E.S : QUELS LEVIERS POUR ENRICHIR LES PRATIQUES ?

| HOROKS* JULIE

Résumé | L'objectif de cette étude est de faire un état des lieux de représentations d'enseignant.e.s débutant.e.s sur l'évaluation des apprentissages de leurs élèves en mathématiques, tout en questionnant les moyens de s'appuyer sur ces représentations initiales pour la formation. L'étude portera sur l'étude de questionnaires posés en formation initiale d'enseignant.es de l'école primaire en France, pour analyser les représentations et pratiques déjà là et interroger des leviers potentiels de formation.

Mots-clés : questionnaire, professeurs des écoles, formation initiale, évaluation

Abstract | The aim of this study is to take stock of the representations of novice teachers regarding the assessment of their pupils' learning in mathematics, while at the same time looking at ways of using these initial representations as a basis for training. The study will focus on analysing questionnaires administered during initial teacher training for primary school teachers, in order to analyse the representations and practices already in place and to examine potential training levers.

Keywords: questionnaire, school teachers, initial training, assessment

Quel rôle pourraient jouer les questions relatives à l'évaluation des apprentissages des élèves, pour le développement professionnel des enseignant.e.s ? Comment repérer et tirer parti de leurs représentations initiales et pratiques d'évaluation en germe ? Dans cette communication, nous proposons tout d'abord de présenter la façon dont nous caractérisons les pratiques enseignantes, et en particulier les pratiques d'évaluation des apprentissages de leurs élèves en mathématiques. Nous explicitons ensuite les moyens que nous nous sommes donnés pour étudier ces pratiques déclarées par des professeur.e.s des écoles en formation initiale, dans le but d'en faire un levier de formation. Nous n'avons pas de recul sur les effets d'une telle formation sur les pratiques, mais nous en tirons de nouvelles questions pour la formation et la recherche.

I. NOS OUTILS POUR ANALYSER LES PRATIQUES D'ÉVALUATION

1. *Une double approche des pratiques enseignantes : par la classe et le contexte d'enseignement*

Dans notre approche pour analyser les pratiques enseignantes en recherche, nous supposons que les apprentissages des élèves en mathématiques sont favorisés en particulier par les choix de tâches et de déroulement proposés par l'enseignant.e. C'est donc tout naturellement que notre regard, pour analyser les pratiques (Robert et Rogalski, 2002), se porte en priorité sur les choix que font les professeur.es pour leur classe, en termes de contenus mathématiques et de façons de les faire vivre dans une classe donnée, influençant ainsi les activités mathématiques possibles pour les élèves, à l'origine selon nous de leurs apprentissages potentiels. Ainsi, nous interrogeons la façon dont les enjeux a priori des tâches proposées par l'enseignant.e, sont plus ou moins préservés par ses choix de gestion de classe, selon qu'il ou elle s'appuie ou non sur le produit des activités mathématiques de ses élèves,

* LDAR-UPEC – France – jhoroks@gmail.com

en leur laissant ou non des initiatives dans la résolution de ces tâches et dans la mobilisation des connaissances mathématiques nécessaires pour les résoudre.

Pour interpréter ces choix, nous tenons cependant aussi compte du fait que les marges de manœuvre inhérentes au métier sont plus ou moins grandes pour un.e enseignant.e donné.e dans une classe donnée. Les propositions qui sont faites aux élèves ne sont alors pas seulement motivées par les apprentissages qu'elles peuvent provoquer ; elles sont aussi fortement influencées par diverses contraintes liées au métier. Nous caractérisons ainsi les pratiques enseignantes selon cinq composantes (Robert et Rogalski, 2002), dont l'imbrication rend compte de leur complexité.

Les deux premières composantes sont liées aux éléments dont nous avons déjà parlé plus haut pour parler de ce qui se passe en classe de mathématique :

- *La composante cognitive* : les contenus donnés aux élèves (tâches, cours) ;
- *La composante médiative* : la gestion correspondante en classe (déroulement des séances)

Ces deux composantes nous permettent de faire des hypothèses sur les activités mathématiques qui peuvent en découler chez les élèves, dans une classe donnée. Nous considérons aussi trois autres composantes, relatives à ce contexte d'enseignement :

- *La composante sociale* : le profil de l'établissement et de la classe, la possibilité d'un travail avec les collègues ;
- *La composante institutionnelle* : les programmes scolaires et les horaires en mathématiques ;
- *La composante personnelle* : l'expérience de la profession et les conceptions et connaissances qu'a pu construire l'enseignant.e sur son métier.

Nous pensons en effet par exemple que la représentation que peut avoir l'enseignant.e de ses élèves dans un établissement au profil plus défavorisé, le fait de débiter dans le métier ou de vivre un changement de programme, le fait d'être isolé... sont différents éléments qui peuvent restreindre les marges de manœuvre de l'enseignant.e et influencer ses choix.

2. *Et l'évaluation dans tout ça ?*

Nous nous appuyons, pour délimiter nos questions sur l'évaluation, sur la définition qu'en donnent De Ketele et al. (1997), pour qui :

« évaluer signifie : recueillir un ensemble d'informations suffisamment pertinentes, valides et fiables, examiner le degré d'adéquation entre cet ensemble d'informations et un ensemble de critères adéquats aux objectifs fixés au départ ou ajustés en cours de route, en vue de prendre une décision. » (De Ketele et al., 1997, p. 34).

Compte tenu de la définition que nous avons choisie pour « évaluer », nous entendons alors par « pratiques d'évaluation » des apprentissages des élèves, tout ce qui dans la pratique de l'enseignant.e participe à :

- une prise d'informations sur les activités mathématiques des élèves et / ou sur les connaissances mathématiques que ces activités mobilisent, repérées à différents niveaux (résultats et procédures produits par les élèves pour une ou plusieurs tâches) ;
- une interprétation de ces informations, en référence à différents éléments (concernant les programmes, l'établissement, la classe ou un élève en particulier), et / ou en référence aux savoirs mathématiques visés et à la façon de les mobiliser ;

- une exploitation enfin de ces informations, à plus ou moins court terme (infléchissant ou non le projet d'enseignement, dans la même séance ou une séance future), à travers différents choix (les interactions avec les élèves, le discours plus ou moins mathématique porté sur leurs productions en lien avec les savoirs visés et plus globalement la régulation des apprentissages (Allal et Mottier Lopez, 2007) pour l'ensemble de la classe ou pour certain·es élèves en particulier).

L'entrée par la question de l'évaluation nous semble porteuse de nouvelles pistes pour aller plus loin dans la compréhension des pratiques enseignantes, et pour leur développement. Nous faisons donc l'hypothèse, suite à notre travail collaboratif avec des enseignant·es de mathématiques pendant quelques années (Horoks et Pilet, 2015), que l'entrée par les questions relatives à l'évaluation est un levier pour la formation, en ce qu'elle permet et justifie :

- de faire des apports sur les contenus mathématiques, tâches et procédures, pour outiller les enseignant·es dans leur prise d'information sur les activités mathématiques des élèves ;
- de présenter aussi des apports sur les choix possibles de déroulement et sur leurs enjeux formatifs, en mettant explicitement au centre de nos propos l'intérêt accru pour l'observation des traces effectives des activités des élèves, afin d'apprécier en quelque sorte la ZPD de chaque élève et de construire un enseignement adapté à tou·te·s.

Il nous semble que c'est peut-être aussi l'occasion de jeter une lumière plus positive sur l'évaluation, sujet qui nous semble être plutôt mal aimé en formation initiale et continue, parce qu'associé à un geste professionnel complexe à mettre en place, et souvent restreint à la seule évaluation sommative ou certificative.

En revenant aux cinq composantes, nous pouvons alors les spécifier en lien avec les pratiques d'évaluation. Les composantes cognitive et médiatives nous permettent de décrire la façon dont les tâches sont choisies dans l'évaluation sommative ou diagnostique, ou encore les moyens mis en œuvre en classe pour gérer l'activité mathématique des élèves et en tirer parti pour faire apprendre (en leur confiant certaines responsabilités dans le déroulement de la classe, en leur proposant des retours sur leur travail, en donnant une certaine place à l'erreur, aux productions des élèves et autres traces de leur activité mathématique). Dans la composante sociale, les éventuelles évaluations communes, le choix de l'évaluation par les notes et/ou les compétences, ne relèvent généralement pas d'une décision individuelle. De la même façon, les attendus en termes d'évaluation et les façons d'en rendre compte sont cadrés par les instructions officielles, dans la composante institutionnelle du métier. Enfin, le rapport des enseignant·es à l'évaluation, en tant qu'enseignant·es mais aussi en tant qu'ancien·nes élèves évalué·es, entre dans la composante personnelle et peut faire obstacle selon nous à l'installation de certaines pratiques.

Nous nous sommes donc intéressées aux premières représentations et pratiques d'évaluation enseignant·es débutant·es, en formation initiale, dans le premier degré, pour constater que déjà elles semblent installées, et fortement liées à des éléments ayant trait aux composantes personnelles (souvenirs de l'évaluation en mathématiques en tant qu'élèves), sociale (équité entre les élèves) et institutionnelles (nécessité de faire remonter à l'établissement des informations sur les compétences des élèves), plus qu'à des arguments cognitifs, liés aux apprentissages.

II. UN QUESTIONNAIRE POSÉ AUX ENSEIGNANT·ES DU PRIMAIRE EN FORMATION INITIALE

1. *Nos hypothèses sur la formation*

Dans la maquette de formation des deux années de Master MEEF (Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation) à l'Université Paris-Est Créteil, la mention des questions relatives à l'évaluation est quasiment absente, et le mot « évaluation » apparaît presque exclusivement pour qualifier les évaluations des étudiant.es dans le cadre du master, et non celles des apprentissages de leurs élèves ! Pourtant, « évaluer » fait partie des compétences attendues de ces futur.es enseignant.es, et nous faisons l'hypothèse que cela ne va pas de soi, et nécessite une formation à part entière et en lien avec les contenus disciplinaires enseignés.

En plus d'être un moyen de collecter des données sur les pratiques d'enseignant·es débutant·es, et de les analyser à la lumière de certains paramètres (cycle de stage, année de formation), le questionnaire que nous avons conçu est avant tout un levier de formation : il permet en effet de recueillir des informations exploitables en formation sur les représentations de celles et ceux qui entrent dans le métier, sur des questions liées à l'évaluation des apprentissages de leurs élèves en mathématiques.

Nous faisons en effet l'hypothèse qu'une formation s'appuyant à la fois sur les pratiques déjà là, ou en germe chez les débutant·es, et prenant en compte les contraintes du métier, devrait favoriser chez les formé·es un enrichissement des pratiques possibles, puisque « dans » leur ZPDP (Zone Proximale de Développement Professionnel, cf. Abboud et al., 2023). Ces auteures transposent en effet l'idée de ZPD (Zone Proximale de Développement chez l'élève) en « remplaçant » le travail partagé professeur/élèves — mobilisant des connaissances des élèves

« proches » des connaissances visées dans les activités mathématiques — par un travail partagé formateur/formés en appui sur des pratiques observées des enseignant·es ou à défaut, comme ici, des pratiques déclarées.

2. *Conception du questionnaire*

Nous avons donc proposé un questionnaire, et ce pendant plusieurs années consécutives, à des enseignant·es du premier degré en formation initiale. Notre questionnaire comporte des questions structurées autour d'une décomposition des pratiques selon les cinq composantes, prenant en compte à la fois les contenus évalués, le déroulement des moments d'évaluation, et les contraintes des missions d'évaluateur·trice, et fortement influencées par nos hypothèses et résultats sur les pratiques d'évaluation. Nous cherchons en particulier à voir de quelles façons les enseignant·es disent prendre de l'information sur les apprentissages, connaissances, ou activités mathématiques de leurs élèves, et de quelles façons ils et elles affirment exploiter ces informations, nous donnant ainsi accès aux démarches mais aussi aux fonctions qui sont données à l'évaluation dans leurs pratiques (De Ketele, 2010).

Le tableau ci-dessous (tableau 1) présente les questions posées dans le questionnaire et les justifie au regard de nos hypothèses. Les questions sont presque toutes fermées, avec des choix de réponses proposées qui émanent des pratiques que nous avons déjà pu observer chez des enseignant·es en poste, mais nous demandons systématiquement aux répondant·es de préciser ensuite leur réponse¹.

¹ Nous ne présentons pas d'analyse complète des réponses aux questions ouvertes ici, faute d'espace, mais nous en donnant quelques éléments pour préciser les résultats obtenus aux questions fermées.

Nous questionnons tout d'abord le niveau d'enseignement, pour voir si le fait d'effectuer son stage dans une classe de maternelle (enfants de 3 à 6 ans) plutôt qu'en élémentaire (enfants de 6 à 11 ans), donc avant un passage à l'écrit et la prise d'information formelle lors de tests sur papier, influence la façon de percevoir l'évaluation, en particulier dans sa fonction formative. Nous questionnons aussi les souvenirs des étudiant·es en formation, pour relier d'éventuelles mauvaises expériences, en tant qu'élèves, à des représentations et choix pour évaluer. Nous interrogeons les raisons et façons d'évaluer (moments, fréquence, moyens, différenciation), et les écarts de complexité entre ce qui est traité en classe, et ce qui fait l'objet d'un contrôle sommatif, pour les relier aux fonctions données à l'évaluation par les enseignant·es. Nous cherchons enfin à voir comment ils et elles mettent en perspective les échecs de leurs élèves et leurs choix pour enseigner et évaluer²³.

Tableau 1 – Questions du questionnaire et liens avec nos hypothèses

Questions du questionnaire	Justification pour notre recherche.
<i>À quel niveau enseignez-vous ?</i>	Selon le niveau, maternelle ou élémentaire (voire secondaire), les pratiques d'évaluation diffèrent très probablement, la maternelle nous semblant être plus propice que les autres niveaux scolaires à la mise en pratique d'une évaluation par l'observation des élèves, plutôt qu'à une évaluation formelle écrite.
<i>Quels sont vos souvenirs des évaluations en tant qu'élèves en mathématiques ?</i>	Nous faisons ici l'hypothèse que les souvenirs des étudiant·es en tant qu'évalué·es peuvent influencer leur façon d'évaluer leurs propres élèves.
<i>Quelles raisons associez-vous au fait d'évaluer vos élèves en mathématiques ?</i>	Cette question doit nous permettre de repérer dans quelle mesure les enseignant·es voient l'évaluation comme un moyen de réguler leur enseignement et de favoriser les apprentissages de leurs élèves
<i>Quels moments/ moyens pertinents pour évaluer vos élèves ?</i>	Ces deux questions visent à récupérer des informations sur les pratiques d'évaluation, avec l'hypothèse que le sommatif formel (en fin de séquence, à l'écrit) aura probablement une place prépondérante.
<i>Quels liens y a-t-il entre les exercices que vous donnez en évaluation et ceux que vous proposez pendant la séquence d'enseignement ?</i>	Nous cherchons ici à mesurer l'écart entre enseigné et évalué, pour le relier à la fonction donnée à l'évaluation par les étudiant·es : trier les élèves selon leur capacité à dépasser ce qui a déjà été travaillé ? ou attester de la capacité à refaire ce qui a déjà été fait en classe ?
<i>Est-ce qu'il vous semble possible de ne pas donner le même énoncé d'évaluation sommative à tous vos élèves ?</i>	Ici aussi la fonction de l'évaluation peut transparaître à travers la façon dont les étudiant·es envisagent ou non d'évaluer différemment les élèves : vont-ils et elles refuser de noter de la même façon des épreuves de difficulté différente ? qu'est-ce qui prime à leurs yeux entre équité et égalité ?
<i>Comment interprétez-vous qu'une évaluation sommative soit très mal réussie par la majorité de vos élèves ?</i>	Nous cherchons ici à voir si les étudiant·es remettent en question le travail des élèves, ou l'enseignement dispensé, plus que leur évaluation elle-même, plus rarement questionnée selon nous, lorsque les résultats d'une évaluation en fin de séquence d'enseignement sont globalement médiocres.

3. Utilisation du questionnaire en formation

Le questionnaire a été posé aux enseignant·es formé·es en cours d'année, et en amont d'une formation spécifique sur l'évaluation en mathématiques, dans le cadre des enseignements du master MEEF 1^{er} degré (Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation) à l'Institut national

² Nous cherchons aussi à déterminer ce qui est explicité aux élèves, en amont et en aval de l'évaluation sommative, par des questions ouvertes, mais nous ne présentons pas ces résultats ici.

supérieur du professorat et de l'éducation (INSPE) de l'académie de Créteil (France), pendant plusieurs années.

L'analyse des réponses des étudiant·es³, mais aussi de certains compléments apportés lors de la séance de formation où ils et elles sont confrontées aux réponses de leurs collègues, doit nous permettre de brosser le portrait des pratiques et représentations de ces enseignant·es débutant·es.

4. Résultats pour une promotions d'étudiants

Nous proposons ici les résultats relatifs aux réponses de 38 étudiant·es de 2^e année de master MEEF, pour l'année universitaire 2021-2022. Leurs réponses sont recueillies en avril 2022, soit plus de 6 mois après le début de leur formation et de leur stage en alternance, qui se déroule sur l'un des 3 cycles⁴ de l'enseignement primaire (image 1). Leurs souvenirs de l'évaluation sont variés (image 2), plutôt positifs, avec des bons souvenirs généralement reliés à une maîtrise de la discipline mathématique (mais pas systématiquement). Des difficultés dans la matière ou des incompréhensions sur les attendus sont pointés comme étant les raisons des souvenirs négatifs.



Image 1 – À quel niveau enseignez-vous ?

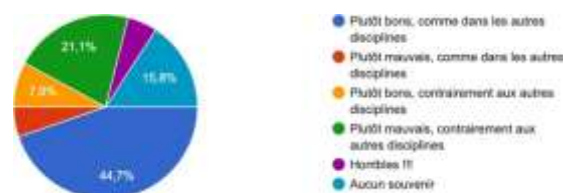


Image 2 – Quels sont vos souvenirs de l'évaluation en tant qu'élèves en mathématiques ?

Nous avons cherché aussi à savoir les fonctions données à l'évaluation par les enseignant·es : noter, sanctionner, motiver, mais aussi prendre de l'information pour ajuster, différencier (image 3). Nous pouvons constater que la prise d'information est déclarée par plus de la majorité des répondant·es comme une raison d'évaluer, alors qu'ils et elles semblent pourtant partagé·es sur l'idée que l'évaluation soit diffuse dans l'enseignement (cf. le peu de consensus sur les réponses à : « On ne peut pas dissocier enseignement et évaluation »).

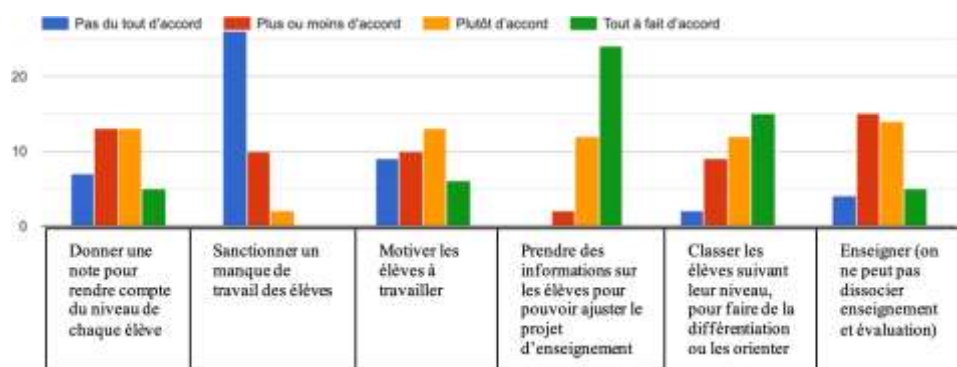


Image 3 – Quelles raisons associez-vous au fait d'évaluer les élèves ?

³ Qui se limite ici à des statistiques descriptives, fondées sur des fréquences relatives, sans prétendre à une significativité des différents résultats.

⁴ Cycle 1 : élèves de 3 à 6 ans, cycle 2 : élèves de 6 à 9 ans, cycle 3 : élèves de 9 à 11 ans. L'un des répondants enseigne dans un double niveau à cheval sur 2 cycles.

Cela nous amène à questionner les moments jugés comme étant pertinents pour évaluer les élèves (image 4), et malgré cette précédente réponse mitigée sur la place de l'évaluation dans l'enseignement, nous pouvons voir que, en dehors du travail à la maison, qui n'est pas prescrit pour les élèves de cet âge (composante institutionnelle), toute occasion proposée (rituels, résolution de tâches, interventions orales, contrôles écrits) leur semble pertinente pour évaluer leurs élèves.

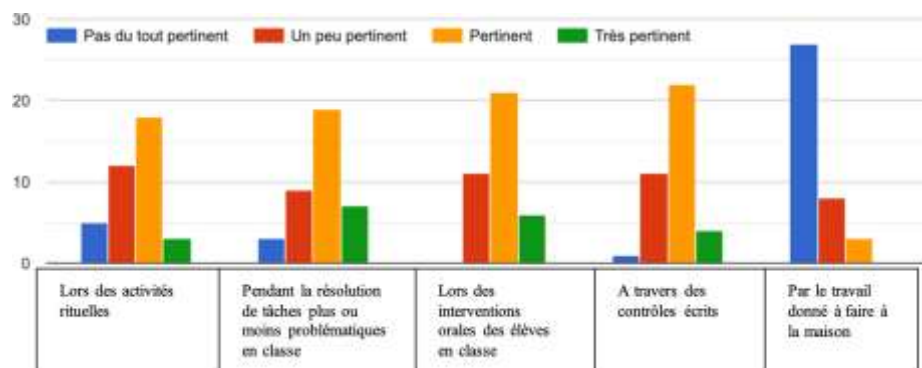


Image 4 – Quels sont selon vous les moments pertinents pour évaluer les élèves ?

Nous avons voulu repérer l'usage de modalités d'évaluation souvent absentes des classes, comme l'auto-évaluation ou évaluation par les pairs (cf. le rapport de Kiwan-Zacka et Piedfer-Quênéy, 2023, pour le CNECO⁵⁶), et départager l'usage des notes ou des compétences (image 5). Les grilles d'observation, moyen de prendre de l'information sur l'activité ou les apprentissages des élèves et d'en garder la trace, ne semblent pas plébiscitées par les enseignant·es débutant·es, à l'exception de celles et ceux qui enseignent au cycle 1, avant l'entrée dans le langage et l'écrit (majorité des réponses positives). Les dispositifs d'autoévaluation et évaluation par les pairs sont peu utilisés. Pour ce qui est des retours faits aux élèves, famille et à l'établissement, ce sont les compétences qui prédominent, conséquence probable des attentes actuelles de l'institution pour l'enseignement primaire.

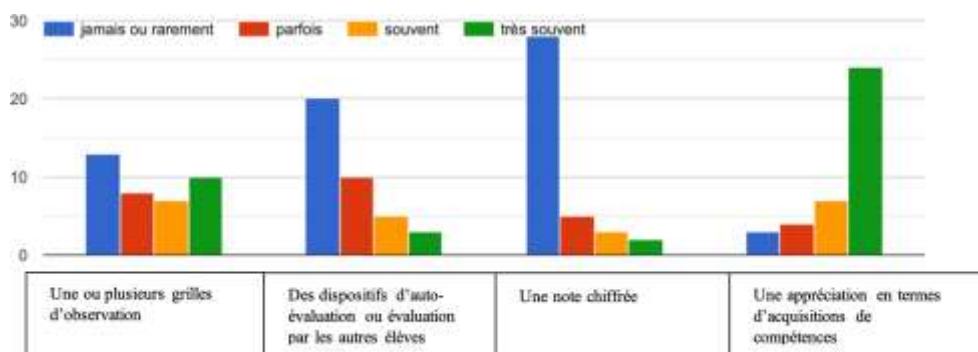


Image 5 – Quels moyens mettez-vous en oeuvre pour évaluer les élèves en mathématiques ?

Nos travaux avec les enseignant·es de mathématiques nous ayant montré un écart fréquent et stable entre les tâches proposées pour s'entraîner en classe et celles données pour l'évaluation finale et formelle des élèves, nous avons voulu repérer un tel écart dans les pratiques déclarées des professeur·es des écoles débutant·es (image 6). Nous constatons ici une volonté de proposer des tâches similaires pour

⁵ https://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2023/03/Cnesco-CC-Eval_KIWAN-ZACKA_PIEDFER-QUENEY.pdf

près de 2/3 des répondant·es, qui va de pair avec un discours sur l'évaluation qui se veut rassurant, et une volonté de permettre aux élèves de réussir, de ne pas les « piéger ».



Image 6 – Quels liens devrait-il y avoir selon vous entre les exercices faits en classe par les élèves et ceux donnés en contrôle de mathématiques ?

Dans le même ordre d'idée (i.e. attester de la réussite pour un niveau donné, plutôt que trier les élèves selon leur performance) nous avons voulu recueillir l'avis de ces débutant·es sur la possibilité de proposer des énoncés d'évaluation différents selon les élèves (image 7). Cette question semble mettre presque tous les enseignant·es de cette promotion d'accord, pour des questions d'égalité et de réussite des élèves, même si la plupart s'accordent sur le surcroît de travail occasionné par la conception d'énoncés multiples adaptés.

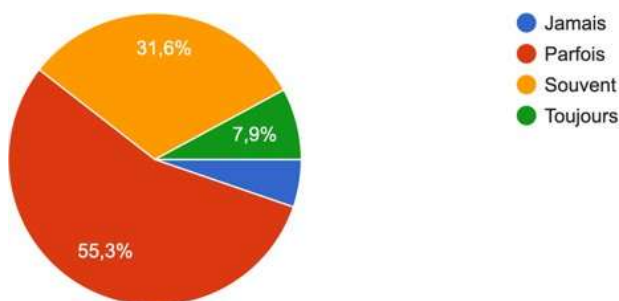


Image 7 – Vous paraît-il possible de donner des énoncés d'évaluation différents suivant les élèves ?

La dernière question du questionnaire concerne la perception par les enseignant·es débutant·es d'une évaluation échouée par l'ensemble de la classe. Nous voulions savoir s'ils et elles remettraient en question leur propre travail (d'enseignant·e et/ou d'évaluateur·trice) ou celui des élèves. Ils et elles devaient donner leur avis sur les 3 premières propositions, et leurs réponses ci-dessous montrent que leur jugement est presque unanime pour dire que cette évaluation ratée est le signe d'un échec de leur enseignement, et dans une moindre mesure, de leurs choix pour évaluer les élèves à cette occasion.



Image 8 – Quelle(s) interprétation(s) faites-vous d'un contrôle raté par l'ensemble des élèves de la classe ?

5. *Exploitation du questionnaire en formation*

L'ensemble de ces questions, dont les réponses restent malgré tout relativement variées, permet de discuter en formation avec les enseignant·es des alternatives possibles dans les choix pour enseigner et évaluer en mathématiques, à partir des pratiques de leurs pairs, et des apports de la recherche en didactique des mathématiques et en évaluation au sujet des effets potentiels de certains choix sur les apprentissages des élèves.

En tant que formatrice — chercheuse en didactique des mathématiques sur les questions d'évaluation — je suis moi-même chaque année étonnée de la force des représentations déjà là de ces enseignant·es qui débutent, et de leurs pratiques déjà ancrées (pour faire comme les collègues, ou comme les professeur·es rencontré·es pendant leur propre scolarité) sans réelle conscience des fonctions et processus sous-jacents. La prise de conscience de certaines de ces représentations et pratiques, dans l'éventail des possibles, nous semble être un moyen de les questionner et d'éclairer les choix qui peuvent être faits pour la classe.

III. CONCLUSION

La synthèse des réponses de promotions récentes d'étudiant·es montre que les souvenirs de l'évaluation vécue en tant qu'élèves sont de moins en moins mauvais, et leur volonté de

« bienveillance évaluative » envers les élèves de plus en plus grande, sans pour autant que les enseignant·es interrogé·es nous semblent déjà avoir les outils pour penser et exercer une évaluation qui favorise les apprentissages de leurs élèves. Les résultats du questionnaire pour l'année 2021-2022, et les échanges qui s'ensuivirent en formation, vont aussi dans ce sens.

Il pourrait être intéressant de recueillir aussi l'évolution des réponses au questionnaire de ces professeur·es des écoles en fin de formation, voire quelques années après leur titularisation, afin de voir de quelle façon leurs représentations sur l'évaluation ont ou non évolué suite à leurs premières années d'exercice. Des questionnaires similaires ont été posés aussi en formation d'enseignant·es dans le 2^e degré technologique et en formation de formateurs/trices, et la comparaison des réponses, selon le profil des formé·es, est aussi une perspective de recherche pour dresser un panorama plus large des représentations et pratiques, sur le thème de l'évaluation en mathématiques.

RÉFÉRENCES

- Abboud, M., Robert A., et Rogalski, J. (2023). Interroger les pratiques de formation des professeurs de mathématiques : orientations de recherche et perspectives (un agenda) », *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Thématique 1 | 2023, 261-285.
- Allal, L. K., et Mottier Lopez, L. (2007). *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation*. De Boeck.
- De Ketele, J. M., Gerard, F. M., et Roegiers, X. (1997). L'évaluation et l'observation scolaire : deux démarches complémentaires. *Éducatio-ns-Revue de diffusion des savoirs en éducation*, 12, 33-37.
- De Ketele, J. M. (2010). Ne pas se tromper d'évaluation. *Revue française de linguistique appliquée*, (1), 25-37
- Horoks, J., et Pilet, J. (2015). Étudier et faire évoluer les pratiques d'évaluation des enseignants de mathématiques en algèbre au collège dans le cadre d'un Léa, In L. Theis, *Actes EMF2015, Pluralités*

culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage,
Alger, Algérie, 10 au 14 octobre 2015, GT9, 491-501

Kiwan-Zacka, M., et Piedfer-Quêney, L. (2023). *L'évaluation scolaire : panorama international des réglementations et des pratiques*. Cnesco-Cnam.

Robert A., et Rogalski J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2-4, 505-528.

ÉVALUATION SOMMATIVE DES ACQUIS D'APPRENTISSAGE EN MATHÉMATIQUES DES FUTURS ENSEIGNANTS DU CYCLE PRIMAIRE

| MORTAQI* KHAOUA ET OURAHAY** MUSTAPHA

Résumé | L'étude présentée évalue les acquis en mathématiques des étudiants de première année de licence en éducation pour l'enseignement primaire et identifie les difficultés rencontrées, en s'appuyant sur les travaux du premier contrôle du module «Mathématiques 1». Inspirée de l'enquête TIMSS, la méthodologie vise à garantir la validité des résultats pour mieux comprendre le parcours éducatif des étudiants. Cette recherche souligne les défis en mathématiques et l'analyse des résultats propose des mesures pour optimiser la formation.

Mots clés : évaluation des acquis, acquis d'apprentissage, résolution de problèmes, techniques de calculs, formation des enseignants

Abstract | The presented study evaluates the learning outcomes in mathematics of first-year students enrolled in the education degree program for primary teaching and identifies the difficulties encountered, based on the results of the first assessment of the "Mathematics 1" module. Drawing inspiration from the TIMSS survey, the methodology ensures the reliability of the findings to provide deeper insight into the students' educational trajectories. The research highlights key challenges in mathematics and offers recommendations to improve teacher training programs based on the analysis of the results.

Keywords: Learning assessment, educational outcomes, problem-solving, calculation techniques, teacher education

I. INTRODUCTION

Au Maroc, la formation initiale des enseignants du cycle primaire se divise en deux programmes distincts : une formation académique menant au diplôme universitaire de licence, dispensée dans un établissement universitaire, et une formation professionnalisante de deux ans aux métiers de l'enseignement, dispensée dans les CRMEF¹.

La formation académique est accessible aux candidats de moins de 22 ans titulaires d'un baccalauréat², quelle que soit leur spécialité. L'admission est sélective, basée sur la moyenne générale du baccalauréat et les notes en mathématiques, en arabe et en français. Ce programme prépare les futurs enseignants à la polyvalence requise pour le cycle primaire. Il inclut des modules en sciences de l'éducation, des cours approfondissant les matières enseignées au primaire, ainsi que des modules en didactique des disciplines spécifiques à ce cycle.

La formation mathématique de cette licence vise à remettre à niveau les étudiants en arithmétique, en algèbre, en géométrie et en statistique, avec des notions déjà vues dans l'enseignement fondamental. Bien que les notions soient supposées acquises, les étudiants viennent de parcours académiques variés, entraînant des différences de compétences en mathématiques. Cette étude se limite à la formation mathématique relative au module intitulé « mathématiques 1 » dont le contenu cible les systèmes de numération à base entière, la divisibilité dans $\mathbb{N}$ et la congruence modulo, les ensembles de nombres, la proportionnalité et les fonctions affine et linéaire. Nous avons choisi de centrer les activités

* ENS Marrakech – Maroc – mortaqikawla@gmail.com

** ENS Marrakech – Maroc – mu.ourahay@uca.ac.ma

¹ CRMEF : les Centres Régionaux des Métiers de l'Éducation et de la Formation.

² Baccalauréat : diplôme de fin de cycle secondaire qualifiant.

d'enseignement de ce module sur la construction du sens des notions et des procédés mathématiques et sur leur mobilisation comme outils de résolution de problèmes. Ce choix est fondé sur les idées suivantes :

- L'enseignement des mathématiques dans les écoles marocaines met l'accent sur l'accumulation de connaissances et la réalisation d'exercices répétitifs, sans insister sur leur application dans des situations complexes (CSEFRS³, 2008).
- La formation des futurs enseignants doit garantir qu'ils maîtrisent les mathématiques et savent les organiser en fonction du niveau de leurs élèves.
- Les résultats d'apprentissage en mathématiques sont le fruit d'un enseignement progressif et d'approfondissement et l'apprenant construit ses propres connaissances à partir de ses acquis antérieurs (Elena Ekimova-Boubil, 2005, p. 90).

En septembre 2022-2023, la filière de licence en éducation de l'ENS de Marrakech comptait 444 étudiants. La première évaluation sommative a montré que la majorité des étudiants avaient obtenu moins de 7 sur 20, ce qui a conduit à une analyse approfondie des résultats en relation avec les profils scolaires des étudiants et l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire.

L'objectif de cette recherche est de comprendre les causes de la performance insatisfaisante des étudiants, en dépit du fait que les acquis d'apprentissage visés correspondent à ceux des programmes de mathématiques du primaire et du secondaire collégial.

II. CADRE CONCEPTUEL

Cette étude cible l'analyse des acquis d'apprentissage des étudiants à partir de leurs productions dans le cadre d'un test d'évaluation sommative. Notre démarche d'analyse s'appuie sur deux notions fondamentales : les acquis d'apprentissage et la résolution de problèmes. Par contre, notre démarche de conception du test d'évaluation renvoie à une approche psycho-didactique soutenue par une méthodologie de conception de tests d'évaluation standardisés.

1. *Acquis d'apprentissage*

Au niveau de la recherche, il y a consensus quant à la définition de « l'acquis d'apprentissage ». Selon, le CEDEFOP⁴, (2010), d'Hoop et al., (2012), et AUF⁵, CITEF⁶ (2017), l'acquis d'apprentissage visé par une unité d'enseignement décrit ce qu'un apprenant devrait savoir, comprendre et être capable de faire au terme d'un apprentissage. Ce concept est étroitement lié aux notions d'objectif et de compétence. Un objectif pédagogique exprime une intention d'enseignement, mais il peut être plus spécifique et ne pas nécessairement se focaliser sur l'apprenant lui-même. En revanche, la compétence englobe l'intégration et l'application des acquis (connaissances, savoir-faire, savoir-être) dans des situations concrètes d'utilisation, tel que discuté par divers auteurs comme Tardif (2006), Romainville (2007), et Leboterf (2008). Les acquis d'apprentissage jouent un rôle principal dans la conception des programmes, des activités de formation et d'évaluation.

³ CSEFRS : Conseil Supérieur de l'Éducation, de la formation et de la Recherche Scientifique du Maroc

⁴ CEDEFOP : Centre européen pour le développement de la formation professionnelle

⁵ AUF : Agence Universitaire de la Francophonie

⁶ CITEF : Conférence Internationale des Formations d'Ingénieurs et Techniciens d'Expression Française

2. *Acquis d'apprentissage et résolution de problèmes*

Selon M. Ourahay (2021), l'enseignement des mathématiques doit s'appuyer sur une progression adaptée au niveau des étudiants, combinant acquisition de connaissances, maîtrise des techniques calculatoires, et développement des compétences nécessaires à la résolution de problèmes. Contrairement à une approche mécanique centrée sur la mémorisation de formules et algorithmes, l'objectif est de donner du sens aux concepts étudiés à travers la résolution de problèmes.

En s'inspirant de la distinction de Glaeser (1973), la résolution d'un problème implique un processus d'exploration et d'invention, tandis qu'un exercice se limite à appliquer des procédures connues. Le test conçu dans ce cadre mobilise les acquis des étudiants en fonction des tâches proposées, selon le modèle de mise en fonction d'A. Robert en 1990. La méthodologie adoptée, inspirée des tests standardisés TIMSS, veille à représenter toutes les composantes du référentiel tout en analysant la nature des activités mathématiques sollicitées.

3. *Référentiel des acquis d'apprentissage et la table de spécification*

Le premier élément essentiel de notre démarche de conception des activités d'enseignement apprentissage et de l'évaluation est de préciser ce qui est attendu des étudiants comme acquis d'apprentissage. La démarche pédagogique adoptée repose sur deux piliers :

- 1) **Définir les acquis d'apprentissage** : Nous avons élaboré un référentiel spécifique au module « Mathématiques 1 », identifiant les notions et techniques essentielles, ainsi que leurs applications dans la résolution de problèmes. Les acquis sont classés selon deux dimensions :
 - a) **Dimension contenue** : attribue chaque acquis à un domaine précis.
 - b) **Dimension cognitive** : distingue deux niveaux – *connaître* (maîtrise des techniques et procédés de calcul) et *appliquer* (utilisation des notions pour résoudre des problèmes).
- 2) **Utiliser la résolution de problèmes** comme contexte principal pour aligner l'activité mathématique avec les objectifs curriculaires du cycle primaire.

Un **référentiel des acquis d'apprentissage** soutient l'enseignement, l'évaluation et l'alignement pédagogique, favorisant la cohérence entre objectifs, activités et évaluations, selon les principes de Biggs (2014) et Gauthier et al. (2005). Ce référentiel sert également à identifier les écarts entre acquis visés et réels (Cros et Raisky, 2010).

Une **table de spécification** est ensuite construite pour garantir la représentativité des acquis à évaluer. Inspirée de la méthodologie TIMSS 2015, elle permet de sélectionner un échantillon pertinent pour concevoir des tests d'évaluation adaptés et fidèles aux objectifs pédagogiques.

III. MÉTHODOLOGIE

Dans cette étude, l'évaluation des acquis d'apprentissage cible les parties suivantes du module : les systèmes de numération, la divisibilité, la congruence et les ensembles de nombres rationnels (Q), décimaux (D) et réels (R). Cette évaluation utilise les traces écrites des réponses des étudiants aux questions.

Certaines questions du test portent sur des exercices (voir l'annexe) évaluant la maîtrise de techniques standardisées de calcul, tandis que d'autres abordent des problèmes demandant de l'exploration et l'utilisation d'opérations et de procédures calculatoires implicitement exigés par la résolution du problème.

1. Traitement des acquis d'apprentissage visés par l'évaluation

Le tableau suivant détaille les parties du module qui sont évaluées lors du premier contrôle continu.

Tableau 1 – Tableau de spécification de la partie du module visée par l'évaluation

Domaines de contenu	Domaines cognitifs des acquis apprentissage			Effectif (Taux %)
	Connaître	Appliquer	Raisonner	
-Systèmes de numération	2	0	0	2 (14,29 %)
- Divisibilité dans N, Multiples et diviseurs, et Congruence	2	6	0	8 (57,14 %)
- Ensembles des nombres Q, D, R	4	0	0	4 (28,57 %)
Effectif (taux %)	8 (57,14 %)	6 (42,86 %)	0 %	14 (100 %)

À part les questions concernant le système de numération qui présente une généralisation du fonctionnement du système de numération décimal, le reste du contenu fait partie des prérequis d'un étudiant du secondaire collégial. La majorité des techniques de calcul ciblées par cette partie du cours s'appuie sur la division, la multiplication et les opérations sur les fractions. Ce qui paraît nouveau pour les étudiants, c'est la résolution de problèmes mathématiques à contexte réel à données numériques et à énoncés verbaux.

Nous avons pris en compte la composition des acquis de la partie du module ciblée par l'évaluation lors de la conception du test, en nous basant sur le cadre de référence et son tableau de spécification. Notre approche d'élaboration du test a pour but de garantir que le test mesure les acquis d'apprentissage des étudiants que nous souhaitons évaluer. La conception du test d'évaluation vise à refléter les proportions des deux dimensions des acquis d'apprentissage établies dans le tableau de spécification.

Tableau 2 – Représentativité des acquis d'apprentissage dans le test

Domaines de contenu	Domaines cognitifs des acquis apprentissage		Barème sur 20
	Connaître	Appliquer	
-Systèmes de numération	Q1, Q2	0	3 points
- Divisibilité dans N, Multiples et diviseurs, et Congruence	Q3, Q4	Pb1, Pb2	12 points
- Ensembles des nombres Q, D, R	Q5, Q6, Q7	0	5 points
Barème sur 20	11 points	9 points	20 points

2. Administration et correction du test d'évaluation

Pour gérer les 444 étudiants de la filière et minimiser les risques de fraude, nous avons créé deux variantes d'une même épreuve. Chaque version est distribuée alternativement aux étudiants dans une salle d'examen. Le test dure 1 h 30.

La correction des réponses des étudiants est évaluée selon quatre critères :

- Réponse juste (R.J.) : Une réponse correcte obtient la note complète selon le barème.
- Réponse mi-juste (R.Mi-J) : Une réponse partiellement correcte , qui utilise une des techniques de calculs ou des démarches de résolution, mais qui présente des erreurs de calcul algébrique. Ce type de réponses reçoit la moitié de la note prévue.

- Réponse fausse (R.F.) : Une réponse incorrecte reçoit zéro point.
- Pas de réponse (Pas R.) : Absence de réponse

IV. ANALYSE DES DONNÉES

1. Analyse du test d'évaluation

L'analyse des données concerne 433 candidats présents à l'épreuve d'évaluation. Nous avons dénombré les effectifs pour chacun des quatre types de réponses. Le tableau ci-dessous présente les résultats obtenus :

Tableau 3 – taux des catégories des réponses

		% des types de réponses			
		R. F.	Pas R.	R. J.	R. Mi-j
Exercice 1	Q1	73,44	1,15	21,94	3,46
	Q2	67,44	3,46	28,18	0,92
	Q3	81,52	1,85	16,17	0,46
	Q4	60,74	0,92	36,72	1,62
Exercice 2	Q1	59,58	12,47	26,79	1,15
	Q2	46,65	22,86	19,4	11,09
	Q3	42,26	21,71	30,72	5,31
Problème 1	Q1	55,66	24,25	16,4	3,7
	Q2	50,12	33,49	14,55	1,85
Problème 2	Q1	56,81	29,1	14,09	0
	Q2	43,19	39,26	16,4	1,15

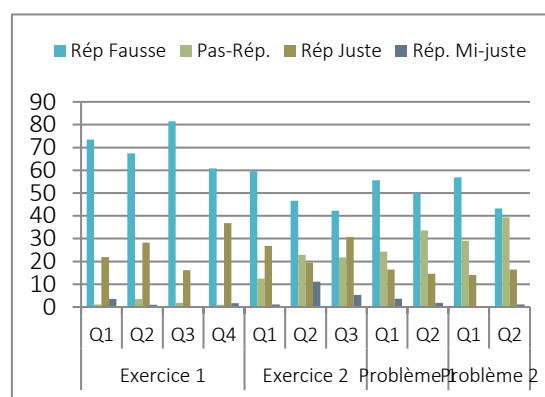


Figure 1 – Taux des catégories des réponses

Les données montrent que plus de 60 % des réponses aux exercices et 80 % aux problèmes sont incorrectes ou non répondues. Cela révèle une faible maîtrise des techniques de calcul standardisées et des difficultés pour 80 % des étudiants à résoudre des problèmes impliquant les multiples et diviseurs communs.

Il est important de noter que la faible performance de la majorité des étudiants ne remet pas en question la validité du test. Il est possible que le test soit trop difficile par rapport au niveau des étudiants, même s'il est aligné avec les objectifs d'évaluation que nous avons fixés.

Le taux des réponses justes de chaque question nous renseigne sur son degré de difficulté. Plus ce taux est proche de 1 plus la question est facile et plus sa valeur s'approche de zéro, plus elle est difficile. Le tableau 3 montre que, toutes les questions du test ont un taux de réussite inférieur à 37 %, indiquant que la performance des étudiants n'est pas adaptée au test.

2. Analyse de la performance dans chacune des deux parties de l'épreuve.

Nous avons élaboré un tableau croisé pour comparer les performances des étudiants dans les composantes techniques de calcul et de résolution. Nous avons divisé chaque composante en quatre niveaux de performance (défaillante (PD), faible (PF), moyenne (PM), et bonne (PB)), avec une étendue de 11 points pour les techniques et 9 points pour la résolution.

Les deux problèmes commencent par une question nécessitant de bien identifier les éléments de l'énoncé à utiliser comme contraintes, puis de les convertir en expressions mathématiques pour amorcer la résolution. Ces types de problèmes ont été abordés en cours et en travaux dirigés. Leur particularité réside dans l'absence d'indices dans l'énoncé, ne suggérant ni les techniques de calcul à appliquer, ni la méthode à suivre.

Tableau 4 – Croisement des performances en technique et en résolution

		Partie de résolution de problèmes				
		PB : [6,75 - 9]	PM : [4,5 - 6,75[	PF : [2,25 - 4,5[	PD : [0 - 2,25[	Total
Partie technique	PB : [8,25 - 11]	13	5	9	6	33
	PM : [5,5 - 8,25[	10	11	8	45	74
	PF : [2,75 - 5,5[	6	13	8	61	88
	PD : [0 - 2,75[	5	7	12	214	238
Total		34	36	37	326	433

Le tableau ci-dessus montre que, pour les étudiants ayant une performance défailante en « résolution de problèmes », une diminution du niveau de performance en composante technique correspond à une augmentation de leur effectif de manière significative. En revanche, pour les étudiants ayant une bonne performance en « résolution de problèmes », une diminution du niveau de performance en composante technique est associée à une diminution de leur effectif. Ainsi, la performance en techniques de calcul est positivement corrélée à celle en résolution de problèmes : les étudiants performants en calcul réussissent également mieux en résolution, tandis que ceux ayant des lacunes en calcul ont généralement des difficultés dans les deux domaines. Cette corrélation peut s'expliquer par l'importance des techniques de calcul comme ressource essentielle pour résoudre des problèmes.

Dans chacune des deux composantes du test, le niveau de performance avec le plus grand effectif est celui de la performance défailante. 214 étudiants (**49,42 %**) ont obtenu une note inférieure à 2,75 dans chacune des deux composantes.

Parmi les difficultés observées dans la résolution de problèmes, on constate que les étudiants rencontrent des difficultés à sélectionner les éléments pertinents des énoncés de problèmes, à établir le lien entre l'énoncé et les exigences, et à identifier les données nécessaires pour appliquer les procédures de calcul adéquates.

Les problèmes posés se distinguent par l'absence de termes indicatifs explicites, susceptibles d'orienter les méthodes de calcul ou les démarches à suivre pour les résoudre. Cette caractéristique, qui semble avoir été un choix délibéré dans l'élaboration du test, peut compliquer leur résolution pour des étudiants habitués, dans leur scolarité post-baccalauréat, à des énoncés stéréotypés comportant des indices clairs. Cependant, cette absence de guidance ne semble pas être la seule explication des difficultés rencontrées. En effet, les résultats montrent des performances très faibles non seulement pour la résolution des deux problèmes écrits, mais également pour la première partie du test. Cela suggère que la difficulté principale pourrait davantage résider dans la maîtrise des notions mathématiques elles-mêmes que dans le format ou la formulation des problèmes.

3. Analyse de la performance selon le type de baccalauréat de l'étudiant

Cette analyse évalue si la performance des étudiants au test est influencée par le type de baccalauréat obtenu, en distinguant entre les baccalauréats en mathématiques et sciences expérimentales (ScME) et

ceux en sciences humaines et sociales (SHS). Les deux groupes d'étudiants ont suivi les mêmes programmes de mathématiques au primaire et au collège.

Tableau 5 – *Distribution de la formation en fonction de la catégorie du baccalauréat*

Niveau Perf.	Défaillant	T. faible	faible	Insuf.	Moyen	A. bien	Bien	T. bien	Excell	Nbre %
Série Bac	[0-3[	[3-5[	[5-7[	[7-9[	[9-12[	[12-14[	[14-16[	[16-18[	[18-20]	
Let - SH - Sc Ec	102 (80,31%)	13 (10,24%)	6 (4,72%)	4 (3,15%)	2 (1,57%)	0 (0,00%)	0 (0,00%)	0 (0,00%)	0 (0,00%)	127 (100%)
PC SM SVT SAg	111 (36,27 %)	44 (14,38 %)	53 (17,32 %)	24 (7,84 %)	27 (8,82 %)	13 (4,25 %)	13 (4,25 %)	10 (3,27 %)	11 (3,59 %)	306 (100 %)

Cette filière de licence est principalement constituée de bacheliers en sciences mathématiques et expérimentales (70,67 %), tandis que 29,33 % viennent des sciences humaines et sociales. Les bacheliers en sciences humaines ont une performance inférieure, avec 80,31 % en « performance défaillante », contre 36,27 % pour les bacheliers en sciences mathématiques et expérimentales. De plus, 95,27 % des bacheliers en sciences humaines et 67,97 % des bacheliers en sciences mathématiques ont obtenu une note inférieure à 7, la note éliminatoire.

Nous ne nous attendions pas à ce qu'un pourcentage élevé de bacheliers en sciences mathématiques et expérimentales obtienne une note inférieure à 7. Cela pourrait s'expliquer par leurs absences fréquentes aux séances d'enseignement. Il semble qu'ils aient sous-estimé le contenu mathématique du module, le percevant comme trop simple, comparable aux niveaux primaire et collégiale.

Nous supposons que la majorité de ces étudiants ont été formés dans un cadre axé sur la mémorisation des techniques de calcul et la répétition d'exercices, ce qui limite leur compréhension approfondie des concepts mathématiques. Cette approche privilégie la mémorisation au détriment de la capacité à appliquer et intégrer les connaissances pour résoudre de nouveaux problèmes.

Nous avons observé que les étudiants de cette filière sont des bacheliers dont la performance est jugée moyenne d'après les résultats de l'examen du baccalauréat. De même, l'étude de M. Ourahay (2021) révèle que, au Maroc, l'évaluation sommative des acquis en mathématiques, tant au cycle primaire qu'au cycle secondaire, a tendu vers une uniformité au fil des années, se traduisant par des épreuves composées d'exercices souvent semblables. Cette uniformité a conduit enseignants et élèves à privilégier les anciennes épreuves comme principales ressources pour l'enseignement et les séances de soutien scolaire, dans le but d'améliorer les taux de réussite. Cette approche pédagogique favorise un apprentissage centré sur la répétition d'exercices types et incite les élèves à adopter des stratégies basées principalement sur la mémorisation des techniques de calcul et des procédés d'application. Ces observations renforcent l'analyse des résultats de la présente étude, qui soutient que la méthode pédagogique employée par les enseignants pour l'enseignement des mathématiques dans les cycles précédents conduit les élèves moins performants à percevoir l'évaluation sommative comme un test constitué d'exercices répétitifs, similaires à ceux rencontrés lors des séances d'exercices.

V. CONCLUSION

Les données révèlent que les étudiants en difficulté, avec une performance défaillante ou faible, représentent deux tiers de la filière, ce qui est préoccupant pour une section de 444 étudiants. En effet, la moitié de ces étudiants présente des difficultés importantes. De plus, une grande majorité d'entre eux (70,67 %) a un profil de bachelier scientifique.

Les résultats alarmants exigent des activités pédagogiques supplémentaires pour soutenir les étudiants. Il est aussi important de revoir les critères d'admission. La faible performance semble davantage liée à la qualité de l'enseignement des mathématiques reçu avant l'université qu'au type de baccalauréat. Le module actuel met l'accent sur la mobilisation des connaissances pour résoudre des problèmes inédits, au lieu de s'appuyer sur des exercices répétitifs. Il est crucial de construire le sens des concepts mathématiques et de les appliquer dans divers contextes.

Nous expliquons l'échec dans l'application des techniques de calcul par le fait qu'elles ont été enseignées aux cycles primaire et secondaire comme de simples procédures à mémoriser. De plus, au niveau secondaire qualifiant, ces techniques sont souvent perçues comme des prérequis basiques, pouvant être effectuées à l'aide d'une calculatrice, ce qui a accentué le problème.

Gérer des groupes nombreux avec des lacunes en mathématiques de base pose un défi pédagogique important, nécessitant des approches inclusives pour soutenir les étudiants. Il est crucial d'assurer une formation efficace tout en garantissant un niveau minimal en mathématiques pour les futurs enseignants du primaire. Cela vise à éviter l'échec et à répondre aux exigences du métier.

En réponse à cette évaluation, nous avons organisé une réunion avec les étudiants, en coordination avec l'administration, pour leur présenter les résultats et proposer d'augmenter le nombre de groupes de travaux dirigés afin d'améliorer les conditions d'enseignement. Les groupes ont été restructurés en tenant compte des emplois du temps, de la disponibilité des salles, et du niveau des étudiants.

Nous avons également mis en place des séances de soutien sous forme de tutorat, encadrées par des étudiants en dernière année de licence en éducation option enseignement des mathématiques au secondaire. Ces mesures ont conduit à une amélioration des performances, réduisant le taux d'échec à 34,86 %.

Un rapport d'évaluation a été transmis aux responsables de l'ENS de Marrakech et au ministère de l'Éducation nationale, avec la recommandation de réviser les descriptifs des modules de mathématiques pour y intégrer la résolution de problèmes réels comme élément central.

RÉFÉRENCES

Agence Universitaire de la Francophonie [AUF]. (2017). *L'approche par compétences : guide méthodologique élaboré par la CITEF* (2e éd., revue et augmentée).

Centre européen pour le développement de la formation professionnelle [CEDEFOP]. (2010). *La transition vers les acquis de l'apprentissage : politiques et pratiques en Europe*. Office des publications de l'Union européenne.

D'Hoop, E., Lemenu, D., Malhomme, C. et Coupremagne, M. (2012). *Articulation entre référentiels, pratiques d'enseignement, dispositifs de formation et pratiques d'évaluation* [Texte final destiné aux Actes du 24^e colloque de l'ADMEE-Europe : L'évaluation des compétences en milieu scolaire et en milieu professionnel] (p. 59-68). https://c2ip.insa-toulouse.fr/_attachment/les-acquis-d-apprentissage-article/A17_02.pdf?download=true

Ekimova-Boublil, E. (2005, octobre). *Une approche de formation didactique à l'enseignement de la géométrie au primaire*. [Thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus
https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/bitstream/handle/1866/16468/Ekimova-Boublil_Elena_2005_these.pdf?sequence=1

Glaeser, G. (1973). *Pédagogie de l'exercice et du problème. Le livre du Problème*. CEDIC.

- Instance nationale d'évaluation du système d'éducation, de formation et de recherche scientifique [INE]. (2021). *Programme national d'évaluation des acquis des élèves de la 6^e année primaire et 3^e année secondaire collégiale – PNEA 2019* [Rapport analytique]. Conseil Supérieur de l'Éducation, de la Formation et de la Recherche Scientifique [CSEFRS], Royaume du Maroc.
https://asset.medias24.com/images/fils/pdf/2021/11/30-11_Rapport_PNEA_2019.pdf
- Journal officiel de l'Union européenne. (2009). *Recommandation du parlement européen et du conseil établissant le système européen de crédit d'apprentissages pour l'enseignement et la formation professionnels (ECVET)*.
- Le Boterf, G. (2008). Des cursus professionnalisants ou par compétences à l'université : enjeux, craintes et modalités. *Actualité de la formation permanente*, (209), 49-55. <http://www.guyleboterf-conseil.com/Approcheparcompetencesuniversites.pdf>
- Lindquist, M., Philpot, R., Mullis, I. V. S. et Cotter, K. E. (dir.). (2019). *Chapter 1. TIMSS 2019 Mathematics framework*. TIMSS & PIRLS International Study Center; Lynch School of Education, Boston College.
- Ourahay, M. (2021). Effets de l'évaluation sommative sur la pratique pédagogique des enseignants : Cas de l'enseignement des mathématiques au baccalauréat. *Revue Marocaine de l'Évaluation et de la Recherche Éducative*, (5), 406-419. <https://doi.org/10.48423/IMIST.PRSM/rmere-v0i5.25635>
- Romainville, M. (2007). La « joyeuse entrée » des compétences dans l'enseignement supérieur. *La Revue de l'inspection générale*, 4, 48-54. <https://researchportal.unamur.be/files/1050517/66193.pdf>
- Tardif, J. (2006). *L'évaluation des compétences : documenter le parcours de développement*. Chenelière.
- Vantourout, M. et Goasdoué, R. (2014). Approches et validité psycho-didactiques des évaluations. *Éducation & formations*, (e-302), 140-156.

ANNEXE 1

COMPOSITION DU TEST D'ÉVALUATION

Partie 1 du test (partie technique)

Les sept questions des deux exercices sont indépendantes. Les techniques de calcul ciblées sont :

- Technique 1 : écrire un nombre en trois chiffres (écrit en lettres) dans un système de numération à base « a » (a est un entier naturel). Écrire un nombre en base 13, Cette technique nécessite de maîtriser l'algorithme de division par 13 et de comprendre la position de chaque reste dans l'écriture du nombre, basée sur sa forme polynomiale en puissances de 13.
- Technique 2 : Effectuer une soustraction avec retenue dans le système à base 13, une opération similaire à la soustraction classique, mais adaptée à cette base.
- Technique 3 : Déterminer le nombre de diviseurs d'un nombre via sa décomposition en facteurs premiers. Cette étape est essentielle pour obtenir tous les diviseurs possibles et leur nombre.
- Technique 4 : Trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres exprimés en produits de facteurs tous inférieurs à 10 et non nécessairement premiers, afin de simplifier la recherche des diviseurs communs.

- Technique 5 : classer par ordre croissant trois fractions. $\frac{11}{17}$; $\frac{12}{18}$; $\frac{13}{19}$ Pour la variante 1 et $\frac{17}{11}$; $\frac{18}{12}$; $\frac{19}{13}$ pour la variante 2 de la question. Trois techniques permettent de comparer des fractions. La première consiste à transformer les fractions pour avoir un même dénominateur, la deuxième à diviser le numérateur par le dénominateur pour obtenir des décimaux, et la troisième à comparer leurs écarts à l'entier le plus proche. Par exemple, pour $\frac{11}{17}$; $\frac{12}{18}$; $\frac{13}{19}$ les écarts à 1 sont respectivement $\frac{6}{17}$; $\frac{6}{18}$; $\frac{6}{19}$ ce qui facilite leur comparaison grâce au numérateur commun.
- Technique 6 : Convertir une fraction non décimale en écriture décimale infinie et périodique en effectuant la division du numérateur par le dénominateur, puis identifier la période de cette écriture.
- Technique 7 : Transformer un nombre rationnel exprimé en écriture décimale infinie et périodique en fraction en éliminant la partie décimale infinie pour reconstruire la fraction.

Partie 2 du test (partie résolution de problèmes) :

Enoncés des problèmes	Activités mathématique visées
Variante 1 du problème 1 : La maison d'Ahmed contient deux réservoirs d'eau. Le premier a une capacité de 35 m³ et le second a une capacité de 42 m³. Ahmed veut acheter une citerne mobile d'un volume x pour remplir les deux réservoirs à partir d'un puits éloigné de sa maison. Il souhaite que le volume de chaque réservoir soit un multiple de x. De plus, il veut que cette citerne lui permette de réduire le nombre de trajets nécessaires pour la remplir du puits. 1. Déterminez la capacité de la citerne qu'Ahmed recherche. 2. Déterminer le nombre nécessaire de citernes d'eau pour remplir complètement les deux réservoirs. Variante 2 du problème 1 : Ahmed possède deux morceaux de tissu, T1 et T2, ayant la même largeur. La longueur de T1 est de 1400 cm et celle de T2 est de 1680 cm. Ahmed cherche à utiliser un bâton de longueur x comme outil pour mesurer la longueur à couper. Il veut découper les deux morceaux de tissu en un nombre entier de pièces ayant toutes la même longueur x et sans laisser de chutes. De plus, il souhaite que la longueur x du bâton lui permette de minimiser le nombre de pièces obtenues. 1. Déterminez x la longueur du bâton. 2. Déterminez le nombre total de pièces obtenues.	Pour résoudre la première question du problème, il faut calculer le plus grand commun diviseur (PGCD) de 1400 et 1680. Les éléments clés à traduire en concepts mathématiques sont : - Déterminer la longueur d'un bâton (ou le volume d'une citerne) utilisé comme unité de mesure. - Comprendre que l'unité doit diviser exactement les deux longueurs (ou volumes), sans reste. - Minimiser le nombre de pièces (ou trajets), ce qui correspond à chercher la plus grande unité possible, donc le plus grand diviseur commun. L'étudiant doit intégrer ces éléments et relier l'absence de reste à la notion de multiple, tout en cherchant le PGCD. La réponse à la deuxième question repose sur la première, car il s'agit ensuite d'utiliser le résultat obtenu pour mesurer les tissus ou les réservoirs en fonction de cette unité.

Variantes 1 et 2 du Problème 2 : Pendant les vacances d'été, Said et Ahmed ont chacun acheté un roman. L'histoire du roman de Said est divisée en chapitres de 12 pages chacun (9 pages chacun dans la variante 2), tandis que celle d'Achmed est divisé en chapitres de 15 pages chacun. Les histoires des deux romans ont le même nombre total de pages, compris entre 150 et 200 pages. 1. Quel est le nombre de pages de chacune des deux histoires ? 2. Combien de chapitres compte l'histoire du roman de Said ?	Pour résoudre la première question du problème, il faut trouver un nombre entre 150 et 200 qui soit un multiple commun de deux nombres : dans la variante 1, de 12 et 15 ; et dans la variante 2, de 9 et 15. Les éléments clés à considérer sont : - Le nombre de pages par chapitre est un diviseur du total des pages de chaque histoire. - Les deux histoires ont le même nombre total de pages. -Pour la deuxième question, il suffit de trouver un multiple de 12 entre 150 et 200 qui soit également divisible par 9.

GENRE ET ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES : ÉTUDE COMPARATIVE DE GESTION D'ÉPISODES ÉVALUATIFS

| BRISMONTIER* CHLOÉ

Résumé | L'article s'intéresse aux différences de performance en mathématiques entre filles et garçons visibles dès les quatre premiers mois de scolarisation obligatoire dans le système éducatif français. L'influence des stéréotypes de genre dans les pratiques évaluatives des professeur·es et la menace du stéréotype de genre sur la performance des élèves y sont questionnées. Pour obtenir des éléments de réponse, une étude comparative de gestion d'épisodes évaluatifs est proposée à partir d'outils théoriques.

Mots-clés : épisodes évaluatifs, stéréotypes de genre, régulation, performance, affect

Abstract | The article focuses on the differences in mathematics performance between girls and boys visible from the first four months of compulsory schooling in the French education system. The influence of gender stereotypes in the evaluation practices of teachers and the threat of the gender stereotype on student performance are questioned. To obtain answers, a comparative study of management of evaluative episodes is proposed based on different theoretical tools.

Keywords: evaluative episode, gender stereotypes, regulation, performance, affect

I. INTRODUCTION

En France, bien que les évaluations nationales aient pour ambition d'offrir une approche éducatrice et psychométrique précise, elles n'apportent aucune explication aux causes de l'écart de performance en mathématiques entre les filles et les garçons, un écart souvent défavorable aux filles. Cette absence d'éclaircissements fragilise la lutte scientifique contre les hypothèses controversées sur les différences intellectuelles entre les genres – i.e. sexe biologique – (C. Perronet et al., 2024). Plusieurs disciplines, telles que les sciences de l'éducation, la psychologie et la sociologie, ont proposé diverses explications. Parmi elles, les pratiques évaluatives des professeur·es sont aujourd'hui questionnées. Elles sont soupçonnées d'être influencées par des stéréotypes de genre, modifiant l'affect mathématique des élèves, au sens de la théorisation de V. A. Debellis et G. A. Goldin (2006), notamment les croyances, les valeurs, les émotions et les représentations liées aux mathématiques, et serait préjudiciable quant à la performance des filles. Cela pourrait se traduire par un contrat didactique en évaluation différencié selon le genre de l'élève. Nous entendons par contrat didactique en évaluation un contrat didactique spécifique à un épisode évaluatif proposé par un·e professeur·e à ses élèves au cours de l'étude d'un savoir (Sayac, 2017). Cette notion de contrat didactique différencié constitue l'objet central de ma thèse, où j'en examine les caractéristiques ainsi que ses liens avec la performance et l'affect mathématique des élèves. Dans cet article, je propose d'abord une analyse graphique des résultats des élèves aux évaluations nationales de la direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP), mettant en lumière l'écart de performance entre filles et garçons en mathématiques. Ensuite, je passe en revue les principaux travaux scientifiques portant sur l'interprétation de cet écart, avant de présenter une partie du cadre de mon étude sur l'influence du genre dans les pratiques évaluatives des professeur·es, les relations entre celles-ci, les performances scolaires et l'affect des élèves envers les mathématiques.

* Université Paris Cité – France – chloe.brismontier@etu.u-paris.fr

II. LES ÉVALUATIONS NATIONALES DE LA DEPP

Depuis l'année scolaire 2018-2019, la DEPP en collaboration avec la direction générale de l'enseignement scolaire (DGESCO) et l'inspection générale de l'éducation, du sport et de la recherche (IGESR), a instauré un dispositif d'évaluation nationale dénommé « Évaluations Repères ». Ce dispositif a pour objectif d'évaluer les niveaux de maîtrise en français et en mathématiques des élèves dans les écoles françaises, tout en permettant aux professeur·es d'ajuster l'organisation pédagogique de leurs classes. Les évaluations de mathématiques destinées aux élèves de cours préparatoire (CP), cours élémentaire 1^{re} année (CE1), cours moyen 1^{re} année (CM1) et 6^e année (6^e) — respectivement grade 1, grade 2, grade 4 et grade 6 pour les niveaux scolaires anglophones — constituent l'une des principales sources de données pour mon étude.

Dans le cadre de ma thèse en didactique des mathématiques, je m'intéresse spécifiquement à l'écart de performance entre les filles et les garçons dans les écoles élémentaires (du grade 1 au grade 5) et les classes de 6e, soit pour les élèves âgés de 6 à 12 ans. Je propose de commencer par une analyse des données sur les résultats des « Évaluations Repères » par niveaux scolaires selon les types de tâches mathématiques de 2018 à 2023. Puis, de poursuivre par une analyse graphique des résultats par domaine mathématique.

1. *Résultats aux évaluations nationales par niveaux scolaires selon le type de tâche mathématique de 2018 à 2023*

La première vague du dispositif d'évaluation nationale de la DEPP s'est déroulée en septembre 2018. Au départ, les « Évaluations Repères » concernaient uniquement les élèves inscrit·es en CP, CE1 et 6^e. Par la suite, le dispositif a été étendu aux classes de CM1 à partir de l'année scolaire 2023-2024, et aux classes de CE2 et CM2 à partir de l'année scolaire 2024-2025. À l'exception des élèves de CP, chaque élève est évalué·e lors d'une passation unique en début d'année scolaire. Pour les élèves de CP, deux passations sont organisées : une en début d'année et une autre en milieu d'année scolaire. À la suite de chaque passation des « Évaluations Repères », la DEPP publie des notes d'information présentant les résultats issus du traitement statistique des réponses des élèves. Ces notes d'information, disponibles sur le site de la DEPP¹, sont accompagnées d'un fichier contenant les données à partir desquelles les tableaux et les graphiques ont été élaborés. Grâce aux données mises en ligne par la DEPP, il est possible d'avoir une lecture de l'écart de performance entre filles et garçons par niveau scolaire selon le type de tâche mathématique évalué pour certaines évaluations nationales.

D'après les données de la DEPP pour le CP, l'écart de performance entre les filles et les garçons est en faveur des filles pour presque tous les types de tâche mathématique évalués lors des passations en début de CP en septembre 2018, 2019, 2020 et 2023. De 2018 à 2022, les filles inscrites en CP sont moins performantes que les garçons en ce qui concerne la comparaison des nombres et le placement d'un nombre sur une ligne graduée. En revanche, pour la passation de début CP en 2023, les filles sont moins performantes que les garçons pour la reproduction d'un assemblage et la résolution de problèmes.

Un phénomène particulier apparaît à la mi-CP. Les résultats de chaque passation des « Évaluations Repères » depuis 2020 montrent que les filles à la mi-CP sont moins performantes que les garçons pour l'ensemble des types de tâche évalués en mathématiques.

¹ <https://www.education.gouv.fr/les-evaluations-nationales-exhaustives-307627>

Pour les élèves inscrits en CE1, les écarts de performance entre filles et garçons, en défaveur des filles, sont beaucoup plus importants et nombreux qu'en début de CP. Le phénomène observé à la mi-CP se confirme en début de CE1. Jusqu'en 2022, les filles sont plus performantes que les garçons pour la reproduction d'un assemblage et le calcul mental (et seulement pour cela). En 2023, les filles sont plus performantes que les garçons pour l'addition et le calcul mental.

D'après les données fournies par la DEPP pour les élèves inscrits en CM1 en septembre 2023, la proportion de filles atteignant une maîtrise satisfaisante est plus élevée que celle des garçons uniquement pour la pose de calculs et le calcul de nombres. Cet écart de performance en faveur des filles est minime par rapport aux écarts de performance en faveur des garçons dans les autres types de tâche évalués en mathématiques.

Pour les évaluations nationales de début de 6^e, la DEPP n'a pas publié les données de l'année 2018, et les données disponibles pour les années suivantes ne répartissent pas les performances selon le genre des élèves à l'exception de la passation de septembre 2023.

2. Résultats aux évaluations nationales par domaine mathématique selon le niveau scolaire de 2018 à 2023

Pour mener une analyse historique des résultats des différentes cohortes d'élèves aux évaluations nationales de CP, CE1, CM1 et 6^e, je propose une lecture graphique de l'évolution de la proportion de filles et de garçons atteignant une maîtrise satisfaisante dans chaque domaine évalué en mathématiques.

Je précise que les types de tâche mathématique regroupés sous « Nombres et Calculs », en plus de ceux évalués en 6^e sous cette appellation, sont les suivants :

- Comparer des nombres entiers (CP),
- Lire des nombres entiers (CP et CE1),
- Écrire des nombres entiers ; Placer un nombre sur une ligne graduée (CP, CE1 et CM1),
- Additionner ; Calculer mentalement ; Soustraire ; Représenter des nombres entiers (CE1),
- Poser et calculer (CM1).

Pour « Espace et Géométrie », les types de tâche mathématique évalués en 6^e sous cette appellation, ainsi que ceux des autres niveaux scolaires, sont :

- Quantifier des collections (CP),
- Reproduire un assemblage (CP et CE1).

En ce qui concerne « Résolution de problèmes », seule la résolution de problèmes évaluée en début de CP, CE1, CM1 et 6^e est prise en compte. Pour « Automatismes », seuls les types de tâche mathématique évalués en 6^e et la mémorisation des faits numériques et des procédures en CM1 pour l'année 2023 sont disponibles. En raison du manque de données, il n'est pas possible de fournir un graphique historique pour la proportion d'élèves filles et garçons en maîtrise satisfaisante dans le domaine « Automatismes ». Ce domaine est donc exclu de mon analyse. Enfin, le domaine « Espace et Géométrie » n'est pas évalué lors des évaluations nationales en CM1.

Les courbes des graphiques pour les domaines « Nombres et Calculs » (graphique 1) et « Résolution de problèmes » (graphique 3) présentent des similitudes. Chaque année où les données étaient disponibles, on observe une meilleure performance des élèves filles et garçons en début de CP par rapport au CE1. En 2023, une diminution de la performance est notée du CP jusqu'à la 6^e. La courbe représentant la moyenne des filles en maîtrise satisfaisante dans « Nombres et Calculs » (graphique 1)

et dans « Résolution de problèmes » (graphique 3) est inférieure à celle des garçons, mais suit une trajectoire similaire. Un écart moyen de -3,3 % est observé entre la courbe des élèves filles et celle des élèves garçons en « Nombres et Calculs », tandis que l'écart moyen est de -3,03 % en « Résolution de problèmes ».

Les courbes du graphique pour le domaine « Espace et Géométrie » (graphique 2) présentent une trajectoire différente de celles des deux domaines précédents. La proportion d'élèves garçons et d'élèves filles en maîtrise satisfaisante dans « Espace et Géométrie » varie très peu au fil des années et entre les niveaux de CP et CE1, jusqu'en 2022. De plus, la proportion de filles atteignant une maîtrise satisfaisante est généralement supérieure à celle des garçons, sauf pour les élèves filles inscrites en CE1 en 2023. Les résultats de la passation de 2023 montrent une forte baisse de performance du CP au CE1, et du CE1 jusqu'à la 6e.

3. Conclusion

La diminution des performances des élèves en mathématiques du CP jusqu'en 6e est observable, quel que soit le genre de l'élève et le domaine mathématique évalué pour les élèves en maîtrise satisfaisante. Cependant, on note une meilleure performance des filles en mathématiques en début de CP, contrairement aux résultats en CE1, CM1 et 6e, à l'exception du domaine « Espace et Géométrie ». D'un point de vue didactique, cette observation soulève des questions quant à la validité des évaluations nationales (Grapin et Mounier, 2020). En effet, la DEPP précise dans sa documentation que les évaluations en CP, CE1 et CM1 ne mesurent pas les compétences mathématiques des élèves et qu'elles n'ont pas pour vocation à mesurer tout ce qui a été appris les années précédentes, mais leurs capacités cognitives fondamentales, contrairement à celles destinées aux élèves de 6e. À la lumière de cette précision, on peut remettre en question le niveau de maîtrise des élèves de primaire en mathématiques décrit par les résultats des « Évaluations Repères ». Toutefois, ces résultats révèlent une différence non négligeable entre la proportion de filles et celle de garçons classés en maîtrise satisfaisante par la DEPP pour un grand nombre de types de tâche évalués en mathématiques.

Pour expliquer la différence de performance entre les filles et les garçons aux « Évaluations Repères », plusieurs pistes ont été explorées par divers champs disciplinaires. Je propose une synthèse, non exhaustive, des notes d'information, articles, ouvrages et enquêtes sur les caractéristiques de cet écart.

III. ÉTAT DE LA LITTÉRATURE NON EXHAUSTIF SUR LES CARACTÉRISTIQUES DE LA DISPARITÉ DES PERFORMANCES FILLES-GARÇONS EN FRANCE

Récemment, des économistes de l'Institut des Politiques Publiques (IPP) ont publié une note intitulée « Le décrochage des filles en mathématiques » (2024). Cependant, comme le montrent les données fournies par la DEPP, la baisse de performance en mathématiques ne concerne pas uniquement les filles, mais également les garçons. Néanmoins, ces recherches de l'IPP ont permis de mieux caractériser l'écart de performance en mathématiques entre filles et garçons, en défaveur des filles. Tout d'abord, l'évolution de cet écart toucherait principalement les filles les plus performantes en début de CP et se manifesterait dans toutes les catégories sociales et configurations familiales, ainsi que sur l'ensemble du territoire. Ensuite, quelle que soit leur performance initiale, les filles progresseraient moins que les garçons de même niveau au départ. Enfin, l'écart serait moins important dans les classes où la majorité des élèves sont des filles, lorsqu'une femme est l'enseignante plutôt

qu'un homme, et lorsque l'école est située dans une zone de Réseau d'Éducation Prioritaire Plus (REP+).

À travers l'enquête ELFE (Étude Longitudinale Française depuis l'Enfance), l'Institut National d'Études Démographiques (Ined) avait dès 2022 relevé des caractéristiques concernant l'écart de performance en mathématiques entre filles et garçons. Le communiqué de presse rédigé par Fischer et Thierry (2022) précise que cet écart en défaveur des filles serait détectable dès l'âge de 5 ou 6 ans, indépendamment de la classe. Les auteurs suggèrent que l'influence du genre ne serait pas d'origine innée, mais demeure inexplicable. D'autres chercheurs et chercheuses se sont intéressé·es à l'hypothèse de l'influence du genre sur la performance des élèves dans le système éducatif français. Plusieurs chercheuses, notamment en sciences de l'éducation, en sociologie et en didactique des mathématiques, remettent en question les pratiques évaluatives des professeur·es (Mathieu-Benmerah, 2023 ; Perronnet et al., 2024 ; Sayac, 2024), affirmant qu'elles reproduisent des stéréotypes de genre. Il est probable que les retours et appréciations des professeur·es soient différenciés selon le genre de l'élève, au détriment des filles. En conséquence, le sentiment de compétence et d'efficacité personnelle des filles pourrait être affaibli (Imberdis et al., 2021). En plus de la connaissance de soi et de l'estime de soi (Martinot, 2001 ; Bishop, 2014 ; Darragh et Radovic, 2018), la performance et les croyances motivationnelles joueraient également un rôle dans la réussite scolaire en mathématiques des élèves. « Les élèves intègrent certains schémas de groupes associés aux disciplines » (Jamain, 2019, p.151), étroitement liés à leur sentiment de compétence et à l'intérêt porté à chaque discipline (Imberdis et al., 2021). N. Mella (2021) confirme ce point en affirmant que la réussite scolaire est liée aux compétences socio-émotionnelles et aux mesures d'adaptation scolaire. Elle pose l'hypothèse, non vérifiée, que les relations entre l'autorégulation scolaire et les compétences socio-émotionnelles dépendent de la capacité des élèves à déployer des stratégies d'apprentissage efficaces. De plus, elle précise que la perception de l'enjeu évaluatif diffère selon la discipline et que cette perception en mathématiques pourrait être défavorable à la réussite scolaire des filles (Mella, 2021).

Une étude qualitative portant sur l'écart de performance en mathématiques entre les filles et les garçons, au désavantage des filles, s'avère nécessaire pour mieux comprendre les liens de dépendance entre la réussite scolaire, l'affect mathématique des élèves et les régulations de chaque individu. Afin d'examiner ces relations, j'ai choisi de travailler principalement dans le cadre du contrat didactique en évaluation (Sayac, 2017). Ce cadre propose un changement de paradigme qui s'ancre dans la réalité des classes en prenant en compte à la fois les facteurs conjoncturels et personnels, dans le but de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux interactions entre l'enseignement, les apprentissages et leur évaluation. Je formule l'hypothèse qu'un contrat didactique en évaluation différencié existe en fonction du genre de l'élève.

IV. DÉFINITION DES OUTILS THÉORIQUES DE MA RECHERCHE

Pour analyser l'influence du genre sur le contrat didactique en évaluation, cette recherche repose sur une étude comparative de gestion d'épisodes évaluatifs informels observés lors de séances d'apprentissage en « Résolution de problème » et en « Espace et Géométrie ». Le choix de ces deux domaines mathématiques s'appuie sur la disparité des performances entre filles et garçons, illustrée par les graphiques 2 et 3. Afin de recueillir des données en quantité suffisante, l'étude est menée dans sept écoles élémentaires et trois collèges figurant dans le territoire expérimental du projet Maryam Mirzakhani² du rectorat de l'Académie de Lille. L'objectif est d'examiner comment les régulations interactives et les jugements professionnels et didactiques en évaluation (JPDE) s'intègrent aux

² <https://filles-maths-nsi-projet-maryam-mirzakhani.site.ac-lille.fr>

stratégies d'apprentissage des élèves et varient selon plusieurs facteurs : la tâche mathématique proposée, son degré de complexité, les pratiques évaluatives du professeur·e et le genre de l'élève. Pour ce faire, quatre niveaux d'analyse sont envisagés : l'épisode évaluatif à travers le prisme du contrat didactique en évaluation, l'activité mathématique des élèves à partir de la théorie de l'activité, les stratégies de régulation des élèves selon la conceptualisation de L. Allal (2007) et les régulations interactives entre le ou la professeur·e et ses élèves. Cet article se concentre sur ce quatrième niveau d'analyse en détaillant les types de régulations interactives observées dans les épisodes évaluatifs, en lien avec les tâches mathématiques proposées.

1. *Catégorisation des régulations interactives*

Les épisodes évaluatifs informels étudiés correspondent à des séances d'apprentissage où sont observées les interactions quotidiennes entre le ou la professeur·e et ses élèves. Je considère que ces interactions reposent sur la capacité ou l'action du professeur·e à formuler un jugement :

- sur les connaissances mathématiques, les procédures et le résultat des élèves, en référence à la tâche mathématique assignée ou aux savoirs prescrits ou enseignés ;
- à caractère injonctif, en lien avec les éléments de contexte de l'épisode évaluatif ;
- sur l'autorégulation de l'élève ou sur l'élève lui-même.

Dans le premier cas, les jugements du professeur·e apportent une information qui agit sur les processus ou les dimensions de l'activité mathématique de l'élève, respectivement lors d'une activité en résolution de problème comme modélisé par N. Grapin et É. Mounier (2024) ou en géométrie comme définis par T. Barrier, C. Hache, A.-C. Mathé et S. Montigny (2013). Dans le deuxième cas, les jugements du professeur·e apportent une information quant à ses JPDE. Pour finir, dans le troisième cas, les jugements du professeur·e apportent une information qui agit sur l'affect mathématique de l'élève et sa capacité à mettre en place des stratégies d'auto-régulation (Debellis et Goldin, 2006). De ma description des interactions quotidiennes pouvant déboucher sur des régulations interactives à partir de la capacité ou l'action du professeur·e à porter des jugements s'en dégage trois registres de régulations interactives : un registre didactique, un registre injonctif et un registre affectif. À partir de cette catégorisation des régulations interactives, des critères d'analyse de celles-ci seront développés pour permettre l'étude de leurs régularités et de leurs variabilités, afin d'identifier les facteurs conjoncturels et personnels à l'œuvre dans la gestion d'épisodes évaluatifs en résolution de problème et en géométrie.

2. *Analyse des régularités et variabilités des régulations interactives*

En s'appuyant sur les travaux de Kiwan-Zacka et Roditi (2018), sur l'analyse des déroulements, qui associent un couple information-action pour chaque « régulation didactique » entre le ou la professeur·e et l'élève ou les élèves, je vais construire mes critères d'analyse des régulations interactives en déterminant quelles informations et quelles actions peuvent avoir lieu dans chaque registre.

Pour le registre didactique, les couples information-actions possibles sont délimités à partir de la définition de « régulations didactiques » de Kiwan-Zacka et Roditi (2018).

« Une “régulation didactique” est caractérisée par la production d'un ou plusieurs élèves lors de la réalisation d'une tâche mathématique, de son interprétation par l'enseignant, et de l'intervention de ce dernier qui peut être un aide à la réalisation de la tâche ou une modification — simplification — de la tâche à réaliser » (Kiwan-Zacka et Roditi, 2018).

Afin de distinguer une action comme aide ou tentative d'aide à la réalisation d'une tâche mathématique d'une action de modification de la tâche à réaliser pour les deux domaines mathématiques observés. Je m'appuie sur la catégorisation des aides apportées dans une construction instrumentée de Petitfour (2015) et sur la construction d'une catégorisation des aides à la résolution de problème à partir d'articles d'écrivant les actions des professeur·e pour venir en aide à leurs élèves (Croguennec, 2023 ; Veyrunes et al., 2005). Les couples information-actions possibles d'après ce travail théorique concernent les combinaisons entre les informations portant sur les connaissances, la procédure ou le résultat de l'élève et les actions amenant à une modification de la tâche mathématique ou à une aide ou une tentative d'aide à la résolution de la tâche mathématique.

Pour le registre injonctif, les régulations interactives peuvent être associées à une information relative au contexte de la séance tels que l'habillage de l'énoncé, les consignes sur le déroulement de la séance et les modalités temporelles, et à une action :

- d'explicitation ou de modification des critères d'évaluation et des buts de l'activité,
- de modification de l'habillage de l'énoncé,
- de validation,
- de relance ou reformulation de la question ou de la réponse de l'élève,
- de demande auprès d'un·e élève d'aider un·e autre élève ;
- de comparaison entre la production de deux élèves ou entre la production d'un·e et un référentiel.

Les actions définies ci-dessus sont des actions indépendantes de la tâche mathématique proposée et où le savoir enseigné ou prescrit est pris comme référentiel sans accompagnement de l'élève dans sa progression de résolution de la tâche mathématique.

Pour le registre affectif, les régulations interactives peuvent être associées à une information relative aux traits affectifs locaux de l'élève — eg. émotions, attitudes ou motivation —, aux traits affectifs globaux de l'élève — eg. estime de soi, croyances ou représentation — ou à la capacité de l'élève à réguler ses émotions (agir par curiosité, considérer la frustration comme un signal pour modifier sa stratégie, mobiliser des émotions positives pour s'engager dans la tâche mathématique, atténuer ou supprimer les émotions négatives pour se concentrer sur la tâche mathématique, etc.). À partir de l'interprétation de ces informations le ou la professeur·e peut agir sur les compétences affectives et les structures affectives des élèves (Debellis et Goldin, 2006), ainsi qu'agir sur l'estime de soi, l'auto-efficacité et les croyances des élèves vis-a-vis des mathématiques (Hattie et Timperley, 2007).

Chaque action menée par le ou la professeur·e peut s'effectuer avec des degrés de conscience et d'intentionnalité variables pouvant déboucher sur un changement ou un renforcement des mécanismes de régulation de l'élève (Allal, 2007). L'état des mécanismes de régulation de l'élève et de leurs évolutions par l'intervention du professeur·e sont importants à prendre en compte dans le cas de cet étude comparative. En effet, la comparaison des types de régulation des élèves permettra d'observer quels « schémas d'interaction » favorisent ou non la transformation des compétences de l'élève selon la tâche mathématique et s'il y a une variabilité selon le genre de l'élève. Les régulations interactives seront considérées comme efficaces si elles permettent : « le guidage, le contrôle ou l'ajustement des activités cognitives, affectives et sociales, favorisant ainsi la transformation des compétences de l'apprenant » (Allal, 2007).

Dans le cas contraire, elles seront considérées comme inefficaces. Genoud et Guillod (2014) ont montré à l'aide d'un questionnaire évaluant les attitudes socio-affectives en maths — 416 élèves y ont participé — que les croyances des élèves sont fortement liées à leurs émotions qui influencent l'activation des processus cognitifs. Ce constat montre la pertinence à porter un intérêt aux effets des « schémas d'interaction » sur l'élève et sur les compétences à acquérir, comme indicateur de la menace du stéréotype de genre sur l'apprentissage des mathématiques des élèves.

V. CONCLUSION

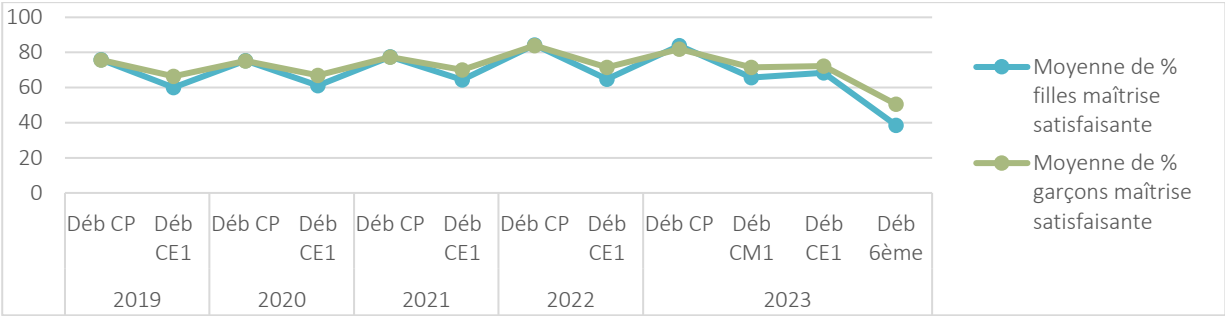
Cet article, rédigé dans le cadre de mes premiers travaux de thèse en didactique des mathématiques, discute du besoin d'appréhender ce qui se joue réellement au niveau de la performance des élèves lors d'une activité mathématique. De nombreuses études qualitatives sont menées sur la menace du stéréotype de genre sur l'apprentissage des mathématiques, l'influence du stéréotype du genre sur les pratiques évaluatives des professeur·es et le choix d'orientation des élèves selon leur genre. Néanmoins, très peu d'entre elles font une analyse par rapport à une compétence ou une tâche mathématique spécifique. Ce constat m'a amené à croiser différents outils théoriques de la didactique des mathématiques, de la psychologie cognitive et de l'affect mathématique pour m'inscrire dans le double champs de la recherche sur l'influence des stéréotypes de genre sur les pratiques évaluatives des professeur·es et l'effet de menace du stéréotype de genre sur la performance des élèves. Mon projet de recherche vise à apporter des éléments de réponse quant aux liens de dépendance entre les pratiques évaluatives des professeur·es, la performance des élèves et leur affect mathématique, afin d'évaluer l'existence d'un contrat didactique en évaluation différencié selon le sexe de l'élève.

RÉFÉRENCES

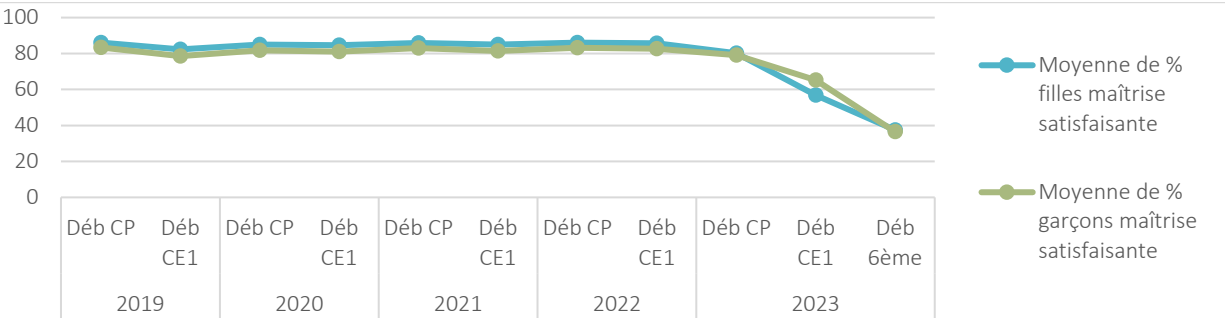
- Allal, L. (2007). Introduction. Régulations des apprentissages : Orientations conceptuelles pour la recherche et la pratique en éducation. Dans L. Allal et L. Mottier Lopez (dir.), *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation* (p. 7-23). De Boeck Supérieur.
<https://doi.org/10.3917/dbu.motti.2007.01.0007>
- Barrier, T., Hache, C., Mathé, A.-C. et Montigny, S. (2013, 18-20 juin). *Décrire l'activité géométrique des élèves : Instruments, regards, langage* [Atelier A31]. 40^e colloque COPIRELEM, Nantes, France.
<https://arpeme.fr/documents/7EE7515454437E3525FA.pdf>
- Bishop, A. (2014). Values in mathematics education. Dans S. Lerman (dir.), *Encyclopedia of mathematics education* (p. 633-636). Springer Netherlands.
- Croguennec, F. (2023). Résolution de situations-problèmes au primaire : un défi de différenciation pédagogique et de didactique. *Revue des sciences de l'éducation*, 49(1). <https://doi.org/10.7202/1107845ar>
- Darragh, L. et Radovic, D. (2018). Mathematics learner identity. Dans S. Lerman (dir.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 1-4). Springer International Publishing.
- Debellis, V. A. et Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 131-147.
- Ministère de l'Éducation nationale [MEN]. (2024, juin). *Les évaluations nationales exhaustives*. DEPP.
<https://www.education.gouv.fr/les-evaluations-nationales-exhaustives-307627>
- Fischer, J.-P. et Thierry, X. (2022). Boy's math performance, compared to girls', jumps at age 6 (in the ELFE's data at least). *British Journal of Developmental Psychology*, 40(4), 504-519.
<https://doi.org/10.1111/bjdp.12423>

- Genoud, P. A. et Guillod, M. (2014). Développement et validation d'un questionnaire évaluant les attitudes socio-affectives en maths. *Recherches en éducation*, (20). <https://doi.org/10.4000/rec.8149>
- Grapin, N. et Mounier, E. (2020). Point de vue didactique sur les évaluations nationales françaises au début de la scolarité obligatoire. *Revue de Mathématiques pour l'École*, (234), 22-30.
- Grapin, N. et Mounier, É. (2024). Évaluer la résolution de problèmes additifs au CP : une étude exploratoire autour de la taille des nombres. *Grand N*, (113), 29-48.
- Hattie, J., et Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81-112.
- Imberdis, A., Toczek, M.-C., Dutrévis, M. et Sacré, M. (2021). Disciplines scolaires et stéréotypes de genre : Perceptions d'élèves et d'enseignant·es. *L'orientation scolaire et professionnelle*, 50(4).
- Jamain, L. (2019). *Biais d'auto-évaluation de compétence en français et en mathématiques chez les élèves de primaire : Évolution et implications pour l'adaptation psychosociale et la réussite scolaire des élèves ?* [Thèse de doctorat, Université de Grenoble Alpes]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-02364688>
- Kiwan-Zacka, M. et Roditi, É. (2018). Régulations didactiques et apprentissages des élèves. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMF2018 « Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines », 22-26 octobre 2018, Gennevilliers, Paris* (p. 77-85).
- Martinot, D. (2001). Connaissance de soi et estime de soi : Ingrédients pour la réussite scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 27(3), 483-502.
- Mathieu-Benmerah, M. (2023). Épisodes évaluatifs et égalité. Comparaison didactique en mathématiques et EPS à l'école primaire. *Genre Éducation Formation (GEF)*, 7.
- Mella, N., Pansu, P., Batruch, A., Bressan, M., Bressoux, P., Brown, G., Butera, F., Cherbonnier, A., Darnon, Demolliens, M., De Place, A.-L., Huguet, P., Jamet, E., Martinez, R., Mazenod, V., Michinov, E., Poletti, C., Régner, I. ... Desrichard, O. (2021). Socio-emotional competencies and school performance in adolescence: What role for school adjustment? *Frontiers in Psychology*, 12, Article 640661. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.640661>
- Perronnet, C., Marc, C. et Paris-Romaskevich, O. (2024). *Matheuses. Les filles, avenir des mathématiques*. CNRS.
- Petitfour, E. (2015, août). *Catégorisation des aides apportées dans une construction instrumentée* [Communication]. EEDM18 : 18e école d'été de didactique des mathématiques, Brest, France.
- Sayac, N. (2017). *Approche didactique de l'évaluation et de ses pratiques en mathématiques : enjeux d'apprentissages et de formation* [Note de synthèse pour HDR, Université Paris Diderot – Paris 7]. HAL theses. <https://hal.science/tel-01723752/document>
- Sayac, N. (2024). Comment expliquer les écarts de performance entre les filles et les garçons en mathématiques aux évaluations nationales de CP-CE1 ? *Évaluer. Journal international de recherche en éducation et formation*, 9(3), 32-51.
- Veyrunes, P., Durny, A., Flavier, E. et Durand, M. (2005). L'articulation de l'activité de l'enseignant et des élèves pour résoudre un problème de mathématiques à l'école primaire : une étude de cas. *Revue des sciences de l'éducation*, 31(2), 471-489.

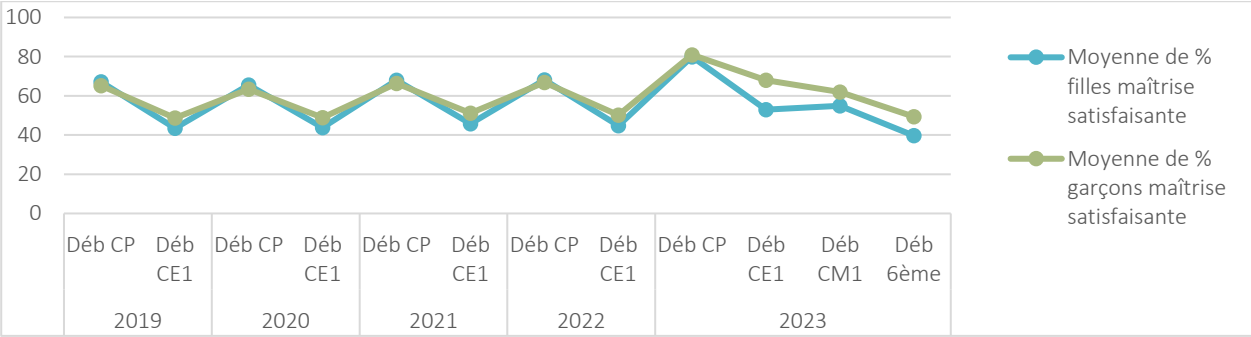
ANNEXES



Graphique 1 – Écarts de performance filles-garçons en maîtrise satisfaisante en « Nombres et Calculs » de 2018 à 2024



Graphique 2 – Écarts de performance filles-garçons en maîtrise satisfaisante en « Espace et Géométrie » de 2018 à 2023



Graphique 3 – Écarts de performance filles-garçons en maîtrise satisfaisante en « Résolution de problèmes » de 2019 à 2024

DIFFÉRENCE DE PERFORMANCE GARÇONS-FILLES À L'ENTRÉE AU PRIMAIRE : COMPLÉMENTARITÉ D'UNE APPROCHE DIDACTIQUE ET PSYCHOSOCIALE

| GRAPIN* NADINE ET SAYAC** NATHALIE

Résumé | En France, les évaluations nationales en mathématiques montrent depuis plusieurs années que les performances des garçons sont meilleures que celles des filles à partir de l'entrée au CE1 (grade 2). Après avoir éclairé ce constat par des travaux combinant approches didactique et psycho-sociale sur les stéréotypes de genre, nous interrogerons la nature de ces évaluations et leur mise en œuvre en classe et montrons en quoi elles sont susceptibles de créer chez les filles des phénomènes de menace de stéréotype.

Mots-clés : stéréotypes de genre, inégalités garçons-filles, validité, didactique des mathématiques, calcul mental

Abstract | In France, national mathematics assessments have shown for several years that boys perform better than girls from the start of CE1 (grade 2). After shedding light on this observation by combining didactic and psycho-social approaches to gender stereotypes, we will examine the nature of these assessments and their implementation in the classroom and show how they are likely to create stereotype threat phenomena in girls.

Keywords: gender stereotypes, gender inequality, validity, mathematics didactics, mental arithmetic

I. INTRODUCTION

Depuis la rentrée 2018, les élèves français sont soumis à des évaluations nationales standardisées en mathématiques à l'entrée au CP (cours préparatoire, grade 1), au CE1 (cours élémentaire 1, grade 2) et 6^e (grade 6). Les résultats aux évaluations de septembre 2023 indiquent :

« En mathématiques, les résultats des garçons sont légèrement inférieurs à ceux des filles en début de CP, à l'exception de la comparaison de nombres et de l'exercice qui consiste à placer un nombre sur une ligne graduée. On assiste à un renversement complet à l'entrée en CE1. On constate alors des écarts importants de réussite, au détriment des filles, en 2023 comme lors des évaluations précédentes. » (Andreu et al., 2023, p. 41)

En tant que didacticiennes des mathématiques préoccupées par les inégalités scolaires dans notre discipline, il nous semble nécessaire de dépasser ce constat et de chercher à l'expliquer en mobilisant des outils propres à notre champ scientifique, mais aussi des travaux en psychologie sociale, notamment ceux relatifs aux stéréotypes de genre. Pour ce faire, nous formulons notre problématique en appui sur des éléments théoriques issus de ces différents champs scientifiques, nous présentons ensuite notre expérimentation et les résultats obtenus et concluons avec quelques pistes pour la recherche et la formation des enseignant·es.

* Laboratoire de Didactique André Revuz – France – nadine.grapin@u-pec.fr

** Laboratoire de Didactique André Revuz – France – nathalie.sayac@univ-rouen.fr

II. PROBLÉMATISATION

1. *Didactique des mathématiques et écart de performance selon le sexe*

Si les résultats aux évaluations à grandes échelles (nationales ou internationales) conduisent à des comparaisons en termes de performances selon le genre, les écarts sont bien souvent éclairés par des éléments d'ordre psycho-social : anxiété, confiance en soi, sentiment d'efficacité personnelle, etc. Peu d'éléments relatifs aux savoirs en jeu en lien avec une analyse *a priori* de la tâche et des erreurs des élèves sont alors proposés. Réciproquement, et à notre connaissance, peu de travaux en didactique des mathématiques prennent en compte la dimension du genre dans leurs questionnements, que ce soit pour documenter les pratiques des enseignants et/ou pour éclairer l'activité de l'élève en contexte d'évaluation. Nous retenons cependant les travaux de Che, Wiegert et Threlkeld (2012) qui montrent des différences dans les types de procédures utilisées par les garçons et les filles lors de la résolution de problème de proportionnalité au grade 3 et ceux de Roditi et Salles (2015) qui, après une analyse des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances mathématiques (Robert, 1998) dans les items du PISA 2012, montrent que « les filles sont d'autant plus en difficulté par rapport aux garçons que le niveau requis de mise en fonctionnement des connaissances est un niveau exigeant » (Roditi et Salles, 2015, p. 252). Enfin, nous avons montré dans une recherche antérieure (Sayac et Grapin, 2016) qu'en fin d'école (grade 5), en France, les garçons attribuent un degré de certitude plus élevé que les filles à leur réponse, qu'elle soit correcte ou fausse. Les garçons auraient donc des connaissances plus assurées que les filles, mais aussi, une ignorance ignorée plus fréquente, selon ces indicateurs.

Même s'ils sont peu nombreux, les résultats produits par ces travaux montrent qu'une approche didactique, à partir d'une analyse des tâches et/ou des procédures des élèves permet d'éclairer de manière complémentaire les différences de performance entre filles et garçons.

2. *Stéréotype de sexe et performance aux évaluations*

Il est reconnu que les filles sont plus sensibles à la pression évaluative (Marsh, Martin et Cheng, 2008 ; Genoud, Ruiz et Gurtner, 2009) et plus anxieuses que les garçons vis-à-vis de leur travail scolaire (Devine et al., 2012 ; Chen et al., 2013). Même si les travaux ayant attesté de ces différences ont concerné des élèves plus âgés que les élèves de CP et CE1 (grades 1 et 2), on peut tout à fait concevoir que passer des évaluations en mathématiques et en français, la semaine qui suit la rentrée scolaire engendre une certaine pression et de l'anxiété chez des petites filles de 6-7 ans (Sayac, 2023). L'observation d'une quarantaine de passations des évaluations Repères en mathématiques dans des classes de CP en janvier 2023, nous a permis de relever des éléments susceptibles de provoquer cette pression évaluative, comme l'usage du chronomètre pour certains exercices ou le placement d'un grand livre pour séparer l'espace de deux élèves partageant la même table. Par ailleurs, ces évaluations ont un caractère très institutionnel, avec un protocole et des consignes très strictement précisés dans les livrets d'accompagnement (par exemple, MENJS 2023b). Les professeur·es que nous avons observé·es les respectent très majoritairement, mais des différences de ton, de discours et d'étayage dues à la façon dont ils/elles s'approprient ces consignes et à leur personnalité peuvent potentiellement générer de l'anxiété auprès de certains élèves et plus particulièrement des filles.

Marie-Christine Tocsek (2005) a montré combien les stéréotypes de sexe pouvaient influencer les performances scolaires des élèves, notamment à travers la nature des consignes données avant la réalisation d'exercices, lors des évaluations nationales, et qu'ils pouvaient avoir une incidence sur leurs performances en fonction de leur genre en mobilisant le phénomène de menace du stéréotype (Steele et Aronson, 1995 ; Régner, Steele et Huguet, 2014). En croisant les données issues des évaluations

Repères administrées à plus de 2,5 millions d'élèves scolarisé·es en France entre 2018 et 2022 avec des informations sur le contexte familial, les enseignant·es et les caractéristiques générales des écoles (publique, privée, en réseau d'éducation prioritaire — REP — ou à pédagogie alternative), les chercheur·es de l'Institut des Politiques Publiques qui souhaitent élucider la raison de l'émergence des écarts de performance en mathématiques entre les filles et les garçons observés en CP et en CE1 ont conclu qu'aucun de ces facteurs ne pouvait expliquer à lui seul ces écarts (Breda et al., 2024). Il et elles ont donc conclu que ces écarts devaient être dus à « une dynamique diffuse dans la société », sous-entendant que les stéréotypes de sexe étaient le facteur explicatif le plus plausible.

3. *Problématique*

Si les résultats nationaux montrent que les filles réussissent dans l'ensemble moins bien que les garçons aux évaluations à l'entrée au CE1 (grade 2), l'écart est particulièrement marqué sur des compétences de calcul en ligne : pour « additionner », il y aurait 15 % de garçons de plus de filles qui « n'auraient pas de difficultés identifiées » sur cette compétence et 9 % de plus sur la compétence « soustraire » (Andreu et al., 2023). Ces résultats, comme tous ceux produits par la DEPP¹, sont le fruit d'un traitement strictement statistique de données codées à partir des productions des élèves et de seuils prédéfinis pour concevoir les groupes différents groupes auxquels vont être affectés les élèves². Ils ne prennent en compte les types d'erreurs commises par l'élève ou leurs procédures, ni le contexte dans lequel sont passées ces évaluations, ni les effets qu'elles peuvent produire sur les élèves. Or, ces deux éléments (contexte et effets) ne sont pas sans incidence sur les performances des élèves comme de nombreux travaux le présument.

Nous avons donc souhaité éclairer ce constat par une étude combinant approche didactique et psycho-sociale afin de chercher les origines de ces écarts de performance. Comme nous l'avons montré dans les deux paragraphes précédents, chacune de ces approches conduit à des résultats intéressants et il nous semble nécessaire de les mener de façon complémentaire. Nous avons choisi de nous centrer sur une tâche de calcul en ligne issue de l'évaluation nationale menée à l'entrée au CE1 (grade 2) puisque c'est à ce niveau et sur cette tâche que les écarts apparaissent comme étant les plus importants. A partir de cette tâche et dans une approche didactique, il s'agit de déterminer si des erreurs types ou des non-réponses pourraient expliquer ces écarts de performance. Puisque nous considérons que filles et garçons disposent des mêmes capacités, il s'agit également de rechercher les sources de ces écarts dans des origines psycho-sociales, en particulier celles liées à la pression exercée par le test et à la confiance qu'accordent les élèves à leurs réponses.

III. MÉTHODOLOGIE

Notre méthodologie combine deux études complémentaires : la première est quantitative basée uniquement sur l'analyse des réponses des élèves, la seconde est qualitative et prend en compte la réponse de l'élève et d'autres traces de son activité (gestes, temps de réponses, etc.), mais aussi des éléments de contexte et son ressenti face à la tâche. La méthodologie, comme les résultats, sont présentés ici de manière synthétique, le lecteur pourra se référer à Grapin et Sayac (soumis) pour davantage de précisions.

¹ Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance.

² Trois groupes d'élèves sont identifiés : « ceux pour lesquels on peut considérer, dès le début de l'année, qu'ils sont en difficulté [...] ; ceux dont les acquis sont fragiles [...] ; ceux pour lesquels il n'y a pas de difficultés identifiées » (Andreu et al., 2023, p. 24).

1. Tâche retenue pour l'étude

La tâche retenue pour l'étude est celle correspondante à l'exercice 7 de l'évaluation nationale à l'entrée au CE1 en 2023 (Figure 1). L'élève dispose de 7 minutes pour entourer, pour chacun des calculs, une bonne réponse parmi les six proposées. Le premier calcul ($5+3$) figurant sur la première ligne est traité collectivement et vise à faire comprendre aux élèves la tâche qui leur est prescrite. Chaque élève avance individuellement, à son rythme, pour traiter l'ensemble des 15 calculs ; aucune indication ou aide n'est apportée par l'enseignant·e durant ce temps.

$5+3=$	53	9	8	2	5	3
$10+8=$	19	108	10	8	18	2
$9-4=$	94	9	13	5	6	4
$9+9=$	0	99	17	18	90	9
$50+50=$	0	50	79	99	100	5050
$10-2=$	10	8	12	102	9	2
$15-5=$	11	155	10	15	20	5
$20+30=$	20	51	2030	10	50	30
$18+4=$	4	184	18	14	22	21
$19-2=$	19	21	192	18	17	2
$56+10=$	66	56	45	5610	46	10
$21+53=$	2153	32	74	21	53	75
$8+46=$	54	38	8	846	46	55
$50+10+8=$	50108	60	18	68	67	58
$35-15=$	15	3515	21	50	20	35
$33-5=$	28	33	38	5	335	29

(Source : MENJS, 2022b)

Figure 1 – Reproduction des pages 21 et 22 du cahier d'évaluation de l'élève à l'entrée au CE1

L'analyse de la tâche montre que les six choix de réponse sont toujours construits de la même façon (ou presque), mais proposés dans un ordre différent avec : la bonne réponse, la bonne réponse +1 ou la bonne réponse -1, le nombre constitué en accolant les termes de la somme ou de la différence, le résultat de l'opération inverse, chacun des deux termes du calcul.

Les procédures pour traiter les calculs dépendent de la taille et de la nature des nombres (Butlen, 2015 ; Grapin et al., 2023). Par exemple, des procédures par comptage (sur-comptage, décomptage) en appui sur la numération orale et avec l'aide ou non des doigts sont possibles notamment pour les calculs dont un des termes est inférieur ou égal à 10 ; un appui sur la numération écrite chiffrée est également possible en particulier pour les calculs dont un des termes (ou les deux) est un nombre entier de dizaines. L'élève peut également mobiliser des procédures passant par une décomposition additive d'un des termes (ou des deux) permettant d'aller à la dizaine supérieure (par exemple : $18 + 4 = 18 + 2 + 2 = 20 + 2 = 22$)

2. Recueil et traitement des données

L'étude quantitative a été conduite à partir des réponses données lors de l'évaluation nationale en septembre 2023 par 265 élèves (128 garçons – 137 filles) de CE1 d'une même circonscription

parisienne. Chacune des réponses a été traitée selon les différentes catégories identifiées lors de l'analyse de la tâche.

Pour l'étude qualitative, des passations individuelles ont été menées par les deux chercheuses auprès de 37 élèves (20 filles / 17 garçons) de fin de CP en juin 2023 résolvant cet exercice dans des conditions similaires à celles des évaluations nationales. A la suite de la réalisation de cet exercice, il a été demandé à l'élève ce qu'il ou elle avait pensé de cet exercice ; il s'agissait avec une question ouverte, de savoir quel était le ressenti de l'élève, s'il ou elle évoquait le caractère complexe ou non de la tâche, certaines des difficultés rencontrées, etc. Nous lui avons également demandé la certitude qu'il ou elle accordait à l'ensemble de ses réponses sur le test. Pour ce faire, nous avons repris de nos travaux précédents (Sayac et Grapin, 2014) une échelle de Likert avec 4 degrés de certitude (pas sûr du tout, un peu sûr, sûr, très très sûr), mais nous l'avons adaptée avec des smileys puisque d'après les recommandations de Houssa et Nader-Grosbois (2018, p. 16), « lorsqu'on utilise une échelle de Likert avec des jeunes enfants, les options de réponse doivent être concrètes et créatives et doivent les aider à comprendre la tâche ».

L'entretien a ensuite porté sur la façon dont l'élève a procédé pour fournir sa réponse à quatre calculs différents : $9 - 4$; $20 + 30$; $18 + 4$; $19 - 2$. Cette étude ayant été réalisée en amont de la première, le choix des calculs ne repose pas sur les observations faites à la suite de l'étude quantitative. Ils ont été retenus parce qu'ils combinent additions et soustractions et que des procédures différentes peuvent être mobilisées pour donner la réponse ; cela permettra ainsi d'étudier si des différences de procédures et/ou d'explications des procédures apparaissent entre garçons et filles. Par exemple, nous avons retenu $9 - 4$ puisqu'il s'agit de la première soustraction du test. Nous supposons que le risque de confusion avec une addition est plus important sur ce calcul et souhaitons étudier si ce type de confusion est plus fréquent chez les garçons ou les filles. En termes de procédures, les élèves peuvent connaître le résultat et le donner rapidement (fait numérique) ou le déterminer en passant par décomptage à partir de 9 ou encore en sachant que $4 + 5 = 9$ (en appui ou non sur les doigts).

Durant la passation, nous avons particulièrement observé si l'élève utilisait ou non ses doigts de façon visible pour donner la réponse et avons pris en note les explications qu'il ou elle nous donnait quant aux procédures qu'il ou elle utilisait pour donner sa réponse ; des enregistrements audio et vidéo de certaines passations ont également été réalisés.

IV. RÉSULTATS

1. Résultats de l'étude quantitative

Les résultats que nous obtenons à l'échelle de la circonscription dans laquelle l'étude a été menée rejoignent ceux obtenus à l'échelle nationale, à savoir que la performance des garçons à cet exercice est meilleure que celle des filles puisque le score moyen des garçons est de 11 réponses justes (sur 15) alors qu'il est de 9 réponses justes (sur 15) pour les filles.

Nous constatons également une augmentation du taux de non-réponse au fur et à mesure de l'avancée dans les calculs avec systématiquement un nombre plus important de non-réponse chez les filles et un écart entre le pourcentage de non-réponse par calcul entre garçons et filles qui se stabilise autour de 13 % à partir du onzième calcul (Figure 2). En moyenne, le nombre de non-réponse pour les garçons est de 1,1 et de 2,1 pour les filles. Cet écart sur le nombre de non-réponses pourrait être un élément explicatif des écarts de performance entre garçons et filles, mais ces écarts perdurent calcul par calcul si on ne prend en compte que les réponses données, c'est-à-dire en écartant les non-réponses.

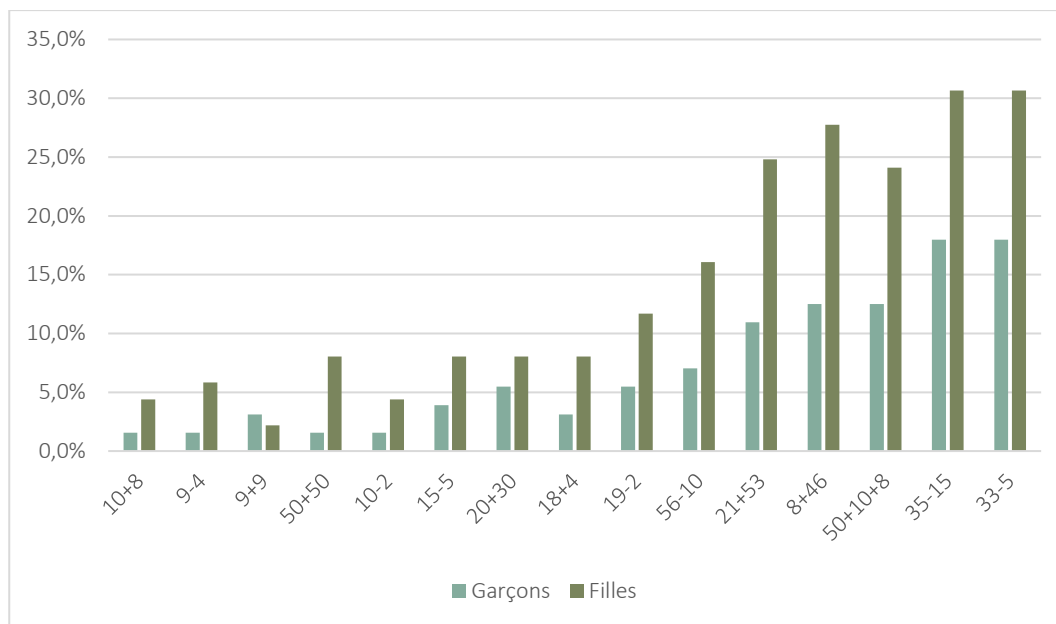


Figure 2 – Pourcentage de non-réponse selon le calcul en fonction du sexe.

Intéressons-nous désormais aux choix de réponses et aux erreurs commises. Les écarts entre garçons et filles sur les types d'erreurs commises sont pour la plupart inférieur à 7 % sauf pour certains calculs. Le nombre composé des deux termes accolés est une erreur peu fréquente (moins de 5 % des réponses) ; l'écart entre garçons et filles est particulièrement marqué pour $50 + 10 + 8$ (10,2 % des garçons et 17,5 % des filles commettent cette erreur).

Les bonnes réponses à $+ ou - 1$ près représentent plus de 10 % des erreurs sur les calculs trois calculs : $56-10$ (10,2 % des erreurs) ; $8+46$ (11,3 %) ; $33-5$ (10,6 %) ; l'écart entre garçons et filles étant particulièrement marqué pour $8+46$ (14,8 % des garçons et 8 % des filles commettent cette erreur).

Enfin, la confusion addition / soustraction représente environ 10 % des erreurs pour chacune des soustractions (elle est inférieure à 4 % pour les additions). La différence entre garçons et filles est particulièrement marquée pour ce type d'erreur sur les trois premières soustractions où la proportion des filles commettant cette erreur est supérieure de plus de 7 % à celle des garçons. Les filles ont davantage tendance à choisir le résultat de l'opération inverse sur les premières soustractions ($9 - 4$; $10 - 2$) et sur la dernière ($33 - 5$) comme le montre l'étude de la répartition des réponses selon les types de distracteurs. L'écart se réduit sur les dernières soustractions, voire s'inverse, ce qui est à relativiser puisque le score de non-réponse est particulièrement élevé pour les filles sur les trois derniers calculs.

Ces constats peuvent, en partie, expliquer l'écart de score entre les filles et les garçons souligné précédemment, mais ils engendrent d'autres interrogations : pourquoi les filles sont-elles plus nombreuses que les garçons à produire des non-réponses, notamment concentrées sur les derniers calculs ? pourquoi choisissent-elles de manière plus marquée l'opération inverse de celle attendue ?

Ces différences constatées entre les productions des filles et des garçons ne peuvent s'expliquer d'un point de vue cognitif, mais la piste d'une pression évaluative plus grandement ressentie par les filles ou celle de l'effet de la menace du stéréotype restent à explorer.

2. Résultats de l'enquête qualitative

Les scores que nous obtenons sur l'échantillon de 37 élèves en fin de CP diffèrent de ceux de CE1 à l'échelle nationale ou à celle de la circonscription. Non seulement l'écart de score entre garçons et filles est plus réduit que celui à l'échelle de la circonscription, mais il est à la faveur des filles : leur score moyen étant de 8,3 bonnes réponses sur 15 et celui des garçons de 7,5. En revanche, comme pour l'enquête précédente, le nombre de non-réponse moyen reste plus élevé chez les filles que chez les garçons et ce dans les mêmes proportions (2,2 *vs* 1,2).

Concernant les procédures, nous remarquons que les élèves utilisent régulièrement leurs doigts de façon visible lorsqu'ils ou elles résolvent la tâche durant le temps imparti pour répondre : les filles les utilisent davantage, en moyenne pour 4 calculs et les garçons pour 3. Même si nous ne le développons pas ici, ce résultat interroge la validité de cette tâche (Grapin et al., 2022) puisque l'objectif qui lui est assigné selon le guide de l'enseignant (MENJ, 2023a) est d'évaluer des connaissances en calcul en ligne des élèves. Les explications données par les élèves lors des échanges avec les chercheuses montrent que si les filles et les garçons utilisent dans une proportion similaire une procédure de comptage, les filles semblent davantage mentionner explicitement l'utilisation des doigts pour expliquer la façon dont elles procèdent. La différence est particulièrement marquée pour $18 + 4$ où par ailleurs aucune fille ne propose une décomposition d'un des deux nombres pour atteindre une dizaine supérieure, alors qu'ils sont trois garçons à le faire.

Les observations réalisées durant le temps de réponse ne permettent pas d'apporter d'élément explicatif sur la présence d'un taux de non-réponse plus important chez les filles. Sur les quatre calculs retenus pour l'entretien, le nombre de non-réponses est faible : 6 non-réponses pour $20 + 30$ (5 filles et 1 garçon) et 1 non-réponse (une fille à chaque fois) pour les trois autres. Lors de l'entretien, 4 filles sur les 5 qui n'avaient pas répondu ont été capables, lors de l'entretien, de choisir une réponse et de proposer une procédure pour produire une réponse. On pourrait alors supposer qu'elles ont préféré ne pas répondre plutôt que de fournir une réponse dont elles n'étaient pas sûres.

Les entretiens menés à la suite de la passation ne permettent pas de montrer des différences notoires dans le ressenti des élèves face à la difficulté de l'exercice. Le degré de certitude moyen accordé aux réponses sur l'ensemble du test est légèrement supérieur chez les filles (3,7/5 chez les filles *vs* 3,2/5 chez les garçons). Signalons cependant que spontanément, la durée de l'exercice n'a été évoquée que par deux garçons (« *c'était dur, mais quand même, j'ai arrivé à faire le minuteur* », « *mon record dans tout ça c'était 3'50 si je ne l'avais pas battu, j'aurais pas aimé* ») et seules trois filles ont fait référence à ce qu'elles avaient travaillé au préalable avec leur enseignante pour expliquer leur ressenti face à la difficulté de certains calculs (« *On n'a pas appris avec la maitresse* » ; « *y'en a qu'on avait appris avec la maitresse* »).

V. DISCUSSION ET CONCLUSION

Nos résultats montrent, si besoin en était, toute la complexité du phénomène à investiguer. L'approche quantitative a permis de renseigner le type d'erreur commis et surtout de faire apparaître que les taux de non-réponses étaient plus importants chez les filles. L'étude qualitative, menée sur un échantillon restreint d'élèves permet quant à elle de formuler quelques hypothèses quant à l'origine des écarts de performance. D'une part, ces écarts semblent ne pas être présents lorsque les conditions de passation ne sont pas identiques à celles des évaluations nationales et que la pression évaluative est moindre : ce résultat rejoint celui de Sayac (2023) sur l'anxiété générée par les conditions de passation de telles évaluation chez les petites filles, au début de l'école primaire. D'autre part, l'évocation plus marquée de l'utilisation des doigts chez les filles lorsqu'elles expliquent les procédures utilisées pour donner le résultat d'un calcul pourrait être interprétée comme étant issue d'une confiance plus grande

dans cette procédure qu'elles utilisent depuis la maternelle ; elles ne prendraient pas le risque d'exposer une procédure qui est plus récente pour elles et qu'elles pensent peut-être moins bien maîtriser. La répétition d'une telle expérimentation serait nécessaire pour investiguer ces hypothèses.

Plus largement, c'est également en menant des recherches portant conjointement sur les pratiques de l'enseignant·e (notamment ses pratiques évaluatives), l'activité en mathématiques de l'élève lors d'épisodes évaluatifs et leurs affects mathématiques que nous pourrions avoir une meilleure compréhension de la façon dont se construisent, s'intensifient ou se réduisent les inégalités de genre en mathématiques en classe. Enfin, former les enseignant·es, mais aussi les formateurs et formatrices, à prendre conscience des inégalités de genre qui peuvent advenir dans les classes et qui se manifestent lors d'épisodes évaluatifs, les amener à « chausser des lunettes de genre » (Plateau, 2011), est une orientation nécessaire. Le protocole FÉM (formation à l'égalité en mathématiques), développé par Sayac (soumis, EMF 2025) est un exemple de formation s'appuyant sur des résultats similaires à ceux que nous avons proposés et mobilisant des outils élaborés dans le cadre de recherches antérieures (degrés de certitude, analyse des tâches, degré de certitudes, composition des groupes, type d'interactions, etc.) afin de sensibiliser les enseignants aux inégalités filles-garçons et à la façon dont elles se manifestent en classe.

RÉFÉRENCES

- Andreu, S., Conceição, P., Desclaux, J., Eteve, Y., Gill-Sotty, C., Loi, M., Laskowski, C., Le Breton, S., Neirac, L., Persem, E., Raffy, G., Rocher, T., Rue, G., Thumerelle, J. et Vourc'h, R. (2023, novembre). *Évaluation 2023. Repères CP, CE1 : premiers résultats* (Document de travail n° 2023-E05). DEPP. <https://www.education.gouv.fr/evaluations-2023-reperes-cp-ce1-premiers-resultats-379863>
- Breda, T., Sultan Parraud, J. et Touitou, L. (2024). Le décrochage des filles en mathématiques dès le CP : une dynamique diffuse dans la société. *Notes de l'Institut des Politiques Publiques*, 101. <https://www.ipp.eu/publication/le-decrochage-des-filles-en-mathematiques-des-le-cp-une-dynamique-diffuse-dans-la-societe/>
- Butlen, D. (2005). *Le calcul mental entre sens et technique*. Presses universitaires de Franche Comté.
- Che, M., Wiegert, E. et Threlkeld, K. (2012). Problem solving strategies of girls and boys in single-sex mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 311-326.
- Chen, H. Y., Chen, M. F., Lee, Y. S., Chen, H. P. et Keith, T. Z. (2013). Gender reality regarding mathematic outcomes of students aged 9 to 15 years in Taiwan. *Learning and Individual Differences*, 26, 55-63. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2013.04.009>
- Devine, A., Fawcett, K., Szűcs, D. et Dowker, A. (2012). Gender differences in mathematics anxiety and the relation to mathematics performance while controlling for test anxiety. *Behavioral and brain functions*, 8, Article 33.
- Genoud, P. A., Ruiz, G. et Gurtner, J. L. (2009). Évolution de la motivation scolaire des adolescents. Différences selon la filière et le genre. *Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften*, 31(2), 377-395.
- Grabin N., Vantourout, M. et Grugeon-Allys B. (2022). S'assurer de la validité des évaluations en milieu scolaire. *Recherches en didactique*, 33(1), 59-83. <https://doi.org/10.3917/rdid1.033.0059>

- Grapin, N., Chenevotot, F., Ledan, L., Beylot, D., Mounier, E. et Blanchouin, A. (2022). Étude exploratoire de procédures d'élèves de 7-8 ans en calcul mental aditif. *Revue Math-École*, 238, 29-40. <https://doi.org/10.26034/vd.rm.2022.3570>
- Grapin, N. et Sayac, N. (soumis). Etudier les différences de performance garçons-filles en mathématiques à l'entrée au primaire : complémentarité d'approches didactique et psycho-sociale. *Education et didactique*.
- Houssa, M. et Nader-Grosbois, N. (2018). *Réalisation d'enquêtes quantitatives par questionnaire auprès de jeunes enfants (5-8ans). Étape 1 : rapport final de recherche*. Institut des sciences psychologiques (IPSY, UCL) ; Université catholique de Louvain. https://oejaj.cfwb.be/fileadmin/sites/oejaj/uploads/Hors_PublicationsTravaux/Documents/CIDE/Participation_des_enfants_en_FWB/outils_pratiques/rapport_final_interroge_enfant.pdf
- Marsh, H. W., Martin, A. J. et Cheng, J. H. (2008). A multilevel perspective on gender in classroom motivation and climate: Potential benefits of male teachers for boys? *Journal of Educational Psychology*, 100(1), 78-95. <https://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.100.1.78>
- Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports [MENJS]. (2023a). *Repères CE1 2023. Guide pour le professeur*. <https://eduscol.education.fr/document/51744/download>
- Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports [MENJS]. (2023b). *Repères CE1 2023. Cahier de l'élève*. <https://eduscol.education.fr/document/51723/download>
- Plateau, N. (2011). Chaussons nos lunettes de genre. *Cahiers pédagogiques*, (487). <https://www.cahiers-pedagogiques.com/chaussons-nos-lunettes-de-genre/>
- Régner, I., Steele, J. R. et Huguet, P. (2014). Stereotype threat in children: Past and present. *Revue internationale de psychologie sociale*, 27(3), 5-12.
- Robert, A. (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.
- Roditi, E. et Salles, F. (2012). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques : un autre regard sur les résultats. *Éducation & formations*, 86-87(11), 235-255.
- Sayac, N. et Grapin, N. (2014). Évaluer par QCM en fin d'école : stratégies et degrés de certitude. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 19, 169-199. <https://doi.org/10.4000/128a7>
- Sayac, N. et Grapin, N. (2016). Stratégies et degrés de certitude des filles et des garçons en mathématiques. *Repères IREM*, (104), 43-57.
- Sayac, N. (2023). Comment expliquer les écarts de performance entre les filles et les garçons en mathématiques aux évaluations nationales de CP ? *Évaluer. Journal international de recherche en éducation et formation*, 9(3). <https://doi.org/10.48782/e-jiref-9-3-31>
- Sayac N. (soumis). Expérimentation d'un protocole de formation à l'égalité en mathématiques (FÉM), de la maternelle au lycée. *Recherche et formation*.
- Steele, C. M. et Aronson, J. (1995). Stereotype threat and the intellectual test performance of African Americans. *Journal of Personality and Social Psychology*, 69(5), 797-811. <https://doi.org/10.1037/0022-3514.69.5.797>
- Toczek, M. C. (2005). Réduire les différences de performances selon le genre lors des évaluations institutionnelles, est-ce possible ? Une première étude expérimentale... *L'orientation scolaire et professionnelle*, 34(4), 439-460.

Contribution des projets spéciaux

**PROJET SPÉCIAL 1 | LA
PAROLE AUX JEUNES
ENSEIGNANTS
FRANCOPHONES :
FORMATION ET ENTRÉE
DANS LE MÉTIER**

BILAN DU PROJET SPÉCIAL 1

LA PAROLE AUX JEUNES ENSEIGNANTS FRANCOPHONES : FORMATION ET ENTRÉE DANS LE MÉTIER

| CHERIKH* OUAHIBA, FAVIER** STÉPHANE, GRAPIN*** NADINE, HOMIER**** MARIANNE,
NJOMGANG***** JUDITH ET SABOYA***** MIREILLE

Ce projet spécial trouve son origine dans le premier colloque à Grenoble en 2000, où une délégation de jeunes enseignant.es québécois.es était venue suivre diverses activités avant le colloque officiel de EMF. L'idée de ce projet spécial est de créer des liens entre les enseignant.es participant.es de différents pays (voire de susciter des engagements dans des formations à la recherche en didactique au niveau maîtrise et doctorat). Sauf exceptions, l'expérience a été renouvelée à tous les colloques EMF suivants avec, à chaque fois, une vingtaine de participant.es provenant d'une dizaine de pays de la francophonie.

Au-delà de l'expérience personnelle que représente une telle participation, un tel projet vise à donner aux colloques EMF une bouffée d'air frais et à capitaliser sur l'avenir quant à l'investissement de ces jeunes pour essaimer autour d'elles et d'eux l'attrait pour la collaboration au sein de la francophonie et développer une meilleure connaissance des différents systèmes éducatifs et des questions d'enseignement. Il est à noter que quelques un.es des participant.es se sont engagé.es dans des études supérieures de maîtrise ou de doctorat par la suite et certain.es d'entre eux et d'entre elles ont participé au colloque EMF de cette année.

Pour EMF 2025 à Montréal (Québec, Canada), nous avons accueilli 18 jeunes enseignant.es des pays suivants : Algérie (2), Belgique (2), Burkina-Faso (2, en ligne), Cameroun (2, en ligne), France (2), Liban (1), Maroc (2), Québec (3) et Suisse (2). Du jeudi 22 mai au lundi 26 mai 2025, les jeunes enseignant.es ont été pris.es en charge dans le cadre du pré-colloque. Différents types d'activités ont été menés :

- Présentation du système d'enseignement et de formation des enseignant.es pour chacun des pays. Cela a été l'occasion de moments de partage très enrichissants et d'une ouverture aux mondes scolaires ainsi qu'à leurs visées parfois fort différentes.
- Observation de classes québécoises d'école primaire et secondaire. Afin de découvrir le système d'enseignement au Québec, une demi-journée a été consacrée à l'observation de classes dans la ville de Montréal. Les visites se sont effectuées par groupes de 2-3 jeunes, pour une durée de une à deux heures par classe. Les responsables du projet spécial ont accompagné les jeunes durant ces observations et un temps d'échange avec les enseignant.es des classes montréalaises a eu lieu. Ces observations de classe ont été précédées d'un temps de préparation lors de la première journée de travail et elles ont été suivies d'un bilan de chacun des groupes.

* Université des sciences et technologies (USTHB) – Algérie – ouahiba_cherikh@yahoo.fr

** DiMaGe, Université de Genève – Suisse – stephane.favier@unige.ch

*** Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Est Créteil – France – nadine.grapin@u-pec.fr

**** Université de Sherbrooke – Québec – Marianne.Homier@USherbrooke.ca

***** Université de Yaoundé 1 – Cameroun – judithnjomg@yahoo.fr

***** Université du Québec à Montréal – Québec – saboya.mireille@uqam.ca

- Activités mathématiques vécues dans l'action, présentées tant aux jeunes qu'aux responsables, par des personnes invitées. Louis Côté (Université de Sherbrooke) nous a immergé.es dans un système de numération alternatif nommé Cinq, Pint, Boune (p. ex. Côté et Martin, 2017) lors d'un atelier dans lequel nous avons réfléchi aux particularités de l'enseignement et de l'apprentissage de la numération ; Marika Perrault (Centre de services scolaire des Hautes-Rivières) nous a fait vivre des activités mathématiques en plein air ; Marianne Homier (Université de Sherbrooke) a proposé un atelier autour du matériel de manipulation, pour travailler les fractions sans papier ni crayon.
- Visites culturelles. Les jeunes enseignant.es ont pu découvrir Montréal, la plus grande ville du Québec, à travers différentes activités organisées ou spontanées : balades dans le centre-ville et le Vieux-Port de Montréal, découvertes de spécialités culinaires (p. ex. produits de l'érable, poutine et queues de castor), activité sportive à la patinoire, etc.

Durant le colloque EMF lui-même, les jeunes enseignant.es ont suivi un groupe de travail sur l'ensemble du colloque. Dans le temps imparti aux projets spéciaux, ils et elles ont présenté leurs travaux de fin d'études (voir la liste ci-dessous). Au total, 16 exposés sur des sujets variés ont été proposés, tant par les niveaux scolaires en jeu que par les types de problématiques et les degrés de préparation des mémoires (de fin d'études, de maîtrise) dans les différents pays.

À la suite du colloque, début septembre 2025, sept jeunes enseignant.es (Pierre CHANET, Isabelle DEBLOIS, Pauline DUMONCEAU, Micheline FAYAD, Samia LAZRI-ABDI, Eve TILMAN - Nacima ZEDEK-LEDJIAR) ont témoigné de leur participation au projet dans le cadre du Télé-Séminaire des IREM (<https://www.univ-irem.fr/SemIREM>). Ils et elles sont revenus sur la thématique de leur mémoire, mais aussi sur ce que le colloque leur a apporté d'un point de vue personnel et professionnel.

Les textes que regroupent ces actes sont donc très divers, tant par leurs sujets que par leurs formes, et attestent du dynamisme et du professionnalisme naissant de ces jeunes qui se sont investi.es avec un grand enthousiasme dans ce projet. Les thèmes abordés sont divers, certains portent sur la résolution de problèmes au primaire, d'autres sur des notions mathématiques enseignées au secondaire ou à l'université (géométrie, algèbre, fonctions, robotique et logique) ou encore sur l'étude de thèmes plus transversaux (jeux mathématiques, langage, postures et gestes professionnels). Ils présentent pour la plupart des études bien documentées avec des références théoriques en didactique des mathématiques et souvent en lien avec des expérimentations de terrain.

RÉFÉRENCES

- Côté, L. et Martin, V. (2017). Cinq, pint, boune : construire un système de numération pour ébranler les conceptions. Dans A. Adihou, J. Giroux, A. Savard, K. M. Huy et S. Mathieu-Soucy. (dir.), *Actes du colloque du Groupe de Didactique des Mathématiques du Québec (GDM2017) « Données, variabilité et tendance vers le futur », 31 mai-2 juin 2017, Université McGill, Canada* (p. 110-120).
<https://www.researchgate.net/publication/324546615>
- Perrault, M. (s. d.) Les maths en plein air : comment s'y prendre ? <https://www.institutta.com/s-informer/les-maths-en-plein-air-au-secondaire-comment-sy-prendre>

ANNEXE

CONTRIBUTIONS AUX ACTES DES PARTICIPANT.ES AU PROJET SPÉCIAL 1

BOCCALARI Chiara et MARÉCHAL Fanny (Suisse)	<i>Enseigner la résolution de problèmes pour favoriser l'appropriation et la modélisation par les élèves</i>
CHANET Pierre (France)	<i>Comment dévoluer aux élèves le travail de mathématisation horizontale ?</i>
DEBLOIS Isabelle (Québec)	<i>Vers une éducation inclusive : analyse de la pratique enseignante et de ses gestes professionnels. Le cas d'un enseignant du primaire.</i>
DIALLO Shana (France)	<i>« Mais pourquoi on écrit plus en maths qu'en français ? » enjeux langagiers en cours de mathématiques.</i>
DUMONCEAU Pauline (Belgique)	<i>Articuler l'algèbre et l'analyse pour enseigner le second degré : une étude des pratiques enseignantes.</i>
FAYAD Micheline (Liban)	<i>L'apprentissage de la preuve en géométrie.</i>
LAZRI-ABDI Samia (Algérie)	<i>Le rapport des élèves à la fonction affine au secondaire.</i>
NGOMPE Karell (Cameroun)	<i>Apprentissage de la construction des bissectrices des angles d'un triangle à l'aide de la règle, du compas et du logiciel Geogebra en classe de 5^e au Cameroun.</i>
NHIRY Meryem (Maroc)	<i>Place du raisonnement par analogie dans les raisonnements des élèves du secondaire à travers des tâches de résolution de problèmes.</i>
PERRAULT Léa et SAMSON Juliette (Québec)	<i>Le jeu mathématique comme levier pour la motivation en classe.</i>
RAIHANE Asmaa (Maroc)	<i>Evaluation de l'impact d'intégration de la robotique sur le développement des compétences des élèves dans l'enseignement interdisciplinaire des mathématiques en projet lié aux STEM</i>
SAWADOGO Salif (Burkina-Faso)	<i>Valorisation des mathématiques dans l'enseignement post primaire et secondaire au Burkina-Faso.</i>
SIMBRE Alassane (Burkina-Faso)	<i>Représentation graphique des fonctions : analyse des difficultés courantes des élèves de la terminale D au Burkina-Faso.</i>
TETSOPGUIM GUIMEYA Brandelle (Cameroun)	<i>Introduction de l'algèbre par le calcul littéral au Cameroun.</i>
TILMAN Ève (Belgique)	<i>La logique et l'apprentissage de la démonstration à la transition secondaire-université</i>
ZEDEK-LEDJIAR Nacima (Algérie)	<i>La dévolution de la linéarité de l'espérance mathématique en classe de terminale en Algérie.</i>

ENSEIGNER LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES POUR FAVORISER L'APPROPRIATION ET LA MODÉLISATION PAR LES ÉLÈVES

| BOCCALARI* CHIARA ET MARÉCHAL** FANNY

Résumé | Le texte porte sur l'enseignement de la résolution de problèmes mathématiques dans le canton de Genève, en Suisse. Des expériences d'enseignement en classe permettent d'observer les difficultés des élèves à s'approprier et modéliser des problèmes. La réflexion est menée autour de la mise en œuvre d'un lancement de la tâche efficace et l'usage de représentations multiples, pour aider les élèves à s'approprier les énoncés. Le travail s'appuie sur des concepts théoriques pour répondre au mieux aux besoins des élèves.

Mots-clés : résolution de problèmes, enseignement des mathématiques, lancement de la tâche, difficultés des élèves, action de l'enseignant

Abstract | The text focuses on the teaching of mathematical problem solving in the canton of Geneva, Switzerland. Classroom teaching experiences enable us to observe pupils' difficulties in appropriating and modeling problems. The focus is on the implementation of effective task initiation and the use of multiple representations, to help students make statements their own. The work is based on theoretical concepts to best meet students' needs.

Keywords: Problem solving, mathematics teaching, task initiation, student difficulties, teacher action

I. INTRODUCTION

Dans le cadre de nos études universitaires en sciences de l'éducation, notre travail d'intégration de fin d'études a porté sur la question de l'enseignement de la résolution de problèmes en mathématiques en Suisse, dans le canton de Genève. La résolution de problèmes est un sujet qui nous a souvent questionnées et qui nous questionne encore actuellement. En effet, l'apprentissage de la résolution de problèmes en tant qu'élèves s'est montré parfois complexe et maintenant, en tant que jeunes enseignantes, nous nous sentons parfois déconcertées par la manière de l'enseigner.

Nous nous sommes alors demandé comment aborder et présenter les problèmes aux élèves. Plusieurs questions nous sont venues en tête : Comment donner une consigne claire aux élèves ? Comment orienter les élèves, les relancer, sans pour autant induire une démarche ? Certes, l'enseignant peut être une source d'aide mais il ne doit pas pour autant induire ou imposer la démarche sinon la résolution du problème perd son sens et l'intérêt d'apprentissage pour l'élève est moindre. Comment s'assurer que la difficulté rencontrée soit en lien avec les mathématiques et non pas simplement liée à une incompréhension ou une mauvaise représentation de l'énoncé ? Ou encore quel lancement proposer afin que les élèves puissent se concentrer sur les aspects mathématiques qui sont en jeu dans la résolution du problème et diminuer les difficultés provoquées par les éléments externes, tels que le vocabulaire de l'énoncé, la familiarité avec le contexte de ce dernier ou encore le nombre d'informations données et à prendre en compte. Par « lancement », nous entendons ici la phase initiale de la séance, où le problème est présenté de manière à inciter les élèves à s'engager dans la recherche pour en trouver la solution.

* Université de Genève – Suisse – chiaraboccalari27@gmail.com

** Université de Genève – Suisse – fannymf37@gmail.com

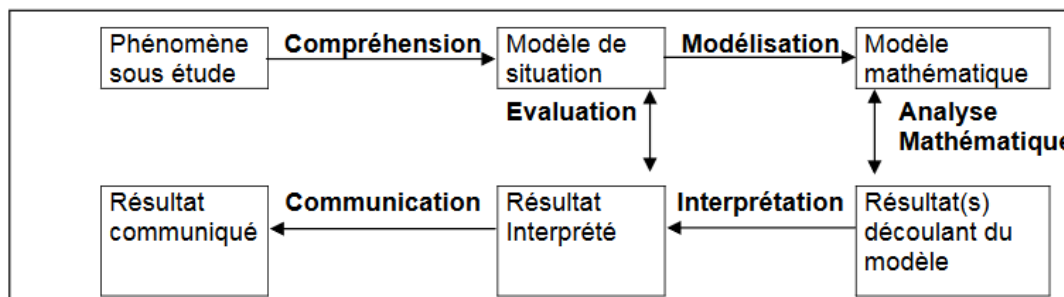
Cela nous a donc finalement amenées à porter notre intérêt sur la problématique suivante :

- Comment penser un lancement favorisant la compréhension de l'énoncé par l'élève et son entrée dans la tâche de manière à favoriser sa prise en charge de la résolution tout au long de l'activité ?

II. APPORTS THÉORIQUES

Pour tenter d'apporter une réponse à cette problématique, nous avons tout d'abord défini les diverses notions théoriques qui posent les bases de notre travail au travers d'un cadre théorique. Nous avons notamment défini ce que nous entendions par « problème » et précisé la place qu'occupait la résolution de problèmes dans l'enseignement genevois des mathématiques. Il convient de rappeler qu'un « problème », selon les Moyens d'Enseignement Romands (MER), est une activité qui demande à l'élève de résoudre une situation en utilisant des procédures non immédiatement disponibles. Une activité est considérée comme un problème si elle pose une difficulté à l'élève et nécessite une recherche. Ce qui constitue un problème varie selon les élèves et les circonstances, une activité pouvant devenir un simple exercice avec le temps. Certains problèmes restent des défis constants, car ils ne sont pas destinés à être automatisés. Chanudet (2019) souligne que le statut de problème dépend des conditions de sa présentation et de la manière dont il est abordé. Cela nous a amenées à distinguer la résolution de problèmes comme objet d'enseignement de la résolution de problèmes comme outil d'enseignement qui sont toutes deux au programme d'enseignement romand. Nous pouvons mettre en évidence le fait que les problèmes réalisés dans la classe de 3P ont pour visée d'introduire et entraîner des notions mathématiques de manière à renforcer et vérifier la bonne acquisition des connaissances construites ; la résolution de problème est alors considérée comme outil d'enseignement. Les deux problèmes réalisés par la classe de 4P, quant à eux, ont pour objectif de développer des compétences de recherche chez les élèves : la résolution de problème est alors considérée comme objet d'enseignement.

Nous souhaitons, dans notre analyse, essayer d'identifier à quelle étape du processus les élèves rencontraient des difficultés lors de la réalisation de problème afin d'ajuster notre enseignement au mieux pour répondre à leurs besoins. Pour ce faire, nous nous sommes appuyées sur les travaux de Favier (2022) reprenant les travaux de Schoenfeld (1985), qui découpent le travail des élèves en épisodes, tels que l'appropriation, l'exploration, la planification/mise en œuvre et finalement la vérification. Ces épisodes concordent avec le processus complexe de modélisation mathématique proposé par Fagnant (2019), qui s'appuie sur Verschaffel et al. (2000), qui inclut les étapes de la compréhension, la modélisation, l'analyse mathématique, l'interprétation et enfin la communication (Figure 1).



(Source : Verschaffel et al., 2000)

Figure 1 – La résolution de problèmes conçue comme un processus complexe de modélisation mathématique

Enfin, le travail de Julo (1995) nous a également permis de prendre en compte l'importance des représentations mentales dans la compréhension et la résolution des problèmes. Tous ces apports théoriques nous ont donné la possibilité d'appréhender avec pertinence les processus et étapes par lesquels les élèves passent lors d'activités de résolution de problèmes. Il était nécessaire pour nous d'essayer d'identifier à quel moment les élèves rencontraient le plus de difficultés ou faisaient le plus d'erreurs pour ajuster notre enseignement de manière optimale.

III. RÉCOLTE DES DONNEES

Nous avons basé notre travail sur nos expériences personnelles. En effet, dans le cadre de notre formation nous avons effectué un stage de 8 semaines dans deux classes, l'une de 3P (6-7 ans) et l'autre de 4P (7-8 ans). A noter que la résolution de problèmes mathématiques est enseignée dès la première année scolaire obligatoire en 1P (4 ans) et ce, jusqu'à la fin de l'école primaire en 8P (12 ans).

Nous avons alors pu enseigner la résolution de problèmes pendant cette période en prenant appui sur le moyen d'enseignement romand (MER) en vigueur dans notre canton, la plateforme ESPER. Les quatre problèmes n'ont pas été choisis spécifiquement pour ce travail ; leur enseignement s'inscrivait dans la planification annuelle en cours. Les 4P ont travaillé sur « Tricycles et vélos » puis sur « Le nombre choisi » (Figure 2) tandis que les 3P ont travaillé sur « Les poissons » avant de résoudre « Les dessins » (Figure 3).

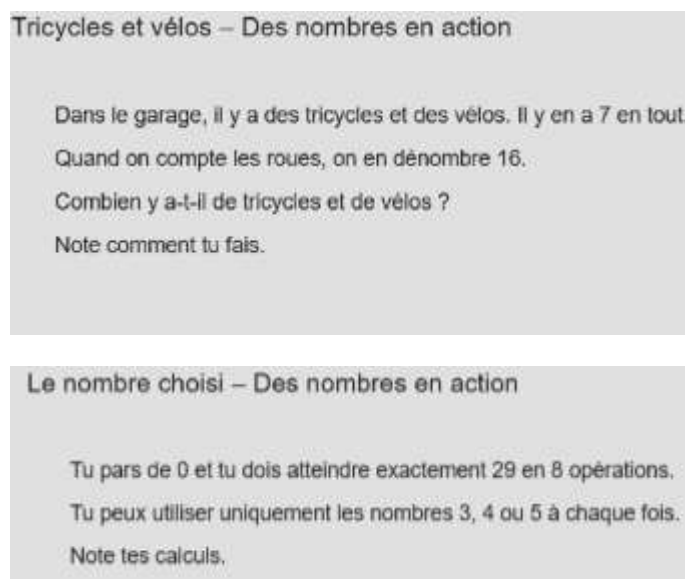


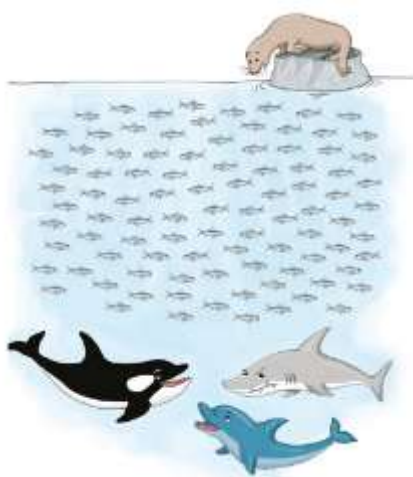
Figure 2 – Deux problèmes issus du MER 4P

N-F18 Les poissons

Combien de poissons reste-t-il pour l'otarie en sachant que :

- le dauphin mange 31 poissons
- l'orque mange 18 poissons
- le requin mange 27 poissons

L'otarie peut manger ____ poissons.



N-F19 Les dessins

Chaque élève de la classe a fait un dessin, sauf Laura et Mia qui sont malades.

Chaque fille a dessiné un poisson.

Chaque garçon a dessiné une maison.

Combien y a-t-il de filles dans cette classe lorsque tous les élèves sont présents? ____

Combien y a-t-il de garçons dans cette classe lorsque tous les élèves sont présents? ____



Figure 3 – Deux problèmes issus du MER 3P

Notre démarche a d'abord consisté à effectuer des analyses préalables des problèmes concernés, ce qui a permis de déterminer les potentielles difficultés que les élèves pourraient rencontrer. Grâce à ces analyses, nous imaginons un déroulement qui nous semble cohérent avec notre analyse et qui devrait favoriser les élèves à entrer dans la tâche de résolution de problème. La suite de notre démarche consiste à effectuer les passations en classe, recueillir les productions des élèves pour finalement s'y référer et les analyser a posteriori, afin d'identifier la nature des difficultés et/ou erreurs rencontrées par les élèves ainsi que leur moment d'apparition.

IV. ANALYSE DES DONNÉES

1. *Présentation des résultats*

Les analyses a posteriori de nos deux premières passations (« Tricycles et vélos » pour les 4P et « Les poissons » pour les 3P) révèlent que les difficultés des élèves se sont principalement situées dès le début de la tâche.¹ Les élèves semblaient rencontrer des difficultés à construire un modèle de représentation. Nous identifions notamment quelques facteurs qui ont pu être des obstacles pour les élèves : la familiarité des élèves avec le contexte de l'énoncé proposé ainsi que la double contrainte présente dans l'énoncé chez les 4P et l'identification des éléments fondamentaux de l'exercice chez les 3P.

Nous souhaitons alors pallier ces difficultés lors des deuxièmes passations qui proposaient, pour les deux classes, des problèmes avec des objectifs similaires aux premiers. En lien avec notre problématique initiale, et dans le but de favoriser la compréhension de l'énoncé par les élèves ainsi que leur engagement dans la résolution tout au long de l'activité, nous avons porté notre attention sur la conception du lancement. Nous nous sommes alors concentrées sur cette conception du lancement de la tâche afin de le rendre le plus clair et pertinent possible pour les élèves et ainsi rendre la tâche de la résolution de problème plus accessible pour tous. Pour ce faire nous avons adapté notre enseignement après la passation du premier problème, en guidant fortement les élèves lors du lancement de la tâche. Nous avons, notamment, pour la classe de 4P, présenté collectivement deux exemples basés sur le même principe que le problème « Le nombre choisi » pour rassurer les élèves et les familiariser avec la tâche. L'objectif était de leur faire comprendre la consigne et ce que nous attendions d'eux : qu'ils procèdent par ajustements successifs, sans chercher la solution parfaite dès le premier essai. À travers ces exemples, nous avons clarifié nos attentes et mis en avant la stratégie d'apprentissage visée, centrée sur les essais et ajustements progressifs. Cependant, cette approche a conduit les élèves à reproduire une démarche identique aux modèles mathématiques proposés, négligeant ainsi les étapes de compréhension et de modélisation. Nous avons constaté que nos aides ont beaucoup influencé les procédures des élèves, rendant leur démarche superficielle. Nous constatons que notre aide se concentre sur les procédures des élèves et non sur leur représentation, comme Julio (1995) le préconise.

2. *Interprétation des résultats : apport pour notre développement professionnel*

Nous interprétons ces résultats sous l'angle de notre propre développement professionnel, en tenant compte des divers apports théoriques introduits énoncés plus tôt.

Pour améliorer notre pratique, il est nécessaire que nous veillions à ce que nos aides respectent les critères définis par Julio (1995) : elles ne doivent pas donner d'indices sur la solution, ni suggérer une modélisation, ni orienter vers une procédure spécifique. Il est essentiel de transférer progressivement la responsabilité de la résolution aux élèves, en évitant de les rendre dépendants de l'enseignant. En

¹ Annexes 1 et 2

effet, l'étaiyage (Bruner, 1983) est essentiel pour soutenir les élèves dans la réalisation des tâches proposées. Il s'agit d'offrir un soutien temporaire, adapté aux besoins de l'élève, qui lui permet de progresser dans la compréhension et la résolution des problèmes. L'étaiyage doit être suffisamment précis pour guider l'élève sans toutefois résoudre le problème à sa place, et il doit être progressivement retiré (désétaiyage) à mesure que l'élève gagne en autonomie. Cette approche vise à développer la capacité de l'élève à penser par ses propres moyens et à appliquer les connaissances acquises de manière autonome, tout en évitant de créer une dépendance excessive vis-à-vis de l'enseignant.

Les apports théoriques de nos cours universitaires soulignent également la nécessité de passer par un processus de dévolution. D'après Brousseau (1990), l'enseignant doit être attentif à son processus de dévolution qui consiste à transférer la responsabilité du problème à l'élève. Cela revient à dire que l'enseignant se doit de convertir un savoir à enseigner en une connaissance.

Pour ce faire, nous reprenons les propos de Butlen et Masselot (2018) qui exposent les différents éléments nécessaires qui permettent de constituer une « réelle dévolution ».

« Une réelle dévolution nécessite que l'élève perçoive et anticipe, du moins en partie, les actions à réaliser et mobilise à cette occasion certaines connaissances anciennes. Il doit ensuite prendre conscience des apprentissages nouveaux provoqués par l'activité développée à l'occasion de cette tâche. » (p. 72)

Cette dévolution, qui doit être faite au début de l'activité, permet à l'élève de s'approprier la tâche tout en maintenant un certain niveau de défi. Cependant, pour que cette dévolution soit efficace, il est crucial d'intégrer des moments d'institutionnalisation à la fin de chaque séance. Ces derniers consistent à expliciter clairement les connaissances mobilisées et les nouveaux apprentissages réalisés durant la séance, les transformant ainsi en savoirs durables.

Même si notre problématique se concentre sur le lancement de la tâche, nous reconnaissons que l'institutionnalisation joue un rôle complémentaire et essentiel. En fin de séance, elle permet de revenir sur les apprentissages effectués, de les reformuler et de les systématiser, assurant ainsi que les élèves ont bien intégré les concepts et peuvent les appliquer de manière autonome. En négligeant ces moments, nous avons réalisé que nous risquions de ne pas pleinement exploiter le potentiel de la dévolution. Intégrer cette étape dans nos leçons constitue donc une piste d'action essentielle pour renforcer l'efficacité de notre enseignement et pour s'assurer que les élèves développent une compréhension approfondie et durable des concepts étudiés.

V. OUVERTURE ET CONCLUSION

Notre travail nous a donc permis de mettre en évidence plusieurs éléments auxquels nous devons être attentives lors d'un enseignement concernant la résolution de problèmes en mathématiques. Nous avons identifié les défis majeurs auxquels les élèves sont confrontés. Il ressort clairement que la compréhension de l'énoncé ne se limite pas à sa lecture, mais implique également la capacité à identifier les relations entre les objets, ainsi que les conditions et contraintes du problème. Par exemple, des difficultés peuvent surgir lorsqu'il s'agit de faire des inférences, comme dans le cas des « Tricycles et vélos » (Figure 2) où il faut tenir compte du nombre de roues et de véhicules. Pour surmonter ces obstacles, il est crucial de mettre en place un lancement de tâche efficace qui favorise la compréhension initiale de l'énoncé par les élèves. Cela leur permettra de s'approprier la résolution du problème tout au long de l'activité. En se basant sur l'analyse préalable, l'anticipation des imprévus ou encore l'acceptation que l'efficacité ne soit pas immédiate, les enseignants peuvent guider les élèves vers une meilleure compréhension et résolution des problèmes mathématiques.

1. Proposition d'un nouveau lancement pour la tâche : « Tricycles et vélos »

Nous trouvons alors intéressant d'essayer de proposer un lancement répondant aux mieux aux critères d'une « bonne aide » concernant le problème des 4P intitulé « Tricycles et vélos ». Pour ce faire, nous nous appuyons sur la multireprésentation de Julo (1995) qui est définie ainsi par Nguala en 2005 :

« Proposer simultanément trois problèmes ayant les mêmes caractéristiques, même structure mathématique, mêmes nombres (même réponse numérique), même syntaxe, les informations arrivant dans le même ordre avec la même organisation énonciative. Seuls les contextes varient. » (p. 76)

Ce dispositif permet d'agir sur les représentations des élèves et, de ce fait, nous espérons que la reformulation de l'énoncé sans altérer le problème pourra améliorer le taux de réussite des élèves.

En nous appuyant sur le principe de modélisation nous proposons donc 3 énoncés différents :

1. Dans une armoire, il y a des sacs de bonbons rouges et blancs. Chaque sac de bonbons rouges contient 3 bonbons rouges et chaque sac de bonbons blancs contient 2 bonbons blancs. Il y a 7 sacs en tout. Quand on compte les bonbons, on en dénombre 16. Combien y a-t-il de sacs de bonbons rouges et de sacs de bonbons blancs ?
2. Un fleuriste prépare des bouquets de roses et de tulipes. Chaque bouquet de roses contient 3 roses, et chaque bouquet de tulipes contient 2 tulipes. Il y a 7 bouquets en tout. Quand on compte les fleurs, on en dénombre 16. Combien y a-t-il de bouquets de roses et de bouquets de tulipes ?
3. Un fleuriste vend des bouquets de roses et des bouquets de tulipes. Chaque bouquet de roses se vend 3 francs et chaque bouquet de tulipes se vend 2 francs. Il vend 7 bouquets en tout. Quand on compte l'argent, il y a 16 francs dans la caisse. Combien de bouquets de roses et combien de bouquets de tulipes a-t-il vendu ?

VI. CONCLUSION

En nous prêtant au jeu de tenter de proposer des énoncés en se basant sur le principe de multireprésentation, nous avons pris conscience que les variantes d'énoncés que nous avons imaginées n'étaient en réalité pas totalement conformes et « identiques » à l'énoncé initial. En effet, nous avons rencontré des difficultés à trouver d'autres objets ou éléments qui suggéraient le nombre 2 ou le nombre 3 comme peuvent le faire les vélos et les tricycles avec leur nombre de roues. Nous devions alors, à chaque fois, choisir un objet ou un élément et préciser que ce dernier était associé au nombre 2 ou au nombre 3. Toutefois, préciser cette information-là enlève une partie de l'enjeu de l'énoncé car dans l'énoncé initial, il revient à la charge de l'élève d'associer le nombre 2 au nombre de roues d'un vélo et le nombre 3 au nombre de roues d'un tricycle alors que dans nos propositions d'énoncés, l'information est directement indiquée et accessible pour l'élève. Finalement, la seule alternative qui nous a été suggérée est celle d'un contexte mettant en jeu des jumeaux et des triplés. Par exemple, une réunion de jumeaux et de triplés à laquelle 7 fratries se présentent, ce qui donnerait alors 16 enfants en tout. Les élèves seraient amenés à trouver le nombre de jumeaux et le nombre de triplés en gardant en tête qu'il y a un total de 16 enfants.

Nous sommes également conscientes que l'analyse préalable et a posteriori que nous avons effectuées concernant les 4 problèmes mathématiques sur lesquels repose notre travail ne peuvent être réalisées à chaque fois. Il en est de même pour l'utilisation de la multireprésentation. En effet, même si le résultat en vaut la peine, l'investissement est conséquent et demande du temps avant, pendant et après l'activité. Il serait difficilement imaginable d'effectuer cette démarche pour chaque enseignement

concernant la résolution de problèmes en mathématique. Nous avons d'ailleurs été confrontées à de nombreux questionnements lorsque nous cherchions à définir la problématique de notre travail. Toutefois, bien que ces derniers aient été riches et variés, nous réalisons qu'il semble complexe de prendre en compte la totalité des préoccupations impliquées dans l'enseignement de la résolution de problèmes et d'apporter des réponses à chacun d'entre eux.

Cependant, nous pensons qu'il est indispensable d'au moins prendre connaissance du problème avant de l'enseigner afin de réfléchir un minimum en amont aux difficultés potentielles que peuvent rencontrer les élèves. De plus, après l'activité, il est tout à fait possible de laisser quelques notes sur les difficultés que nous avons identifiées afin de pouvoir s'en rappeler une prochaine fois. Nous supposons également qu'avec l'acquisition d'une certaine expérience d'enseignement, il devient ensuite possible de mieux anticiper l'enseignement de certains problèmes « typiques », souvent rencontrés dans les évaluations de fin d'année, afin d'apporter une aide plus ciblée aux élèves sur ces sujets.

Pour conclure ce texte, nous souhaitons souligner que nous nous sommes concentrées sur le lancement de la tâche ainsi que sur les difficultés rencontrées par les élèves. Cependant, nous sommes bien conscientes que la résolution de problèmes ne se limite pas à ces deux aspects. Bien que souvent discutée en raison des divers défis qu'elle pose aux élèves, la résolution de problèmes ne doit pas être envisagée uniquement sous cet angle.

RÉFÉRENCES

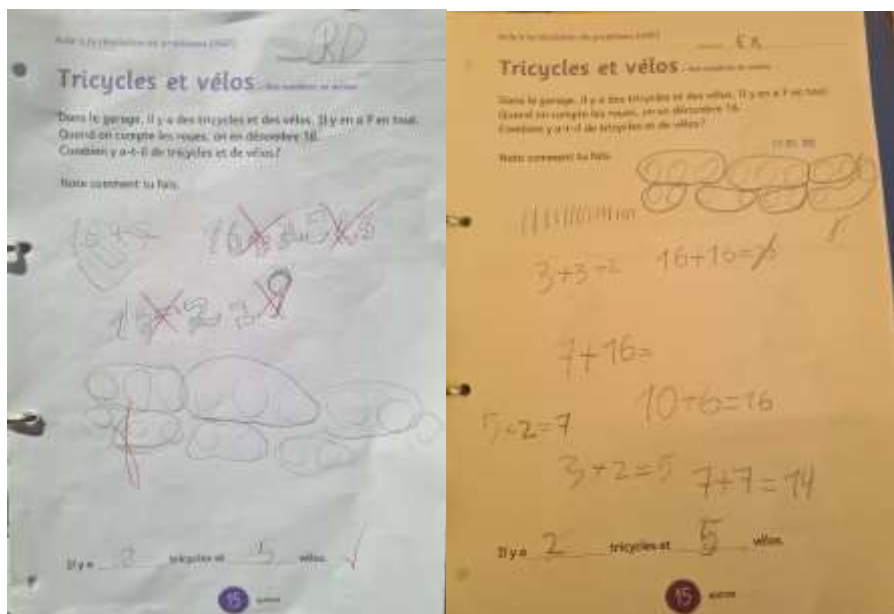
- Boccalari, C. et Maréchal, F. (2024). « *Problèmes-Mathiques* » : *l'art problématique d'enseigner la résolution de problèmes en mathématiques* [Travail d'intégration de fin d'études en sciences de l'éducation, Université de Genève].
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu : dévolution. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.
- Bruner, J. S. (1983). *Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire*. PUF.
- Butlen, D. et Masselot, P. (2018). De la recherche à la formation : enrichir les pratiques des enseignants pour favoriser les apprentissages des élèves en mathématiques. *Recherche et formation*, (87), 61-75. <https://doi.org/10.4000/rechercheformation.3502>
- Conférence intercantonale instruction publique et culture Suisse romande et Tessin [CIIP]. (2018). *ESPER CIIP*. <https://www.ciip-esper.ch/>
- Conférence intercantonale instruction publique et culture Suisse romande et Tessin [CIIP]. (2013). *Les moyens d'enseignement romands* (MER). <https://portail.ciip.ch/mer/teaching-mediums>
- Fagnant, A. (2019). Des illustrations qui accompagnent les problèmes à la construction de représentations schématisées par les élèves : quels enjeux face aux problèmes standards et problématiques ? Dans J. Pilet et C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, 2-3 février 2018, Lyon, France* (p. 94-113). IREM de Paris ; Université Paris Diderot ; LDAR.
- Fagnant, A. (2008). Des outils didactiques pour développer la résolution de problèmes dans l'enseignement fondamental. Aperçu des fondements théoriques et entrée au cœur de quelques activités. *Cahiers des Sciences de l'Éducation*, (27-28), 51-94.

Favier, S. (2022). *Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève* [Thèse de doctorat en sciences de l'éducation, Université de Genève].
<https://doi.org/10.13097/archive-ouverte/unige:159466>

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.

ANNEXE 1

DEUX PRODUCTIONS D'ÉLÈVES DE LA CLASSE DE 4P



Les deux élèves ayant réalisé ces travaux semblent suivre les règles du contrat didactique et essaient d'utiliser les nombres qui apparaissent dans la consigne en effectuant des opérations qu'ils connaissent. Ils semblent rencontrer alors des difficultés à construire un modèle de représentation.

ANNEXE 2

DEUX PRODUCTIONS D'ÉLÈVES DE LA CLASSE DE 3P



Sur ces deux productions, nous constatons que les élèves ont fait le choix de barrer et/ou d'entourer les poissons lorsqu'ils les comptaient. Cela laisse alors supposer que ces élèves ont pris en compte l'importance de l'énumération en usant d'une stratégie leur permettant de se repérer quant à ce qui avait été comptabilisé et ce qu'il restait encore à comptabiliser. Néanmoins, les deux élèves ont effectué des erreurs lors du comptage et ne sont pas parvenus au résultat final correct.

COMMENT DÉVOLUER AUX ÉLÈVES LE TRAVAIL DE MATHÉMATISATION HORIZONTALE ?

| CHANET* PIERRE

Résumé | À partir d'observations d'élèves français et d'une volonté de leur permettre de mettre du sens en situation de résolution de problème, nous avons présenté un dispositif de situation extra mathématique ouverte (en vidéo), dans le but de questionner les processus d'enseignement-apprentissage de la modélisation. Nous avons exploré spécifiquement l'étape de mathématisation horizontale, un des enjeux majeurs, souvent invisibilisé, du processus de modélisation.

Mots-clés : modélisation, mathématisation horizontale, problème extra-mathématique, dévolution

Abstract | Based on observations of French pupils and a desire to enable them to make sense of problem-solving situations, we presented an open-ended extra-mathematical situation (in video), with the aim of questioning the teaching-learning processes of modelling. We specifically explored the horizontal mathematization stage, one of the major, and often invisible, issues in the modelling process.

Keywords: Modeling, horizontal mathematization, extra-mathematical problems, devolution

I. VERS UNE COMPRÉHENSION DE LA MODÉLISATION

1. *Constat sur le terrain*

Quand j'étais élève, je ne comprenais pas ce que je faisais en mathématiques. Dès que j'ai débuté ma formation d'enseignant, je me suis particulièrement intéressé à la résolution de problème, puisqu'elle permet aux élèves de s'approprier les compétences et connaissances mathématique tout en y mettant du sens. Durant ma dizaine de stages dans les classes, j'ai remarqué qu'un certain nombre d'élèves rencontrait des difficultés relevant de la modélisation en résolution de problèmes.

Ces constats, couplés à mon expérience personnelle en tant qu'élève et aux enseignements didactiques dispensés durant ma formation, m'ont amené à m'interroger sur les moyens qui permettraient d'amener les élèves à dépasser eux même ces difficultés.

En échangeant avec une collègue, nous nous sommes rendu compte que nous avions des questionnements professionnels sensiblement identiques. Ainsi, nous avons fait le choix de joindre nos efforts dans le cadre de nos recherches, pour ensuite effectuer nos propres expérimentations, afin de les comparer.

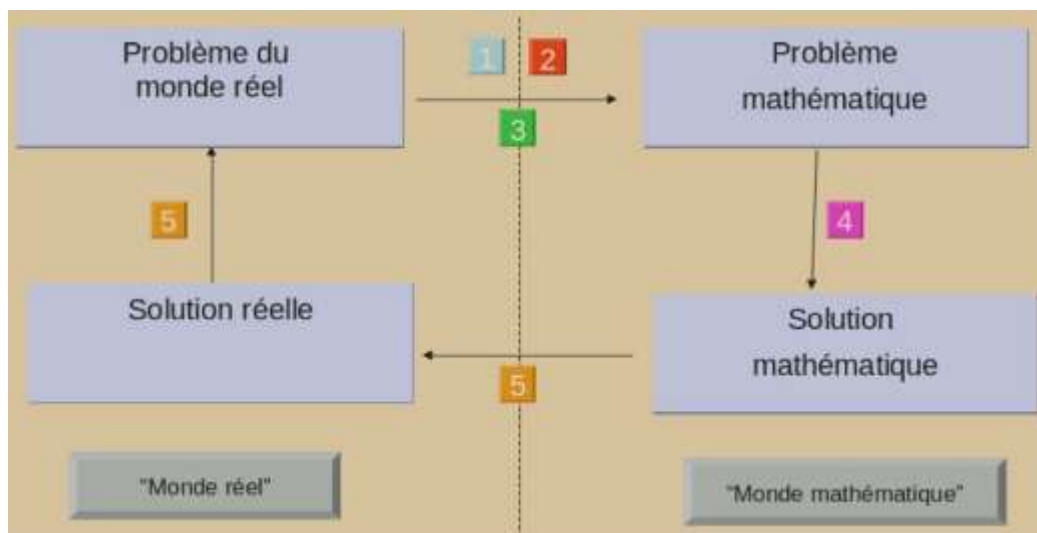
2. *De la modélisation à la mathématisation*

Pour débiter nos recherches, il nous a semblé essentiel de clarifier la notion de modélisation. En tant que jeunes enseignants nous nous sommes rapprochés des programmes français de cycle 2 et 3, que nous avons croisé avec l'ouvrage « Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement » (Julo, 1995). Ainsi, nous avons admis que la modélisation mathématique est un processus de la démarche scientifique dont la fonction principale est d'appréhender le monde qui nous entoure : « on modélise pour apporter, d'une manière ou d'une autre, une solution à un problème identifié comme tel » (Ibid. p.63). La modélisation a donc « un véritable intérêt du point de vue de la résolution du problème » (Ibid. p.66), puisqu'elle contribue à

* Circonscription de Sarcelles-Nord de Saint-Brice-sous-Forêt – France – pierre.chanet@ac-versailles.fr

« structurer la représentation d’une autre manière : par la simplification ». (Ibid. p.74). Toutefois, il nous a semblé nécessaire d’affiner cette première approche pour mieux comprendre les enjeux de la modélisation dans la résolution de problèmes.

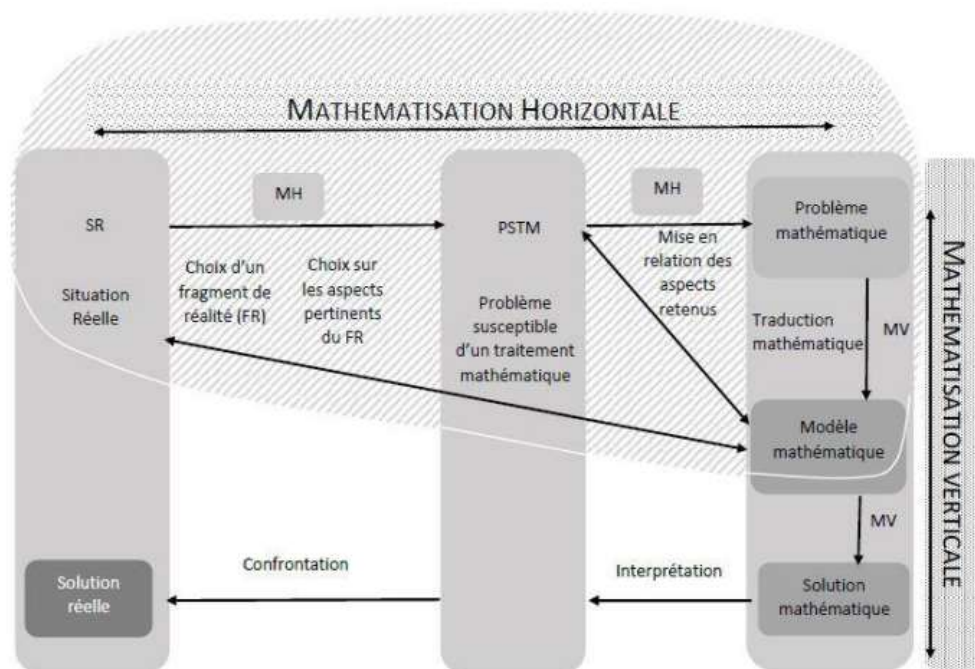
Nous nous sommes alors dirigés vers le Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves (PISA) qui explicite davantage le processus de la modélisation via le schéma suivant :



(Source : OECD, 2013, p. 38)

Figure 1 – Le cycle de la modélisation de PISA

Cependant, les étapes décrivant le passage du monde réel au monde mathématique ne nous ont pas suffisamment éclairé sur la manière de passer de la situation réelle, au monde mathématique. C’est ainsi que nous nous sommes rapprochés des travaux de thèse de Yvain-Prébiski (2018), qui détaillent davantage les différentes étapes et enjeux de la modélisation à travers le schéma du cycle de modélisation mathématique suivant :



(Source : Yvain-Prébiski, 2018, p. 109)

Figure 2 – Schéma du processus de modélisation

Ce schéma nous a permis d'identifier les différentes étapes pour mener à l'élaboration d'un modèle mathématique, et notamment l'aspect horizontal et vertical de la mathématisation, en jeu dans l'activité de modélisation mathématique :

« La mathématisation horizontale qui relève de la modélisation mathématique pour passer de la situation réelle au monde mathématique et la mathématisation verticale qui relève du traitement mathématique d'un problème mathématique ». (*Ibid.*, p. 73-74)

Nous avons alors retenu que la mathématisation horizontale est un processus qui permet de rendre une situation extra-mathématique accessible par un traitement mathématique. Ce travail implique de faire des choix dans le contexte réel (fragments de réalité, éléments de contexte, grandeurs). Ces choix, qui relèvent d'hypothèses simplificatrices, vont permettre de « transformer » le problème, a priori non mathématique, en un problème mathématique. Une fois ce problème mathématique identifié (qui peut ne pas être unique selon Yvain-Prébiski), il s'agit d'élaborer un modèle mathématique pour le résoudre.

Néanmoins, « les aspects horizontaux et verticaux de la mathématisation ne doivent pas être considérés de manière indépendante », puisqu'il faut « prendre en compte leurs articulations au sein du processus de modélisation » (Yvain-Prébiski, 2018, p. 80-81).

Ainsi, d'après Yvain-Prébiski, les difficultés des élèves pour passer d'un problème issu du monde réel au monde mathématique, relèvent principalement de la mathématisation horizontale.

Mais alors : comment dévoluer aux élèves le travail de mathématisation horizontale, constitutif de la modélisation mathématique de problèmes issus du quotidien ?

3. Le choix du problème

Nous nous sommes alors interrogés sur la nature des problèmes proposés aux élèves français, afin d'identifier ceux qui favoriseraient un travail de mathématisation horizontale. Notre questionnement

étant associé à des situations de la vie quotidienne, nous nous sommes dirigés vers des travaux proposant des problèmes ayant des contextes extra-mathématiques. Nous avons alors étudié les travaux de Burgermeister et Dorier (2013) qui définissent les problèmes extra-mathématiques comme des problèmes dans lesquels « l'un des domaines est non mathématique (on dira souvent réel ou concret) et l'autre mathématique. » (p.11). Ces auteurs ont affiné cette définition générale en la déclinant selon la typologie suivante :

- « Niveau 1 : les deux systèmes sont donnés mais la tâche des élèves est cantonnée dans l'un des deux.
- Niveau 2 : les deux systèmes sont donnés et la tâche des élèves implique les deux.
- Niveau 3 : un seul système est donné et la construction du second est à la charge des élèves. » dans lequel, un système est mathématique ou non. (Ibid. p.12).

En nous appuyant sur les travaux d'Yvain-Prébiski, nous nous sommes orientés vers les problèmes de niveau 3, qui proposent une situation réelle, à partir de laquelle l'élève devra faire des choix, des hypothèses, en sélectionnant des éléments du réel pour parvenir à une traduction, à un modèle mathématique. Ce type de problème met l'élève dans une posture de chercheur dans la mesure où il favorise « le potentiel d'investigation des élèves dans la démarche de modélisation » (Ibid. p.12).

Mais quels problèmes extra-mathématiques de niveau 3 choisir pour dévoluer aux élèves le travail de la mathématisation horizontale ?

Il fallait alors sélectionner une ressource qui serait, si possible, institutionnelle et qui regrouperait des problèmes extra-mathématiques de niveau 3, au sens de Burgermeister et Dorier (2013). Nous avons donc retenu la plateforme Educabagnols, qui propose des problèmes extra-mathématiques de niveau 3, relevant également des problèmes ouverts en vidéo ; c'est à dire une catégorie de problèmes initiant les élèves à la démarche scientifique, en les invitant à faire des essais, à conjecturer, à tester, puis à prouver.

Une hypothèse s'est alors dessinée : **un problème de type ouvert et extra mathématique de niveau 3 favorise un travail relevant de la mathématisation horizontale.**

Nous allons maintenant rapidement présenter l'expérimentation et la méthodologie fad'analyse mise en place dans le but de mettre à l'épreuve cette hypothèse

II. EXPÉRIMENTATION ET MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE

1. Présentation de l'expérimentation

L'expérimentation s'est déroulée, pour des raisons pratiques, dans la classe de 22 élèves de CM2 accueillant mon stage d'observation et de pratique accompagnée de deuxième année de Master. L'enseignante titulaire de la classe a été sollicitée pour mettre en place le problème de la grande roue¹ extrait de la plateforme Educabagnols, qui relève donc des problèmes de type ouvert et extra mathématique de niveau 3. La seule consigne qu'elle a reçu était de concevoir et de mettre en place les séances nécessaires pour que les élèves de sa classe traitent le problème de la grande roue, qui a été décrit comme ayant un fort potentiel pour faire travailler la modélisation aux élèves. À partir de cette commande, l'enseignante a prévu de mettre en place le problème vidéo de la grande roue sur trois séances durant lesquelles les élèves travaillent en groupe :

- Une première séance de découverte

¹ <https://www.educabagnols.net/videomathspub/CM1-CM2/showNiveau>

- Une deuxième séance de résolution
- Une troisième séance de mise en commun

2. *Choix de la méthode de recueil des données*

Le corpus de données recueilli afin de valider, d'invalidier ou de nuancer l'hypothèse, englobe des données de différentes natures.

Il regroupe des données récoltées en amont de l'expérimentation (essentiellement basées sur les pratiques déclarées par l'enseignante) :

- Un questionnaire envoyé par mail à l'enseignante afin de cerner son profil ainsi que le milieu de l'expérimentation.
- Les fiches de préparations conçues par l'enseignante pour chaque séance.

Il y a aussi des données récoltées lors de l'expérimentation (essentiellement basées sur les pratiques effectives de l'enseignante) :

- Des captations audios d'interactions entre les différents acteurs de la classe (échanges inter-élèves/entre les élèves et la professeure) récoltées via un micro fixe (situé au milieu de la classe) et deux micros mobiles (circulant dans la classe)
- Des captations vidéo de l'enseignante, prises lors de chacune des séances à l'aide d'une caméra fixe et d'une caméra mobile circulant au sein de la classe.

3. *Choix de la méthode d'analyse des données recueillies*

Dans l'optique d'exploiter au mieux les différentes données recueillies en amont et durant la mise en place du problème de grande roue, nous avons choisi de retenir la méthodologie d'ingénierie didactique de Michèle Artigue (1988).

La méthodologie d'ingénierie didactique est un processus comprenant « quatre phases : la phase 1 des analyses préalables, la phase 2 de la conception et de l'analyse a priori des situations didactiques de l'ingénierie, la phase 3 de l'expérimentation et enfin la phase 4 de l'analyse a posteriori et de l'évaluation. » (Artigue, 1991, p.6).

Il a fallu cependant l'adapter à notre expérimentation, puisque même si nous avons sélectionné le problème, c'est un tiers qui a eu à concevoir et à mettre en place la séquence d'enseignement. Ainsi, les analyses a priori se sont basées sur les pratiques déclarées par cette enseignante sur ses fiches de préparation, et les analyses a posteriori sur les pratiques effectives lors des séances de l'expérimentation. La confrontation entre analyse a priori et a posteriori vise à comparer la mise en place effective du problème avec les constructions théoriques abordées au début de cette présentation.

III. RÉSULTATS ET PERSPECTIVES

1. *Résultats*

Durant les séances de découverte et de résolution, les élèves ont donc formulé des questions et des choix, qui leur permettent d'élaborer un modèle à partir de la situation initiale du problème. L'ensemble de ces données ont été retranscrites et rangées dans des tableaux via les catégorisations établies durant l'analyse a priori. En voici un extrait :

E= énoncé (numéro de l'intervention)

Tableau 1 – Extrait de la synthèse des questions formulées par les élèves lors des deux premières séances

E	Questions sur l'ancrage dans le réel ou grandeur non pertinente	Questions portant sur le choix de fragments de réalité et de grandeurs pertinentes	Questions permettant la mise en place d'un modèle ou d'un traitement mathématique
Séance 1			
1	« C'est où ça ? »		
32		« La question c'est dans combien de temps tu descendras ? »	
32			« Combien de temps dure un tour ? »
44			« Combien de temps dure un tour ? »
44		« Dans combien de temps elle descendra ? »	
60	« On peut modifier leurs prénoms ? »		

Ces tableaux ont permis de faciliter la lecture des données obtenues. Ainsi, lors des expérimentations, les élèves ont principalement énoncé des questions portant sur des fragments de réalité et des grandeurs pertinentes. Certaines d'entre elles ont d'ailleurs été récurrentes, comme : « Dans combien de temps elle descendra ? » ou encore : « Qui a raison entre la femme ou l'homme ? »

D'autres questions permettant la mise en place de traitements mathématiques sont également ressorties plusieurs fois, comme : « Combien de temps dure un tour ? » ou bien : « Combien de minutes dure un tour ? »

La récurrence de ces différents types de questions dans les propos des élèves les fait apparaître comme nécessaires à la compréhension de la situation de la grande roue, et à la transformation de ce problème extra-mathématique en un problème mathématique. Ces questions suggèrent également que les élèves ne se sont pas limités à une simple traduction mathématique du problème, mais qu'ils se sont appropriés la situation initiale, pour ensuite questionner les choix de fragments de réalité et les grandeurs pertinentes à mobiliser, afin d'établir des modèles mathématiques. D'ailleurs, les choix effectués par les élèves à la suite de leurs questionnements confirment cette tendance.

Lors de la première séance, les élèves ont principalement formulé des choix a priori, confirmant donc qu'ils se sont d'abord appropriés la situation du problème, en se basant sur leurs expériences vécues. Néanmoins, les élèves semblent avoir saisi la nécessité de faire des hypothèses simplificatrices à partir de la situation de la grande roue pour pouvoir envisager un modèle et une résolution mathématique, puisque durant la deuxième séance, ils se sont davantage orientés vers des choix relevant des mathématiques, liés à des procédures de résolution qui s'inscrivent également dans le monde des mathématiques. Par ailleurs, sur l'ensemble de l'expérimentation, les élèves ont fait très peu de choix basés sur des considérations ancrées dans le réel, ce qui tend également à confirmer qu'ils ont mis de côté leurs questions portant sur des considérations ancrées dans le réel en ayant saisi la nécessité de faire des choix/hypothèses simplificatrices, afin de modéliser la situation initiale du problème et d'envisager une résolution par traitement mathématique.

Ainsi, après avoir recueilli et mis en regard les différentes données, les procédures mobilisées par les élèves, les questions et les choix qu'ils ont formulés, il ressort qu'une majorité d'entre eux se sont appropriés le contexte extra-mathématique du problème afin de le rendre accessible à un traitement mathématique.

Il apparaît alors que l'hypothèse est validée puisque la majorité des élèves de CM2 ont questionné le contexte de la situation de la grande roue, pour ensuite faire des choix et hypothèses simplificatrices permettant de traiter mathématiquement ce problème de type ouvert et extra mathématique de niveau 3.

Ainsi, au terme de cette recherche qui détaille l'ensemble des données recueillies, **un problème de type ouvert et extra mathématique de niveau 3 favorise chez une majorité d'élève un travail relevant de la mathématisation horizontale.**

2. Perspectives

Le cadre de cette présentation ne permettait de résumer qu'une des deux hypothèses de recherche. La deuxième, intimement liée à la première, traite de la posture enseignante lors de la mise en place d'un problème comme celui de la grande roue. Je vous invite donc à lire l'entièreté de mon travail bientôt disponible sur Dumas, si le sujet vous intéresse.

D'autre part, l'achèvement de mes recherches de fin d'étude n'est pas vécu comme une fin, mais plutôt comme le début d'une démarche réflexive, qui m'a d'ailleurs conduit, dans une volonté d'enrichir mes connaissances sur cette thématique, à intégrer le projet *Léa*² « Mathématisation de problèmes concrets en vidéo » co-porté par Sonia Yvain-Prébiski ([Mathématisation de problèmes concrets en vidéos \(MaPcv\) — LéA \(ens-lyon.fr\)](#)). Ce projet de recherche collaborative porte sur l'étude du dispositif Educabagnols (dont est issu le problème de la grande roue) sur les pratiques d'enseignement et de formation à la modélisation mathématique, ainsi que sur le rôle des acteurs dans un processus collaboratif. Au sein de ce dispositif, les problèmes vidéo restent assez ouverts afin de permettre des modélisations en fonction des choix opérés par les élèves. L'objectif visé est de relever des contraintes, des leviers à la mise en œuvre d'un tel enseignement, afin de dégager des éléments d'analyse sur l'évolution des pratiques professionnelles des différents acteurs.

RÉFÉRENCES

- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Artigue, M. (1991). Ingénierie didactique en mathématiques. *Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, (5), 1-22.
- Burgermeister, P.-F. et Dorier, J.-L. (2013). La modélisation dans l'enseignement des mathématiques en Suisse romande. *Petit x*, (91), 5-24.
- Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.

² Le projet Léa mathématisation de problèmes concrets en vidéos (MAPCV) est une recherche-action autour de la résolution de problèmes concrets posés sous forme vidéo pour travailler la modélisation mathématique (<https://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/mathematisation-de-problemes-concrets-en-videos-mapcv>).

Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2013). *PISA 2012. Assessment and analytical framework mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. <http://www.oecd-ilibrary.org/docserver/download/9603051e.pdf?expires=1503160581&id=id&accname=guest&checksum=0FC6A3AA70C4AB2F526F533DA7339200>

Yvain-Prébiski, S. (2018). *Étude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves* [Thèse de doctorat, Université Montpellier]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01956661v1/document>

VERS UNE ÉDUCATION INCLUSIVE : ANALYSE DE LA PRATIQUE ENSEIGNANTE ET DE SES GESTES PROFESSIONNELS. LE CAS D'UN ENSEIGNANT DU PRIMAIRE

| DEBLOIS* ISABELLE

Résumé | Cette communication s'intéresse aux gestes professionnels de l'enseignant qui enrichissent l'activité mathématique des élèves et favorisent l'autorégulation de leurs apprentissages. C'est l'occasion de nous familiariser à l'étude de la pratique évaluative d'un enseignant québécois d'une classe de 4e année du primaire (élève de 9-10 ans), dont le matériau sera une séance de classe en mathématique. L'organisation de sa classe, les modalités de différenciation et les gestes évaluatifs posés pour soutenir les apprentissages différenciés des élèves seront étudiés.

Mots-clés : gestes évaluatifs, éducation inclusive, différenciation, mathématique, primaire

Abstract | This communication focuses on the teacher's professional actions that enrich students' mathematical activities and promote self-regulation in their learning. It is an opportunity to familiarize ourselves with the study of a 4th-grade teacher's practice, based on a mathematics class session. The organization of the classroom, differentiation methods, and evaluative actions taken to support differentiated student learning will be analyzed.

Keywords: Evaluative gestures, inclusion, differentiation, mathematics, elementary

I. INTRODUCTION

Le travail que nous présentons ici s'inscrit dans le prolongement de la recherche-action ÉCRAN subventionnée par le FRQSC portant sur l'évaluation collaborative réussie des apprentissages avec le numérique. (Laferrière *et al.*, 2024) Ce projet examine les conditions qui font que des outils/processus d'évaluation, qui tirent profit du numérique, satisfont aux valeurs de justice, d'égalité et d'équité. Cela dit, la recherche-action a pour objectif d'engager les partenaires dans le codesign d'outils d'évaluation sous support numérique et porte son attention à plusieurs facteurs individuels et contextuels en tant que sources potentielles d'iniquités. Certains sites de collaboration entre chercheurs et enseignants ont porté leur attention sur le codéveloppement des pratiques évaluatives d'enseignant·es intervenant en mathématique, pratiques qui s'appuient sur les principes de l'éducation inclusive promus notamment par Mottier-Lopez (2015).

Au Québec, un virage vers une éducation inclusive est observable. Lequel tend à ce que l'école s'adapte à la diversité des élèves dans leur ensemble (CSE, 2017). Les pratiques dites inclusives sont celles qui prennent en compte la diversité des besoins des élèves pour maximiser leur participation aux apprentissages ainsi qu'à la vie sociale et culturelle de l'école et de la communauté (Booth et Ainscow, 2004 ; Rousseau *et al.*, 2019). La diversité à l'école est le reflet de « l'expression de caractéristiques humaines ou de préférences de l'apprenant, faisant référence aux expériences déjà vécues qui sont interpellées alors qu'il aborde les situations nouvelles qui lui sont proposées en classe » (Prud'homme, 2007, p. 34). Plusieurs chercheurs rendent compte de la diversité en approchant les aspects ethnoculturel, linguistique et religieux en éducation (Audet *et al.*, 2022 ; Potvin *et al.*, 2018), d'autres discutent de la diversité en portant leur attention aux caractéristiques et spécificités des élèves (situation de handicap, déficit cognitif). Certains travaux en didactique (Beaudoin *et al.*, 2021 ; Giroux, 2015)

* Université du Québec à Rimouski – Canada – isabelle.deblois@uqar.ca

enrichissent cette sensibilité sur la diversité en ne l'expliquant pas uniquement en termes de catégorisation d'élèves ou de défis, mais en prenant aussi en compte les stratégies de résolution ou de façons différentes de réfléchir mathématiquement.

Malgré la place croissante de l'éducation inclusive, on en sait encore très peu sur les façons dont ils se transposent dans la classe et comment ils teintent les pratiques enseignantes. Or, sous les principes de l'éducation inclusive, la conception de l'évaluation est elle-même en transformation et invite à se détacher de la dichotomie entre l'évaluation formative et l'évaluation sommative (Black et Wiliam, 1998). Une évaluation en soutien à l'apprentissage des élèves est ainsi mise en place par certains enseignants.

Il s'agit désormais de concevoir l'évaluation comme un levier d'action positif pour soutenir des apprentissages de qualité (Mottier Lopez, 2021). Des modèles tels que l'évaluation pour apprendre (« assessment for learning ») et l'évaluation pour un apprentissage durable (« sustainable assessment ») intègrent diverses formes d'évaluation (formelle et informelle, formative et sommative, autoévaluation, évaluation par les pairs...) visant à encourager l'engagement des élèves dans leurs apprentissages dans une perspective de régulation (Laferrière et al., 2024).

Ce texte est l'occasion de nous familiariser avec l'étude de la pratique évaluative d'un enseignant intervenant en mathématique. Plus précisément, on s'intéresse, d'une part, aux moyens mis en place dans l'organisation de sa classe et aux façons dont ils sont exploités et, d'autre part, aux gestes professionnels de la personne enseignante qui ont le potentiel de faire vivre une activité mathématique riche chez les élèves et favoriser l'autorégulation de leurs apprentissages. Les gestes évaluatifs sont considérés comme une combinaison des gestes de recueil d'informations et des gestes de rétroaction qui peuvent porter autant sur les connaissances, les compétences ou les façons de collaborer dans la classe de mathématique (Blanchouin, Grapin et Mounir, 202 ; Tremblay et Delobbe, 2022).

II. CADRE CONCEPTUEL

En s'appuyant sur la synthèse de Mottier-Lopez (2015, p. 43), nous identifions cinq composantes impliquées dans le processus d'évaluation :

« l'objet à évaluer [...] ; les attentes vis-à-vis de cet objet [...] ; le recueil d'un ensemble d'informations en rapport avec l'objet au regard des possibilités du réel ; l'interprétation des informations recueillies [...] ; la formulation d'une appréciation qui doit pouvoir être communiquée et fonder des prises de décision ».

Les deux premières composantes portent sur les savoirs ou raisonnements en jeu et sur la façon dont se traduisent, dans la classe, les attentes de la personne enseignante. Celles-ci peuvent s'exprimer dans les outils (p. ex. grille d'évaluation) utilisés en classe, mais sur ce qui est dit et fait par la personne enseignante. Cela relèverait du contrat didactique. La composante relative au recueil d'informations sur les apprentissages des élèves peut aussi être enrichie par la prise en compte de l'aménagement de la classe et un travail de planification des modalités de travail (en équipes, en individuel...) soutenu par une analyse des progrès des élèves sur les savoirs mathématiques (connaissances et processus personnels). Comme le rapportent Tremblay et Delobbe (2022), l'aménagement de la classe (murs verticaux, visibilité d'attentes, îlots de travail) et plus particulièrement les façons dont il est exploité devrait être considéré comme une composante supplémentaire permettant de mieux comprendre la pratique évaluative de la personne enseignante. L'aménagement peut servir et faciliter la collecte de données de la personne enseignante ; il peut faciliter la rétroaction en cours d'activité. De même, les chercheuses donnent comme exemple que la planification d'îlots de travail par la personne enseignante selon les difficultés perçues chez certains élèves, peut permettre de regrouper des élèves afin de proposer des problèmes qui sont plus près de leur zone proximale de développement, être plus sensible

aux procédures de résolution de ces élèves et aussi de planifier en quelque sorte les objets potentiels de rétroaction.

1. *L'étude des gestes évaluatifs*

Les gestes évaluatifs de la personne enseignante sont considérés comme une combinaison de gestes de recueil d'informations et de gestes de rétroaction concernant les connaissances ou capacités ou compétences des élèves, relativement à l'objet d'évaluation que s'est fixé l'enseignant·e, en lien avec ses attentes envers un / certains / tous les élèves (Blanchouin et al., 2022). Qui plus est, chacun de ces deux gestes est défini par : les destinataires (un élève, un groupe d'élèves, etc.), la méthode de recueil (questionnement oral, observation silencieuse, etc.) ou de rétroaction (communication verbale ou non verbale, par exemple) ainsi que la nature des informations recueillies ou transmises (Blanchouin et al., 2022). Cette combinaison soit du recueil et de la rétroaction est analysée en prenant en compte l'activité d'enseignement-apprentissage. De ce fait, les actions de l'enseignant·e sont interprétées selon les informations recueillies et la nature des rétroactions, lesquelles peuvent porter sur la personne, la tâche, le processus ou l'autorégulation. Ensuite, il s'agit d'être conscient des attentes de la personne enseignante afin de bien comprendre la visée évaluative de chacun de ses gestes.

2. *Guidage de la personne enseignante*

Les gestes de collecte de données et de rétroaction permettent de porter un regard plus global pour mieux appréhender la nature du guidage de l'enseignant·e dans les séquences interactives retenues pour leur fonction de soutien formatif à l'activité d'apprentissage de l'élève, Mottiez-Lopez (2015b) a développé un outil prenant la forme d'un continuum qui nous semble pertinent aux fins d'analyse d'une pratique enseignante. Ce continuum aborde la nature du guidage et pour lequel elle retient cinq catégories de participation guidée où les conduites verbales d'initiation et de réponses sont qualifiées selon qu'elles soient de l'ordre de la restitution des savoirs en jeu ou plutôt décrites « à développement ». Dans le premier cas, elles sont « sous le contrôle de l'enseignant·e » qui mène le questionnement. Dans le second cas, le contenu de la discussion n'a pas été désigné préalablement par la personne enseignante, laquelle construit alors à partir des propos des élèves. Ainsi sur le continuum proposé, sous un pôle, nommé guidage ciblé, la gestion est sous le contrôle quasi exclusif de l'enseignant (ex. l'enseignant·e donne des consignes sans attendre de réponse verbale des élèves). À l'autre pôle, elle réfère à un guidage dit ouvert alors qu'il y a gestion partagée avec les élèves des interactions et de la structuration des contenus de savoir (Voir en Annexe 2, le continuum de Mottier-Lopez). Plus le guidage est ouvert, plus l'enseignant·e devra recourir au questionnement et à la reformulation dans le processus partagé visant les avancées des savoirs en jeu.

III. MÉTHODOLOGIE

Cette communication vise, on le rappelle, à nous familiariser avec l'étude de la pratique évaluative d'un enseignant en convoquant l'étude des gestes évaluatifs et la prise en compte de l'aménagement de la classe. La méthodologie de recherche qualitative est donc ici retenue. Notre matériau d'analyse comporte deux composantes. D'abord, une captation vidéo d'une leçon de 60 minutes qui n'avait pas été préalablement choisie et qui a été enregistrée en juin 2023. L'enseignant, que nous nommerons Louis, intervient en cinquième année du primaire (10-11 ans) au Québec, son groupe est composé de 24 élèves. De même, un entretien semi-dirigé a été mené à la fin de la leçon afin d'en apprendre davantage sur sa conception et sa vision de l'évaluation en référant à certains choix et actions menées durant la leçon. Un travail général de description de l'aménagement de la classe a été fait. Ne sont retenues ici que les composantes qui médiatisent l'activité d'enseignement-apprentissage-évaluation

3. Tâche retenue et ses différentes déclinaisons

IV. RÉSULTATS

1. Aménagement de la classe

[illegible]

2. Amorce et dévolution du choix de l'îlot

Projet spécial 1 | La parole aux jeunes enseignants francophones : formation et entrée dans le métier
1322 | **EMF 2025**

expert en factorisation de nombres, que crois-tu que je dois savoir ? » Un élève nomme l'importance des critères de divisibilité ; l'enseignant renvoie la validation de la pertinence et fait le lien avec l'élaboration d'un arbre de facteurs. Il demande de nommer les différents critères qu'ils connaissent. Pendant ce temps, il les note au tableau à titre de support visuel. L'enseignant s'arrête à deux reprises durant cette amorce pour valider la compréhension de certains élèves ciblés à l'aide de questions fermées.

À la suite de cette première phase prenant la forme d'une discussion dirigée, Louis explique le fonctionnement de la période de travail à venir en lien avec les îlots d'apprentissage. Il insiste sur le niveau de confiance que l'élève a relativement à la factorisation d'un nombre. Il précise ainsi que si l'élève ne se sent pas confiant avec la notion et qu'il sent le besoin d'être aidé, celui-ci doit se rendre à l'îlot de niveau novice. Si l'élève se sent confiant et il croit être capable de résoudre les problèmes sans aide, Louis évoque qu'il peut choisir le niveau intermédiaire. Finalement, si l'élève comprend bien la factorisation et qu'il se sent à l'aise dans la reconnaissance des diviseurs des nombres inférieurs à 100, alors il peut prendre un défi supplémentaire et ainsi choisir le niveau expert.

L'enseignant nomme à trois reprises aux élèves qu'il est possible de faire des allers-retours entre les différents îlots d'apprentissage selon la perception qu'a l'élève de son niveau de difficulté. Louis rappelle : « c'est important que tu sois honnête. C'est toi qui évalues où tu crois te situer, c'est toi qui te fixes un défi ». Ainsi, les apprenants devront décider eux-mêmes l'endroit de travail propice selon leur compréhension et leur aisance à factoriser un nombre. Louis précise qu'il se placera à la table des novices. La personne enseignante rappelle une nouvelle fois ses attentes pour chacun des îlots, la méthode pour se corriger (les corrigés sont disponibles à l'avant de la classe) et les stratégies à appliquer lorsqu'un élève rencontre des difficultés : demander l'aide d'un pair d'abord, évaluer la possibilité de revenir à un niveau précédent et, en dernier recours, solliciter son aide.

Louis rappelle les trois niveaux d'apprentissage aux élèves, leur demande de prendre une minute pour réfléchir au niveau où ils croient se situer et il leur demande de poser la main sur leur épaule lorsque leur choix est fait. À ce moment, un élève pose la question suivante :

- Élève 1 : Admettons que tu es à l'aise avec ça, mais que tu as le goût de commencer par le novice ?
- Enseignant : Ça c'est ton choix, mais moi, je vais être à la table des novices. Ça se peut que je te dise d'aller à la table des intermédiaires.

Cette interaction montre le souci de l'enseignant de l'autoévaluation des élèves et de les faire progresser à leur propre rythme. Durant la période de travail, l'enseignant est constant avec cette directive. Plus précisément, il mentionne à un élève qui s'est mis à une table novice d'aller au niveau supérieur, car il en est capable.

Au fil de la période de travail, l'enseignant reste à l'îlot des novices. Six élèves s'y trouvent. Il intervient à différents moments courts et réguliers auprès des élèves en utilisant des gestes de rétroaction formulés oralement et qui sont destinés à un élève ou à un groupe d'élève. Par exemple :

- Enseignant : Peux-tu me dire ce que tu es en train de faire ?
- Élève : Je divise par deux
- Enseignant : Pourquoi tu fais cela
- Élève : Parce qu'on doit mettre en facteurs premiers, mais je ne sais pas par coeur ça donne quoi.

- Enseignant : Si j'ai bien compris, tu veux diviser 30 par deux, mais tu ne te souviens plus ce que ça donne. Quel calcul fais-tu dans ta tête pour le trouver ?
- Élève : ...
- Enseignant : 30 divisé par deux, est-ce la même chose que de se demander 2 multiplié par quoi donne 30 ?
- Élève : [hoche la tête]
- Enseignant : Je crois que tu es capable de trouver la réponse que tu cherches. Je sais que tu es capable. Fais-toi confiance. Je vais aider quelqu'un d'autre, mais je serai là pour toi.

Pour une autre élève qui semble avoir plus de difficultés, Louis suggère l'utilisation d'un outil qui a été construit durant l'année scolaire qui intègre les tables de multiplication. Il évoque qu'il sera important au cours des prochaines années que l'élève soit capable de se remémorer les tables sans avoir recours à l'outil. Louis observe beaucoup ses élèves. S'il observe une erreur, il demande d'abord à l'élève d'expliquer comment il s'y est pris. Il espère alors que l'élève détectera de lui-même l'erreur. Si non, il offre de la rétroaction au niveau du traitement de la tâche, c'est-à-dire qu'il intervient sur le processus et il guide l'élève dans la réalisation de la tâche. Il se dégage, chez la pratique évaluative de Louis, que dans cette phase de travail des élèves, la rétroaction qui consisterait à verbaliser la procédure et reconnaître les indices permettant de reconnaître si un nombre est divisible par 2 ou par 3 est toujours précédée d'une observation silencieuse de ce que semblent comprendre les élèves. De cette façon, il cherche à connaître autant la compréhension qu'à l'élève de la tâche et le processus appliqué.

Lors de l'entrevue semi-dirigée, l'enseignant explique la progression de sa pratique évaluative depuis son début de carrière. Il évoque avoir une vision plus claire de ce que signifie évaluer pour soutenir les apprentissages de ses élèves. De ce fait, ses collègues et lui ont revu les grilles d'évaluation qu'ils utilisaient pour leur permettre de les utiliser pour aider les élèves à porter un jugement sur ce qu'ils font, mais aussi pour soutenir la rétroaction que ces enseignants donnent à leurs élèves. En outre, il évoque qu'ils ont créé des grilles qui sont utilisées sur une période de trois années et qui utilisent les critères ministériels, mais dont la forme est plus simple à comprendre pour les élèves. Il évoque qu'il cherche à ce que ses élèves aient une meilleure compréhension de ce qu'ils maîtrisent ou non, mais qu'il cherche aussi à ce que les parents comprennent mieux ce qui est évalué et où se situe leur enfant.

V. DISCUSSION

Le recours au continuum de l'évaluation-régulation interactive tel que proposé dans Mottier-Lopez (2015, p. 100) a traité l'étude de cette seule séance de remarquer que Louis opte tantôt pour du guidage plutôt ouvert (amorçage) pour inviter les élèves à investir leurs connaissances. Il recourt au guidage plus fermé pour encourager les élèves à porter un jugement (s'autoévaluer) sur eux-même. Toutefois, il laisse le résultat de ce jugement et la conséquence du choix de l'ilot à leur charge (contrôle à la charge de l'élève). Lors de la phase de résolution des cas de nombres, ses interventions dans l'ilot des novices prennent la forme d'un guide plus fermé (proposition d'outil, progression de questions visant à mettre en évidence les questions que l'élève devrait se poser pour trouver les facteurs). L'étude de l'environnement de la classe (positionnement des bureaux pour former des ilots, l'ilot des novices plus près du tableau permettant à l'enseignant d'y écrire, cartons présentant les nombres par niveaux, corrigés disponibles à l'avant) soulève des questions. Ce n'est pas l'environnement en soi qui favorise l'évaluation en soutien d'apprentissage, mais comment l'enseignant l'investit dans sa pratique évaluative. L'étude des gestes évaluatifs exige de la situer dans les activités d'enseignement-apprentissage-évaluation.

VI. CONCLUSION

L'évaluation en soutien aux apprentissages est une pratique évaluative qui gagne à être utilisée. Cela dit, elle demande à l'enseignant de varier ses méthodes de recueils d'informations ainsi que ses gestes de rétroaction. En ayant comme visée d'évaluer dans une perspective de soutien aux apprentissages, il est primordial d'accorder une grande place à la rétroaction afin de permettre aux élèves de progresser. Un travail de préparation et de réflexion doit alors être effectué en amont pour déterminer les outils à utiliser, les méthodes, le temps, la tâche à effectuer et l'aménagement de la classe.

RÉFÉRENCES

- Audet, G., Gosselin-Gagné, J. et Koubeissy, R. (2022). Une compétence interculturelle et inclusive « en acte » : analyse de récits de pratique d'enseignant.e.s à propos de l'intervention en contexte de diversité ethnoculturelle. *Formation et profession*, 30(1), 1-12. <https://doi.org/10.18162/fp.2022.612>
- Beaudoin, C., Rousseau, N., Thibodeau, S. et Borri-Anadon, C. (2021). Les services éducatifs complémentaires à la formation professionnelle : qu'en est-il pour les 16-19 ans ? *Enfance en difficulté*, 8, 25-45. <https://doi.org/10.7202/1075505ar>
- Black, P. et Wiliam, D. (1998). *Inside the black box: Raising standards through classroom assessment*. King's College London School of Education
- Blanchouin, A., Grapin, N. et Mounier, E. (2022, 12-14 avril). *Gestes évaluatifs en contexte d'ingénierie évaluative : exemples d'études en mathématiques à l'école élémentaire* [Communication]. 33^e Colloque de l'ADMEE-Europe « Pluralité de contextes, pluralité d'évaluations en éducation : quelles interactions et quels enjeux ? », ADMEE-Europe, Pointe à Pitre (Guadeloupe), France.
- Booth, T. et Ainscow, M. (2004). *Index for inclusion: developing learning, participation and play in early years and childcare*. Centre for Studies in Inclusive Education.
- Conseil supérieur de l'éducation [CSE]. (2017). *Pour une école riche de tous ses élèves : s'adapter à la diversité des élèves, de la maternelle à la 5^e année du secondaire*. Le Conseil.
- Giroux, J. (2015). Difficultés des élèves en mathématiques au primaire : les apports de la didactique. *Math-École*, (224), 4-7. https://revue-mathematiques.ch/application/files/7014/6288/8788/ME224_Giroux.pdf
- Laferrière, T., Tremblay, M., Bernatchez, J., Delobbe, A., Ntebutse, J., Allaire, S., Barma, S. et Robert-Mazaye, C. (2024). *L'ÉCRAN : l'évaluation collaborative réussie des apprentissages par le numérique* [Rapport de recherche] (n° 2021-0EUA-293516). Fonds de recherche du Québec – Société et culture [FRQSC]. https://frq.gouv.qc.ca/app/uploads/2024/03/rapport_lecran_therese-laferriere.pdf
- Mottier Lopez, L. (2015a). Chapitre 6. Recherche collaborative sur les pratiques de régulation formative en classe : questionnement épistémologique critique. Dans Les chercheurs ignorants (dir.), *Les recherches-actions collaboratives : une révolution de la connaissance* (p. 57-65). Presses de l'EHESP. <https://doi.org/10.3917/ehesp.lesch.2015.01.0057>
- Mottier Lopez, L. (2021). Une évaluation continue pour apprendre durablement, une évaluation à visée inclusive. *Revue suisse de pédagogie spécialisée*, 11(4), 9-16. www.szh-csps.ch/r2021-12-01
- Mottier Lopez, L. (2015b). Évaluation-régulation interactive : étude des structures de participation guidée entre enseignant et élèves dans le problème mathématique « Enclos de la chèvre ». *Mesure et évaluation en éducation*, 38(1), 89-120. <https://doi.org/10.7202/1036552ar>

- Potvin, M., Dhume, F., Verhoeven, M. et Ogay, T. (2018). La formation des enseignants sur la diversité et les rapports ethniques : regard comparatif France, Québec, Belgique et Suisse. *Éducation et francophonie*, 46(2), 30-50. <https://doi.org/10.7202/1055560ar>
- Prud'homme, L. (2007). *La différenciation pédagogique : analyse du sens construit par des enseignantes et un chercheur-formateur dans un contexte de recherche-action-formation* [Thèse de doctorat, Université du Québec en Outaouais]. Archipel. <https://archipel.uqam.ca/745/1/D1599.pdf>
- Rousseau, N., Thibodeau, S., St-Vincent, L. A., Point, M. et Desmarais, M. É. (2019). Le leadership de la direction d'école : son influence sur la mise en place de pratiques plus inclusives au secondaire. *Enseignement et recherche en administration de l'éducation*, 2(1), 26-42.
- Tremblay, M. et Delobbe, A. M. (2022). Une étude comparative des évaluations ministérielles en mathématique du primaire, du secondaire et de l'éducation des adultes. Dans N. Talbot et S. El Euch (dir.), *L'évaluation des compétences : une pluralité de défis* (p. 111-134). Presses de l'Université du Québec.

ANNEXE 1

NOMBRES CHOISIS PAR L'ENSEIGNANT SELON LES ILOTS D'APPRENTISSAGE

Novice		Expert	
a) 16 / \	b) 30 / \	a) 303 / \	b) 400 / \
c) 99 / \	d) 8 / \	c) 170 / \	d) 93 / \
e) 27 / \	f) 54 / \	e) 160 / \	f) 32 / \
g) 35 / \	h) 60 / \	g) 54 / \	h) 1242 / \

ANNEXE 2

CONTINUUM DE L'ÉVALUATION-RÉGULATION INTERACTIVE TEL QUE PROPOSÉ DANS MOTTIER-LOPEZ (2015, p. 100)

Contrôle de l'enseignant (E) de la gestion des interactions, de la gestion des apports et de la structuration du contenu			Contrôle partagé entre l'enseignant et les élèves de la gestion des interactions, de la gestion des apports et de la structuration du contenu	
← Apports des élèves contraints par un guidage ciblé de l'E			→ Apports des élèves moins contraints, avec un guidage ouvert de l'E	
Initiations/Réponses de restitution			Initiations/Réponses de développement	
L'E explique, présente, incite, donne des consignes.	L'E fait lire, sollicite des <i>éléments présents</i> (tableau, documents, consignes, etc.) en tant que référence externe à l'élève, une référence « culturelle », construite ou non par la classe.	L'E pose des questions ouvertes ou ciblées sur des éléments <i>qu'il attend</i> (mais qui ne sont pas directement présents).	L'E pose des questions ouvertes (dont le contenu <i>n'est pas de la restitution</i>) et fait explicitement des réponses. Si nécessaire, l'E fournit de l'étayage ciblé.	En plus, l'E sollicite des <i>échanges entre élèves</i> .
Les élèves écoutent.	Les élèves lisent ou citent les éléments présents.	Les élèves apportent des réponses essentiellement de restitution (souvent une seule réponse possible).	Les élèves donnent des réponses variées de développement (souvent plusieurs réponses et raisonnements possibles). Ils explicitent leur raisonnement, démarche, etc.	En plus, les élèves prennent des initiatives, par exemple l'élève pose une question à un pair, le contredit, interpelle l'E, formule des hypothèses, etc.
[PG-A]	[PG-B]	[PG-C]	[PG-D (ou D-ciblé)]	[PG-E]
[EV-E]: évaluation exclusivement sous la responsabilité de l'enseignant			[EV-é+E]: évaluation partagée avec les élèves	

Figure 1. *L'évaluation-régulation interactive comme participation guidée*

« *MAIS POURQUOI ON ÉCRIT PLUS EN MATHS QU'EN FRANÇAIS ?* » : ENJEUX LANGAGIERS EN COURS DE MATHÉMATIQUES

| DIALLO* SHANA

Résumé | La difficulté qu'a l'école française à faire réussir tous les élèves reflète une démocratisation inachevée de l'accès aux savoirs dans l'enseignement secondaire. Dans cet article, je propose d'approfondir la compréhension des inégalités d'apprentissage en mathématiques à la lumière des théories de sociologie de l'éducation et de didactique des mathématiques, en portant une attention particulière aux dimensions scripturale et langagière des enseignements.

Mots-clés : inégalités d'apprentissage, sociologie de l'éducation, didactique des mathématiques, écriture, géométrie

Abstract | The difficulty faced by the French education system in ensuring the success of all students reflects an incomplete democratization of access to knowledge in secondary education. In this article, I aim to deepen the understanding of learning inequalities in mathematics through the lens of educational sociology and mathematics didactics theories, with particular attention to the scriptural and linguistic dimensions of teaching practices.

Keywords: Learning inequalities, sociology of education, mathematics didactics, writing, geometry

I. INTRODUCTION

Un début de carrière dans l'enseignement des mathématiques dans le secondaire, sans formation préalable, implique l'adoption de pratiques « naïves » et familières des jeunes enseignants au sortir de l'université. Parmi ces pratiques, celle de l'enseignement magistral est commune, et consiste à exposer les savoirs et objets d'apprentissage aux élèves — *via des supports écrits et oralisés* — en supposant les conditions de leur transmission réunies. Rapidement, l'expérience montre les limites de la méthode : la transmission ne s'établit que peu, voire pas, avec certains élèves, ce d'autant plus qu'ils sont issus de milieux populaires (Rochex et Crinon, 2011). En fait, le caractère socialement inégalitaire de l'école française témoigne de ce que cette limite n'est pas propre à l'enseignement magistral, mais concerne plutôt les pratiques enseignantes dans leur globalité.

On pourrait facilement attribuer cet échec à un manque de la part des enfants concernés, comme l'ont suggéré (et le suggèrent encore parfois) les théories du don et du handicap socio-culturel (Charlot, 2020). Mais ces conceptions sont dépassées : de nombreux travaux — comme ceux de Bernard Lahire et du groupe ESCOL — ont réfuté ces théories en analysant les mécanismes à l'œuvre dans cette pérennisation des inégalités scolaires, en observant de près les enseignants, les enfants-élèves et leurs familles dans leurs pratiques quotidiennes et scolaires, dès la plus tendre enfance. Ceux-ci interprètent les différences d'apprentissage scolaires comme des conséquences de certains rapports sociaux au langage et au savoir¹ qui rendent opaques à la fois les savoirs construits dans et par l'écrit, et les interactions médiées par des modes de communication scripturaux et des pratiques langagières scolaires.

* Collège Gustave Flaubert et IREM Paris Nord – France – shana.diallo@ac-paris.fr

¹ Selon l'expression « rapport au langage et au savoir » évoquée d'abord par Bourdieu et Passeron dans *La Reproduction* en 1970, puis reprise par l'équipe ESCOL dans une perspective socio-anthropologique (Charlot, 2020).

En mathématiques, d'une part, la corrélation entre origine sociale et réussite est exacerbée², d'autre part, on n'échappe pas à l'écrit : il y a toujours une leçon à apprendre, un cours à relire, une réponse à rédiger, une figure à tracer, un calcul à poser, une représentation graphique à construire... Ce double constat incite à interroger les spécificités des inégalités d'apprentissage en mathématiques, au regard des approches scripturales et langagières de l'échec et des difficultés scolaires. L'enjeu est de taille, si l'on considère à la fois que « le système scolaire continue à sélectionner les élèves pour une large part sur ce qu'il ne leur enseigne pas ou échoue à leur enseigner » (Crinon et Rochex, 2011), et que les mathématiques restent une discipline de sélection scolaire.

Ce travail a déjà été largement élaboré par des didacticiens et didacticiennes des mathématiques, de façon complémentaire à celui des sociologues, et je présenterai leurs hypothèses. L'arrière-plan théorique de cet article est donc dual : sociologique et didactique. L'interdisciplinarité de l'approche proposée ici reste cependant sans prétention, de façon à éviter l'écueil « de faire dialoguer des concepts aux épistémologies inconciliables » (Souto Lopez et Dehantschutter, 2020). L'ambition est plutôt de suggérer d'autres idées de rapprochements conceptuels et disciplinaires pour appréhender la complexité du phénomène des inégalités d'apprentissage en mathématiques, dans le but d'agir, en classe, sur ces inégalités.

Je commence par exposer quelques points de repères sociologiques sur la notion de rapport au langage et au savoir en lien avec la question des inégalités scolaires. Je m'intéresse ensuite aux spécificités langagières et scripturales des mathématiques et de leur enseignement vis-à-vis de cette approche — en me limitant dans cet article au cas de la géométrie au primaire et au collège — et intègre à la réflexion le point de vue de la didactique de la géométrie. Enfin, je dresse un tableau non exhaustif de pratiques en faveur d'un rapport à l'écrit et au savoir en adéquation avec les apprentissages en géométrie et en mathématiques en général.

II. APPROCHES LANGAGIÈRE ET SCRIPTURALE DES INÉGALITÉS D'APPRENTISSAGE

Les travaux fondateurs sur les inégalités scolaires en France sont apparus dans les années soixante — avec la massification de l'accès à l'enseignement secondaire et supérieur — et ont mis en évidence une corrélation communément admise entre devenir scolaire et origine sociale des élèves. Une focalisation sur la question des savoirs et des apprentissages a permis des avancées majeures dans la compréhension de ce qui se joue en classe dans la construction et l'entretien des inégalités scolaires, au-delà de la « culture de l'implicite » déjà dénoncée par Pierre Bourdieu et Jean-Claude Passeron dans leurs travaux fondateurs.

Dans ou hors l'école, dans toute société, les êtres humains, dès leur tendre enfance, apprennent, puis transmettent leurs savoirs aux générations ultérieures. Pour comprendre pourquoi les apprentissages scolaires représentent une difficulté particulière pour certains enfants, on peut commencer par interroger leurs spécificités³. Pour Bernard Lahire (2000), l'existence de l'école est une conséquence de la volonté des sociétés à transmettre de façon systématique des savoirs d'une nature *extra-ordinaire* ou *im-populaire* : des « savoirs détachés des pratiques », objectivés, formalisés et codifiés, par opposition aux compétences culturelles diffuses dont ils sont issus. De fait, ces savoirs sont des savoirs « hors contexte », indépendants des situations réelles dont ils ont été abstraits par un processus de décontextualisation. La nature de ces savoirs est en outre indissociable de la modalité selon laquelle

² <https://www.cnesco.fr/comprendre-les-resultats-en-mathematiques-des-eleves-en-france/>

³ Une vision globale et plus complète de ces considérations est donnée dans la note de synthèse de Souto Lopez et Dehantschutter (2020).

ils ont été produits : l'écriture. C'est par l'écriture que les savoirs sont abstraits, et ils « s'organisent selon une logique propre — logique scripturale — qui n'est plus celle de la pratique : systématisation, formalisation, généralisation, voire même théorisation ». Autrement-dit, l'écriture organise les savoirs du point de vue de leur forme. Lahire s'appuie sur les travaux de l'anthropologue Jack Goody, qui précise comment ce mode de communication influence les savoirs. En déployant le discours devant les yeux, l'écriture permet de manière inhérente l'accumulation des pensées qui peuvent être méditées individuellement et collectivement, analysées et soumises à une inspection détaillée, de façon abstraite. Cela implique que l'écriture favorise « le champ de l'activité critique », « la rationalité, l'attitude sceptique, la pensée logique » (Goody, 1979). De même, la transmission des savoirs ne peut faire l'économie de l'écriture, puisque c'est le moyen de communication qui les a engendrés d'une part, et parce qu'ils sont essentiellement codifiés de manière graphique d'autre part. Cela implique que « l'école est un univers de culture écrite » (Lahire, 1995). L'accès aux savoirs objectivés (c'est-à-dire l'apprentissage scolaire) ne nécessite alors pas seulement de savoir lire et écrire, mais « exige la mise en œuvre d'un *rapport réflexif au langage*⁴ qui suppose une mise à distance d'un langage-objet, étudié en lui-même et pour lui-même à partir de divers savoirs scripturaux constitués sur la langue » (Lahire, 2000). En effet, les savoirs dont il est question concernent le réel mais n'en sont pas l'expérience même. Les savoirs en tant que connaissances décontextualisées ont un sens qui concerne le réel mais n'existent que dans et par le langage dans sa forme scripturale. L'école se caractérise en conséquence comme le lieu d'un mode de socialisation spécifique — scriptural — pour lequel la langue, et non le réel directement, est objet d'analyse, et où les relations sociales sont tributaires de pratiques langagières scripturales. Ces pratiques langagières prennent notamment la forme de discours de genre second, la secondarisation étant synonyme de décontextualisation et de mise à distance de l'action dans l'élaboration des savoirs (Bautier et Goigoux, 2004). Apprendre à l'école suppose donc une conception du langage, un rapport au langage, comme objet séparé du réel qu'il permet de décrire ; et donc une « familiarité avec des usages et des habitudes de traitement littéraire du langage » (Crinon et Rochex, 2011). Mais cette conception, cette familiarité, pour pouvoir être opérationnelles à l'école, doivent avoir été inculquées en amont par la famille ou à un moment de la scolarité, au sein même de l'école.

Par ailleurs, le rapport réflexif scriptural au langage est inextricable d'un rapport au savoir et d'un rapport à l'école particuliers, parce qu'il conditionne le sens qui peut être donné aux savoirs tels qu'ils sont transmis à l'école, et le mode d'apprentissage de ces savoirs. Schématiquement, un enfant éloigné de la culture écrite aura tendance à apprendre en faisant, et donnera du sens à ce qu'il pourra expérimenter par la pratique — ce qui n'est pas illégitime — développant des capacités d'adaptation situationnelles et incorporées, avec un moindre degré d'objectivation de ces savoirs. De ce fait, il lui sera difficile de donner du sens aux savoirs abstraits scolaires véhiculés par des textes, images et graphiques décollés du réel. Cette posture, ce rapport au savoir, est immédiatement posture face aux apprentissages scolaires, qui, selon leur forme, ne recevront pas une attention et un intérêt égaux de la part de l'élève. Le caractère inégalitaire de l'institution témoigne de ce que l'inculcation d'un tel rapport au langage et au savoir, c'est-à-dire la socialisation scripturale scolaire, y est requise plutôt que prise en charge. Alors, « la production des inégalités scolaires en matière d'apprentissages et d'accès aux savoirs peut être considérée comme résultant de la confrontation entre, d'une part, les dispositions socio-cognitives et socio-langagières des élèves, liées à leurs modes de socialisation, et qui les préparent de façon fort inégale à faire face aux réquisits des apprentissages scolaires et, d'autre part, l'opacité et le caractère implicite de ces réquisits, des modes de fonctionnement du système éducatif et des pratiques professionnelles qui y sont mises en œuvre » (Bautier et Goigoux, 2004). A ce titre, les difficultés d'apprentissage peuvent être vues d'une part comme résultant de malentendus dans le dialogue scolaire,

⁴ C'est moi qui souligne.

la relation pédagogique, c'est-à-dire comme une incompréhension de la part des élèves concernés au sujet des objectifs et des enjeux de l'école et des apprentissages scolaires. D'autre part, ces difficultés témoignent aussi de l'échec de l'école à amorcer et entretenir le processus de socialisation scriptural scolaire nécessaire à la réussite de ces élèves à l'école.

On comprend alors que la réduction des écarts d'apprentissage, au sein des classes, peut être favorisée par la prise en charge par les enseignants directement, d'un mode de socialisation scriptural, ou d'un rapport au langage et au savoir particuliers. Mais ces considérations sont générales et ne prennent pas en compte les spécificités des disciplines. Je prolonge dans la suite quelques pistes de réflexion en mathématiques, à partir de travaux en didactique.

III. ENJEUX LANGAGIERS ET SCRIPTURAUX EN GÉOMÉTRIE

La question « Mais pourquoi on écrit plus en maths qu'en français ? » m'a été posée spontanément par un élève de sixième en début d'année scolaire, dans une classe composée d'élèves majoritairement issus de milieux populaires. Considérant le fait que les apprentissages de ces nouveaux collégiens allaient désormais passer de façon importante par l'écrit, et qu'ils devaient abandonner le « manipuler » et le « faire » au profit du « manipuler et faire *avec le langage* » — mais aussi pour des raisons de « gestion de classe » (Perrier, 2008) — j'avais instauré en classe des temps d'écriture conséquents, qui consistaient à copier ce que j'écrivais au tableau, après et au cours d'échanges oraux avec et entre élèves, sur un objet ou un exercice mathématique, c'est-à-dire lors de l'introduction d'une notion, de l'écriture d'un énoncé d'exercice, de la rédaction de sa correction et d'autres moments d'institutionnalisation. De fait, ni lire ni écrire n'est immédiatement comprendre ; faire écrire n'est pas rendre auteur : toute l'année, ces élèves ont copié les écrits du tableau, sans que cette habitude ne se « transfère » en capacité à les comprendre, ni à produire des écrits mathématiques. Mais au-delà de l'anecdote, cette question illustre clairement quelques malentendus sur les mathématiques : du côté des enseignants, l'enseignement des mathématiques échapperait aux dimensions scripturales et langagières qu'on retrouve dans les disciplines littéraires ; du côté des élèves, écrire en mathématiques serait une demande arbitraire de l'enseignant.

Comme le suggère la partie précédente, les mathématiques en tant qu'ensemble de savoirs, sont pourtant par nature indissociables de l'écrit. Les pratiques scolaires d'écriture en mathématiques, plutôt qu'arbitraires, ne sont donc qu'héritières de la forme du savoir « savant », et exigées par l'ambition de transmettre ce savoir. Rien d'étonnant, donc, à ce que les inégalités d'apprentissage (dans leur dimension scripturale) s'expriment aussi en mathématiques. « En mathématique comme en français, ce qui pose principalement problème aux enfants d'ouvriers (surtout), c'est l'attention portée au langage en tant que tel, avec le système de ses articulations internes, de ses contraintes formelles. » (Lahire, 2000) Entrons dans le détail. Qu'entend-on par « écriture » dans le cadre des mathématiques ? Qu'y fait-on grâce au langage et à l'écriture ? En quoi les savoirs mathématiques sont-ils dépendants du scriptural ? Quel rapport au langage est exigé par ces savoirs ? Comment se caractérisent les pratiques langagières dans le contexte de leur transmission ? Quelles pratiques enseignantes peuvent améliorer l'entrée de tous les élèves dans un rapport au savoir scriptural en mathématiques ? En cohérence avec la théorie de Goody, on peut parler d'écriture au sens large, sans se limiter aux textes, mais en considérant « toutes les ressources du graphisme : fiches, classement de fiches, index, tableaux, diagrammes⁵ », listes, graphiques, *dessins géométriques*, cartes, etc.

⁵ Jean Bazin et Alban Bensa, Préface de *La raison graphique* de Jack Goody.

Dans la suite, je cherche à répondre à ces questions en montrant la diversité des implicites et difficultés langagières et scripturales qui peuvent s'infiltrer dans l'enseignement-apprentissage de la géométrie⁶. Il s'agit plus précisément de mettre en évidence comment les pratiques langagières scripturales et les savoirs géométriques interagissent en classe, et génèrent des différences d'apprentissage selon les dispositions des élèves et les pratiques enseignantes.

1. *Géométrie, supports graphiques et pratiques langagières*

Considérons le mot « parallélogramme ». Il désigne une figure — un concept — géométrique, et peut évoquer un dessin familier, peut-être agrémenté de ses diagonales codées, ou bien une phrase, « quadrilatère aux côtés opposés parallèles et de même longueur », voire des exemples, carrés, rectangles ou losanges, eux-mêmes pensés comme dessins ou définitions. Et peut-être tout cela à la fois.

Faire de la géométrie, c'est d'emblée entrer dans un univers scriptural où cohabitent deux modes de représentation inséparables : les textes et les dessins. D'abord, la géométrie du collège hérite de celle d'Euclide telle qu'instituée dans ses *Eléments*. Ses objets sont d'abord des définitions et des théorèmes textuels : le texte euclidien est entièrement rédigé en langue naturelle, de sorte qu'il peut être lu comme tout texte littéraire. Catherine Houdement rapporte l'hypothèse d'Árpád Szabó décrite dans l'ouvrage *L'aube des mathématiques grecques* : la géométrie d'Euclide est née de l'apparition de la technique de preuve par l'absurde, qui « ne peut être que du domaine de la pensée » et qui « nécessite de travailler sur des objets idéels » (Houdement, 2007). Les objets d'une telle géométrie ne peuvent exister sans le langage, puisqu'il s'agit de mettre en évidence une contradiction. Dans le cas du parallélogramme, d'une part, un dessin ne peut exprimer à lui seul le parallélisme des côtés opposés. D'autre part, quand il s'agit de démontrer une propriété du parallélogramme, un dessin ne constitue pas un raisonnement ordonné explicite. Il faut donc toujours écrire. De même, l'organisation du discours euclidien est tributaire de la logique et d'usages de la langue historiquement modelés ; les pratiques langagières qui en sont issues sont partie intégrante de l'enseignement-apprentissage géométrique.

Néanmoins, le texte euclidien est quand même accompagné de dessins, et ceux-ci ne jouent pas qu'un rôle illustratif. En effet, chez les grecs, « la géométrie trouve expression dans la figure tracée », au sens où « prouver et tracer une figure étaient considérés comme des opérations étroitement entrelacées : en traçant une figure, on accomplit toujours aussi une séquence argumentative et vice-versa » (Cambiano, 2010). Les dessins portent donc aussi une fonction heuristique. Il existe plusieurs façons de tracer un parallélogramme : en traçant des droites deux à deux parallèles, en traçant deux segments qui se coupent en leur milieu et en joignant leurs extrémités, en construisant un quadrilatère dont les angles et les segments opposés sont deux à deux de même mesure... Alors, chaque « programme de construction » traduit en gestes une propriété de la figure. Mais il s'agit alors de dessiner en suivant une suite d'instructions avec précision, et de réaliser la séquence argumentative en question. Réciproquement, le travail sur le dessin permet, en amont du travail de démonstration, de laisser libre cours à son intuition et de formuler des conjectures⁷. Pensez au calcul de l'aire d'un parallélogramme. En outre, l'enseignement contemporain a vu apparaître les éléments de « codage » des figures — symboles graphiques qui se « posent » sur le dessin pour en exprimer des propriétés

⁶ Si les exemples retenus ici sont issus de la géométrie, une analyse similaire peut être faite à propos de l'algèbre et de l'écriture symbolique.

⁷ Ces considérations s'étendent au-delà de la géométrie : en arithmétique, en algèbre et en analyse, « on ne tardera pas à reconnaître que la représentation géométrique des grandeurs (...) s'est toujours admirablement prêtée aux progrès de la science » (Loria, 1939).

sinon invisibles — intermédiaires entre le texte et le dessin qui permettent de se passer de la précision des tracés (on a alors affaire à des figures tracées à main levée et codées), qui peut constituer un niveau supplémentaire d'interprétation et de jeu de langage.

Cette diversité des modes de représentation des objets géométriques est porteuse d'implicites : un dessin ou un mot peut recouvrir de nombreuses caractéristiques qu'il s'agit justement de dévoiler par le jeu de la « dé-monstration ». « Comprendre en mathématiques, c'est savoir articuler des registres sémiotiques [registres graphique, langagier et symbolique] et qui s'épaulent l'un l'autre pour permettre aux élèves de se représenter et de manipuler les concepts. » (Chabanne, 2011) Les difficultés du travail sur le langage, en mathématiques, sont ainsi potentiellement accentuées par la multiplicité des représentations qui y sont manipulées, et par la façon dont elles le sont, selon les pratiques langagières dans le domaine. « L'enseignement doit donc permettre de façon indissociable un apprentissage de la dimension formelle du travail mathématique, ainsi qu'une transmission et une entrée dans ces pratiques langagières qui permettent de l'appréhender. » (Hache, 2019) Au cours de l'institutionnalisation, porter une attention particulière à ces implicites est nécessaire. Lalina Coulangue (2014) pointe des dysfonctionnements fréquents au cours de l'institutionnalisation en géométrie, issus des pratiques langagières incohérentes avec celles des savoirs géométriques. La polysémie du lexique en géométrie est une source de malentendus notable, qui peut causer « des effets de brouillage des contextes interprétatifs ». Lors des premières approches des carré, rectangle et losange au cycle 3, confondre « coin », « sommet », « angle », « point », « pointe », « angle droit »... risque de porter préjudice à la montée en généralité en géométrie, notamment vers la notion de parallélogramme, mais pas seulement. Il s'agit donc d'accompagner la secondarisation des pratiques langagières en géométrie pour permettre l'apprentissage des connaissances conceptuelles et des usages du langage afférents.

2. *Résolution de problèmes et écriture*

Il reste que, jusqu'à la fin du collège, l'enseignement des mathématiques est orienté par la résolution de problèmes, pratiques et théoriques. Les connaissances sur le parallélogramme ne sont pas l'unique fin recherchée, mais plutôt des savoirs nécessaires à l'apprentissage et la mise en œuvre d'un mode de raisonnement particulier. Le fait d'enseigner à tous les élèves la géométrie dans ses dimensions abstraite et pratique, en même temps, est relativement récent et conséquence de l'unification des deux ordres scolaires ayant eu lieu au XX^e siècle (Jacquet-Francillon et al., 2010). Les inégalités d'apprentissage en mathématiques suggèrent que cette unification est inachevée à l'échelle même des disciplines scolaires. En ce sens, les didacticiens proposent de distinguer deux types de géométries en primaire et au collège (deux « paradigmes géométriques »), selon leurs finalités et leurs espaces de référence, qu'il s'agit d'articuler de façon cohérente pour faire progresser tous les élèves vers la maîtrise des savoirs et savoir-faire visés aujourd'hui : la géométrie issue de l'observation du monde sensible dont les finalités sont pratiques d'un côté, et la géométrie théorique qui traite des propriétés et relations d'objets abstraits selon un système axiomatique d'un autre (Houdement, 2007 ; Mathé et Mithalal-Le Doze, 2019). La première entretient une dépendance à l'égard de la pratique, du contexte, dans l'usage requis des instruments géométriques pour tracer, mesurer et construire par le geste plutôt que par le langage. La seconde, au contraire, met en jeu un rapport au savoir des plus objectivés et ne porte pas le même regard sur les dessins dont la précision n'est plus requise. Par exemple, dans le cas du parallélogramme, les premières approches consistent, à l'école primaire, à se familiariser avec les carrés, rectangles et autres « fruits d'une première modélisation même des plus élémentaires » (Houdement, 2007), et à apprendre à les construire à l'aide d'instruments. La notion de parallélogramme introduite bien plus tard au collège, doit comprendre les carrés, rectangles, losanges, sans s'y réduire. Un mouvement de montée en généralité et d'éloignement du réel est nécessaire pour apprendre à manier les savoirs

mathématiques dans leurs spécificités langagières, et pour résoudre des problèmes de plus en plus abstraits sans avoir recours à la précision du dessin mais en faisant appel aux propriétés conceptuelles de l'objet.

D'une part, chacune de ces géométries fait appel aux deux aspects de l'acte graphique (textes et dessins) mais ne renvoie pas aux mêmes rapports au savoir : il faut y voir, encore, un potentiel différenciateur. D'autre part, ces deux géométries sont intimement liées. « La finalité pratique conduit inévitablement à la construction d'un référentiel théorique, même s'il n'est pas en appui sur une axiomatique explicite. À l'inverse, une construction théorique ne saurait se passer totalement de l'expérience sensible. » (Mathé et Mithalal-Le Doze, 2019) Ainsi, ces deux approches de la géométrie existent de façon simultanée jusqu'à la fin du collège, et de nombreux problèmes peuvent être résolus, avec une précision plus ou moins grande, selon les deux paradigmes. Il s'agit là aussi d'une source d'implicites et de malentendus. En effet, il est attendu qu'au fil de la scolarité, le dessin se détache — s'abstraie — progressivement de ce dont il est le reflet, et devienne objet d'étude en lui-même — figure tracée — support de démonstration, sans que la géométrie physique ne disparaisse. Sans explicitation particulière de la part des enseignants, l'expérience montre que de nombreux élèves n'accèdent pas aux savoirs et à la posture de la deuxième géométrie. En l'occurrence, le choix des problèmes posés aux élèves est un levier de réduction des inégalités d'apprentissage, à la fois du point de vue de l'explicitation des attendus paradigmatiques en géométrie, mais également du point de vue des thèmes qu'ils évoquent et des apprentissages qu'ils permettent, ceux-ci ayant aussi un effet différenciateur (Ayala et Roditi, 2014). Voici qui incite à questionner la légitimité de certains supports d'enseignement, et la façon dont les enseignants cherchent à recontextualiser les savoirs, à y « donner du sens ». Je renvoie ici aux travaux de Rudolf Bkouche (2000) et à la notion de problématique ou de « champs de problèmes », et à l'approche proposée dans Charlot et al. (1991).

Dans le contexte de la résolution de problèmes, l'écriture et le rapport scriptural au savoir interviennent plus concrètement dans la compréhension du problème posé, son acceptation comme problème légitime ou intéressant, sa résolution (construction plus ou moins semée d'embûches d'un raisonnement aboutissant à une solution) et la rédaction (pas toujours linéaire non plus) de sa solution. Pour permettre à tous les élèves de développer un rapport au savoir scriptural, des enseignants mettent au cœur de leur enseignement le travail de l'écriture pratiquée activement par les élèves : usage et reprise des écrits « intermédiaires », exercices de reformulation, dictées mathématiques... (Assude et al., 2000 ; Chabanne, 2011 ; Hache et al., 2017). Dans ce contexte, les élèves sont institués comme auteurs-scripteurs et l'écriture comme un outil d'apprentissage. D'une part, les écrits des élèves sont *révélateurs*, notamment des implicites et des malentendus évoqués précédemment, qui peuvent alors être discutés et servir de supports de travail sur les erreurs. L'écriture est alors *réflexive* : écrire permet d'élaborer et de montrer la pensée, puis de la rectifier en réécrivant, reformulant, en rebondissant sur le texte inscrit pour poursuivre la réflexion. L'acte graphique est pensée en action. En outre, « l'exercice de rumination constructive » (Goody, 1979) permis par le travail de l'écriture et surtout, de la réécriture, amène progressivement à l'acquisition des pratiques langagières propres à la discipline. Il s'agit de donner de l'importance, plutôt qu'à l'écrit final, fini, aux écrits qui guident la pensée et l'intelligence vers la compréhension, l'appropriation du savoir historiquement et collectivement objectivé. D'autre part, les écrits sont supports de stockage et de communication dont l'intérêt se révèle à condition de les ancrer dans des pratiques de long terme. L'écriture est alors outil de matérialisation et d'accumulation, qui permet l'expérience d'un rapport scriptural au langage dans lequel « le problème de la mémorisation cesse de dominer la vie intellectuelle » (Goody, 1979), et où la rationalité et la logique peuvent s'exercer. À l'échelle individuelle, les écrits des élèves témoignent de l'évolution de leurs apprentissages et leur permettent de vivre l'expérience de la construction du savoir dans sa dimension temporelle. Le

caractère social de l'écriture s'exprime par ailleurs dans les échanges collectifs qui naissent des écrits et permettent rétroactivement leur amélioration, leur normalisation selon les pratiques langagières et scripturales de référence.

IV. CONCLUSION

Finalement, on écrit beaucoup en mathématiques, parce que l'écriture est le mode de communication qui a permis l'émergence des savoirs transmis à l'école, qui permet encore de communiquer avec les autres et avec soi-même dans le présent et dans le temps long pour apprendre ces savoirs de nature scripturale, mais aussi parce que les mathématiques entretiennent avec l'écriture des rapports spécifiques et multiples : graphique, langagier et symbolique. Les différences d'apprentissage en mathématiques dépendantes du rapport social à l'écrit et au langage peuvent donc être renforcées par la multiplicité des modes de représentation des concepts mathématiques et les implicites afférents. Néanmoins, les enseignants peuvent prendre en charge ces différences en apprenant à tous les élèves à adopter une posture réflexive face au langage. Cela passe notamment par la mise en place de pratiques actives d'écriture, de reformulation, de jeux de langage par et pour les élèves. Alors, les mathématiques peuvent constituer un espace d'apprentissage privilégié d'un rapport à l'écrit en connivence avec ce qui est requis par l'école.

Enfin, de la même façon qu'il a semblé à Bernard Lahire (2000) « impossible de comprendre les interactions malheureuses et autres dialogues de sourds en salles de classe, dans un cours de français, sans connaître l'histoire de l'écriture, l'histoire de la grammaire, l'histoire des rapports entre culture écrite et pouvoir, l'histoire du passage à une alphabétisation restreinte à une alphabétisation généralisée, l'histoire de la forme scolaire et des rapports pédagogiques d'apprentissage, etc. », il faut continuer d'aborder la question des inégalités d'apprentissage en mathématiques au regard de l'histoire de l'écriture (en) mathématique, de l'histoire des usages des mathématiques, de l'histoire des rapports entre problèmes pratiques et concepts mathématiques, de l'histoire de l'enseignement des mathématiques, etc.

RÉFÉRENCES

- Assude, T., Lattuati, M. et Leorat, N. (2000). L'écriture au quotidien dans une classe de mathématiques. *Petit x*, (54), 5-28.
- Ayala, J. et Roditi, É. (2014). Inégalités sociales et apprentissages en mathématiques : les énoncés des exercices seraient-ils eux-mêmes différenciateurs ? *Recherches en didactiques*, 17(1), 45-64.
<https://doi.org/10.3917/rdid.017.0045>
- Bautier, E. et Goigoux, R. (2004). Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue française de pédagogie*, 148(1), 89-100.
- Bautier, É. et Rayou, P. (2009). *Les inégalités d'apprentissage. Programmes, pratiques et malentendus scolaire*. Presses universitaires de France.
- Bkouche, R. (2000). Culture scientifique, pensée machinale et recherche du sens. Enseigner les sciences selon une épistémologie des problématiques. *Spirale. Revue de recherches en éducation*, 26(1), 11-22.
- Cambiano, G. (2010). La démonstration géométrique. Dans M. Detienne (dir.), *Les savoirs de l'écriture en Grèce Ancienne* (p. 251-272). Presses universitaires du Septentrion.

- Chabanne, J.-C. (2011). Les écrits « intermédiaires » au-delà du brouillon. *Recherches*, 2(55), 7-20.
<https://www.revue-recherches.fr/wp-content/uploads/2014/06/007-020-Chabanne.pdf>
- Charlot, B., Rouché, N. et Bkouche, R. (1991). *Faire des mathématiques, le plaisir du sens*. Armand Colin.
- Charlot, B. (2020, février). *La notion de rapport au savoir : origines et problématiques*.
https://gfen.asso.fr/images/documents/analyses/texte_rapport_savoir_bernard_charlot2020.pdf
- Coulange, L. (2014). Les pratiques langagières au cœur de l'institutionnalisation de savoirs mathématiques. *Spirale. Revue de recherches en éducation*, 54(1), 9-27.
- Goody, J. (1979). *La raison graphique. La domestication de la pensée sauvage*. Les éditions de minuit.
- Hache, C. (dir.). (2017, avril). *Formuler, reformuler* [Fiche pédagogique]. IREM de Paris.
<http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/Leo-FP-Reformulation.pdf>
- Hache, C. (2019). *Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques* [Note de synthèse HDR, Université Paris Diderot]. https://hal.science/tel-02420979v1/file/HdR-Hache_Christophe-2019.pdf
- Houdement, C. (2007). À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères - IREM*, (67), 69-84. <https://bibnum.publimath.fr/IWR/IWR07028.pdf>
- Jacquet-Francillon, F., d'Enfert, R. et Loeffel, L. (dir.). (2010). *Une histoire de l'école : anthologie de l'éducation et de l'enseignement en France XVIII-XXe siècles*. Retz.
- Lahire, B. (1995). *Tableaux de familles. Heurs et malheurs scolaires en milieux populaires*. Média Diffusion.
- Lahire, B. (2000). *Culture écrite et inégalités scolaires : sociologie de l'« échec scolaire »*. Presses universitaires de Lyon. <https://doi.org/10.4000/books.pul.12525>
- Loria, G. (1939). Le rôle de la représentation géométrique des grandeurs aux différentes époques de l'histoire des mathématiques. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 46(1), 57-63.
http://resolver.scholarsportal.info/resolve/00351571/v46i0001/57_lrdlrgdedldm.xml
- Mathé, A.-C. et Mithalal-Le Doze, J. (2019). *L'usage des dessins et le rôle du langage en géométrie : quelques enjeux pour l'enseignement*. La pensée sauvage.
- Perrier, D. (2008). Pratiques enseignantes et différenciation : L'exemple de l'écriture scolaire. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle*, 41(4), 107-125.
- Rochex, J.-Y. et Crinon, J. (2011). *La construction des inégalités scolaires : au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.
- Souto Lopez, M. et Dehantschutter, L. (2020). Sociologie et didactique : histoire, enjeux et complémentarités d'un rapprochement. *Éducation & Didactique*, 14(2), 9-37.

ARTICULER L'ALGÈBRE ET L'ANALYSE POUR ENSEIGNER LE SECOND DEGRÉ : UNE ÉTUDE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES

| DUMONCEAU* PAULINE

Résumé | Dans cette communication, nous étudions les pratiques déclarées des enseignants à propos de l'enseignement des équations et des fonctions du second degré. Pour ce faire, nous déterminons le « relief » sur les notions à enseigner, résultant de la combinaison d'études épistémologiques, curriculaires et cognitives. Ce relief nous aide à élaborer notre guide d'entretien. Nous présentons ensuite quelques résultats issus des entretiens menés avec dix enseignants.

Mots-clés : équations du second degré, fonctions du second degré, relief, pratiques déclarées des enseignants, enseignement belge.

Abstract | In this communication, we study the practices mentioned by teachers regarding the teaching of quadratic equations and functions. For this purpose, we ascertain the “relief” of the notions to be taught, which is the result of a combination of epistemological, curricular and cognitive studies. This relief allows us to develop a guidebook. We then present some results coming from the interviews conducted with ten teachers.

Keywords: Quadratic equation, quadratic functions, relief, practices mentioned by teachers, Belgian education system.

I. CONTEXTE

Nous présentons ici une étude issue d'un mémoire de fin d'études (Dumonceau, 2023) qui porte sur l'enseignement des équations et des fonctions du second degré. En Belgique francophone, ces contenus sont enseignés en seconde au lycée (élèves de 15-16 ans). Les documents officiels mis à la disposition des enseignants montrent que les équations et les inéquations du second degré ainsi que les fonctions du second degré font l'objet d'un unique chapitre et ils décrivent aussi les compétences à développer chez les élèves pour l'enseignement des notions. Un nombre important de notions sont donc à faire apprendre aux élèves et il y a sans doute également un nombre important de liens à tisser entre ces notions, tant dans la partie « cours » que dans les exercices. Dès lors, nous nous questionnons sur les choix des scénarios des enseignants : par exemple, dans quel ordre vont-ils introduire les notions ? Ou encore, quels types de tâches vont-ils proposer aux élèves pour travailler avec eux les liens entre les notions ? Ce contexte amène naturellement à étudier les pratiques enseignantes.

Dans un premier temps, nous montrons comment nous avons construit notre problématique de recherche. Nous présentons ensuite une étude de terrain qui a été menée avec des enseignants en seconde ainsi que quelques résultats issus de cette étude.

II. OUTILS THÉORIQUES ET PROBLÉMATIQUE DE RECHERCHE

Robert et Rogalski (2024) expliquent la nécessité d'avoir « une compréhension multiple des notions à enseigner pour en aborder l'enseignement et l'apprentissage » : une compréhension mathématique épistémologique et actuelle et une compréhension didactique appuyée par l'étude des pratiques enseignantes. Nous adoptons ce positionnement théorique. Ainsi, pour étudier les pratiques enseignantes et décrire les apprentissages des élèves qui peuvent en découler, nous établissons le relief sur les notions à enseigner. Le relief résulte d'analyses qui croisent des aspects épistémologiques

* Université de Mons – Belgique – pauline.dumonceau@umons.ac.be

pour déterminer les spécificités des notions, des aspects cognitifs qui permettent de s'appropriier les difficultés répertoriées chez les élèves et enfin, des aspects curriculaires qui consistent à analyser les programmes scolaires (Robert et al., 2012). Ce relief sert de référence pour analyser ce qui peut se jouer en classe en termes d'apprentissages (Robert et Rogalski, 2024) et dans notre cas pour mieux cerner les pratiques déclarées des enseignants. Nous présentons ici quelques éléments de relief sur l'enseignement des équations et des fonctions du second degré en montrant comment ils nous amènent à formuler notre problématique de recherche.

1. *Étude de relief sur les notions à enseigner*

En Belgique francophone, les documents officiels listent sous forme d'Unités d'Acquis d'Apprentissages (UAA) une base commune de ce qui est à développer chez les élèves en termes de savoirs, savoir-faire et compétences. Ces UAA (celle sur le second degré est donnée en annexe à titre d'exemple) sont composées de trois parties : (1) les **ressources** correspondent aux notions à enseigner, (2) les **processus** sont les tâches à faire travailler aux élèves et sont classées en trois parties : la partie « Connaître » permet de tester l'application de la théorie, la partie « Appliquer » vise des exercices d'entraînement et enfin la partie « Transférer » permet de travailler les tâches plus complexes comme les problèmes et (3) les **stratégies transversales**.

Tout d'abord, la liste des ressources (voir Figure 1) démarre par l'étude des fonctions du second degré ainsi que les caractéristiques associées. Ce travail relève du domaine de l'Analyse. Les équations, les inéquations du second degré ainsi que des propriétés telles que la somme et le produit des solutions d'une équation du second degré doivent également être traitées. Ce travail, quant à lui, relève du domaine de l'Algèbre. Les ressources montrent donc que l'enseignant doit amener les élèves à mobiliser et articuler deux **cadres** de travail au sens de Douady (1987). De plus, l'ordre proposé dans la liste des ressources consiste à d'abord introduire les fonctions du second degré ainsi que leurs caractéristiques et celles liées à la parabole. L'UAA propose donc implicitement aux enseignants de démarrer le chapitre dans le cadre de l'Analyse.

Ressources
Fonction du 2^e degré
Caractéristiques de la fonction du 2 ^e degré
• Zéro • Signe • Croissance, décroissance • Extremum
Caractéristiques de la parabole d'axe vertical
• Sommet • Axe de symétrie • Concavité
Équations et inéquations du 2^e degré
Somme et produit des solutions de l'équation du 2 ^e degré
Forme factorisée du trinôme du 2 ^e degré

Figure 1 – Extrait de la fiche UAA

Travailler dans deux cadres engendrera l'utilisation de **registres de représentation** au sens de Duval (1993) et des conversions entre ces registres. En effet, la liste des tâches d'application (voir Figure 2) montre que l'élève doit pouvoir résoudre graphiquement une (in)équation ou construire le graphique d'une fonction à partir de son expression. Ce travail requiert d'interpréter ou de tracer des graphiques. Pour résoudre une inéquation ou établir le signe et les variations d'une fonction, l'élève doit construire et lire des tableaux de différentes natures. Pour construire l'expression analytique d'une

fonction à partir de son graphique ou pour résoudre algébriquement une (in)équation, l'élève peut également être amené à manipuler l'expression de la fonction ou celle de l'(in)équation avant de la résoudre. Ces diverses tâches montrent bien l'utilisation et la manipulation d'un grand nombre de registres de représentation (algébrique, graphique, tableaux, etc.).

La présence de ces registres amène l'élève à s'appropriier les symboles associés à chaque registre et donc à manipuler des lettres qui ont différents *statuts* (Robert et al., 2012). Dans la résolution d'(in)équations, des inconnues peuvent devenir les variables d'une fonction lorsque l'on change de cadre pour, par exemple, vérifier graphiquement les solutions obtenues. Nous pouvons également retrouver des paramètres, aussi bien dans les fonctions que dans les (in)équations. Nous avons également des coefficients qui peuvent devenir une inconnue notamment lorsque nous voulons déterminer l'expression analytique d'une fonction répondant à certaines conditions données. En effet, pour réaliser cette tâche, l'élève doit parfois résoudre une équation permettant de déterminer la valeur d'un des coefficients.

Enfin, les différents statuts des lettres amènent l'élève à employer un vocabulaire spécifique à chaque cadre. Par exemple, dans le cadre de l'Analyse, nous parlons des zéros d'une fonction et en algèbre, nous parlons des solutions d'une équation. Ainsi, l'analyse des processus révèle la complexité des notions à enseigner. D'autres aspects viennent compléter ces premiers éléments de relief dans notre mémoire de fin d'études. Le lecteur pourra s'y référer pour une étude de relief plus approfondie.

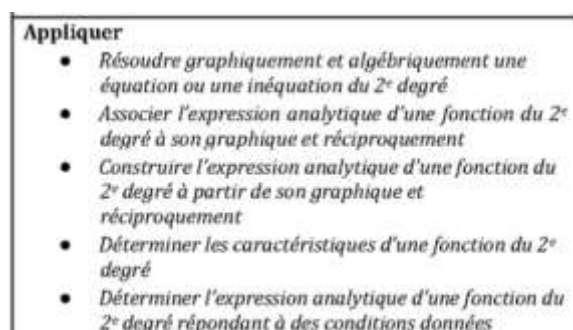


Figure 2 – Extrait de la fiche UAA

2. Problématique de recherche

L'étude de relief met clairement en avant la variété du travail attendu de la part de l'élève que ce soit en termes de cadres, de registres de représentation sémiotique ou de la manipulation de la langue naturelle. Les élèves seront donc amenés à réaliser, dans les tâches choisies par l'enseignant, des adaptations (au sens de Robert, 2008) de leurs connaissances (anciennes et nouvelles). De plus, selon le cadre mobilisé implique aussi des manières de travailler (par exemple en ce qui concerne les raisonnements) qui lui sont spécifiques. C'est ce que Grenier-Boley et Horoks (à paraître) appellent des *modes de pensée*. Les résultats précédents montrent donc que l'enseignant doit amener les élèves à articuler ces deux modes de pensée. Ainsi la question de recherche qui en découle est la suivante :

- *Comment l'enseignant met-il en œuvre l'articulation entre les deux modes de pensée liée à la présence de l'analyse et de l'algèbre dans l'UAA du second degré ?*

III. MÉTHODOLOGIE ET ANALYSES

Afin d'en savoir plus sur la manière dont les enseignants enseignent cette UAA, nous avons abordé notre problématique de recherche en menant des entretiens avec dix enseignants. L'élaboration du

guide d'entretien s'appuie sur notre étude de relief et sur une étude de manuels qui est venue compléter la première étude. Cette étude de manuels nous a permis d'avoir des exemples de mise en œuvre des savoirs et de types d'exercices travaillant les tâches préconisées par l'UAA. Ce guide d'entretien porte sur (1) l'organisation de l'UAA en termes d'ordre afin d'étudier dans quelle mesure les enseignants imbriquent ou non les deux cadres, (2) la partie « cours » liée aux fonctions et aux équations afin d'analyser la manière dont les enseignants introduisent certaines notions, (3) les processus « Connaitre » et « Appliquer » où nous regardons en termes d'adaptations comment les enseignants font travailler l'articulation à leurs élèves et quels types d'exercices ils proposent pour travailler les injonctions des programmes, (4) les difficultés des élèves afin de déterminer ce qui est difficile pour eux dans cette articulation. Dans le cadre de cet article, nous choisissons, compte tenu des éléments de relief présentés dans la section précédente, d'évoquer l'organisation du chapitre en lien avec la question de l'articulation, le travail proposé sur les conversions de registres et le choix de certains types d'exercices. Le lecteur pourra consulter le mémoire pour accéder à l'ensemble du travail mené.

3. *L'organisation du chapitre*

L'étude de manuels menée dans notre travail a montré deux organisations des savoirs possibles : certains manuels comme le manuel « CQFD Maths 4^e » (Van Dieren et al., 2016) commencent par les fonctions du second degré et voient ensuite les (in)équations alors que d'autres comme le manuel « Amplitude Maths 4^{ème} » (Absil et al., 2020), à l'inverse, commencent par les équations du second degré, poursuivent avec les fonctions et terminent par les inéquations. Nous avons donc interrogé les enseignants sur l'organisation qu'ils avaient choisie et sur les raisons de leur choix en leur posant les questions suivantes :

Dans l'UAA, il faut voir à la fois les fonctions du second degré et les équations du second degré.

- *Par quoi commencez-vous ?*
- *Pourquoi faites-vous ce choix-là ?*

Ces deux organisations se retrouvent également chez les enseignants interrogés. Trois enseignants sur les dix font le choix de démarrer le chapitre avec les fonctions du second degré et de poursuivre avec les (in)équations du second degré. Au moment de discuter des zéros d'une fonction du second degré, ces enseignants n'ont donc pas encore vu la méthode de résolution des équations en calculant le discriminant. Ils font alors le choix d'introduire cette méthode et donc de basculer dans le domaine de l'Algèbre à ce moment. Ces enseignants justifient leur choix en expliquant que la construction du programme est faite en partant des fonctions du second degré et mène aux (in)équations du second degré et qu'ils préfèrent que les élèves aient une idée en tête de la représentation d'une telle fonction. Une différence majeure avec les manuels est à mentionner. En effet, les manuels faisant le même choix d'organisation séparent l'Algèbre et l'Analyse puisqu'ils prennent le parti de ne pas introduire la méthode de résolution des équations avec le discriminant lorsqu'ils discutent des zéros de la fonction. Ils précisent que la méthode pour déterminer les zéros de la fonction dont la factorisation n'est pas immédiate sera vue dans la partie consacrée aux équations.

Les sept autres enseignants font, quant à eux, le choix de débiter par les équations, de poursuivre avec les fonctions et de terminer avec les inéquations, ce qui correspond à une des deux organisations mises en avant dans les manuels. La majorité de ces enseignants estiment que les équations sont un outil pour chercher les zéros d'une fonction et qu'il est donc plus intéressant de pouvoir résoudre une équation avant d'entamer la partie consacrée aux fonctions.

4. Les conversions de registres

L'étude de relief a mis en avant l'utilisation de nombreux registres de représentation et la nécessité de passer de l'un à l'autre pour résoudre certaines tâches. Pour aborder cette question, nous avons interrogé les enseignants sur les types d'exercices qu'ils proposent en leur posant notamment la question suivante :

- *Quels types d'exercices proposez-vous pour faire travailler le processus « Connaître » suivant : « Lier les diverses écritures de la fonction du 2^e degré avec certaines caractéristiques de la fonction ou de son graphique. » ?*

Nous avons ensuite analysé les exercices proposés afin de mettre en avant les conversions de registres travaillées. Dans le cadre de cette communication, nous nous intéressons aux exercices que les enseignants proposent pour travailler les conversions du registre algébrique vers le registre graphique et inversement. Pour travailler ces changements, ils proposent des exercices dans lesquels les élèves doivent représenter des fonctions à partir de leur expression, associer des expressions de fonctions aux graphiques (et inversement), résoudre graphiquement des inéquations, etc.

La Figure 3 montre un exemple d'un tel exercice qui se retrouve dans le cours d'un enseignant. Il y donne la représentation de quatre paraboles dans un repère orthonormé et demande aux élèves d'associer chaque graphique à son équation. Cet exercice permet de travailler les deux conversions dont il est question ici puisque l'on associe les caractéristiques de la fonction à celles de la parabole. Par exemple, pour les deux premières équations, l'élève peut établir que $c = -2$, ce qui signifie que l'ordonnée à l'origine de la parabole associée vaut -2 . L'élève peut ainsi affirmer que les paraboles pouvant correspondre sont les paraboles (a) et (c) ce qui implique une conversion du registre algébrique vers le registre graphique. De même pour la parabole (a), l'élève peut déterminer que l'abscisse du sommet est négative ce qui signifie que $b > 0$ puisque $a = -b/2a$ par définition. L'élève peut ainsi en déduire que l'expression correspondante à cette parabole est $y = x^2 + x - 2$, ce qui amène l'élève à passer du registre graphique vers le registre algébrique. Nous pouvons en outre remarquer qu'une multitude de liens et de va-et-vient entre les expressions algébriques et les constructions graphiques sont à réaliser.

2. Voici la représentation graphique de quatre paraboles dans un repère orthonormé.
Associe chaque graphique à son équation.

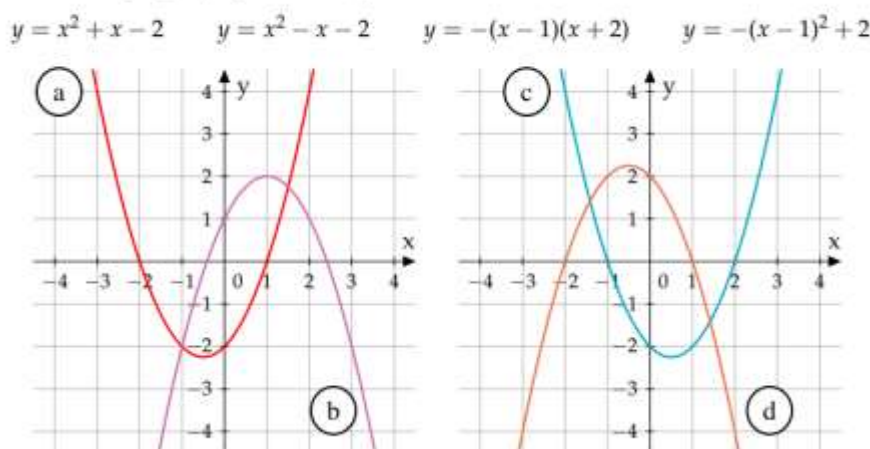


Figure 3 – Extrait du cours de l'enseignant P₇.

5. Les choix d'exercices

Notre étude de manuels a mis en avant que certaines injonctions de l'UAA, comme « l'interprétation graphique des solutions d'une (in)équation » ou « les liens entre les diverses écritures d'une fonction du second degré avec ses caractéristiques et celles de la parabole », étaient peu, voire pas travaillées. Nous avons donc élaboré une liste de cinq exercices qui permettent entre autres de travailler les injonctions qui ne sont pas traitées dans les manuels. Lors des entretiens, nous avons discuté de cette liste d'exercices avec les enseignants afin de déterminer s'ils proposent ce type d'exercices à leurs élèves. Nous présentons ci-dessous un exercice issu de cette liste.

Exercice 1

Dans chaque cas, esquisse le graphe d'une fonction du second degré qui satisfait les conditions données.

- a $a > 0, b > 0, c > 0$
- b f n'a pas de zéro et $c < 0$
- c $f(x) = a.(x + 2)(x - 3)$ et $a < 0$

Cet exercice a pour but de travailler les liens entre les caractéristiques de la fonction et celles de la parabole. Par exemple, pour le point (c), l'expression analytique de la fonction f est donnée sous la forme factorisée, ce qui permet de déduire que les zéros de cette fonction sont $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$. Ce sont donc les abscisses des points d'intersection de la parabole et de l'axe des abscisses. De plus, comme le coefficient a est négatif, cela signifie que la concavité du graphe de la fonction est tournée vers le bas. Grâce à ces informations, nous pouvons esquisser le graphe d'une fonction vérifiant les conditions données. Ce type d'exercices permet donc de travailler le rôle des coefficients, les caractéristiques de la fonction associées à la forme d'écriture choisie ainsi que le passage des informations algébriques de la fonction à leur interprétation graphique.

Seul un enseignant sur les dix propose un exercice similaire à celui-ci. Les autres enseignants le trouvent intéressant mais un peu trop compliqué pour leurs élèves étant donné que certains coefficients ne sont pas des valeurs chiffrées. Toutefois la moitié des enseignants ont tendance à travailler cet exercice dans le sens inverse, c'est-à-dire qu'ils demandent à l'élève de déterminer à partir de l'esquisse du graphe de déterminer certaines informations sur la fonction (nombre de zéros, signes des coefficients, etc.). Ce type d'exercice travaille, quant à lui, le passage du graphique vers l'algébrique et non l'inverse et ne met donc pas en jeu la même utilisation des connaissances que dans l'exercice 1 proposé ci-dessus.

IV. CONCLUSION

L'étude de terrain a montré que les enseignants imbriquent l'Algèbre et l'Analyse, tant dans la partie « cours » que dans les exercices. En effet, dans le cours, aucun enseignant ne déconnecte les deux cadres puisque les enseignants qui commencent par les fonctions intègrent la méthode de résolution avec le discriminant lorsqu'ils discutent des zéros de la fonction et ceux qui commencent par les équations intègrent les fonctions au moment de traiter les inéquations du second degré, en discutant du signe d'une fonction du second degré. De même du côté des exercices, l'ensemble des enseignants proposent des exercices mettant en jeu plusieurs adaptations (changements de cadres, conversions de registres, etc.). Ensuite, il ressort des propos des enseignants que certaines conversions de registres sont davantage travaillées comme les conversions du registre graphique vers le registre algébrique avec les

types d'exercices cités précédemment ou du registre algébrique vers le registre des tableaux et inversement avec par exemple des exercices de résolution algébrique d'inéquations. En effet, pour résoudre une inéquation du second degré, l'élève est amené à réaliser le tableau de signe de l'expression étudiée avant de l'interpréter et donner l'ensemble des solutions. Les enseignants font ainsi travailler beaucoup de conversions de registres et nous savons que celles-ci peuvent favoriser la conceptualisation des élèves. En ce sens, les enseignants semblent mettre en place des leviers susceptibles de développer les modes de pensée propres à l'Analyse et à l'Algèbre. Ils semblent donc sensibles aux conversions de registres liées à l'articulation des deux domaines et leurs pratiques déclarées à ce sujet semblent propices à mener aux apprentissages attendus dans les programmes.

Dans notre travail, nous avons également mis en avant d'autres résultats. Par exemple, les changements de cadres semblent moins travaillés car, dans la liste d'exercices que nous avons élaborée, nous proposons un exercice qui consiste à déterminer l'expression analytique d'une fonction du second degré vérifiant certaines conditions et qui permet donc de travailler les changements de cadres mais seul un enseignant réalise cet exercice avec ses élèves. Aussi, certaines conversions de registres comme la conversion du registre algébrique vers le registre graphique sont moins travaillées alors que les programmes permettent de les mobiliser. En effet, certaines tâches comme « interpréter graphiquement les solutions déterminées algébriquement d'une (in)équation » sont listées dans les programmes et selon leurs pratiques déclarées, les enseignants ne semblent pas le réaliser. Le registre de la langue naturelle apparaît principalement comme un levier permettant de démarrer les exercices. En effet, les enseignants proposent rarement, voire jamais, d'exercices dans lequel ils demandent explicitement aux élèves de justifier leurs choix et leurs démarches ce qui minore l'utilisation de la langue naturelle. Enfin, le registre algébrique est également peu présent car les enseignants proposent majoritairement des exercices avec des données numériques ce qui ressort également de l'exercice proposé ci-dessus.

Au vu de la taille réduite de l'échantillon et des résultats issus de pratiques déclarées, il serait intéressant de poursuivre les entretiens et de les compléter par des observations en classe. Cela permettrait de comparer les pratiques déclarées avec les pratiques effectives et d'analyser le discours des enseignants, leurs interactions avec les élèves, les traces écrites dans les notes des élèves, etc. Une perspective de recherche a donc été soulevée à la fin de ce travail. Il se fait que la majorité des enseignants interrogés sont en possession d'un master à finalité didactique, c'est-à-dire un master qui intègre des cours qui visent l'appropriation de savoirs issus de la recherche en didactique des mathématiques. Se pose donc la question du lien entre la formation initiale des enseignants et leurs pratiques effectives. Ce travail pourra donc être poursuivi dans différentes directions.

RÉFÉRENCES

- Absil, C., Dubois, K., Lebrun S. et Sabbatini, S. (2020). *Amplitude maths 4^e*. Averbode/Érasme.
- Bridoux, S., Grenier-Boley, N., Hache, C. et Robert, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 187-233.
- Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Dumonceau, P. (2023). *Articuler l'Algèbre et l'Analyse pour enseigner le second degré : une étude des pratiques enseignantes* [Mémoire de maîtrise inédit]. Université de Mons.

- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37- 65.
- Fédération Wallonie-Bruxelles. (s.d.). *Compétences terminales*. Enseignement.be.
<http://www.enseignement.be/index.php?page=25189&navi=296>
- Fédération Wallonie-Bruxelles. (2015). *Programme d'études - Mathématiques 467/2015/240*.
<http://www.wallonie-bruxelles-enseignement.be/progr/467-2015-240.pdf>
- Grenier-Boley, N. et Horoks, J. (preprint). *L'enseignement et l'apprentissage des fonctions en 3e-2nde : une étude de manuels* [Document inédit].
- Robert, A. (2008). Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. Dans F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 48-50). OctarèsÉditions.
- Robert, A., Penninckx, J. et Lattuati, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques : (se)former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos* (p. 168-180). Presses universitaires de Franche-Comté.
- Robert, A., Rogalski, M. et Rogalski, J. (2024). Didactique des mathématiques : de questions empiriques à des choix systématiques de compréhension de l'enseignement. *CEMeR*, 13(4), 211-237. https://periodicos.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/1612/1578
- Van Dieren, F., Hausmann, S. et Van Eerdengrugge, A. (2016). *CQFD Maths 4e - Manuel* (2e éd.). De Boeck.

ANNEXE

Mathématiques : 2 ^e degré de transition (4 ^e année)			Deuxième degré	
41/AA.5	Unité d'acquis d'apprentissage			
Compétences à développer RÉSOLURE DES PROBLÈMES, Y COMPRIS D'OPTIMISATION, SE MODÉLISANT PAR UNE ÉQUATION, UNE INÉQUATION OU UNE FONCTION DU 2 ^e DEGRÉ ASSOCIER GRAPHIQUES ET EXPRESSIONS ANALYTIQUES DE FONCTIONS DU 2 ^e DEGRÉ				
Processus		Ressources		
Appliquer		Transférer	Fonction du 2 ^e degré Caractéristiques de la fonction du 2 ^e degré • Zéro • Signe • Croissance, décroissance • Extremum Caractéristiques de la parabole d'axe vertical • Sommet • Axe de symétrie • Concavité Équations et inéquations du 2 ^e degré Somme et produit des solutions de l'équation du 2 ^e degré Forme factorisée du trinôme du 2 ^e degré	
• Résoudre graphiquement et algébriquement une équation ou une inéquation du 2^e degré • Associer l'expression analytique d'une fonction du 2^e degré à son graphique et réciproquement • Construire l'expression analytique d'une fonction du 2^e degré à partir de son graphique et réciproquement • Déterminer les caractéristiques d'une fonction du 2^e degré • Déterminer l'expression analytique d'une fonction du 2^e degré répondant à des conditions données		• Modéliser et résoudre un problème d'optimisation • Modéliser et résoudre des problèmes issus de situations diverses		
Connaitre		Lier les diverses écritures de la fonction du 2 ^e degré avec certaines caractéristiques de la fonction ou de son graphique: $x \rightarrow a(x - \alpha)^2 + \beta$ $x \rightarrow ax^2 + bx + c$ $x \rightarrow a(x - x_1)(x - x_2)$		
• Interpréter graphiquement les solutions d'une équation ou d'une inéquation du 2^e degré		Stratégies transversales Modéliser et résoudre des problèmes Critiquer un résultat Communiquer et présenter des résultats Reconnaître le modèle quadratique		
Articuler les différents registres de représentation sémiotique d'une fonction				

Figure 4 – Extrait du programme de mathématiques (467 / 2015 / 240) au 2^e degré.

(Source : Fédération Wallonie-Bruxelles, 2015, p. 34).

Résumé | Cette recherche analyse l'impact de la complexité de l'énoncé sur la capacité des élèves à produire une preuve. En s'appuyant sur la théorie des situations didactiques de Brousseau et l'influence des variables didactiques, six élèves de 4^e seront observés lors de la résolution de trois problèmes isomorphes, où la présentation de l'information variera. L'analyse des enregistrements vidéos permettra d'évaluer leurs difficultés et l'impact de ces variations sur leur démarche de preuve.

Mots-clés : géométrie, preuve, variables didactiques, résolution de problèmes, problèmes isomorphes

Abstract | This research analyzes the impact of the complexity of the statement on student's ability to produce a proof. Based on Brousseau's theory of didactic situations and the influence of didactic variables, six 4th grade students will be observed while solving three isomorphic problems, where the presentation of the information will vary. The analysis of the video recordings will make it possible to evaluate their difficulties and the impact of these variations on their proof approach.

Keywords: Geometry, proof, didactic variables, problem solving, isomorphic problems

I. INTRODUCTION

La géométrie occupe une place centrale dans le curriculum scolaire, favorisant la pensée spatiale, le raisonnement logique et la résolution des problèmes complexes (Duval, 1995 ; Fujita et Jones, 2007). La preuve géométrique, en validant les résultats, développe la pensée critique, l'argumentation logique et la communication mathématique (Balacheff, 1987). Cependant, sa construction demeure complexe pour de nombreux d'élèves, en raison des formulations d'énoncés et des variables didactiques qui influencent leur compréhension (Brousseau, 1986). Ces difficultés proviennent d'obstacles épistémologiques, de malentendus sur la nature de la preuve et d'erreurs dans l'application des propriétés géométriques (Balacheff, 1987 ; Duval, 1991). Formaliser une preuve exige non seulement la maîtrise des théorèmes, mais aussi l'organisation du raisonnement et la justification des étapes (Mariotti, 2000). Les pratiques pédagogiques traditionnelles, basées sur la transmission de théorèmes, s'avèrent insuffisantes pour surmonter ces difficultés (Laborde, 1995). Des approches alternatives, comme l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique, favorisent la compréhension des concepts et la formulation des conjectures (Hölz, 1996). De plus, la manière dont l'information est présentée joue un rôle crucial dans la capacité des élèves à s'approprier les notions géométriques et à structurer leurs démonstrations.

Cette étude de cas analytique, basée sur la théorie des situations didactiques de Brousseau (1986) analyse l'impact des variables didactiques sur l'apprentissage de la preuve géométrique chez six élèves de 4^e année. L'expérimentation repose sur la résolution de trois problèmes isomorphes, mais contextuellement différents, impliquant la démonstration de l'alignement de trois points. Chaque élève résout individuellement ces problèmes à intervalles réguliers de deux semaines, permettant d'observer l'évolution de leurs stratégies et de mieux comprendre comment ils articulent les propriétés géométriques dans leurs raisonnements. L'objectif est donc d'identifier les variables qui facilitent ou entravent la construction de preuves afin de proposer des ajustements pédagogiques, notamment en optimisant la présentation des énoncés et en développant des outils didactiques plus adaptés. Ainsi, la

* Faculté de formation des enseignants, Université Al Makassed de Beyrouth – Liban – micheline.fayad3@gmail.com

question centrale de cette recherche est la suivante : Dans quelle mesure la formulation d'un problème de démonstration en géométrie influence-t-il la capacité des élèves à construire une preuve ?

II. CONTEXTE ET CADRE THÉORIQUE

1. *Annonce du cadre théorique utilisé dans cette recherche*

Cette étude, porte sur la capacité des élèves à interpréter les informations d'un énoncé pour construire une preuve en géométrie. Le cadre théorique dans lequel notre travail de recherche s'inscrit est la théorie des situations didactiques de Brousseau, avec la mise en avant de la notion de variables didactiques.

L'expérience consiste à complexifier trois problèmes géométriques isomorphes en manipulant certaines variables didactiques telles que le type du problème présenté ainsi que son ordre de présentation, afin d'étudier l'effet de ces variables sur la qualité de la production des élèves et sur leur construction de la preuve

2. *Notion de variables didactiques*

« Les variables didactiques permettent à l'enseignant de moduler les conditions d'un problème pour faire apparaître ou disparaître certaines connaissances. Elles influencent directement les stratégies et les conceptions des élèves face aux situations d'apprentissage » (Brousseau, 1997, p. 42). Donc, selon Brousseau, ce sont des éléments contrôlables par l'enseignant influençant la manière dont les élèves abordent un problème en modulant sa difficulté à travers sa structure, la présentation des données, et le contexte dans lequel le savoir est mobilisé.

Dans cette recherche, plusieurs variables didactiques sont manipulées pour observer leur impact sur la capacité des élèves à construire des preuves géométriques :

- a) Le type de problème géométrique : L'étude inclut des problèmes issus de différents sous-domaines de la géométrie (euclidienne, analytique, et situations de la vie réelle), permettant de comparer les difficultés rencontrées par les élèves dans différents contextes.
- b) L'ordre de résolution : L'étude analyse si l'ordre dans lequel les six élèves résolvent les trois problèmes isomorphes influence la résolution en favorisant la familiarité croissante avec les concepts et les types de preuves.

Ces variables aident à comprendre la mobilisation des connaissances et des compétences de raisonnement des élèves, ainsi que la nature des erreurs qu'ils commettent et les stratégies qu'ils utilisent.

3. *Argumentation, preuve et démonstration*

Plusieurs didacticiens ont distingué entre argumentation, preuve et démonstration, trois concepts interconnectés et notions clés en enseignement des mathématiques. L'argumentation est un processus de raisonnement basé sur des justifications intuitives, contextuelles ou exploratoires, facilitant l'explication, la conjecture et l'apprentissage, sans suivre nécessairement une structure déductive formelle. Elle constitue une étape intermédiaire vers une validation plus rigoureuse.

La preuve, quant à elle, est une justification déductive établissant la vérité d'une proposition mathématique. Issue d'une argumentation exploratoire (Mariotti, 2000) ou contextuelle (Balacheff, 1987), elle nécessite une formalisation rigoureuse, souvent difficile pour les élèves (Duval, 1995).

Alors que la démonstration est une preuve institutionnalisée respectant les normes académiques et les règles formelles du raisonnement mathématique, assurant une justification rigoureuse et communicable (Hanna, 2000). Toulmin (1958) souligne son rôle pédagogique en reliant argumentation intuitive et raisonnement formelle. Son enseignement explicite est essentiel à l'apprentissage.

Comprendre comment ces concepts sont perçus par les élèves et comment ils peuvent être enseignés de manière efficace aide à améliorer l'apprentissage de la preuve en géométrie.

III. MÉTHODOLOGIE

1. Conception de l'étude

Cette étude qualitative analytique s'appuie sur « l'entretien clinique » qui, selon Robert Glaser, vise à comprendre l'application des connaissances des élèves dans des situations d'apprentissage complexes et l'ajustement de leurs stratégies en fonction des tâches données ; ce qui permet de recueillir des données qualitatives précieuses sur leurs pensées afin de concevoir des programmes d'enseignement adaptés à leurs besoins cognitifs, favorisant ainsi l'acquisition des compétences en résolution de problèmes. Six participants ont été observés et interrogés à trois reprises, dans trois séances d'« entretien clinique », espacées de deux semaines pour limiter le transfert automatique des solutions ; ils ont résolu trois problèmes différents, mais isomorphes, choisis selon des variables didactiques, et impliquant l'alignement des trois points.

2. Les problèmes

Chacun parmi les six participants a été confronté séparément aux trois problèmes géométriques différent l'un de l'autre : P1 problème de géométrie euclidienne, P2 problème de géométrie analytique et P3 problème de géométrie de vie réelle (voir Annexe A). Lors de la première séance, chaque deux ont résolu la même version ; deux semaines plus tard, ils ont abordé une deuxième version, puis une troisième après encore deux semaines, suivant un ordre distinct. Ainsi, tous ont traité les trois versions dans des séquences variées. (Voir **Tableau 1** ci-dessous).

Tableau 1 – Répartition des trois versions différentes entre les six participants

Participants	1 ^{er} problème à résoudre	2 ^e problème à résoudre	3 ^e problème à résoudre
E1	P1	P3	P2
E2	P1	P3	P2
E3	P3	P2	P1
E4	P2	P1	P3
E5	P2	P1	P3
E6	P3	P2	P1

Les trois problèmes géométriques sont isomorphes car ils partagent des structures logiques et des objectifs communs en termes de démonstration : prouver l'alignement des points. Bien qu'ils diffèrent par leur contexte (euclidien, analytique, vie réelle) et leurs outils de résolution, les concepts fondamentaux de symétrie et d'alignement traversent tous les problèmes : tous impliquent des configurations géométriques qui requièrent des raisonnements similaires pour prouver que des points sont colinéaires, qu'il s'agisse d'un rectangle dans P1, des axes de coordonnées dans P2, ou de points clés d'un parc dans P3. Cette variété introduit une complexité cognitive, car les élèves doivent adapter leurs stratégies à chaque contexte. Cette complexité réside dans la présentation des informations où les

tâches ont été soigneusement choisies en fonction du type de problème géométrique afin d'explorer différentes facettes du raisonnement géométrique. Comparativement, P1 est plus familier aux élèves en raison de sa formulation traditionnelle reposant sur une construction classique avec symétries. Tandis que P2 et P3 introduisent des défis supplémentaires : P2 introduit un cadre analytique avec des coordonnées et une démonstration qui implique des calculs algébriques et des propriétés de points sur un plan cartésien ; P3 présente une situation de la vie réelle avec une description imagée, ce qui demande aux élèves de transposer une situation concrète en termes géométriques abstraits. Ces différences textuelles sont cruciales pour tester l'impact des variables didactiques sur la capacité des élèves non seulement à comprendre et à résoudre des problèmes de preuve géométrique, mais aussi à appliquer les mêmes concepts dans des contextes différents. Les élèves doivent produire des preuves formelles : raisonnement déductif pour P1 et P2, modélisation pour P3. Les variables didactiques ont été manipulées pour étudier l'effet de la présentation et de l'ordre des problèmes sur leurs performances. Pour assurer la validité de l'expérience, l'ordre a été contrôlé pour éviter l'application automatique de stratégies et assurer un raisonnement adapté, l'isomorphie des problèmes garantit même nature des tâches permettant une comparaison fiable et la présentation a été rigoureusement encadré pour éliminer les biais involontaires dans l'expérimentation.

3. Les participants

Les participants à cette étude sont des élèves de treize ans dans une école privée française multiculturelle du Liban Nord (École des Sœurs Maronites de la Sainte Famille, Saint Simon, Beit-Mellat, Akkar). Ils ont terminé la 8^e année et ont été promus en 9^e année. Selon leurs notes scolaires et leurs classements, ils sont considérés comme des élèves brillants en mathématiques.

4. Procédures

Les problèmes ont été présentés à chacun des participants en français. Deux semaines ont séparé les trois séances de résolution de problèmes l'une de l'autre, afin d'éviter toute comparaison, de réduire les chances d'utiliser les mêmes stratégies de résolution et de laisser la possibilité d'utiliser des stratégies plus avancées, ou du moins différentes, pour le deuxième et le troisième problème. Un crayon à mine, une boîte de géométrie et une feuille de papier avec l'énoncé du problème étaient à la disposition de chacun des participants. Ils avaient pour consigne de ne pas utiliser d'autre papier brouillon, d'écrire toutes ses tentatives de résolution sur la feuille fournie et d'encadrer ce qu'ils écrivent en cas d'erreur.

Les participants ont été interviewés selon la technique « entretien clinique ». Tout au long de l'entretien, on a pris soin de ne pas interférer dans le processus de résolution, ni de suggérer une quelconque voie de solution, ni d'exprimer une approbation, une surprise ou un choc face à l'une des réponses des participants. On a demandé à chacun « comment » et « pourquoi » il avait abordé le problème d'une manière ou d'une autre, notamment en lui posant des questions telles que : pourquoi avez-vous choisi cette méthode ? Qu'est-ce qui vous fait penser que cela vous aidera ? Quelle est la difficulté à laquelle vous avez fait face ? Pourquoi pensez-vous que cette méthode ne fonctionnera pas ?

Pendant le travail de chacun des participants, des notes de terrain ont été prises pour enregistrer toutes leurs tentatives de résolution. La séance a été enregistrée sur bande vidéo afin de garder une trace de leurs discours à voix haute et de leurs interactions avec l'intervieweur. L'objectif principal de ces entretiens et observations était de capturer l'émergence du problème de chacun d'entre eux, résolution et pensée géométrique, représentations et procédures, opérations mentales sous-jacentes et

une progression allant de l'argumentation vers la démonstration, pour plus tard comparer entre les plans de solutions et les stratégies de réflexion utilisées dans les trois séances.

IV. ANALYSE ET RÉSULTATS

1. *Analyse des productions de chacun des six participants*

E1 a démontré une flexibilité dans sa pensée en explorant différentes stratégies pour prouver l'alignement des points. Dans P1 (37 min), il a passé 15 min à réfléchir comment montrer que MÂE est plat, puis il a démontré que A est le milieu de [ME], en s'appuyant sur la congruence des triangles et la propriété de la médiane avec des raisonnements déductifs et visuo-spatiaux parfois peu rigoureux. P3 (40 min) lui a posé des difficultés : il a démontré la congruence des triangles ABC et ACD pour prouver que ABCD est un parallélogramme, puis appliqué le théorème des milieux. P2 (23 min), a été limité par une inversion des axes, l'amenant à privilégier la visualisation sans démonstration analytique formelle. Son raisonnement s'est fluidifié au fil des séances, mais il manque encore de structure analytique rigoureuse.

E2 a mobilisé dans P1 (35 min) un raisonnement déductif, analogique et par essai-erreur, avec des justifications basées sur les propriétés géométriques et la symétrie. Il a pu prouver l'alignement des points par deux méthodes différentes : tout d'abord en utilisant la superposition des triangles puis en utilisant la symétrie pour construire un rectangle et appliquer la propriété de ses diagonales. Ensuite, P3 (43 min), temps plus long) a été pour lui plus difficile où il a modélisé un parc, prouvé que ABCD est un parallélogramme et appliqué le théorème des milieux pour renforcer la démonstration. Pour P2, où la durée de résolution a drastiquement diminué (19 min), E2 a annoncé : « *J'ai appris à utiliser les coordonnées et cela m'aide à aller plus vite ici.* » ; ce qui indique que le raisonnement est devenu plus fluide à ce stade. Il a démontré l'alignement par la congruence des triangles en plaçant les points dans un repère orthonormé, mais ses justifications manquaient parfois de rigueur formelle.

E3 a pris beaucoup de temps (50 min) à résoudre P3 ; il a démontré l'alignement via le théorème des milieux en prouvant que ABED est un parallélogramme, passant d'une argumentation intuitive à une démonstration formelle. Le temps a diminué significativement pour les deux autres versions indiquant une adaptation progressive au type de raisonnement exigé. Dans P2 (30 min), il a placé les points dans un repère et invoqué la réciproque du théorème des milieux pour conclure que O est le milieu de [SL] ; mais ses justifications, reposant sur des observations directes sans vérifications analytiques précises, manquaient de rigueur. Puis dans P1 (18 min), il a appliqué la symétrie et les propriétés des rectangles pour prouver l'alignement via la réciproque du théorème des milieux **par un raisonnement déductif et spatial**.

E4 a abordé dans P2 (36 min), l'alignement des points en prouvant la congruence des triangles et en utilisant la propriété de la médiane avec une progression intuitive suivie d'une tentative de preuve manquant de rigueur formelle. Ensuite, le passage à P1 a montré une amélioration de l'efficacité, avec une réduction du temps (22 min) ; E4 a prouvé l'alignement par la congruence des triangles et un raisonnement déductif basé sur la symétrie et le parallélisme. En revanche, le temps de résolution a augmenté dans P3 (30 min), ce qui suggère une difficulté accrue face à la modélisation de situations concrètes. E4 a utilisé la congruence des triangles pour établir l'alignement. Ses justifications combinaient observations visuelles, propriétés géométriques et approches empiriques, bien que parfois incomplètes.

E5 a utilisé le théorème de Pythagore dans P2 (34 min) pour calculer les longueurs SO et OL dans les triangles rectangles SEO et OFL, ce qui lui a permis de conclure l'alignement des points S, O et L.

par un raisonnement déductif, visuo-spatial et algébrique avec une progression allant de l'argumentation intuitive à une démonstration formelle, bien que parfois imprécis. Ensuite, dans P1 où le temps de résolution est réduit (23 min), E5 a pu prouver l'alignement par deux méthodes différentes : Tout d'abord, il a appliqué le théorème de Pythagore pour calculer les longueurs MA et AE dans les triangles TAM et LAE, prouvant ainsi qu'ils sont deux triangles rectangles. Puis dans une deuxième méthode, il a construit la médiane [PS] dans le triangle PME, qui est rectangle en E, et a démontré l'alignement des points M, A et E en remarquant visuellement que S et A sont confondus, tout en utilisant la propriété de la médiane. Son raisonnement a progressé d'une argumentation exploratoire à une preuve empirique, mais manquant de rigueur théorique.

Finalement dans P3 où la durée de résolution a augmenté (33 min), E5 a annoncé : « *Il est difficile de tout visualiser sans figure précise. Il y a trop d'éléments à gérer en même temps.* » ; il a exploité la symétrie et la propriété des diagonales d'un rectangle avec une progression structurée mais des justifications souvent intuitives.

E6 a pris beaucoup de temps à résoudre P3 (54 min), il a modélisé la situation avec un rectangle, appliqué le théorème des milieux pour prouver que l'entrée se trouvait au milieu du segment reliant les stations de bus, tout en exploitant la symétrie des diagonales. Ensuite, le temps a diminué significativement pour les deux autres versions, indiquant une adaptation progressive au type de raisonnement exigé.

Dans P2 (28 min), E6 a utilisé des approches visuelles et géométriques classiques, notamment la symétrie axiale et la superposition de triangles pour justifier l'alignement des points. Sa progression s'est déroulée en trois étapes : argumentation intuitive, preuve partielle et tentative de démonstration plus formelle. Bien que son raisonnement a été structuré, il manquait parfois de rigueur analytique.

Enfin, E6 a résolu P1 en seulement 15 min en s'appuyant sur les propriétés des parallélogrammes. Il a annoncé lors de la troisième séance : « Je sais déjà que les symétries jouent un rôle dans les alignements. Donc, je vais directement tracer les symétriques et utiliser la propriété du parallélogramme. ». Nous pourrions dire alors que l'acquisition d'une certaine familiarité avec les propriétés géométriques dans les versions précédentes lui a aidé à prouver l'alignement en un temps assez court.

2. *Synthèse de l'analyse des résultats*

C'est bien clair que l'ordre de présentation des versions a eu un impact significatif sur la performance des participants, en particulier ceux qui ont commencé par le problème de géométrie de vie réelle (P3), car cela leur a permis d'améliorer leur raisonnement spatial et analytique pour les problèmes suivants. Les types de problèmes ont également influencé la rapidité et la précision des résolutions, avec la géométrie euclidienne souvent résolue plus rapidement que la géométrie de vie réelle.

En effet, P1 a été généralement résolu plus rapidement par les participants, en particulier lors de la troisième séance (ex. E6 : 15 min), grâce à l'intégration des concepts euclidiens et l'usage fréquent de la symétrie et des propriétés des parallélogrammes au fil des séances. Les participants qui ont résolu P2 après avoir travaillé sur les autres problèmes ont montré une amélioration notable et progressive des compétences analytiques, avec une réduction du temps de résolution (ex. E1 et E2 : < 23 min en 3^e séance). Quant à P3, sa nature réaliste a initialement ralenti le processus de résolution (ex. E3 : 50 min et E6 : 54 min), posant des défis supplémentaires en raison de la nécessité de modéliser une situation réelle complexe mais facilitant ensuite les autres problèmes.

V. DISCUSSION

1. *Impact des variables didactiques choisies sur la capacité des élèves à construire la preuve géométrique*

L'analyse comparative des performances des six participants selon les types de problèmes géométriques et leur ordre de présentation révèle des variations significatives dans leurs capacités à construire des preuves. L'ordre $P1 \rightarrow P3 \rightarrow P2$ favorise un gain rapide en formalisme, mais révèle une faiblesse persistante dans les tâches contextualisées. Ainsi, l'ordre $P2 \rightarrow P1 \rightarrow P3$ montre une bonne maîtrise technique, mais une réticence persistante face à l'abstraction d'un problème de vie réelle. Alors que, l'ordre $P3 \rightarrow P2 \rightarrow P1$ du plus complexe au plus familier est le plus efficace en termes de progression : les élèves partent avec difficulté mais terminent avec maîtrise efficace (gain en autonomie stratégique).

Un effet d'entraînement a été observé lorsque plusieurs problèmes du même type étaient résolus, améliorant leurs performances au fil du temps, tout en favorisant le transfert des compétences acquises dans un type de problème à d'autres types, facilitant ainsi la résolution. Quant au type du problème, P1 est le type le plus rapidement résolu par les participants grâce à sa structure classique et familière ainsi que l'absence de nécessité de modélisation ou de traduction en outils analytiques.

P2 prend plus de temps que P1, mais les performances s'améliorent nettement après un travail préalable sur d'autres versions ; ce qui indique une courbe d'apprentissage positive et une meilleure appropriation des outils analytiques après des expériences préalables. Quant à P3, malgré la charge cognitive élevée de la modélisation réelle et la difficulté à transposer une situation de la vie réelle en langage géométrique formel, les participants ont progressé plus rapidement sur les autres versions après avoir commencé par ce type ; ce qui suggère que les compétences mobilisées dans P3 ont favorisé une meilleure performance ultérieure même si le temps initial était élevé et les compétences acquises ont été transférées vers les autres types de problèmes. De ce qui précède, nous pouvons conclure que la construction de la preuve est un processus complexe qui dépend de multiples facteurs. Les variables didactiques étudiées (type de problème et ordre de présentation) affectent les stratégies des participants et la qualité de leurs raisonnements.

2. *Interprétation des résultats obtenus à la lumière du cadre théorique et de la littérature existante.*

L'interprétation des résultats obtenus pour tous les participants s'appuie sur des modèles pédagogiques et des théories pertinentes permettant d'éclairer la compréhension des processus d'apprentissage de la preuve en géométrie. Ces résultats peuvent être analysés en référence à la théorie des situations didactiques de Brousseau (1986), selon laquelle l'apprentissage de la preuve en géométrie se construit par la confrontation de l'élève à des problèmes dans un contexte où les variables didactiques (langage mathématique, type et ordre des problèmes) influencent les stratégies de résolution. Par exemple, E5 a mieux réussi en géométrie analytique grâce à sa familiarité avec le cadre numérique (système orthonormé), confirmant l'impact du cadre de référence et de la manière de présentation du problème sur la mobilisation des connaissances. L'interprétation des performances des étudiants montre que plusieurs difficultés peuvent être expliquées par la théorie du raisonnement déductif. Selon Duval (1995), la visualisation en géométrie bien que nécessaire, ne suffit pas pour construire une preuve. Les élèves doivent passer à un raisonnement formel, ce qui pose problème à certains lorsqu'ils doivent lier la visualisation aux justifications mathématiques formelles. Mariotti (2000), souligne que les élèves peinent à intégrer les étapes du raisonnement, surtout lorsqu'ils doivent

manipuler plusieurs représentations, comme le montre la confusion entre symétrie et milieu chez E6. L'analyse comparative des stratégies montre que les élèves qui ont résolu les problèmes dans l'ordre Réalité-Analytique- Euclidien (E3 et E6) ont mieux lié les concepts géométriques, ce qui peut être expliqué par le modèle de l'apprentissage en spirale de Bruner (1960), où la réintroduction de concepts à différents niveaux de complexité renforce la compréhension conceptuelle.

VI. CONCLUSION

Cette étude analyse l'impact des variables didactiques (type de problème et ordre de présentation) sur les stratégies de construction de la preuve en géométrie des élèves de 4^e année. Les participants qui ont résolu les problèmes dans l'ordre $P3 \rightarrow P2 \rightarrow P1$ montrent une meilleure capacité à appliquer des stratégies de preuve au contraire de ceux qui ont abordé P3 en dernier montrant une stabilité ou une régression face à ce type de problème. Donc, cette analyse renforce l'idée que l'ordre des problèmes influence l'apprentissage et la qualité des argumentations et que l'exposition à des tâches plus complexes en premier peut développer des stratégies plus efficaces à long terme. Alors que l'exposition progressive du plus familier vers le plus formel facilite une prise de conscience des outils analytiques, mais n'aide pas forcément à surmonter les obstacles liés à la modélisation. En outre, les temps de résolution ont révélé les difficultés rencontrées par les participants lors du passage entre différents cadres géométriques, confirmant les obstacles liés au transfert de connaissances. Les élèves performants ont su mobiliser des justifications rigoureuses adaptées à chaque type de problème, soulignant l'importance de la visualisation et l'articulation entre différents cadres géométriques. L'enseignement de la preuve devrait encourager l'autonomie, d'où l'importance d'adapter les tâches pédagogiques pour améliorer la transférabilité des compétences entre les différents registres géométriques, soutenant ainsi le développement de stratégies de preuve robustes. Des approches comme les preuves collaboratives, la correction des preuves, l'intégration des contextes réels, l'utilisation des fiches récapitulatives, des manipulations concrètes, des mini-tests avec feedback immédiat et des logiciels comme Géogébra sont recommandées. Les recherches futures pourraient étudier l'impact d'autres variables didactiques, comme le langage et le support visuel, sur l'apprentissage de la preuve en géométrie, élargir l'étude à d'autres niveaux scolaires et analyser l'évolution des stratégies de preuve sur le long terme.

RÉFÉRENCES

- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (1986). Théorie des situations didactiques en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 45-110.
- Brousseau, G. (1986). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, et V. Warfield, dir. et trad.). Kluwer Academic Publishers.
- Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Harvard University Press.
- Duval, R. (1991). *Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la preuve*. La pensée sauvage.

- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Fujita, T. et Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 3-20.
- Glaser, R. (1976). *Cognitive psychology and instructional design*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 5-23.
- Hölzl, R. (1996). How does “dragging” affect the learning of geometry? *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1, 169-187. <https://doi.org/10.1007/BF00571077>
- Laborde, C. (1995). Designing tasks for learning geometry in a computer-based environment. Dans L. Burton et B. Jaworski (dir.), *Technology in mathematics teaching – A bridge between teaching and learning* (p. 35-68). Chartwell-Bratt.
- Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 25-53. <https://doi.org/10.1023/A:1012733122556>
- Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge University Press.

ANNEXE A

LES TROIS VERSIONS DE PROBLÈMES

P1¹ (Problème de géométrie euclidienne)

- Tracer un rectangle PLAT.
- Construire le symétrique E de P par rapport à L et le symétrique M de P par rapport à T.
- Démontrer que les points E, A et M sont alignés.

P2² (Problème de géométrie analytique)

- Dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ placer les points G (2 ; 0), H (0 ; 3), P (2 ; 3) et L (2 ; -3).
- Quelle est la position des deux points L et P l'un par rapport à l'autre ? Justifier la réponse.
- Placer le point S symétrique de P par rapport à l'axe des ordonnées.
- Démontrer que H appartient au segment [PS].
- Prouver que les points S, O et L sont alignés.

P3² (Problème de géométrie de vie réelle)

Pour que les enfants de sa ville puissent jouer et s'amuser, le maire a créé un parc rectangulaire.

Il a installé un toboggan au premier coin. Une station de bus est localisée à l'extérieur du parc de sorte qu'elle est alignée avec le coin où se trouve le toboggan et à égale distance par rapport au coin où un banc est placé.

¹ P1 est tiré du livre scolaire national (8^e année éducation de base, page 59).

² J'ai moi-même inventé P2 et P3 de sorte qu'ils soient isomorphes avec P1.

Une autre station de bus est aussi située à l'extérieur du parc. Cette deuxième station est alignée avec le coin où se trouve le toboggan et elle est à égale distance par rapport à un 3^e coin où une balançoire est installée.

L'entrée du parc est au 4^e coin.

Démontrer que si une personne décide de marcher de la première station de bus à la deuxième station de bus en ligne droite, alors cette personne va passer par l'entrée du parc.

LE RAPPORT DES ÉLÈVES À LA FONCTION AFFINE AU SECONDAIRE

| LAZRI-ABDI* SAMIA

Résumé | Enseignante en terminale (élèves 17-18 ans), j'ai constaté des difficultés récurrentes chez mes élèves en dérivation, souvent liées à la fonction affine. Cette étude se concentre sur cet obstacle et propose une situation expérimentale menée auprès d'élèves de première (élèves de 16-17 ans). Conçue par mes soins, elle vise à analyser leurs difficultés et leur interaction avec l'enseignant. L'objectif est de mieux comprendre ces enjeux d'apprentissage.

Mots-clés : fonction affine, coefficient directeur, nombre dérivée, tangente, techniques

Abstract | As a high school mathematics teacher, I have observed recurring difficulties among my students in differentiation, often related to linear functions. This study focuses on this obstacle and presents an experimental situation conducted with first-year high school students. Designed by myself, it aims to analyze their difficulties and their interaction with the teacher. The objective is to better understand these learning challenges.

Keywords: Affine function, direction coefficient, derived number, tangent, techniques

I. CONTEXTE DE L'ÉTUDE

Ma curiosité a été suscitée en classe de terminale (élèves de 17 à 18 ans) quand j'ai été confrontée aux multiples difficultés des élèves dans le chapitre dérivation :

- Les élèves ne font pas le lien entre le nombre dérivé et le coefficient directeur ;
- Ils ont de la difficulté à visualiser le concept de tangente en tant que limite des sécantes ;
- Souvent ils ne savent pas calculer le coefficient directeur et faire le tracé de la tangente en un point de la courbe ;
- Pour l'équation $y = ax + b$, certains élèves considèrent à tort que b est un point, notamment le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées ; pour certains, le coefficient directeur(a) est le point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses ;
- Aussi, en calculant le coefficient directeur en un point A d'une courbe, ils prennent souvent le point O (l'origine) comme second point ;
- Quand deux droites ont le même coefficient directeur, ils ne savent pas que ces deux droites sont parallèles ;
- Lors du calcul du coefficient directeur, le signe de ce dernier est en contradiction avec la variation de la courbe.

Ainsi, les difficultés des élèves semblent être reliées à l'objet d'enseignement « fonction affine ». C'est au collège, en troisième (élèves de 14-15 ans) que la fonction affine est introduite. Son enseignement-apprentissage se poursuit en seconde (élèves de 15-16 ans) en s'attardant plus particulièrement à l'équation d'une droite. Par la suite, en première et en terminale (élèves de 16 à 18 ans), l'équation de la tangente est étudiée dans le chapitre dérivation. Ce chapitre repose sur une bonne compréhension de la fonction affine à travers l'étude de la tangente. Motivée par l'observation de ces difficultés que rencontrent les élèves, j'ai souhaité entamer une recherche pour mieux circonscrire cette situation problématique. Pour cela, plusieurs analyses ont été menées : les

* Lycée Alexandre Dumas Alger, Master 2 de Recherche en Didactique des Mathématiques – Algérie –
samialazri@yahoo.fr

programmes et les manuels scolaires en Algérie, des questionnaires destinés aux enseignants pour recueillir leurs observations en classe et des tests soumis à des élèves pour faire état de leurs connaissances. En outre, une situation a été expérimentée dans une classe de première, j'ai ainsi eu accès aux échanges entre le professeur et les élèves autour de la dérivée. Dans ce texte, je vais rapporter l'analyse de l'expérimentation menée autour de cette situation. Ainsi, en prenant en compte la question de la perte de sens dans l'enseignement de la notion de fonction affine, les difficultés rencontrées lors de la transposition des savoirs savants, je me pose les questions suivantes : quelles sont les praxéologies mathématiques pour qu'un professeur puisse faire comprendre, assimiler et s'approprier les notions de fonction affine à ses élèves ? Comment un enseignement qui focalise sur les conversions de différentes représentations sémiotiques permet de rendre les élèves plus compétents et autonomes dans le choix de telle ou telle représentation, pour résoudre une des tâches relatives aux traitements de la fonction affine et quelle tâche doit-on soumettre à l'élève pour qu'il s'approprie cette notion ? Je souhaite repérer, à travers l'analyse de l'expérimentation de la situation, les connaissances dont disposent les élèves des classes de première. L'objectif est de comprendre d'où viennent les difficultés que rencontrent les élèves de première. Ainsi, il faut tenter de comprendre les conditions écologiques mises à disposition dans les classes de première. À savoir, ce qui est enseigné et ce qui pourrait être enseigné. Cela consiste à analyser l'incorporation de l'apprentissage de la fonction affine, en tant que domaine et d'essayer de comprendre l'articulation entre les anciens et les nouveaux savoirs.

II. CADRE THÉORIQUE

La notion de fonction affine revêt toute son importance dans les classes de 1^{re} et terminale lors de l'enseignement et apprentissage de la dérivation. Elle est abordée en classe de seconde avec différentes représentations sémiotiques (Duval, 1988) et on s'attend à ce que les élèves soient habiles à passer d'une représentation à une autre pour répondre à une question. Pour cela, ils doivent bien comprendre les utilités de chaque représentation. Lorsque les élèves sont confrontés à des savoirs étudiés (dans notre cas la notion de fonction affine) pour aborder le chapitre de dérivation, plus précisément les tangentes en un point, ils ont construit des rapports personnels qui dépendent des organisations mathématiques mises en place par l'enseignement par rapport à ces objets. La nécessité d'analyser cette organisation mathématique m'a amené à choisir la théorie anthropologique du didactique (TAD). Ce cadre a été utilisé pour décrire les attentes institutionnelles et elles vont permettre de comprendre et d'analyser les réponses et les connaissances des élèves. La TAD repose sur quatre notions fondamentales. La première est celle d'objet. Dans le cadre de notre mémoire, l'objet est la fonction affine. La deuxième est celle de rapport personnel d'un individu x (l'individu est dans notre cas l'élève) à un objet o , que l'on désigne par le système $R(x, o)$. La troisième est liée à la personne. On obtient ainsi le couple formé par un individu x et le système de ses rapports personnels $R(x, o)$, à un moment donné de l'histoire de x . Bien entendu, au cours du temps, le système des rapports personnels de x évolue : des objets qui n'existaient pas pour lui se mettent à exister ; d'autres cessent d'exister ; pour d'autres, enfin, le rapport personnel de x change. Dans cette évolution, l'invariant est l'individu ; ce qui change est la personne. Lorsqu'un objet o (fonctions affines) existe pour une personne x qui est en position d'élève, on dit encore que x connaît o , le rapport $R(x, o)$ précisant la manière dont x connaît o . On appelle alors univers cognitif de x l'ensemble $U(x) = \{(o, R(x, o)) / R(x, o) \neq \emptyset\}$ (Chevallard 2002, 2003, 2009). Une quatrième notion fondamentale est celle d'institution, que nous limitons à la classe pour notre étude, bien que la notion soit plus large que la seule classe de mathématiques. Une institution I est un dispositif social « total », qui peut certes n'avoir qu'une extension très réduite dans l'espace social mais qui permet – et impose – à ses sujets, c'est-à-dire aux personnes x qui viennent y occuper les différentes positions p offertes dans I , la mise en jeu de manières de faire et de penser propres. En devenant sujet de I en position p , un individu x , qui est toujours déjà une personne dotée

d'un certain univers cognitif $U(x)$, s'assujettit aux rapports institutionnels $R I(p,o)$, qui vont remodeler ses rapports personnels. Si o existe pour les sujets de I en position p , le rapport personnel de x à o , $R(x, o)$, tendra à ressembler au rapport institutionnel $R I(p,o)$, (Chevallard, 2002).

L'étude d'une question en vue de créer ou de recréer une réponse nécessite l'élaboration d'une organisation praxéologique. Cette organisation se note $[T/\tau/\theta/\Theta]$. T désigne un type de tâches, une notion qui suppose un objet précis, t correspond à une tâche relevant d'un type de tâches T . On note τ une technique associée à une tâche t , c'est-à-dire une manière d'accomplir t . $[T/\tau]$ constitue un bloc nommé bloc pratico-technique qu'on peut identifier comme un savoir-faire. θ représente la technologie. Elle a pour première fonction de justifier la technique utilisée en assurant qu'elle permet bien d'accomplir le type de tâches T mais elle sert aussi à expliquer la technique, la rendre intelligible et l'éclairer ou encore à produire d'autres techniques. La théorie Θ joue ces mêmes rôles de justification, d'explication et de production vis-à-vis de la technologie. Le bloc constitue par $[\theta, \Theta]$ se nomme bloc technologico-théorique, et est identifié comme un savoir. Les différents types de tâches attendues des élèves ont été listés à partir des programmes officiels et des manuels pour les classes de 3^e, seconde et première (voir tableau 1) présentant ainsi un portrait des connaissances des élèves à ces trois niveaux.

Tableau 1 – Les tâches repérées dans les programmes officiels et dans des manuels (1^{re}, 2^{de}, 3^e)

Types de tâches en classe de 3 ^e	Types de tâches en classe de 2 ^{de}
T_1 : Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire ou d'une fonction affine. T_2 : Représenter une fonction linéaire ou une fonction affine. T_3 : Déterminer l'image ou l'antécédent d'un nombre par une fonction affine.	T_1 : Caractériser analytiquement une droite. T_2 : Interpréter graphiquement le coefficient directeur d'une droite T_3 : Tracer une droite dans le plan repéré. T_4 : Reconnaître que deux droites sont parallèles ou sécantes T_5 : Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes.
Types de tâches pour la classe de 1 ^{re}	
T_1 : Déterminer le taux de variation. T_2 : Calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point, comme limite du taux de variation notation $f'(a)$. T_3 : Interpréter le nombre dérivé en contexte : pente d'une tangente, vitesse instantanée, coût marginal. T_4 : Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a . T_5 : Déterminer graphiquement un nombre dérivé par la pente de la tangente T_6 : Construire la tangente en un point à une courbe représentative connaissant le nombre dérivé.	

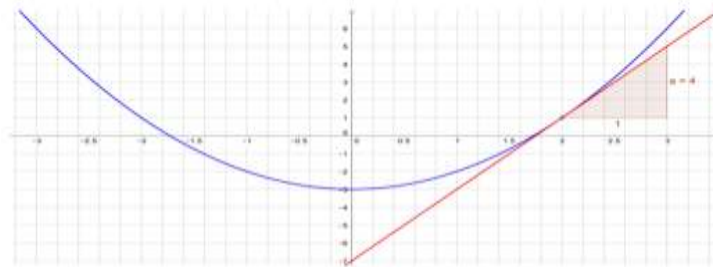
L'organisation mathématique de la classe de première, nous montre l'importance des bases que doivent maîtriser les élèves quant aux notions de la fonction affine et dans les classes antérieures (classe de 3e et de 2de), la notion de la droite dans les plans, afin d'arriver à aborder le chapitre de dérivation.

III. PRÉSENTATION DE LA SITUATION EXPÉRIMENTALE

Une activité a été proposée (figure 1) à une classe de 1^{re} afin de décrire ou d'analyser l'avancement du processus d'apprentissage. Dans cette situation, il est prévu que les connaissances des élèves évoluent grâce à la confrontation entre leurs anciennes et nouvelles connaissances. Quel était le sens construit par les élèves dans les contextes qu'ils ont rencontrés lors de leur apprentissage ? Est-ce qu'ils s peuvent ce sens dans des contextes différents, nouveaux ? Cette situation se penche sur l'équation de la tangente en un point d'une courbe, elle est purement analytique, démunie de modélisation. Nous

avons fait le choix de ne rien expliquer aux élèves, afin d'avoir accès à leurs démarches et leurs difficultés. Nous avons mis un indice sur le graphique, un triangle pour induire la lecture et le traçage du coefficient directeur. Cette activité a été créée par l'auteur de cet article, j'ai pris en considération les difficultés rencontrées par les élèves à qui j'enseigne.

Considérons la fonction $f : x \rightarrow x^2 - 3$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



- 1- Déterminer graphiquement $f'(2)$.
- 2- Construire la tangente (T) à C_f au point d'abscisse -2.
- 3- Déterminer, si ils existent, les coordonnées des points de C_f qui admettent une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x$

Figure 1 – Présentation de la situation expérimentale

Les tâches repérées dans l'activité sont les suivantes :

1. T_G : Déterminer graphiquement $f'(2)$
2. T_C : Construire la tangente (T) à C_f au point d'abscisse -2.
3. T_P : Déterminer les coordonnées d'un point de la courbe qui admettent une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x$.

Certaines de ces tâches invoquent un seul registre (t_1 : Calculer l'expression algébrique $f'(x)$; t_2 : Résoudre l'équation $f'(x_0) = -2$), d'autres demandent une conversion d'un registre à un autre, entre la représentation graphique et les ostensifs algébriques (t_1 : calculer le nombre dérivé $f'(-2)$). Voici l'analyse de la situation en utilisant le cadre de la TAD :

- 1) T_G : Déterminer graphiquement $f'(2)$

τ : T_1 est la tangente à la courbe C au point $A(2; 1)$, le coefficient directeur a de la droite T est égale au nombre dérivée $f'(2)$. Utiliser un indice de type angle que fait la droite avec l'axe des abscisses ou triangle rectangle des écarts pour trouver a . Avancer dans le sens de l'axe des abscisses et descendre de a . $f'(2) = a$.

τ' : Les points A et B appartiennent à la tangente, la pente de cette tangente est obtenue par :

$$a = \frac{\text{accroissement des ordonnées}}{\text{accroissement des abscisses}} \quad \text{donc} \quad a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}.$$

- 2) T_C : Construire la tangente (T) à C_f au point d'abscisse (-2).

- t_1 : Calculer le nombre dérivée $f'(-2)$.

$$\tau_1: \text{Calculer :} \quad * t(h) = \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}. \quad * f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} t(h).$$

t_2 : Tracer la droite passant par le point C de coordonnées $((-2); 1)$ et de coefficient directeur

$$a = f'(-2).$$

τ_2 : * Placer le point C de coordonnées $((-2); 1)$ sur la courbe, placer le point D en avançant à partir du point C horizontalement d'une unité selon le sens des abscisses et en montant de a unités.

*Tracer la tangente à la courbe passant par les points C et D .

3) T_P : Déterminer les coordonnées d'un point de la courbe qui admettent une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x$.

t_1 : Calculer l'expression algébrique $f'(x)$.

$$\tau_1: \text{Calculer : } *t(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \quad *f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} t(h).$$

t_2 : Résoudre l'équation $f'(x_0) = -2$.

$$\tau_2: \text{Calculer } x_0 = -\frac{b}{a}$$

t_3 : Calculer les coordonnées des points de la courbe qui admettent une tangente de coefficient Directeur (-2) .

$$\tau_3: \text{Calculer } f(x_0)$$

IV. ANALYSE DE LA SÉANCE EXPÉRIMENTALE

La situation a été expérimentée dans une classe de 20 élèves d'un niveau hétérogène. La situation a été soumise après avoir abordé le cours sur les notions de dérivée et des tangentes. La séance expérimentale s'est déroulée en quatre temps :

- 1^{er} temps : une activité est proposée aux élèves, ils doivent travailler individuellement. Le professeur passe entre les rangs et leur pose des questions sur la méthode ou la façon de procéder.
- 2^e temps : Le professeur fait un petit rappel sur le cours de seconde (l'équation réduite et l'équation cartésienne)
- 3^e temps : Correction de l'activité.
- 4^e temps : Un test sera proposé à cette classe en classe de terminale après avoir abordé le chapitre de dérivation.

Le professeur avait les mêmes intentions que nous :

Professeur : Selon votre objectif, cette activité ressort l'aspect de la dérivée en un point à travers la figure donnée graphiquement et analytiquement, ensuite ils vont tracer la tangente au point (-2) ; ce qui m'intéresse est de voir, est-ce qu'ils vont s'appuyer seulement sur le graphique ou alors est-ce qu'ils vont vérifier avec le calcul ? et je voudrais qu'à partir de cette activité découle sur une généralisation et ressortir l'équation de la tangente en utilisant bien sûr la fonction affine, sachant que l'équation de la droite est représentée par une droite, et donc une droite ils ont déjà étudié cela en classe de seconde, et nous allons voir aussi comment ils vont procéder pour prouver l'existence d'une tangente particulière.

1. Analyse du 1^{er} temps

Nous utilisons dans cette section P pour professeur et identifions certains élèves par les acronymes L, Sh, Ly et K (certaines copies sont en annexe).

T_G : Déterminer graphiquement $f'(2)$

Il ressort de l'analyse des copies que la majorité des élèves ont su répondre à la question mais la plupart ont dérivé la fonction et ont calculé le nombre dérivé en (2) analytiquement, d'autres l'ont fait graphiquement. On retrouve sur certaines copies les deux méthodes graphique et analytique. L'élève L a effectivement trouvé $f'(2) = 4$ par lecture graphique on retrouve le bon résultat sur sa copie, elle le vérifie en traçant la courbe sur la calculatrice, mais son raisonnement est faux. Nous avons mis un indice, un triangle pour induire les élèves à la lecture pour certains cela a fonctionné ils ont fait une lecture directe, pour d'autres ils ont pris les coordonnées de deux points sur la droite pour calculer le coefficient directeur.

T_C : Construire la tangente (T) à C_f au point d'abscisse (-2)

Dans cette question, on demandait de tracer la tangente à la courbe. Certains élèves n'ont fait aucun calcul, ils ont tracé une tangente passant par le point d'abscisse (2) sans tenir compte de la valeur du coefficient directeur. Pour Sh et Ly, elles ont déterminé l'équation de la tangente et trouve $y = -4x - 7$ pour In, elle calcule ensuite les coordonnées du point (-1) appartenant à la droite et trace la tangente en (-2) à partir de deux points qui sont le point calculé et l'ordonnée à l'origine ; pour Sh le tracé de la tangente s'est fait à partir du point (-2) et du point d'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses qu'elle aura calculé. K a calculé $f'(-2)$ pour déterminer l'équation de la tangente, ensuite à partir de cette équation, il a pu déterminer le coefficient directeur, pour tracer la tangente en appliquant la méthode du triangle.

T_P : Déterminer les coordonnées d'un point de la courbe qui admettent une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x$.

Pratiquement tous les élèves savent que deux droites parallèles ont le même coefficient directeur, mais le mettre en pratique c'est différent. K met $f'(x) = -2$ et il résout l'équation pour déterminer les coordonnées des éventuels points. Sh a d'abord déterminé l'équation de la tangente au point a , elle a trouvé $T_a: y = 2ax - a^2 - 3$ et elle résout l'équation $2a = -2$ puis elle détermine les coordonnées.

2. Analyse du 2^e temps

Le professeur revient à l'activité pour voir si les élèves ont compris le principe, sans hésitation les élèves ont su comment on fait une lecture graphique. Le professeur passe à la deuxième question, la tâche demandée est de construire la tangente (T) à C_f au point d'abscisse (-2). Les techniques proposées par les élèves reviennent à calculer l'équation de la tangente au point (-2) et ils trouvent $y = -4x - 7$. Ayant l'ordonnée à l'origine ils obtiennent les coordonnées du point $A(0; -7)$ et vont résoudre l'équation $y = 0$ pour trouver les coordonnées d'un point $B(x_B; 0)$, un point B appartenant à la tangente ils trouvent $B(-1,75; 0)$. Puis ils vont placer les points A et B sur le graphe et vont tracer la droite en reliant les deux points. On voit que, dans cette question, le moment d'évaluation n'est pas validé puisque les élèves font tout un détour pour le tracé de la tangente en (-2). Le professeur ne relève pas et passe à la troisième question. La tâche demandée pour la 3^e question est de déterminer les coordonnées d'un point de la courbe qui admettent une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x$. Les techniques abordées par les élèves sont de calculer $f'(x) = 2x$, et de résoudre $2x = -2$. donc $x = -1$, et ils calculent $f(-1) = 2$ pour trouver les coordonnées d'un point à la courbe où sa tangente est parallèle à la droite $y = -2x$ qui est $A(-1; 2)$. Le professeur laisse l'élève finir sa résolution et l'interpelle sur la différence d'une fonction dérivée et la dérivée en un point. En analysant

les copies, on retrouve cette confusion chez certains élèves. L'élève corrige directement sa faute et met $f'(a) = -2$ donc $2a = -2$. Il semble comprendre son erreur et le professeur explique la différence.

L'activité est finie mais le professeur improvise une tâche qui est de tracer les deux droites parallèles, la droite d'équation y et la droite qui lui est parallèle et qui passe par le point de coordonnées $A(-1; 2)$, elle demande à l'élève de la tracer à main levée. Alors l'élève trace un repère orthogonal et trace la droite $y = -2x$. Le professeur lui demande comment il avait procédé pour la tracer. K lui dit que le coefficient directeur valait (-2) donc qu'il avançait de 1 et le coefficient étant négatif il descend de 2, le professeur lui fait rappeler ce qui a été dit précédemment que pour tracer une droite il fallait le coefficient directeur et... ? Ly répond l'ordonnée à l'origine et K répond que l'ordonnée était nul donc la droite passe par l'origine et en même qu'il parle il trace une droite qui passe par l'origine sans tenir compte de la valeur du coefficient directeur. Le professeur le reprend en disant oui le coefficient directeur est censé nous mener d'un point à un autre. K place un point à l'origine du repère et avance de 1 et descend de 2 puis place le 2^e point et relie les deux points par une droite, pour tracer la droite parallèle qui a pour coefficient directeur (-2) et que cette droite passe le point A. La technique utilisée par l'élève est de déterminer l'équation de la tangente à partir de la formule $T_{-2}: y = f'(-2)(x + 2) + f(2)$. Il va trouver l'équation réduite de la droite qui est $y = -2x - 4$; il va ensuite résoudre $y = 0$ et il trouve $x = -2$, il vient de déterminer le deuxième point de la droite $B(-2; 0)$; il place sur le repère les points A et B puis trace la droite qui passe par ces deux points. Les justifications de la technologie sont soit implicites, chacun des élèves étant supposé savoir que deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur, soit par ce qui est dit oralement par le professeur « pour tracer une droite, il nous faut deux éléments nécessaires ».

V. DISCUSSION : ANALYSE DE L'ORGANISATION DIDACTIQUE DE LA SÉANCE DE TRAVAIL

Les connaissances mathématiques visées dans cette activité sont la lecture du coefficient directeur d'une droite ainsi que le traçage d'une droite. Le professeur a créé des conditions pour l'appropriation de ces connaissances, il a aidé les élèves à surmonter certains obstacles (connaissances antérieures) il les a orientés vers la représentation graphique d'une droite et du calcul du coefficient directeur par lecture graphique. Il n'y a pas de moment de première rencontre, car les élèves ont déjà rencontré toutes les tâches soit en classe de Seconde, soit en classe de Première. Le moment exploratoire apparaît principalement lors du rappel du cours de Seconde, en lien avec la constitution de l'environnement technologico-théorique. Les élèves démontrent ainsi que $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, les techniques étant institutionnalisées par le professeur. Quant au moment de l'environnement technologique, il se manifeste lors de la formulation des équations réduites et cartésiennes.

Les élèves réalisent cette tâche sous la direction du professeur, qui les guide par des questions, tant lors du rappel du cours que pour la troisième question concernant le tracé des droites. L'utilisation de l'environnement technologique permet ici aux élèves d'accéder à une visualisation et une meilleure compréhension des équations et de leur représentation graphique, facilitant ainsi leur appropriation des notions. Le moment de travail s'étend tout au long de la séance, car les élèves élaborent des stratégies pour résoudre le problème posé. Le développement du professeur est crucial dans cette phase : à travers des questions précises, il évalue l'aptitude des élèves à analyser les caractéristiques du problème, à mobiliser leurs connaissances mathématiques pour justifier la propriété visée, et les laisse envisager différentes solutions possibles. Un moment fort d'institutionnalisation se produit lors du rappel du cours, lorsque le professeur inscrit au tableau les réponses justes des élèves. Ce moment permet également de fixer des éléments dans l'organisation mathématique, donnant aux élèves une

compréhension claire de ce qu'ils doivent savoir, par exemple comment passer d'une équation réduite à une équation cartésienne et en déduire la lecture simple du coefficient directeur.

Le moment de l'évaluation apparaît validé pour la première question, mais presque inexistant pour la troisième question relative au tracé des droites. En effet, les élèves n'ont pas tenu compte du rappel du cours de Seconde sur le tracé d'une droite, et ont emprunté un chemin détourné pour la construction des tangentes, montrant ainsi des lacunes dans l'application des techniques enseignées. Les élèves étaient dans leurs topos (les élèves occupaient leur rôle d'apprenants dans la situation didactique ; leur rôle était de chercher, proposer des réponses, expérimenter des solutions), faisant des propositions tout en restant hésitants dans leur institutionnalisation (les élèves formulent des idées, mais ils ont du mal à les transformer en savoirs établis, en connaissances validées et reconnues comme justes). Ils n'étaient pas à l'aise avec certaines techniques vues en Seconde et ont souvent réutilisé des méthodes du collège, révélant une résistance aux nouvelles notions. Le professeur, lui, est resté dans son topos, donnant des indications, corrigeant les erreurs, expliquant les fautes et validant les bonnes réponses. Ce moment alternait entre un travail individuel, où le professeur circulait dans les rangs pour fournir des explications et des guides supplémentaires, et un travail collectif de mise en commun, où il interrogeait et discutait avec les élèves pour confirmer ou infirmer leurs hypothèses.

VI. CONCLUSION

Cette étude sur le processus d'apprentissage met en lumière comment les connaissances des élèves évoluent au fil des situations d'apprentissage, en confrontant leurs anciennes connaissances à de nouvelles. Les techniques apprises au collège, telles que la lecture du coefficient directeur et le tracé d'une tangente, deviennent des automatismes qui entravent l'adoption des méthodes enseignées en Seconde. Il est donc crucial d'identifier les difficultés persistantes liées à ces concepts afin de concevoir des situations d'apprentissage efficaces pour les surmonter.

L'observation expérimentale a révélé que de nombreux élèves éprouvaient des difficultés à lire le nombre dérivé et à tracer une tangente en utilisant les coordonnées d'un point et un coefficient directeur. Bien que le professeur ait fait un rappel utile, les élèves n'ont pas toujours appliqué cette connaissance, ce qui a conduit à une institutionnalisation partielle des concepts. Une résistance notable persiste dans la transition entre le tracé d'une droite à partir de deux points et celui à partir d'un point et d'un coefficient directeur. Cela indique que les techniques enseignées au collège continuent d'influencer leur approche. De plus, un changement de cadre peut représenter un obstacle significatif pour certains élèves. Pour remédier à ces difficultés, il est recommandé d'intégrer plusieurs activités dans le cursus de Seconde, axées sur le tracé de droites à partir de divers contextes. L'analyse des séances expérimentales révèle que la maîtrise du coefficient directeur par les élèves reste incomplète. Même s'ils savent le calculer, ils peinent à établir le lien entre ce coefficient et le tracé de la droite correspondante. Leurs connaissances antérieures semblent freiner cette intégration. Cela soulève la question de la manière dont cette notion devrait être introduite en classe de 3^e. En conclusion, notre étude valide l'hypothèse selon laquelle la compréhension du coefficient directeur pourrait constituer un obstacle à l'apprentissage des fonctions affines. Cette analyse ouvre la voie à de nouvelles recherches sur la transposition didactique des fonctions affines et sur les contrats didactiques nécessaires pour aborder ces notions de manière plus constructive.

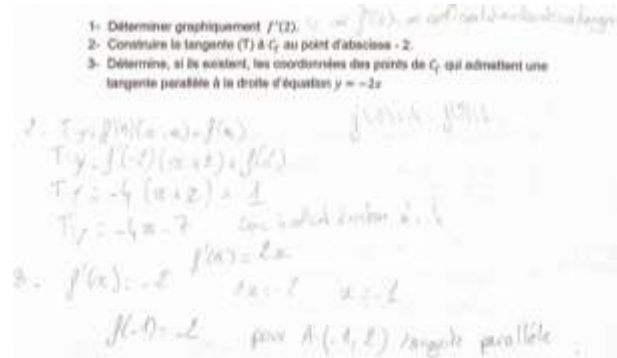
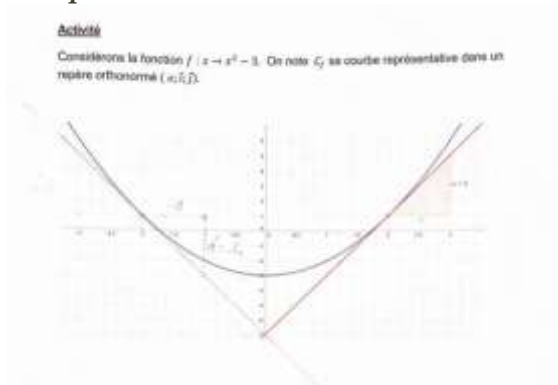
RÉFÉRENCES

- Chevallard, Y. (2002). *Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques*.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Approche_anthropologique_rapport_au_savoir.pdf
- Chevallard, Y (2003). *Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée : raisons d'être, fonctions et devenir*. IUFM d'Aix Marseille.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Nouveaux_dispositifs_didactiques_au_college_et_au_lycee.pdf
- Chevallard, Y. (2009). *Questionnement du curriculum à la lumière de la TAD : la notion d'enquête et l'avenir de l'éducation*.
- Duval, R. (1988). Graphiques et équations : l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235-255.

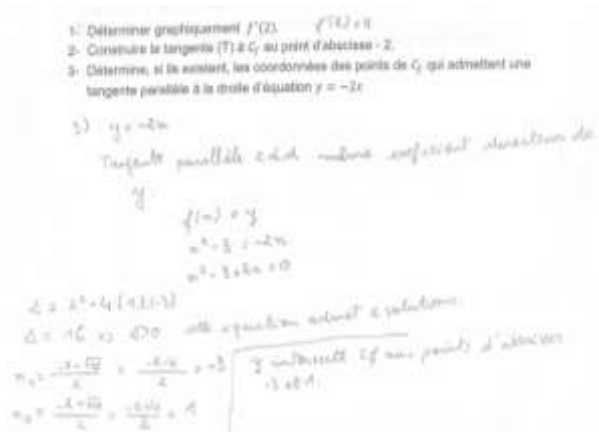
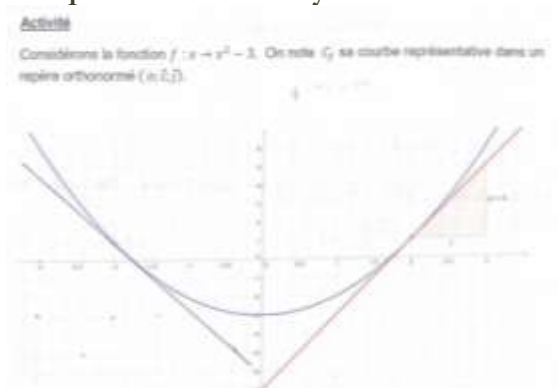
ANNEXE

QUELQUES COPIES DE LA SÉANCE EXPÉRIMENTALE

Copie de l'élève de K



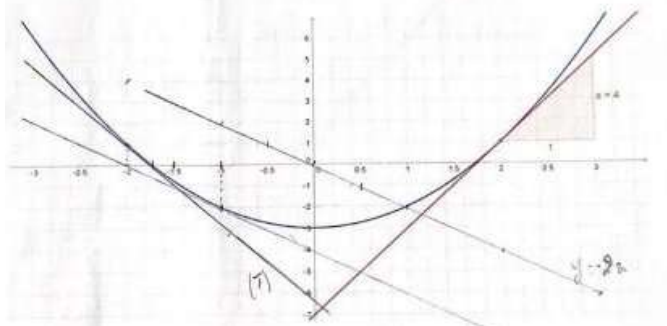
Copie de l'élève de Ly



Copie de l'élève de SH

Activité

Considérons la fonction $f : x \rightarrow x^2 - 3$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; i; j)$.



Shade 1. $f(x) = x^2 - 3$
 $f'(x) = 2x$
 $f(-2) = 4$

3. $T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$
 $f'(a) = 2a$
 $f(a) = a^2 - 3$

$T: y = 2a(x-a) + a^2 - 3$
 $T: y = 2ax - 2a^2 + a^2 - 3$
 $T: y = 2ax - a^2 - 3$
 $T: y = a^2 + 2ax - 3$

La tangente passe par les points $A(-2, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(-1, 25; 0)$

si la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -2x$, alors elles ont le même coefficient directeur.

$2a = -2$
 $2a = -2$
 $a = -1$

$f(a) = (-1)^2 - 3$
 $f(a) = 1 - 3$
 $f(a) = -2$

Ainsi les points qui admettent une tangente parallèle à $y = -2x$ est $A(-1, -2)$.

APPRENTISSAGE DE LA CONSTRUCTION DES BISSECTRICES DES ANGLES D'UN TRIANGLE À L'AIDE DE LA RÈGLE ET DU COMPAS, EN S'AIDANT DU LOGICIEL GEOGEBRA EN CLASSE DE 5^E AU CAMEROUN

| NGOMPE* KARELL

Résumé | Cet article a pour objectif de présenter une recherche dont le but est d'élaborer, expérimenter et valider des situations d'enseignement/apprentissage pour la construction des bissectrices des angles. L'apprentissage se fera avec les outils tels que la règle et le compas, ceci en s'aidant du logiciel Geogebra ; le but étant de faire évoluer les rapports des élèves en classe de 5^e avec ces outils. Comme cadre théorique, nous avons donc choisi la théorie des situations didactiques et l'approche instrumentale.

Mots clés : géométrie, bissectrice, outils, construction géométrique, genèse instrumentale

Abstract | This article aims to conduct research focused on developing, experiencing with, and validating teaching/learning situations for the construction of angle bisectors. Learning will take place using tools such as a ruler and compass, with the assistance of the Geogebra software; the goal is to enhance the engagement of 5^e students with these tools. The theoretical framework includes the Theory of Didactic Situations and the Instrumental approach.

Keywords: Geometry, bisector, tools, geometric construction, instrumental genesis

I. INTRODUCTION

Cette étude est menée au Cameroun, dans la ville de Yaoundé. Elle se situe dans le cadre de l'enseignement-apprentissage des mathématiques au secondaire, plus précisément dans le sous-système francophone. Depuis près d'une décennie, le système éducatif camerounais a adopté une approche pédagogique par les compétences (APC) qui met l'apprenant au centre du processus enseignement-apprentissage. Elle préconise que l'apprenant construise ses connaissances de lui-même, avec l'aide de ses pairs, sous la supervision d'un enseignant. A la fin d'un enseignement, les élèves doivent être compétents, c'est-à-dire être capables d'exploiter l'instrumentalité d'un savoir (Bennaceur, 2009), autrement dit, d'utiliser une connaissance pour pouvoir résoudre un problème concret.

Les rapports entre la géométrie et les élèves débutent dès la maternelle. En effet, dès le bas âge, on apprend aux enfants à reconnaître les formes géométriques simples que sont le carré, le cercle, le rectangle et le triangle. Au primaire, la manipulation de l'outil mathématique est introduite ; à cet effet, Voltolini affirme que « l'outil compas est utilisé dans un premier temps pour tracer la ligne cercle (programme de CE2), puis dans un deuxième temps pour comparer ou reporter une longueur (programme de CM1) » (2014, p. 26).

En observant le programme de géométrie des classes de 6^e et 5^e du système éducatif camerounais, nous constatons qu'il y a plusieurs chapitres qui reviennent à savoir : le cercle, les angles, les symétries, le repérage et les triangles. Le chapitre sur le triangle est le seul parmi ces derniers qui prévoit l'étude d'une même notion, celle des droites particulières (médiatrices, médianes, hauteurs et bissectrices). En effet, en 6^e, on apprend aux élèves à construire les bissectrices d'un triangle à l'aide du rapporteur et

* École Normale Supérieure de Yaoundé – Cameroun – karellngompe@gmail.com

de la règle ; en classe de 5^e, la méthode de construction devrait être différente pour éviter chez les élèves une sensation de « déjà vu » (Pressiat et Combier, 2001).

Dans le but d'améliorer les apprentissages de façon permanente, le Ministre des Enseignements Secondaires préconise l'introduction des Technologies de l'Information et de la Communication dans les enseignements. C'est d'ailleurs dans cette lancée que l'année scolaire 2023-2024 a été mise sous le thème : « Digitalisation et pratique de classe pour la modernisation des enseignements et apprentissages au Ministère des Enseignements Secondaires. ». En mathématiques, l'utilisation des TIC pourrait impacter positivement sur la motivation des élèves. A cet effet, Mastafi (2020) écrit : « les logiciels multimédias se concentrent sur des unités d'enseignement spécifiques et en intégrant du mouvement dynamique, du son et du graphisme, ils aident les élèves dans la construction de leurs apprentissages. » (p. 61-62).

Dans ce travail, nous allons explorer l'utilisation de plusieurs outils matériel et numérique à savoir : la règle, le compas et le logiciel Geogebra, pour apprendre à construire les bissectrices d'un triangle en classe de 5^e.

II. CONSTATS ET PROBLÉMATIQUE

Les stages académiques que j'ai effectués durant ma formation à l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé au lycée bilingue d'Etoug-Ebé et au lycée de la Cité Verte m'ont permis de faire plusieurs constats concernant notre thématique, entre-autres :

- Les enseignants de mathématiques des classes de 6e et 5e n'arrivent pas à expliquer clairement les notions géométriques en utilisant le vocabulaire adéquat. Certains enseignants, pour parvenir à leur fin utilisent un vocabulaire peu approprié, ce qui impacte négativement sur les apprentissages des élèves. D'autres font des schémas à main levée pour essayer de faire passer le message qu'ils veulent transmettre ; et parce qu'ils le font tout le temps en cours de géométrie, les élèves ont du mal à faire la différence entre un géomètre et un dessinateur (Pressiat et Combier, 2001).
- Les enseignants de mathématiques des classes de 6e et 5e font beaucoup de schémas à main levée et utilisent très peu le matériel de géométrie. Lorsqu'ils l'utilisent, les élèves ont l'impression qu'il s'agit d'une illustration autre que la notion dispensée. Ce qui rend l'instrument externe à la formation des connaissances géométriques des élèves (Ourahay, 1991).
- Les enseignants de mathématiques des classes de 5e, pour tracer les bissectrices, divisent la mesure de l'angle donné en deux, et à l'aide du rapporteur et de la règle trouvent la bissectrice. Le fait de toujours passer par la mesure pour résoudre un problème géométrique est un obstacle à l'apprentissage des élèves (Serigado, 2022).

Ces constats montrent qu'il y a un véritable problème dans l'apprentissage de la construction des figures géométriques, en particulier les bissectrices d'un triangle par les élèves. Cette thématique pose donc le problème de la difficulté de l'élève à pouvoir utiliser la règle et le compas pour pouvoir construire les figures géométriques, en particulier les bissectrices d'un triangle.

Nous aurons pour ce travail une question principale de recherche : Comment est-ce que le logiciel Geogebra peut améliorer l'apprentissage de la construction des bissectrices d'un triangle chez les élèves ?

Comme questions secondaires, nous avons :

- Comment à partir des propriétés des bissectrices, la règle et le compas peuvent servir d'artefacts pour la construction des bissectrices ?
- Comment l'utilisation de Geogebra permet de visualiser la construction des bissectrices ?
- Comment articuler l'utilisation des outils (règle et compas) et la séquence de construction de la bissectrice avec Geogebra ?

Cette étude a pour objectif général de construire un dispositif d'apprentissage permettant aux élèves de mobiliser les propriétés de géométrie pour construire les bissectrices d'un triangle en utilisant les outils de géométrie tels que la règle et le compas.

Pour cet objectif, nous aurons plusieurs objectifs secondaires : faire ressortir le rôle du compas et de la règle dans la construction de la bissectrice d'un triangle, ainsi que les différentes étapes de construction des bissectrices d'un triangle à l'aide de Geogebra.

III. INTÉRÊTS ET DÉLIMITATION DE CETTE ÉTUDE

Pour cette étude, nous allons donner l'intérêt sur les plans didactique, social, scientifique, pédagogique et psychologique.

1. *Intérêts de l'étude*

Sur le plan didactique

Ce travail va développer chez les apprenants : la visualisation et la compréhension spatiale ; en effet, la construction géométrique encourage les élèves à visualiser et à comprendre les relations spatiales. Duval (2005) dit d'ailleurs à cet effet que pour faire de la géométrie, il faut décomposer toute forme en une configuration d'autres unités figurales du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions.

Nous observerons également le développement des compétences techniques car en utilisant la règle et le compas, les élèves acquièrent des compétences pratiques pour réaliser des constructions géométriques précises.

La construction de la bissectrice d'un triangle incitera aussi à résoudre des problèmes mathématiques, ce qui développe la pensée logique et la créativité.

Sur le plan social

L'apprentissage de la construction de la bissectrice à l'aide de la règle et du compas et des TIC en classe de 5^e, va développer :

- La collaboration et communication : car travailler sur des constructions géométriques encourage la collaboration entre pairs, favorisant ainsi la communication et le partage des connaissances.
- L'inclusion : car les activités de géométrie offrent la possibilité d'engager tous les élèves, indépendamment de leur niveau de compétence, en encourageant la participation de chacun.

Sur le plan scientifique

Sur le plan scientifique, on observera :

- La compréhension des fondements géométriques : la construction de la bissectrice permet aux élèves de saisir les concepts fondamentaux de la géométrie, tels que les angles, les droites et les relations entre eux.
- Les applications dans d'autres domaines : les compétences géométriques acquises peuvent être appliquées dans divers domaines scientifiques et techniques ultérieurs.

Sur le plan pédagogique

Nous aurons sur le plan pédagogique :

- Une approche interactive : l'utilisation de la règle et du compas engage les élèves dans une activité pratique et interactive, favorisant ainsi une meilleure compréhension des concepts géométriques.
- Une diversité des apprentissages : cette activité permet de varier les méthodes pédagogiques en combinant l'utilisation d'outils traditionnels (règle, compas) avec des ressources technologiques (logiciels de géométrie dynamique, TIC) pour répondre aux différents styles d'apprentissage des élèves.
- L'encouragement de la réflexion et de la résolution de problèmes : la construction de la bissectrice d'un triangle invite les élèves à réfléchir, à analyser et à résoudre des problèmes géométriques, stimulant ainsi leur esprit et leur capacité à trouver des solutions.
- Un développement des compétences transversales : outre les compétences mathématiques, cette activité favorise le développement des compétences transversales telles que la patience, la précision, la créativité et la capacité à suivre des instructions et à travailler méthodiquement.

Sur le plan psychologique

Ici, nous aurons comme intérêts :

- La confiance en soi : réussir à construire une bissectrice ou d'autres constructions géométriques renforce la confiance des élèves dans leurs capacités mathématiques.
- Le développement de la persévérance : la géométrie demande de la patience et de la persévérance, ce qui contribue au développement de la capacité à surmonter les défis.

2. Délimitation

Toute recherche doit être menée dans un cadre bien précis. En ce qui concerne la nôtre, elle se situe dans les domaines de l'enseignement et de l'apprentissage. Elle pose un problème d'actualité, dont les manifestations sont observées sur le terrain. Cette étude concerne l'apprentissage de la construction de la bissectrice dans un triangle à l'aide de la règle et du compas et des TIC en classe de 5^e. Cette étude est faite au Cameroun, dans la région du Centre et plus précisément dans la ville de Yaoundé. Les observations seront faites au Lycée Bilingue d'Application de Yaoundé qui est dans le 4^e arrondissement de la ville. Nous avons travaillé durant l'année scolaire 2024/2025.

IV. CADRE THÉORIQUE ET HYPOTHÈSES

Nous allons à présent présenter les théories sur lesquelles nous allons nous appuyer pour mener à bien notre travail. Les théories retenues pour ce travail sont : la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Guy Brousseau et l'approche instrumentale de Rabardel.

1. *La Théorie des Situations Didactiques de Guy Brousseau*

Notre choix s'est porté sur cette théorie car nous aurons à construire des situations adéquates pour favoriser l'apprentissage de la construction des bissectrices chez les élèves de 5^e et cette théorie nous donne les outils adéquats pour avoir une bonne situation. Le terme situation est défini par Kuzniak comme étant l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et des relations qui l'unissent à son milieu (2004, p.19). Guy Brousseau en développant ce cadre théorique fait ressortir deux grands types de situations : la situation didactique qui est une situation dans laquelle l'intention d'enseigner est clairement défini et la situation a-didactique qui est une situation dans laquelle l'intention d'enseigner n'est pas clairement défini. Toutefois, on ne peut avoir une situation didactique sans une situation a-didactique ; en effet, ce sont les moments d'a-didacticité qui font la situation didactique. La situation a-didactique comporte : la situation d'action, la situation de formulation et la situation de validation.

2. *L'approche instrumentale*

Développée par Pierre Rabardel, l'approche instrumentale est un cadre théorique qui se concentre sur la relation entre l'humain et l'outil (artéfact) dans une activité. Les principaux concepts de cette approche sont :

- L'artéfact : l'objet, l'outil, la technologie mis à la disposition de l'utilisateur.
- Les schèmes d'utilisation : les manières dont l'utilisateur s'approprie et utilise l'artéfact, les règles d'action qu'il développe.
- L'instrument : résultante de l'interaction entre l'artéfact et les schèmes d'utilisation, c'est l'unité fonctionnelle dans l'activité.

Rabardel nous montre dans ses travaux que les instruments ne sont pas neutres dans le processus d'acquisition des connaissances par les élèves. En fait, les savoirs ne se construisent pas chez les apprenants de la même façon, ceci dépend fortement de l'instrument utilisé et du rapport de chaque élève à cet instrument. Kant avait à cet effet montré que nos connaissances sont dépendantes des outils cognitifs que nous mettons en œuvre pour les construire (Rabardel, 1999). L'instrument est donc au centre des interactions entre le maître, l'élève et le savoir.

En effet, l'instrument est une entité mixte, qui intègre à la fois les caractéristiques de l'artéfact et les schèmes d'utilisation construits par l'utilisateur. L'artéfact est ici le dispositif matériel utilisé en situation d'apprentissage, il peut être symbolique. Avec cette définition, nous comprenons que, c'est chaque apprenant qui élabore son instrument en situation d'apprentissage, et les connaissances qu'il va acquérir vont dépendre fortement de cette élaboration. Le processus par lequel le sujet construit son instrument est appelé genèse instrumentale.

La genèse instrumentale a deux dimensions principales :

- L'instrumentation : processus par lequel l'utilisateur prend connaissance de l'artéfact, se l'approprie et l'intègre dans son activité.
- L'instrumentalisation : processus par lequel l'utilisateur transforme ses rapports avec l'artéfact pour mieux l'adapter à ses besoins et à son activité.

Ces deux processus sont étroitement liés et se déroulent de manière conjointe au fur et à mesure que l'utilisateur se familiarise avec l'artéfact et le fait évoluer. La genèse instrumentale est donc un processus dynamique, qui montre que l'utilisateur n'est pas passif face à un artéfact, mais qu'il le transforme activement pour en faire un instrument adapté à son activité (Serigado, 2022).

L'hypothèse générale de notre travail est la suivante : l'utilisation du logiciel Geogebra comme outil complémentaire à la construction manuelle des bissectrices d'un triangle avec la règle et le compas permet aux élèves de mieux comprendre les étapes de construction et les propriétés géométriques associées, facilitant ainsi la réalisation correcte des bissectrices et renforçant leur capacité à appliquer ces techniques dans des situations variées.

V. MÉTHODOLOGIE ET DEROULEMENT DU DISPOSITIF D'APPRENTISSAGE

Dans cette partie, nous allons présenter un dispositif d'apprentissage qui repose sur une approche active et expérimentale, combinant la manipulation d'outils traditionnels (règle et compas) avec l'exploration numérique via le logiciel Geogebra. L'objectif est d'amener les élèves à découvrir par eux-mêmes les propriétés des bissectrices d'un triangle en mobilisant leurs connaissances et en adoptant une démarche rigoureuse. Ce dispositif repose sur une approche en quatre temps :

- Une phase de découverte
- Une exploration numérique avec Geogebra
- Une construction manuelle avec la règle et le compas
- Une phase de comparaison et d'analyse

L'étude sera réalisée auprès de dix élèves d'une classe de 5^e ; ils seront mis en groupe de trois et quatre pour le travail et les échanges. Ces élèves ont déjà acquis des notions de base sur les angles et les triangles, ce qui leur permet d'aborder la notion de bissectrice.

Comme matériel à utiliser, nous aurons :

- Outils classiques : règle, compas, crayon, feuille
- Outil numérique : l'application Geogebra
- Supports pédagogiques : un protocole de construction détaillant les étapes de construction d'une bissectrice avec les outils classiques et avec Geogebra ; un memento résumant quelques propriétés des bissectrices utiles.
- Des dictaphones
- Un téléphone
- Une grille d'observation

Dans le cadre de ce travail, nous n'allons présenter que les trois premières phases de notre dispositif.

1. Introduction et phase de découverte

Durant cette phase, les élèves prendront connaissance du logiciel Geogebra. Nous leur présenterons quelques fonctionnalités dont ils auront besoin pour la construction d'une bissectrice sans toutefois utiliser directement l'outil bissectrice. Cette étape est primordiale parce que les élèves n'ont aucune connaissance préalable de ce logiciel.

2. L'exploration numérique avec Geogebra

L'exploration numérique a pour objectif de faire travailler les élèves en groupe en suivant le protocole de construction qui leur a été remis et de justifier chaque étape de construction en mentionnant une propriété du memento.

- Trace un triangle avec l'outil « segment ».

- Trace un cercle de centre B passant par le point D tel que $BD < \frac{BC}{2}$ avec l'outil « cercle avec centre passant par le point ».
- Marque par E le point d'intersection du cercle avec le segment $[BA]$.
- Trace un cercle de centre D et de rayon $[BD]$ avec l'outil « compas ».
- Trace un cercle de centre E et de rayon $[BD]$ avec l'outil « compas ».
- Marque par F le point d'intersection des deux cercles précédents.
- Trace la droite (BF) avec l'outil « ligne » et mets là en couleur rouge.
- Vérifie ton tracé en utilisant l'outil « bissectrice » et trace la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ en couleur noire.

Nous allons mettre en annexe ce qui est attendue de chacune de ces étapes.

3. *La construction manuelle avec la règle et le compas*

Ici, les élèves travaillent individuellement sur papier. L'objectif est de voir si chacun d'eux est capable de construire manuellement la bissectrice d'un angle d'un triangle en utilisant uniquement la règle et le compas après la séance de travail avec le numérique.

VI. CONCLUSION

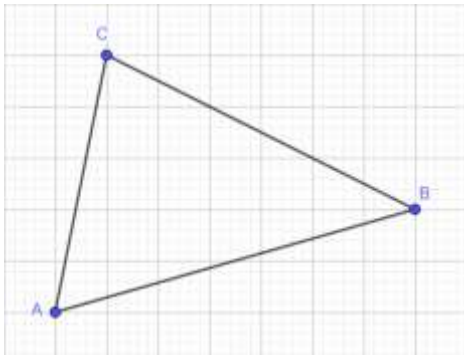
L'apprentissage de la construction des bissectrices d'un triangle en classe de 5^e, en utilisant la règle, le compas et le logiciel Geogebra, offre une approche pédagogique complète qui combine les méthodes traditionnelles et les outils numériques. Cette stratégie permet aux élèves de comprendre en profondeur les concepts géométriques liés aux bissectrices, tout en développant des compétences pratiques et technologiques. La maîtrise des techniques de construction manuelle avec la règle et le compas est essentielle pour saisir les fondements de la géométrie euclidienne. L'intégration de Geogebra enrichit cet apprentissage en offrant une visualisation dynamique des constructions géométriques. Ainsi, l'utilisation conjointe de la règle, du compas et du logiciel Geogebra dans l'enseignement des bissectrices en classe de 5^e constitue une méthode pédagogique efficace, préparant les élèves à une compréhension approfondie de la géométrie et à une utilisation judicieuse des technologies éducatives.

RÉFÉRENCES

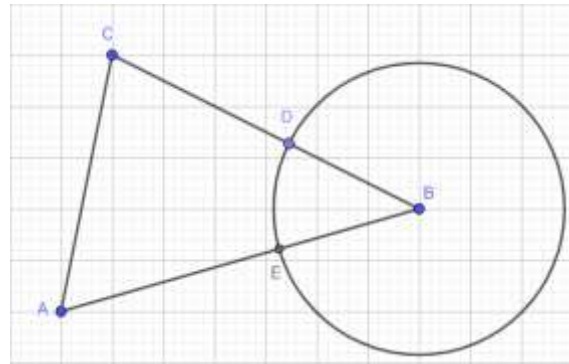
- Bennaceur, B. (2009). Apprentissage, compétences et approche par compétences en mathématiques. *Les cahiers du Crasc*, (16), 23-27.
- Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques. *Éducation & Didactique*, 5(1), 101-104.
<https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1005>
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnement. *Annales de Didactiques et Sciences Cognitives*, 10, 5-53.
- Kuzniak, A. (2004). La théorie des situations didactiques de Brousseau. *L'ouvert*, 110, 17-33.
<https://bibnum.publimath.fr/IST/IST04030.pdf>
- Mastafi, M. (2020). Rôles et impacts des TIC dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : perceptions des enseignants du secondaire. *Formation et profession*, 28(2), 60-74.

- Ourahay, M. (1991). La construction géométrique et les instruments classiques de construction. *Bulletin AMQ*, (mars), 21-26. <https://www.amq.math.ca/wp-content/uploads/bulletin/archives/1991-1-part10.pdf>
- Pressiat, A. et Combier, G. (2001). Apprentissages géométriques au début du Collège. Dans *Actes du colloque inter-IREM 1^{er} cycle : « Quelles géométries au collège ? Geste physique, geste virtuel, geste mental »*, 21-23 juin 2001. IREM de Montpellier. <https://ife.ens-lyon.fr/formation-formateurs/catalogue-des-formations/formations-2005-06/apprentissages-geometriques-au-cycle-3-de-l-ecole-1/Geometrie%20college.pdf>
- Rabardel, P. (1999). Qu'est-ce qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mises en situation. *Les dossiers de l'ingénierie éducative*, 19, 61-65. https://edunum.unige.ch/articles/rabardel_1995_quest-ce_quun_instrument.pdf
- Serigado, R. (2022). *L'artefact au service de la construction de connaissances en géométrie : l'utilisation du compas dans la construction d'un quadrilatère* [Mémoire de Maîtrise, Université de Genève]. Archive ouverte UNIGE. <https://archive-ouverte.unige.ch/unige:163605>
- Voltolini, A. (2014). Un duo d'artéfacts virtuel et matériel pour apprendre à construire un triangle à la règle et au compas. *Grand N*, (94), 25-46.

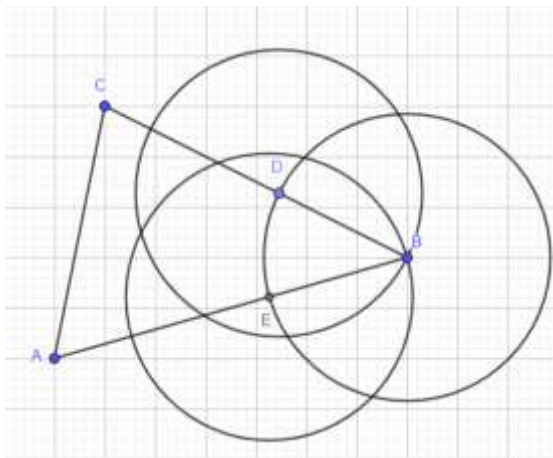
ANNEXE



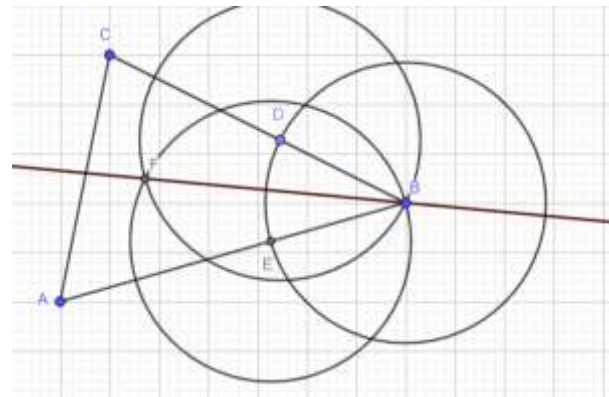
Étape 1



Étapes 2 et 3



Étapes 4 et 5



Étapes 6,7 et 8

PLACE DU RAISONNEMENT PAR ANALOGIE DANS LES RAISONNEMENTS DES ÉLÈVES DU SECONDAIRE À TRAVERS DES TÂCHES DE RÉOLUTION DE PROBLÈMES

| NHIRY* MERYEM, HANINI** MOHAMED ET ABOUHANIFA*** SAID

Résumé | Cette étude rapporte une analyse de la résolution des problèmes de raisonnement par analogie dans le cadre d'un travail explicite avec des élèves du secondaire au Maroc. Ce type de raisonnement est trop peu utilisé dans le programme de mathématique au secondaire. Les élèves ont l'habitude de confronter des problèmes prenant sur le raisonnement déductif une conceptualisation qui opère du particulier au général. Le raisonnement par analogie est un mode de raisonnement qui exploite des similitudes et des différences entre abstractions, afin de permettre des inductions. Une définition des notions de similitude et de différence va d'abord être proposée afin de bien cadrer le raisonnement par analogie. Ensuite nous présentons une analyse réalisée sur un échantillon des élèves de la première année du baccalauréat en science mathématique (âges de 15 à 16 ans). Les résultats montrent que les élèves ayant réussi les tâches ont un bon sens de raisonnement et une formalisation recevable des concepts. Contrairement aux élèves qui n'ont pas réussi à justifier clairement leur raisonnement, car ils ne sont pas souvent confrontés à ce type de tâches.

Mots-clés : raisonnement par analogie, similitudes et différences, éducation, tâches, secondaire.

Abstract | This study reports on an analysis of problem-solving using reasoning by analogy in the context of explicit work with secondary school pupils in Morocco. In the Moroccan curriculum, particularly at secondary level, this type of reasoning is little used, as students are used to confronting problems that take deductive reasoning as a conceptualization that operates from the particular to the general. Reasoning by analogy is a mode of reasoning that exploits similarities and differences between abstractions, to enable inductions. Firstly, a definition of the notions of similarity and difference will be proposed, to provide a clear framework for reasoning by analogy, followed by an analysis carried out on a sample of students in the first year of the mathematical science baccalaureate. The results show that students who have successfully completed the tasks have a good sense of reasoning and an acceptable formalization of concepts. This contrasts with the students who were unable to clearly justify their reasoning, as they are not often confronted with this type of task.

Keywords: Reasoning by analogy, similarities and differences, education, tasks, high school.

I. INTRODUCTION

Le raisonnement mathématique (RM) prend de plus en plus d'importance dans l'enseignement des mathématiques, à la fois dans la recherche (l'augmentation des études empiriques) et dans la pratique (par exemple l'école). Il est devenu une partie intégrante des programmes d'enseignement des mathématiques depuis que le PISA (2012) a mis l'accent sur les compétences en matière de processus mathématiques dans de nombreux pays, dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, telles que la modélisation, la résolution de problèmes, le raisonnement, la preuve, et la communication dans les programmes scolaires du monde entier.

* Hassan first university of Settat – Maroc – nhiry.meryem@gmail.com

** Hassan first university of Settat – Maroc – haninimohamed@gmail.com

*** Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de la Formation Casablanca-Settat – Maroc – saidabouhanifa@yahoo.fr

Le raisonnement analogique est également mis en avant par Reid (1995) et Polya (1968) comme jouant un rôle dans le raisonnement mathématique. Ce type de raisonnement est particulièrement important en classe pour la résolution de problèmes mathématiques, notamment à travers la mise en œuvre de stratégies telles que « Penser à un problème connexe », « Utiliser un problème plus simple » et « Chercher une solution » (Polya, 1954, 1957). Il contribue de manière significative au développement conceptuel dans la résolution de problèmes mathématiques (Silver, 1990 ; Holyoak et Thagard, 1995 ; Novick, 1995 ; English, 1997). Nous nous basons sur le modèle conceptuel du raisonnement mathématique développé par Jeannotte (2015) et Nhiry (2023), qui caractérise le raisonnement mathématique comme un ensemble de processus commognitif qui sont métadiscursifs, regroupés en deux aspects primordiaux : structurel et processuel.

L'aspect structurel s'appuie sur la littérature qui traite de la logique mathématique. On y retrouve les structures déductives, inductives, abductives et analogiques.

Selon (Nhiry et al., 2023) le raisonnement le plus répondu dans les programmes de mathématique au secondaire qualifiant est le raisonnement déductif. Toutefois, limiter le raisonnement mathématique au seul raisonnement déductif revient à restreindre son rôle dans l'activité mathématique à un simple processus d'inférence à partir d'affirmations déjà établies, se limitant ainsi à la structuration et à la théorisation du discours mathématique. Dans cette perspective, notre étude porte sur la caractérisation de la structure analogique chez les élèves du secondaire qualifiant dans la résolution de problèmes mathématiques.

Après avoir présenté l'ancrage théorique du raisonnement par analogie, nous présentons la méthodologie qui nous a conduits à exploiter notre cadre d'analyse. Nous présentons ensuite quelques résultats qui nous ont permis de caractériser les raisonnements réalisés par les élèves dans la résolution de problèmes.

II. RAISONNEMENT PAR ANALOGIE

L'analogie (ou raisonnement analogique), est un raisonnement différencié de la déduction et de l'induction qui demande la comparaison entre deux concepts déjà construits (Sfard, 1997).

Le mot analogie vient du terme grec *analogia* qui reflète une proportion mathématique du type : A est à B ce que C est à D (English, 2004).

Donc de manière générale, un raisonnement par analogie s'appuie sur des ressemblances entre les objets considérés et nécessite d'inférer des énoncés dépendant de leurs similitudes et de leurs différences (Jeannotte, 2015).

L'analogie est différente des pas élémentaires de raisonnement, car elle comporte plus d'un pas Reid (2010). Peirce propose deux structures du raisonnement par analogie composées de deux pas élémentaires. Premièrement, un pas inductif suivi d'un pas déductif. Deuxièmement, un raisonnement composé d'un pas abductif, suivi d'un pas déductif, cette structure pourrait être liée à la résolution de problème (l'utilisation de certaines propriétés et avoir un résultat) à l'aide d'un problème analogue tel que discuté par English (1997). La comparaison des deux problèmes peut suggérer la recherche de certaines données qui viendraient expliquer l'affirmation. D'un point de vue structurel, il semble composé d'au moins deux pas qui peuvent être de différents types (inductif, déductif ou abductif). Par ailleurs, l'aspect structurel ne met pas en lumière la recherche de similitude associée au raisonnement par analogie.

III. RAISONNEMENT PAR ANALOGIE : OPTIQUE DIDACTIQUE DE LA REVUE DE LITTÉRATURE

Le raisonnement par analogie et son rôle dans la résolution de problèmes, et le transfert de connaissances ont été largement étudiés dans les sciences cognitives et le développement intellectuel (Gentner, 1983 ; Holyoak et Thagard, 1995). Cependant, peu de recherches se sont spécifiquement penchées sur son application à la résolution de problèmes mathématiques, en particulier chez les élèves du secondaire et les étudiants universitaires.

Certaines études ont mis en évidence des éléments clés de ce processus. Novick et Holyoak (1991) ont montré que la mise en correspondance entre problèmes analogues ne garantit pas un transfert réussi, et que l'adaptation reste un défi majeur. English (1998) a révélé que les enfants peinent à identifier et à utiliser les structures relationnelles communes entre problèmes similaires. Bernardo (2001) a démontré que l'usage explicite d'analogies améliore le transfert dans la résolution de problèmes probabilistes. Kristayulita et al. (2020) ont identifié des différences de schémas de raisonnement analogique selon la capacité des élèves à établir des correspondances directes entre problèmes. Plus récemment, Hicks et Flanagan (2024) ont observé que les étudiants en algèbre abstraite possèdent des compétences analogiques variables selon les structures mathématiques étudiées.

Ces recherches soulignent les défis et les opportunités liés à l'apprentissage par analogie en mathématiques, mettant en lumière l'importance du développement des compétences analogiques pour favoriser le transfert des connaissances.

IV. MÉTHODOLOGIE

1. Échantillon

Afin de caractériser les raisonnements par analogie élaborés par les élèves, l'expérimentation avait lieu dans une classe de mathématiques. Cependant, l'objectif de cette étude est de caractériser les types de conjectures qui se produiraient dans un environnement plus contrôlé (des consignes claires et identiques pour l'ensemble des élèves, une limitation des influences externes, telles que les interactions entre élèves). Les participants à cette étude sont des élèves de la 1^{re} année du baccalauréat du cycle secondaire qualifiant (âgés de 15 à 16 ans). Deux branches scolaires du même niveau ont participé à cette étude :

- Les élèves de la 1^{re} année du baccalauréat science expérimentale (1SE).
- Les élèves de la 1^{re} année du baccalauréat science mathématique (1SM).

Nous avons administré un test formé de quatre activités à un échantillon comportant 210 élèves marocains de 6 classes (2 classes sciences mathématiques et 4 classes sciences expérimentales, détaillés dans le tableau 1).

Tableau 1 – Échantillon de l'étude

Les classes	Le nombre d'élèves
ISM (60 élèves)	Classe 1 :31
	Classe 2 :29
1SE (150 élèves)	Classe 1 :36
	Classe 2 :39
	Classe 3 :40
	Classe 4 :35

2. Outil de collecte et d'analyse des données

Nous avons élaboré une grille d'analyse portant sur les étapes intermédiaires du raisonnement analogique (Tableau 2). Cette grille permettra d'évaluer les raisonnements des élèves en vérifiant la validation de chaque critère qui la compose, afin de mesurer leur capacité à mobiliser ce type de raisonnement. Pour mettre cette analyse en application et mieux caractériser les raisonnements par analogie à partir des productions des élèves, nous avons conçu un test composé de quatre activités (Annexe 01).

Tableau 2 – Grille d'analyse du raisonnement par analogie

Annotation des étapes	Les étapes	Description
E1	Identification du problème source	Observer et définir le problème spécifique
E2	Établir des correspondances (mapping)	Généraliser à partir des cas connus ou des observations pour choisir une analogie
E3	Application de l'analogie	Observer les similitudes entre le problème actuel et le problème connu
E4	Chercher des similitudes et différences	Utiliser la méthode ou la formule du problème analogue pour résoudre le problème actuel

3. Les raisons d'être du choix de ces activités

Tableau 3 – Description des activités

Annotation des activités	Concept	Objectifs	Type de présentation	Registre	Combinaison avec d'autres types de raisonnement
A1	Nombre triangulaire	Comprendre et calculer le nombre triangulaire à l'aide d'une analogie	Texte + Image	Arithmétique	Abductif + Déductif
	Comment cette activité favorise le raisonnement par analogie ? - Observation concrète vers une séquence numérique. - Liaison avec une somme connue. - Comparaison avec d'autres modèles mathématiques - Analogies avec des situations réelles.				
A2	Nombre triangulaire	Comprendre et calculer le nombre triangulaire à l'aide d'une analogie	Texte	Géométrie	Abduction + Déduction
	Comment cette activité favorise le raisonnement par analogie ? - Identification d'une analogie : L'élève relie l'empilement des billes à la forme d'un triangle géométrique. - Transformation du problème : Il duplique le triangle pour obtenir un parallélogramme, une figure plus simple à analyser. - Correspondance entre concepts : Il associe la base et la hauteur du parallélogramme aux nombres de rangées et de billes. - Application d'une méthode connue : Il utilise la formule de l'aire pour calculer directement le nombre total de billes.				
A3	L'équation quartique	Résolution de l'équation quartique	Texte	Arithmétique	Inductif + Abductif
	Comment cette activité favorise le raisonnement par analogie ? - Problème concret : Déformation d'une règle sous pression. - Schéma connu : Transformation d'une équation quartique en quadratique. - Correspondance : Substitution - Méthode familière : Résolution quadratique classique. - Interprétation : Solutions liées aux points critiques de la règle.				
A4	Traçage d'une courbe	Traçage d'une fonction polynôme par translation	Texte	Géométrie	Inductif + Abductif
	Comment cette activité favorise le raisonnement par analogie ? Identification d'un modèle : Analyse de la courbe de x^2 - Comparaison : Observation des différences entre la courbe initiale et une courbe modifiée. - Correspondances : Lien entre les changements algébriques et les transformations graphiques.				

V. RÉSULTATS ET DISCUSSION

Le Tableau 4 ci-dessous présente les résultats de la première phase de notre analyse, qui visait à examiner les copies des élèves afin d'identifier ceux n'ayant pas répondu à l'ensemble des activités. À

l'issue de cette analyse, nous avons choisi de concentrer notre étude sur le nombre indiqué dans la colonne « Total ».

L'annotation « R » correspond au nombre d'élèves ayant répondu à l'activité, tandis que « NR » désigne ceux qui n'ont pas élaboré de raisonnement ou n'ont tout simplement pas pris part à l'activité (absence de réponse).

Tableau 4 – Fréquences des réponses aux activités

		A1	A2	A3	A4
1SM	R	60 (100 %)	60 (100 %)	53 (88,33 %)	58 (96,66 %)
	NR	0 (00%)	0 (00%)	7 (11,66)	2 (03,33%)
1SE	R	72 (48 %)	72 (48 %)	15 (10 %)	33 (22 %)
	NR	78 (52%)	78 (52%)	135 (90%)	117 (78%)
TOTAL		132 (62,85 %)	132 (62,85 %)	68 (32,38 %)	91 (43,33 %)

Pour déterminer la fréquence des étapes suivies par les élèves dans l'ensemble des activités, nous avons analysé les 423 raisonnements en identifiant les étapes effectuées par chaque élève pour chaque activité. Cette analyse a été réalisée à l'aide de la grille présentée précédemment (Tableau 2).

Les fréquences obtenues sont synthétisées dans le Tableau 5.

Tableau 5 – Fréquence des étapes du raisonnement par analogie

		E1	E2	E3	E4
A1	1SM	58 (96,66 %)	24 (40,00 %)	20 (33,33 %)	20 (33,33 %)
	1SE	78 (100 %)	28 (35,89 %)	5 (6,41 %)	5 (6,41 %)
A2	1SM	59 (98,33 %)	51 (85 %)	47 (78,33 %)	32 (53,33 %)
	1SE	78 (100 %)	43 (55,12 %)	42 (53,84 %)	38 (48,71 %)
A3	1SM	53 (100 %)	52 (98,1 %)	53 (100 %)	53 (100 %)
	1SE	130 (96,29 %)	135 (100 %)	120 (88,88 %)	109 (80,07 %)
A4	1SM	55 (94,82 %)	40 (68,96 %)	25 (43,10 %)	23 (39,65 %)
	1SE	117 (100 %)	83 (70 %)	15 (12,82 %)	03 (02,56 %)

L'analyse des résultats met en évidence une diminution progressive du nombre d'élèves atteignant les étapes avancées du raisonnement analogique. Si la majorité des élèves réussissent l'**étape 1 (identification de l'analogie)**, leur progression devient plus difficile aux étapes suivantes, en particulier pour la **mise en correspondance des concepts (étape 3)** et la **généralisation (étape 4)**.

Comparativement, les élèves de **1SM** affichent de meilleures performances que ceux de **1SE**, notamment aux étapes finales. Cette différence suggère une meilleure maîtrise des stratégies de raisonnement analogique chez **1SM** ou une approche pédagogique plus adaptée.

L'**Activité 3** constitue une exception notable, avec un taux de réussite élevé jusqu'à l'étape finale, particulièrement pour **1SM**, ce qui pourrait indiquer que sa formulation facilite le transfert des connaissances. En revanche, l'**Activité 4** est celle qui pose le plus de difficultés, avec une forte baisse du nombre d'élèves atteignant l'étape 4, notamment chez **1SE**, où seuls **2,56 %** y parviennent.

Ces résultats soulignent la nécessité de renforcer l'accompagnement des élèves, en mettant l'accent sur les étapes intermédiaires du raisonnement analogique. Il serait également pertinent d'analyser les spécificités des activités afin d'identifier les facteurs qui favorisent ou freinent la réussite des élèves.

VI. CONCLUSION

Le raisonnement par analogie reste peu exploré dans l'enseignement secondaire au Maroc, où le programme scolaire privilégie majoritairement une approche déductive. Cette prédominance limite la capacité des élèves à mobiliser des analogies pour établir des connexions entre concepts et résoudre des problèmes.

L'étude menée auprès d'élèves de première année du baccalauréat en sciences mathématiques met en évidence des différences significatives dans leur progression à travers les étapes du raisonnement analogique. Si l'identification d'une analogie (Étape 1) est généralement bien maîtrisée, les difficultés apparaissent aux étapes plus complexes, notamment dans la mise en correspondance des concepts et la généralisation. Cette tendance est particulièrement marquée chez les élèves de **1SE**, alors que ceux de **1SM** affichent de meilleures performances, notamment dans l'**Activité 3**, où ils atteignent un taux de réussite de **100 %** à toutes les étapes. À l'inverse, l'**Activité 4** se révèle plus exigeante, avec une baisse significative du nombre d'élèves atteignant la dernière étape, en particulier chez **1SE**, où seuls **2,56 %** y parviennent.

Ces résultats confirment les observations de recherches antérieures sur les défis du raisonnement analogique en mathématiques, notamment en ce qui concerne l'identification et l'exploitation des structures relationnelles communes (English, 1998) ou encore les difficultés d'adaptation dans le transfert des connaissances (Novick et Holyoak, 1991). Ils soulignent ainsi la nécessité d'intégrer davantage ce type de raisonnement dans l'enseignement secondaire. Un accompagnement pédagogique renforcé et l'introduction de tâches spécifiques favorisant la mise en correspondance et la généralisation permettraient de mieux préparer les élèves à mobiliser l'analogie comme un outil efficace de résolution de problèmes mathématiques.

RÉFÉRENCES

- Bernardo, A. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 21(2), 137-150. <https://doi.org/10.1080/01443410020043841>
- Clement, J. (1993). Using bridging analogies and anchoring intuitions to deal with students' preconceptions in physics. *Journal of Research in Science Teaching*, 30(10), 1241-1257.
- English, L. D. (1997). Children's reasoning processes in classifying and solving comparison word problems. Dans L. D. English (dir.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (p. 191-220). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- English, L. D. (1998). Reasoning by analogy in solving comparison problems. *Mathematical Cognition*, 4(2), 125-146.
- English, L. D. (2004). *Mathematical and analogical reasoning of young learners*. Routledge.
- Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* [Thèse de doctorat, University du Québec à Montréal]. Archipel. <https://archipel.uqam.ca/8129/>

- Hicks, M. D. et Flanagan, K. (2024). Analogical structure sense: A case study of students' analogical reasoning between groups and rings. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, Article 101136.
- Holyoak, K. J. (1985). The pragmatics of analogical transfer. Dans G. H. Bower (dir.), *The psychology of learning and motivation. Vol. 19. Advances in research and theory* (p. 59-87). Academic Press.
[https://doi.org/10.1016/S0079-7421\(08\)60524-1](https://doi.org/10.1016/S0079-7421(08)60524-1)
- Holyoak, K. J. et Thagard, P. (1995). *Mental leaps*. MIT Press.
- Gentner, D. (1983). Structure mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7(2), 155-170. [https://doi.org/10.1016/S0364-0213\(83\)80009-3](https://doi.org/10.1016/S0364-0213(83)80009-3)
- Kristayulita, K., Nusantara, T., As'ari, A. R. et Sa'dijah, C. (2020). Schema of analogical reasoning-thinking process in example analogies problem. *Eurasian Journal of Educational Research*, 20(88), 87-104.
- Nhiry, M., Abouhanifa, S., et El Khouzai, E. M. (2023). The characterization of mathematical reasoning through an analysis of high school curricula and textbooks in Morocco. *Cogent Education*, 10(1), Article 2188797. <https://doi.org/10.1080/2331186X.2023.2188797>
- Novick, L. R. et Holyoak, K. J. (1991). Mathematical problem solving by analogy. *Journal of experimental psychology: Learning, memory, and cognition*, 17(3), 398-415. <https://doi.org/10.1037/0278-7393.17.3.398>
- Organisation for Economic Co-Operation and Development [OECD]. (2012) . *Pisa 2012 results. Creative problem solving. Students' skills in tackling real-life problems (Volume V). Programme for international student assessment*. https://www.oecd.org/content/dam/oecd/en/publications/reports/2014/04/pisa-2012-results-creative-problem-solving-volume-v_g1g3b025/9789264208070-en.pdf
- Peirce, C. S. (s. d.). *The collected papers of Charles Sanders Peirce* (Éd. électronique). IntelLex Past Master.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning, Vol. 1: Induction and analogy in mathematics*. Princeton University Press.
- Polya, G. (1957). *How to solve it* (2^e éd.). Doubleday.
- Polya, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning, Volume 1* (2^e éd.). Princeton University Press.
- Reid, D. A. (1995). *The need to prove* [Thèse de doctorat inédite]. University of Alberta.
- Reid, D. A. (2010). *Proof in mathematics education*. Sense Publishers.
- Robins, S. et Mayer, R. E. (1993). Schema training in analogical reasoning. *Journal of Educational Psychology*, 85(3), 529-538.
- Silver, E. A. (1990). Contributions of research to practice: Applying findings, methods, and perspectives. Dans T. J. Cooney et C. R. Hirsch (dir.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s* (p. 1-11). National Council of Teachers of Mathematics.
- Sfard A. (1997). Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth. Dans L. D. English (dir.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (p. 339-371). Lawrence Erlbaum Associates.
- Stavy, R. et Tirosh, D. (1993). When analogy is perceived as such. *Journal of Research in Science Teaching*, 30(10), 1229-1239.

ANNEXE 1 ACTIVITÉS

Annotation de l'activité	Activité	Scénario par l'élève																		
A1	Imagine que tu peux construire une pyramide de billes en les alignant en rangée, pour que la pyramide soit stable chaque nouvelle rangée doit contenir une bille de plus que la précédente  1) Dessiner le triangle suivant en ajoutant une 4e rangée, combien de billes, y a-t-il en total ? 2) Compléter le tableau suivant : <table><tr><td>Nombres de rangées</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>...</td><td>n</td></tr><tr><td>Nombre de billes</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> 3) Trouver une expression mathématique qui permet de calculer le nombre total de billes en fonction du nombre de rangées n.	Nombres de rangées	1	2	3	4	5	6	...	n	Nombre de billes									L'élève commence par observer et construire la suite des nombres triangulaires en dessinant les trois premiers cas. Il remarque que chaque nouvelle rangée ajoute un nombre de billes égal à son rang. Il généralise ensuite son observation en complétant un tableau, ce qui lui permet d'identifier un motif récurrent. Cherchant une règle générale, il remarque que la somme des premiers nombres entiers suit la formule : $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ Il teste cette formule avec $n = 4$ et obtient bien $T_4 = 10$, validant ainsi son raisonnement. Cette démarche progressive l'amène à établir une loi mathématique en passant de l'observation concrète à la modélisation.
Nombres de rangées	1	2	3	4	5	6	...	n												
Nombre de billes																				
A2	Tu veux jouer avec des billes, les en empiler pour former des triangles : tu commences par placer 1bille pour former un petit triangle, ensuite tu ajoutes une deuxième rangée contenant 2 billes, obtenant ainsi un triangle avec 3 billes au total et ainsi de suite... Tu veux trouver une règle qui permet de calcul et directement le nombre total de billes dans un triangle de n rangées sans additionner une à une les billes ? 1) Construire les triangles formés par l'empilement de billes pour $n = 1, 2, 3$ et 4. 2) Combien de billes seront nécessaires pour un triangle de 10 rangées ? 3) Que remarques-tu sur la façon dont les billes s'ajoutent d'une rangée à l'autre ? 4) Imagine que tu dupliques le triangle et que tu l'assembles avec une copie identique, quelle en figure peux-tu obtenir ? Et quelle est son aire ? 5) Calculer le nombre total de billes ? Selon ta réponse à la question 3. 6) Vérifier pour $n = 5$.	L'élève observe l'empilement des billes et cherche une méthode rapide pour calculer leur total. Il remarque une analogie avec un triangle et le duplique pour former un parallélogramme de base n et hauteur $n + 1$. En appliquant la formule de l'aire, il trouve que le nombre total de billes est donné par : $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ Il vérifie la formule sur quelques valeurs et conclut que cette approche géométrique est plus efficace qu'un simple comptage, montrant ainsi l'utilité du raisonnement par analogie.																		

Annotation de l'activité	Activité	Scénario par l'élève
A3	Un ingénieur veut s'assurer qu'une règle en plastique utilisée dans une expérience scientifique ne casse pas sous la pression exercée, il modélise la courbure de la règle avec l'équation suivante... Le but c'est de chercher à quel endroit la règle subit le plus de pression pour éviter qu'elle ne casse. 1) Que représente l'équation donnée dans ce contexte et les valeurs de la solution de l'équation ? 2) Te rappelle-t-elle une autre équation plus simple que tu connais ? 3) Comment transformer cette équation pour la simplifier ? 4) Trouver les solutions et expliquer leur signification sur la courbure de la règle	L'élève analyse l'équation $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ et comprend qu'elle modélise la déformation d'une règle sous pression. Il simplifie en posant $y = x^2$, transformant l'équation en $y^2 - 8y + 16 = 0$, qu'il résout pour obtenir $y = 4$. En revenant à x, il trouve $x = \pm 2$, identifiant ainsi les points où la règle subit le plus de pression. Il conclut que ces résultats aident à éviter la casse et que cette méthode est applicable à d'autres structures comme des ponts ou des poutres soumises à des contraintes.
A4	Soit $f(x) = x^2 + 4x - 3$ 1) tracer la courbe de $g(x) = x^2$ et analyser sa représentation et ces éléments caractéristiques ? 2) tracer la courbe de $f(x)$ et comparer la avec celle de $g(x)$, quel changement remarques-tu dans la position et l'orientation ? 3) peux-tu retrouver cette transformation sans passer par le tracé graphique ? Le quelle ? Quelle règle générale en déduis-tu ?	L'élève trace la courbe de : $f(x) = x^2 + 4x - 3$, observe ses caractéristiques, puis compare avec une courbe modifiée. Il analyse les différences, établit un lien entre transformation graphique et modification algébrique, en déduit une règle générale et l'applique à d'autres fonctions.

LE JEU MATHÉMATIQUE COMME LEVIER POUR LA MOTIVATION EN CLASSE

| PERRAULT* LEA ET SAMSON** JULIETTE

Résumé | Cette recherche analyse les effets des périodes de jeu et de l'enseignement magistral sur la motivation et les apprentissages des élèves. Les résultats révèlent une appréciation et une efficacité supérieures pour le jeu, avec 79 % des élèves capables de réexpliquer les notions contre 63 % pour l'enseignement magistral. Le jeu favorise une différenciation naturelle et un apprentissage actif, mais son intégration reste marginale en raison de lacunes dans la formation des enseignants et de contraintes liées au curriculum. Ces résultats appuient l'importance de promouvoir la pédagogie ludique en milieu scolaire.

Mots-clés : jeux, mathématiques, apprentissages, ludique, motivation

Abstract | This research analyzes the effects of play periods and lectures on student motivation and learning. The results reveal a higher appreciation and effectiveness for play, with 79% of students able to re-explain concepts compared to 63% for lecture. While play encourages natural differentiation and active learning, its integration remains marginal due to gaps in teacher training and curriculum constraints. These results support the importance of promoting play-based pedagogy in schools.

Keywords: Games, mathematics, learnings, playful, motivation

La motivation en contexte scolaire est un enjeu reconnu dans plusieurs milieux. Dans les dernières années, nous avons réalisé plusieurs stages au Canada, dans la ville de Québec et Sherbrooke auprès d'élèves de la première à la sixième année âgés de 6 à 12 ans. En effet, nous avons remarqué un manque d'engagement chez nos élèves face à certaines matières, notamment les mathématiques. Alors que nous étions confrontées à des pratiques innovantes à l'université, nous étions plutôt contraintes de faire vivre des situations magistrales à nos élèves lors de nos stages, en réponse aux demandes des enseignants qui nous supervisaient. Étant alarmées de cette situation, nous avons rapidement eu envie de développer une manière d'enseigner plus ludique pour permettre aux élèves de vivre plusieurs réussites et ainsi voir leur motivation croître. Ainsi, nous avons choisi d'élaborer un mémoire professionnel, à l'aide de quatre autres collaborateurs, pour mettre en place des jeux en contexte d'apprentissage des mathématiques.

I. POURQUOI JOUER EN MATHÉMATIQUES ?

1. *Jeu et motivation*

Bien que répandus dans les classes au Québec, l'utilisation de manuels guides entraîne souvent une certaine fermeture, une rigidité et une directivité du fait qu'ils dictent pratiquement tout à l'enseignant et ne lui laissent aucune liberté quant aux moyens d'apprentissages. Cela peut donc avoir des retombées sur un enfant qui est tenu de répéter le même type d'apprentissage. De plus, selon Miller et Almon (2009, cité dans Bolduc, 2015), l'enseignement magistral ne représenterait pas nécessairement la solution. En effet, ils soutiennent que :

« [...] l'enseignement systématique en grand groupe nuit aux enfants puisque qu'il ne leur permet pas de développer leur capacité à prendre des décisions, à planifier, à manipuler et à interagir avec les autres » (Miller et Almon, 2009, cité dans Bolduc, 2015, p. 51).

* Université de Sherbrooke – Canada – lea.perreault@usherbrooke.ca

** Université de Sherbrooke – Canada – juliette.samson2@usherbrooke.ca

Ainsi, le sentiment de capacité ou de motivation des élèves est en diminution.

Étant inspirées des stades de développement de l'enfant de Piaget, nous souhaitons mettre de l'avant le fait que « Le jeu, [...] c'est le travail de l'enfant, c'est son métier, c'est sa vie » (Kergomars, 1881, cité dans Robic, 2015, p. 7). Le jeu devrait donc prendre une grande place dans son quotidien jusqu'à l'âge de douze ans. À travers celui-ci, l'enfant peut apprendre par lui-même et démontrer ses habiletés acquises tout en évoluant dans un contexte de collaboration et motivant (Archambault et Venet, 2007). Cette théorie guide donc notre choix pédagogique envers le jeu pour motiver les apprenants.

Si nous analysons le domaine des mathématiques plus spécifiquement, le jeu permet de travailler plusieurs compétences du programme, dont « Résoudre une situation-problème mathématique » (Gouvernement du Québec, 2006, p. 126). Pour résoudre un problème, un élève a besoin de créativité pour tenter différentes méthodes, utiliser ses connaissances et tester son raisonnement (Coppé et Houdement, 2009). Toutefois, en classe, on retrouve souvent des cahiers où les problèmes à résoudre ont souvent une structure similaire et sont sans enjeux pour l'élève (*ibid.*). Le jeu permet une autre manière de travailler cette créativité pour la recherche de solution, en donnant un contexte ludique où l'élève devra développer sa logique pour réussir (Sauvé et al., 2007). On peut penser aux jeux Smart Games, où l'enfant doit respecter un schéma pour placer les pièces, puis utiliser d'autres pièces, selon des contraintes, pour réussir le niveau. Ces jeux sont aussi progressifs, donc les premiers niveaux sont facilement accessibles aux élèves, même très jeunes. D'autant plus que les mathématiques et la langue sont les matières où le jeu a un avantage significatif sur les apprentissages (Yükseltürk, İlhan et Altıok, 2022).

2. *Questionnement*

Au cours de notre stage final, chacun des membres de l'équipe a mis en place des jeux mathématiques pour évaluer l'acquisition des connaissances des élèves ainsi que leur motivation à les apprendre. Ainsi, plusieurs questions ont pu être traitées : Quels sont les avantages du jeu pour les apprentissages des élèves en comparaison des méthodes magistrales ? Comment la théorie de la zone proximale de développement s'applique-t-elle au jeu ? Quels défis les enseignants débutants évoquent-ils concernant l'intégration du jeu ? Quels freins institutionnels limitent l'usage des jeux en classe ?

II. EXPÉRIMENTATION

Plusieurs périodes ont donc été planifiées pour comparer les méthodes magistrales aux méthodes ludiques. À la suite d'une période d'apprentissage, les élèves ont été invités à évaluer leur motivation ainsi que leur niveau de compréhension face aux concepts. Aussi, nous souhaitons savoir s'ils avaient réellement compris la notion. Pour ce faire, les élèves devaient remplir un billet d'autoévaluation après certaines périodes magistrales et ludiques d'apprentissage des mathématiques. Sur ce billet, ils devaient répondre à deux questions : aimeraient-ils refaire une activité semblable ? seraient-ils en mesure de vulgariser la notion à un pair ? (Annexe A) La première question permet de déterminer la motivation de l'élève et la seconde l'auto-évaluation qu'il fait de ses apprentissages. Il était pertinent de collecter des données à la suite des différentes périodes utilisant l'une ou l'autre des pédagogies pour réellement noter si un impact était marqué par l'apprentissage par le jeu.

Pour obtenir les résultats, nous avons mis plusieurs jeux en place dans différentes classes de la première à la sixième année (6 à 12 ans) du Québec. Par exemple, le jeu *La bataille* où les élèves devaient reconnaître le nombre le plus grand avec des cartes à jouer. Pour ce jeu, plusieurs variations ont été instaurées telle que la bataille des longueurs avec des cartes créées par un membre de l'équipe. De plus,

le jeu *Qui suis-je ?* des polygones a été essayé, où les élèves de première à sixième année (6 à 12 ans), en équipe de deux, devaient nommer les caractéristiques des polygones pour deviner lequel avait été pigé. Enfin, un autre jeu qui a été mis en place a été inventé en combinant le jeu *Mille bornes* et *La classe de 5^e*.¹ Ici, les élèves étaient divisés en équipe de 4 où chacune, à tour de rôle, devait répondre à une question mathématique de *La classe de 5^e*. Lorsqu'ils obtenaient la bonne réponse, ils accumulaient des points pour avancer dans le jeu *Mille bornes*.

Ces expérimentations ont été réalisées pendant les mois d'octobre, novembre et décembre 2023 dans quatre classes de trois écoles distinctes. Une classe de première année et une de deuxième année des classes se situaient dans une même école dans la région de Sherbrooke. L'indice de milieu socio-économique de cette école est de rang 5 sur une échelle de 1 à 10, le rang 1 étant considéré comme étant le plus favorisé. Une autre classe, de 3^e et 4^e année, cette fois-ci dans la région de Québec, a pu expérimenter les jeux mathématiques. Cette classe était dans une école où l'indice de milieu socio-économique est de 1, ce qui en fait une école très favorisée. Enfin, une dernière classe de 4^e année, aussi située dans la région de Sherbrooke, avec un indice de milieu socio-économique de 6, a aussi pu faire partie de l'expérimentation.

III. RÉSULTATS

En analysant les résultats des billets distribués aux élèves (Annexe A), nous avons pu faire plusieurs constats intéressants. Effectivement, concernant les périodes de jeu, nous avons remarqué une forte tangente d'une appréciation positive de l'activité. En effet, 88 % des élèves questionnés ont répondu de manière positive à l'activité. Inversement, les résultats sont davantage répartis en ce qui concerne une période d'enseignement magistral. D'un côté, 44 % des élèves ont démontré une appréciation positive de l'enseignement magistral alors que les autres (56 %) ont plutôt dénoté un manque de satisfaction quant à ces périodes.

Pour ce qui est de la capacité des élèves à réexpliquer la notion, nous avons remarqué, tant du côté du jeu que des périodes magistrales, une tendance décroissante des résultats. En effet, dans les deux cas, le plus haut pourcentage d'élèves se sentaient très compétents (51 % et 38 %) alors que le plus faible (8 % et 18 %) ne se sentaient pas aptes à réexpliquer la notion. De plus, nous remarquons que l'écart des résultats concernant le jeu ont un écart davantage marqué. Effectivement, entre les deux extrêmes, la différence est de 43 % alors que pour une période magistrale, l'écart est de seulement 20 %. Ce sont donc 79 % des élèves qui se sentaient aptes à réexpliquer la notion du côté du jeu, ce qui représente 16 % de plus que lors des activités magistrales. Cette tangente est inversée pour les élèves se sentant moins capables de réinvestir la notion.

Ces résultats démontrent non seulement que les élèves étaient plus motivés et appréciaient davantage les périodes ludiques, mais aussi qu'ils pouvaient poursuivre leurs apprentissages normalement grâce à celles-ci. Nous pouvons expliquer ces données en les liant au concept théorique apporté par Boughalem (2015, dans Abu-Iaila, 2019) avançant que le jeu, puisqu'il crée un contexte divertissant, permet de créer plus facilement des liens entre les concepts et de s'approprier un apprentissage nouveau. Les résultats pourraient aussi être expliqués par la zone proximale de développement des élèves. En intégrant la matière avec un cahier d'apprentissage, les élèves sont restreints à réaliser les mêmes tâches en même temps. Toutefois, grâce au jeu, nous avons remarqué que les apprenants arrivaient à réaliser l'activité sans avoir à connaître toutes les notions. En ce sens, dans le jeu *Qui suis-je des formes géométriques*, les élèves pouvaient choisir une forme avec laquelle ils

¹ Il s'agit d'un jeu testant les connaissances générales où les participants doivent répondre à des questions de niveau primaire allant de la première à la cinquième année.

maîtrisaient les caractéristiques. En somme, la différenciation se faisait naturellement, puisque ceux rencontrant des difficultés avaient tout de même des formes connues sur lesquelles s'appuyer ainsi qu'un partenaire de jeu avec qui échanger.

IV. CONCLUSION

Malgré tous les bienfaits notés et remarqués, nous constatons encore un manque quant à la présence de jeux dans les classes du premier au troisième cycle du primaire. Cela peut s'expliquer par le fait que ce ne sont pas tous les enseignants qui sont ouverts à changer leurs méthodes d'enseignement plus traditionnelles. L'anxiété face au respect du curriculum scolaire ainsi que l'instabilité causée par la nouveauté ont été des facteurs entravant l'instauration de jeux dans nos classes stage. De plus, pour un enseignant en début de carrière, il peut être rassurant d'avoir un cahier d'apprentissage pour aider à la planification et l'enseignement des apprentissages. Cela peut s'expliquer par le fait que lors de la formation initiale des enseignants, il y a des lacunes au niveau de la pédagogie par le jeu (Doré, 2016). Les jeunes enseignants ne sont donc pas formés adéquatement pour enseigner avec le jeu. Lorsque les enseignants sont plus expérimentés, ils ne deviennent pas outillés à ce niveau, car le gouvernement ne priorise pas cette pédagogie (*ibid*).

En réalisant cette recherche, il est clair que nous voulions avoir un certain impact sur la vision de la pédagogie par le jeu. Maintenant que l'expérimentation est terminée, nous pouvons dire que celle-ci a exercé une certaine influence dans les milieux dans lesquels elle a été réalisée. D'abord, nous avons pu remarquer une variation dans l'implication des élèves dans leurs apprentissages. Ils étaient motivés intrinsèquement lors des périodes de jeu et ils participaient activement à celles-ci. Cela montre leur engagement actif lorsque des éléments ludiques sont intégrés aux périodes d'apprentissages. Puis, nous avons pu observer que la pédagogie par le jeu favorise un environnement d'apprentissage positif dans lequel les élèves apprennent en ne craignant pas de prendre des risques et cela tout en s'amusant. Un environnement où les élèves travaillent l'un avec l'autre et non contre les autres favorise le développement des liens sociaux et la collaboration.

Évoluant encore aujourd'hui dans le domaine scolaire, nous poursuivons la mise en place de tels jeux dans l'apprentissage de nos élèves et nous continuons d'en voir les retombées positives. Certains jeux pour l'apprentissage du français ont ensuite été instaurés dans notre pratique pour étendre ces bienfaits à une autre discipline. Nous espérons ainsi maintenir cette approche motivante dans tous les domaines d'apprentissage, et ce, peu importe l'âge des élèves.

RÉFÉRENCES

- Abu-Iaila, Z. (2019). Les activités ludiques au service de l'enseignement/apprentissage du français. *Bulletin of the Faculty of Arts*, 79(6), 49-78.
- Archambault, A. et Venet, M. (2007). Le développement de l'imagination selon Piaget et Vygotsky : d'un acte spontané à une activité consciente. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(1), 5-24.
- Bolduc, M. (2015). *L'apprentissage actif chez les enfants d'âge préscolaire : une étude collaborative sur l'évolution des pratiques d'une enseignante en contexte d'ateliers libres* [Mémoire de maîtrise inédit]. Université de Sherbrooke.
- Coppé, S. et Houdement, C. (2009, 3-5 juin). *Résolution de problèmes à l'école primaire française : perspectives curriculaire et didactique* [Conférence]. 36^e Colloque de la COPIRELEM, IUFM d'Auch, France.

- Doré, R. (2016). *Situations ludiques d'apprentissage et d'évaluation de 1er cycle primaire* [Mémoire de maîtrise inédit]. Université du Québec à Trois-Rivières.
- Ministère de l'Éducation du Québec [MEQ]. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise*. http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PFEQ_presentation-primaire.pdf
- Robic, E. (2015). *L'importance des jeux dans les apprentissages : exemple des ateliers mathématiques en cycle 3* [Mémoire de maîtrise inédit]. Université de Nantes.
- Sauvé, L., Renaud, L. et Gauvin, M. (2007). Une analyse des écrits sur les impacts du jeu sur l'apprentissage. *Revue des sciences de l'éducation*, 33(1), 89-107.
- Yükseltürk, E., Ilhan, F. et Altıok, S. (2022). Preservice teachers' views about the use of mind and intelligence games in education. *Participatory Education Research Peer Review Academic Journal*, 9(6), 398-417.

ANNEXE A

BILLET D'AUTO-ÉVALUATION DES ÉLÈVES

Date :	_____	Titre de l'activité :	_____
Aurais-tu envie de refaire une activité semblable ?		   	
Serais-tu capable de réexpliquer ce que tu as appris à un ami ?		   	

ÉVALUATION DE L'IMPACT D'INTÉGRATION DE LA ROBOTIQUE SUR LE DÉVELOPPEMENT DES COMPÉTENCES DES ÉLÈVES DANS L'ENSEIGNEMENT INTERDISCIPLINAIRE DES MATHÉMATIQUES EN PROJET LIÉ AUX STEM

| RAIHANE* ASMAA, ELHAROUSSE** MUSTAPHA ET ABOUHANIFA*** SAID

Résumé | L'étude se concentre sur l'enseignement basé sur l'utilisation de robots éducatifs dans le domaine des STEM (Science, Technologie, Ingénierie et Mathématiques) dans le contexte du Maroc. L'étude s'intéresse particulièrement à l'influence de l'apprentissage par projets sur le développement des compétences des élèves, en résolution de problèmes mathématiques, de manière interdisciplinaire avec les STEM. Cette recherche décrit l'expérience pédagogique menée lors de l'enseignement de la programmation de robots éducatifs à deux groupes d'élèves de 3e année du collège. L'enquête menée dans cette recherche comprend un pré-test et un post-test des compétences des élèves axées sur la résolution de problèmes et mobilisant des notions de l'informatique. Les résultats de l'étude présentée confirment clairement l'influence positive de l'enseignement par projets en utilisant des robots éducatifs sur le développement des compétences de résolution de problèmes, essentielle pour le succès de l'apprentissage des élèves, tant dans les domaines STEM que dans la vie quotidienne.

Mots-clés : STEM, robotique éducative, apprentissage par projets, interdisciplinarité, mathématiques

Abstract | The study focuses on teaching based on the use of educational robots in the field of STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) in the context of Morocco. The study is particularly interested in the influence of project-based teaching on the development of students' skills in solving mathematical problems in an interdisciplinary manner with STEM. This research describes the educational experience carried out when teaching the programming of educational robots to two groups of 3rd year middle school students. The investigation carried out in this research includes a pre-test and a post-test of students' skills focused on problem solving and mobilizing notions of computer science. The results of the presented study clearly confirm the positive influence of project-based teaching using educational robots on the development of problem-solving skills, essential for the success of student learning, both in STEM fields than in daily life.

Keywords: STEM, educational robotics, project-based learning, interdisciplinary, mathematics

I. INTRODUCTION

Au cours des dernières décennies, l'intérêt porté à l'acquisition des compétences exigées par la société du XXI^e siècle s'est considérablement accru. Les partisans de cette idée plaident en faveur d'une réforme éducative systématique qui englobe la technologie, la pensée créative et la résolution de problèmes afin de préparer les élèves aux futures sociétés basées sur la technologie (Khoshaim, 2020 ; MŠMT, 2021). L'enseignement des sciences, de la technologie, de l'ingénierie et des mathématiques (STEM) aux élèves est l'un des moyens les plus répandus d'atteindre cet objectif. Les élèves naissent avec un désir inné de bricoler et une curiosité naturelle ; la classe est riche en opportunités pour les engager dans des activités STEM (Koncept STEM, 2001 ; Margot et Kettler, 2019). Ainsi, l'intégration d'outils éducatifs basés sur la technologie chez les élèves de la troisième année du secondaire collégial

* Laboratoire MISI, FST Settât, université Hassan premier, Settât – Maroc – asmaa8raihane@gmail.com

** Laboratoire MISI, FST Settât, université Hassan premier, Settât – Maroc – m.elharoussi@gmail.com

*** Laboratoire MISI, CRMEF-CS, Settât – Maroc – saidabouhanifa@yahoo.fr

pourrait apporter les avantages possibles en aidant à développer les compétences de l'avenir (Sorby et al., 2018 ; Wahono et al., 2020).

La robotique éducative (RE), en tant que partie intégrante de l'enseignement STEM, intègre un large éventail de connaissances générales et permet de traduire toute discipline spécifique dans un contexte éducatif plus complet. Les RE ont attiré les responsables du monde entier, en tant que moyen pour développer les compétences cognitives, émotionnelles et sociales des étudiants, de la maternelle à l'université et dans des contextes d'éducation (Saw, 2019; Siregar et al., 2019). Récemment, il existe de nombreux outils pédagogiques pour les élèves pour les impliquer dans des activités STEM, tels que des blocs visuels, des environnements en ligne, des dispositifs robotiques et les activités débranchées (Bybee, 2010 ; Yata et al., 2020).

Depuis que la nouvelle idée d'enseigner l'informatique en classe a été approuvée, l'intérêt pour l'emploi de robots éducatifs dans la classe a augmenté (MŠMT, 2021). De nombreuses écoles intègrent la programmation de kits robotiques dans leurs enseignements et sont confrontés à la question des méthodes et l'enseignement à utiliser. Face à la complexité du processus d'enseignement apprentissage et à la démotivation grandissante des élèves envers les apprentissages scolaires, le recours à de nouvelles approches pédagogiques s'avère nécessaire.

La démarche de projet, issue des pratiques du projet technologique industriel et appliquée au cas des apprentissages scolaires semble fort prometteuse. La liberté et la responsabilité accordées à l'élève étant accrues, le rôle de guide du professeur d'enseignement des contenus des programmes officiels étant encore indéterminé ; tout cela nous incite à concevoir un modèle pratique répondant à cette nouvelle situation où les rôles sont encore indéterminés. Dans cette étude, nous nous concentrons sur le domaine éducatif STEM en utilisant l'apprentissage par projet pour développer les compétences des élèves. Les matières scientifiques individuelles sont souvent exigeantes et parfois rejetées par les élèves. Lorsque les matières scientifiques et technologiques sont combinées dans STEM à l'aide de robots éducatifs, l'apprentissage devient très intéressant et attractif pour les élèves (Khoshaim, 2020).

1. STEM et robotique éducative

L'éducation STEM est considérée à la fois comme un curriculum et une pédagogie (Koncept STEM, 2001 ; Margot et Kettler, 2019). STEM est efficace dans l'apprentissage des élèves et pour développer les compétences clés des élèves (Sorby et al., 2018 ; Margot et Kettler, 2019 ; Saw, 2019; Siregar et al., 2019 ; Wahono et al., 2020). Elle s'étend progressivement dans les programmes des systèmes éducatifs nationaux au Maroc (Bouaghad et al., 2022 ; Lechhab et al., 2023). Les mathématiques sont essentielles dans les STEM et dans l'informatique. La contribution de la robotique éducative dans le domaine du STEM à une meilleure compréhension d'un domaine théorique des mathématiques tel que la théorie des graphes est indéniable (Martín-Páez et al., 2019).

2. Robotique éducative et l'apprentissage par projet

La robotique éducative est un outil pédagogique puissant et flexible qui possède un fort pouvoir de motivation (Coufal et al., 2021). Elle peut être classée selon son mode d'implémentation et son utilisation dans l'enseignement (Coufal et al., 2021). En outre, l'utilisation de la programmation robotique pour la réalisation de projets est un moyen d'intégrer l'apprentissage par projet dans l'enseignement des STEM (Hsieh et al., 2022). Les robots programmables offrent une plateforme pour la création de projets concrets et encourageant la résolution de problèmes par équipe (Evripidou et al., 2020). La complexité des projets robotiques peut être adaptée à différents niveaux d'apprentissage, permettant aux élèves d'explorer des concepts scientifiques et technologiques de manière pratique

(Suarez et al., 2023; Fakaruddin et al., 2024). Dans cette étude, nous utilisons un petit robot open-source « le Thymio » développé pour l'éducation. Le Thymio possède des capteurs (microphone, récepteur infrarouge, température, proximité, accéléromètre 3 axes, capteurs au sol pour le suivi de lignes), des actionneurs (moteurs, hautparleurs, LEDs), et des connecteurs (USB, carte mémoire). A l'école, on peut programmer le comportement de Thymio suivant ses souhaits.

3. *Apprentissage par projet et les compétences clés*

L'apprentissage par projet est une méthode d'enseignement complexe (Korkmaz et Kalayci, 2021). Un projet est un élément important de l'apprentissage et représente une tâche définie et liée à la vie réelle (Kilpatrick, 1918 ; McDonald, 2016). Lors de la résolution d'un projet en groupe, les élèves apprennent à utiliser et à développer plus de compétences telles que la communication et des compétences socio-personnelles pour le travail d'équipe (Kilpatrick, 1918 ; Novák, 2005 ; McDonald, 2016).

Dans le modèle constructiviste E-U-R en trois phases, les phases sont l'Évocation, la Prise de conscience et la Réflexion. Dans la première phase, les élèves travaillent avec ce qu'ils savent déjà et ce qu'ils ont besoin de savoir. Dans la phase suivante, les élèves étendent la structure du préconception. Dans la phase finale du projet, les élèves réfléchissent à la contribution de leur travail au projet (Bastion et Gudjons, 1998 ; Kratochvílová, 2009 ; Svobodová et al., 2010). Les projets peuvent être classés davantage en fonction de divers critères tels que le concepteur, la durée, le but, etc. Dans notre recherche, nous nous concentrons sur la compétence de résolution de problèmes, que nous percevons comme une compétence interdisciplinaire.

Klieme et al. (2014), dans leur publication, se sont concentrés sur le développement des compétences dans l'enseignement, et utilise la définition de la compétence des élèves d'Eckhard Klieme pour résoudre des problèmes tels que « la pensée et l'action orientées vers un objectif dans des situations pour lesquelles les procédures routinières ne sont pas disponibles ». Cette compétence fait partie de la pensée computationnelle, qui peut être définie de différentes manières selon Jeanette Wing la Société internationale pour la technologie dans l'éducation et l'Association des enseignants en informatique, et ces définitions sont souvent élargies et modifiées (ISTE, 2011 ; Lessner, 2014). Dans notre étude, nous pensons que les élèves développent cette compétence en résolvant des tâches à l'aide de robots éducatifs de manière répétée de la construction du modèle du robot, la programmation, jusqu'à l'amélioration de la solution finale avec le robot.

II. MATÉRIEL ET MÉTHODES

Dans cet article, nous nous reposons sur des tests quantitatifs des compétences des élèves de 3^e année du secondaire collégial sous la forme d'un pré-test et d'un post-test dans une expérience pédagogique. Pour évaluer les élèves, un pré-test et post-test sont utilisés : les élèves devront programmer leur robot pour lui faire dessiner le drapeau Marocain sur une feuille de papier. Ce défi permettra de valider leur compréhension des concepts de programmation, de la mécanique des robots, de valider la compréhension des concepts mathématiques et la précision dans leur application pour résoudre les problèmes liés au projet de robotique. L'observation de leur processus de résolution de problèmes, de leur collaboration et de la qualité finale de leur drapeau permettra d'évaluer efficacement l'apprentissage par projet. En outre, pour évaluer l'impact de l'apprentissage, nous allons mener une étude comparative avec deux groupes d'élèves. Avant l'intervention, les deux groupes passeront un pré-test pour mesurer leurs compétences en programmation. Ensuite, le groupe expérimental sera exposé à des séquences de programmation, tandis que le groupe contrôle suivra un apprentissage

traditionnel basé sur des cours magistraux et des exercices théoriques. Ce groupe se concentrera sur l'apprentissage des concepts de programmation sans réaliser de projets pratiques ou de programmation de la robotique. Après l'intervention, les deux groupes passeront un post-test pour évaluer leurs progrès en programmation. La comparaison des résultats des pré-tests et des post-tests permettra d'analyser l'influence de l'apprentissage par projet sur les performances des élèves.

Cette étude suit trois objectifs, y compris l'analyse de l'effet de l'apprentissage par projet de la programmation de robots, la résolution de problèmes avec les robots d'éducation, et de tester l'apprentissage par projet. Pour faire avancer l'enquête de cette recherche, nous avons supposé que les élèves enseignés par robots éducatifs réussissent mieux à résoudre le test de résolution de problèmes que les élèves enseignés de manière traditionnelle. Avec la même considération, les élèves enseignés par projets atteignent un développement plus élevé de la compétence de résolution de problèmes.

L'outil de recherche utilisé était une expérience pédagogique, qui utilise la division des élèves en groupes de contrôle et expérimentaux pour comparer les variables étudiées dans ces groupes.

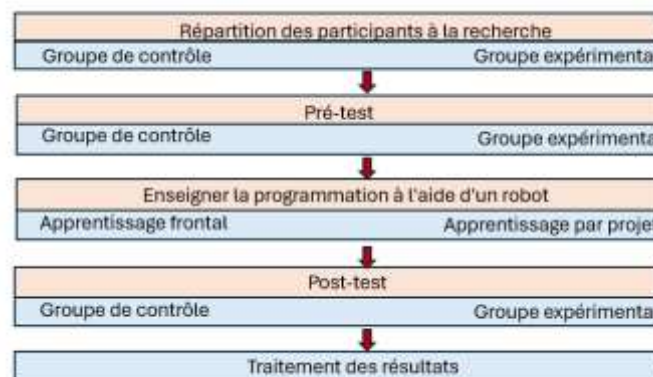


Figure 1 – Schéma de l'expérience pédagogique avec répartition des élèves en groupes témoins et expérimentaux et inclusion de pré-test et post-test

Le schéma de l'enquête de recherche présenté à la Figure 1 comprend un pré-test et un post-test des compétences des élèves axés sur la résolution de problèmes, de liens mathématiques en informatique, de travail collaboratif et de communication. Les compétences évaluées sont présentées dans le tableau 1.

Tableau 1 – Aspects et compétences évalués basés sur la grille d'évaluation

Critères	Compétence	Indicateurs	Description
Critère 1	Compréhension des concepts mathématiques	Indicateur 1	Déterminer et calculer d'aire
		Indicateur 2	Savoir comparer et encadrer des nombres réels.
		Indicateur 3	Utiliser le développement d'une expression littérale.
		Indicateur 4	Capacité de résoudre une équation de 1 ^{er} degrés.
		Indicateur 5	Utiliser les angles inscrits et angle au centre.
		Indicateur 6	Utiliser les relations entre angle inscrit et les angles au centre qui interceptent le même arc.
		Indicateur 7	Connaitre le théorème de Pythagore.
Critère 2	Application des compétences en informatique	Indicateur 1	Utiliser les informations pour la programmation du robot.
		Indicateur 2	Précision dans la mise en œuvre des séquences des organigrammes pour accomplir la tâche.

Critères	Compétence	Indicateurs	Description
		Indicateur 3	Capacité à démontrer une compréhension approfondie du lien entre la programmation du robot et la résolution du problème.
		Indicateur 4	Résoudre des problèmes de programmation et mathématiques.
Critère 3	Raisonnement logique et résolution de problèmes	Indicateur 1	Suivre les étapes de résolution du problème.
		Indicateur 2	Application des concepts mathématiques pour résoudre les problèmes liés au projet de robotique.
		Indicateur 3	Adaptabilité dans la résolution de problèmes face à des problèmes inattendus et à trouver des solutions appropriées
		Indicateur 4	Capacité à trouver des solutions alternatives et à évaluer les différentes options de résolution.
Critère 4	Organisation et méthodologie de travail en équipe	Indicateur 1	Répartition équitable des tâches et prise de décisions collectives
		Indicateur 2	Efficacité de la communication pour le choix des ressources fournies pour mener à bien le projet.
		Indicateur 3	Gérer le temps pour accomplir les différentes étapes du projet.
		Indicateur 4	Qualité de production finale et respect des échéances

III. RÉSULTATS

Après avoir organisé les données du prétest une méthodologie expérimentale a été employée. Deux groupes homogènes d'élèves, un groupe expérimental et un groupe contrôle, ont été constitués, avec un nombre similaire d'élèves répartis en équipes de taille égale dans chaque groupe. Chaque groupe comportait le même nombre d'équipes et un niveau comparable. Un post-test a été administré à chaque groupe. La performance a été évaluée à l'aide de la grille d'évaluation (Tableau 1). Chaque indicateur recevant une note sur 5 niveaux (0 ; 0,25 ; 0,5 ; 0,75 ; 1) selon le degré d'atteinte du critère par chaque équipe. Le score total divisé par le nombre total d'indicateurs, a permis de calculer un pourcentage.

L'analyse comparative des pourcentages obtenus aux prétest et post-test des deux groupes a permis de déterminer l'effet de l'intervention pédagogique.

Les résultats obtenus sont présentés en graphes pour le pré-test et le post-test. Nous avons testé la normalité des données et nous avons calculé la moyenne, la médiane, le mode, le maximum et le minimum pour fournir un résumé des données.

La figure 2 montre une comparaison des niveaux d'apprentissage entre les équipes de contrôle durant le pré-test et le post-test. D'une manière générale, les scores des réponses correctes étaient largement supérieurs dans le post-test pour les équipes du groupe de contrôle, notamment les équipes 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, et 14. Dans les équipes 4, 6, et 13, le score des réponses correctes été supérieures dans le pré-test. Cependant, le score des réponses correctes été similaire entre le pré-test and le post-test pour l'équipe 15. D'une manière générale, le score des réponses était estimé à $33,42 \pm 13,17$ pour le pré-test et $39,29 \pm 12,90$ pour le post-test. La comparaison des moyennes des scores entre le pré-test et le post test par le test de Wilcoxon montre que le score des réponses est supérieur dans le post-test ($z=2.668$, $p=0.007$).

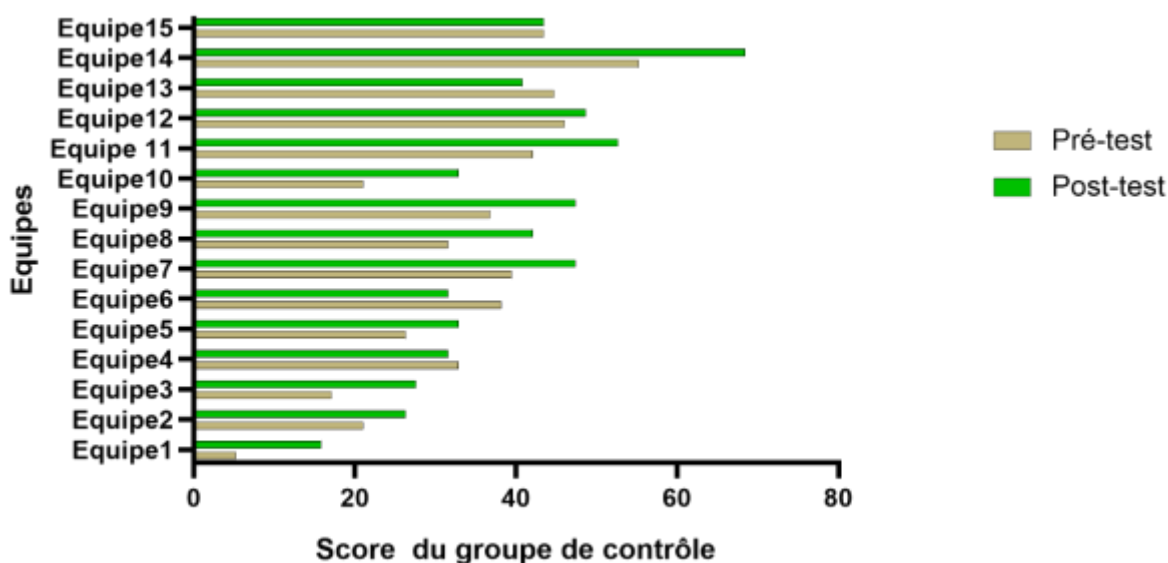


Figure 2 – Comparaison des niveaux d'apprentissage entre les équipes de contrôle durant le pré-test and le post-test

La figure 3 montre la comparaison des niveaux d'apprentissage entre les équipes du groupe expérimental durant le pré-test and le post-test. D'une manière générale, les réponses correctes étaient largement supérieures dans le post-test pour toutes les équipes du groupe expérimental. D'une manière générale, le pourcentage des réponses était estimé à $33,86 \% \pm 12,05$ pour le pré-test et $59,57 \% \pm 17,76$ pour le post-test. La comparaison des moyennes des scores entre le pré-test et le post test par le test de Wilcoxon montre que le score des réponses est supérieur dans le post-test ($z=3.408$, $p=0.000$).

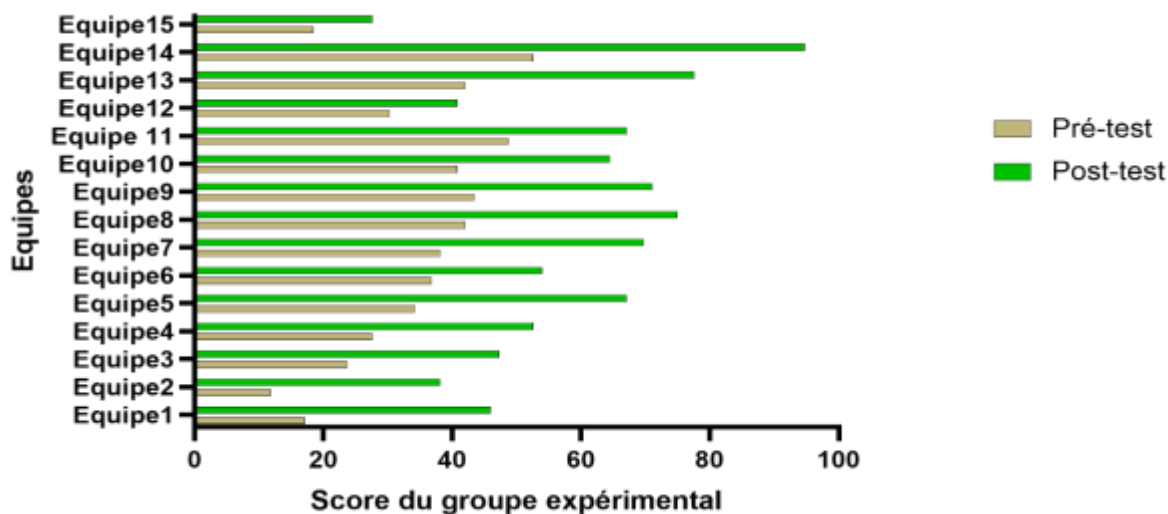


Figure 3 – Comparaison des niveaux d'apprentissage entre les équipes expérimentales durant le pré-test et le post-test

Concernant la comparaison entre les équipes de groupe expérimental et de contrôle, les résultats étaient variables. Pour le pré-test, les scores des réponses étaient statistiquement similaires avec $33,42 \% \pm 13,17$ pour les équipes de contrôle et $33,86 \% \pm 12,05$ pour les équipes expérimentales

($z=0.3977$, $p=0.691$). Pour le post-test, les scores des réponses étaient statistiquement différents avec $39,29\% \pm 12.90$ pour les équipes de contrôle et $59,57\% \pm 17.76$ pour les équipes expérimentales ($z=0.3977$, $p=0.691$).

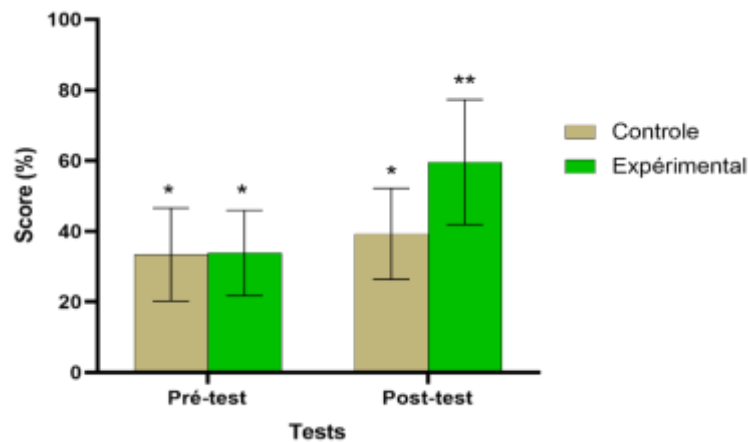


Figure 4– Comparaison des scores entre les groupes expérimentaux et de contrôle (* signifie différence significative : ** >*)

Notre étude a démontré l'impact positif de l'apprentissage par projet sur le développement des compétences en résolution de problèmes des élèves. Nous considérons cette compétence clé sélectionnée comme multidisciplinaire, donc les résultats de notre travail sont d'une grande aide pour d'autres chercheurs dans ce domaine. De plus, cela est particulièrement bénéfique pour le domaine multidisciplinaire de l'éducation STEM et pour le domaine de l'enseignement avec la robotique éducative. L'apprentissage par projet servira pour décroïsonner les disciplines avec un accent sur le développement des compétences des élèves à travers le processus de résolution de problèmes.

IV. CONCLUSION

La robotique éducative, en tant que partie intégrante de l'enseignement STEM, intègre un large éventail de connaissances générales et permet de traduire toute discipline spécifique dans un contexte éducatif plus complet. Dans cette étude, nous nous sommes concentrés sur l'enseignement basé sur l'utilisation de robots éducatifs dans le domaine des STEM dans le contexte du Maroc. L'étude a adressé particulièrement l'influence de l'apprentissage par projets sur le développement des compétences des élèves, en résolution de problèmes mathématiques, de manière interdisciplinaire avec les STEM. Cette recherche a décrit l'expérience pédagogique menée lors de l'enseignement de la programmation de robots éducatifs à deux groupes d'élèves de 3^e année du collège. Les résultats obtenus ont été variables dépendant des groupes des élèves et les types de test. Dans les groupes de contrôle, les résultats ont montré que les réponses correctes étaient largement supérieures dans le post-test pour les groupes des étudiants. D'une manière générale, le pourcentage des réponses était estimé à $27,37\% \pm 13.54$ pour le pré-test et $37,37\% \pm 17.45$ pour le post-test. Pour les groupes expérimentaux, les réponses correctes étaient largement supérieures dans le post-test pour tous les groupes des étudiants. D'une manière générale, le pourcentage des réponses était estimé à $27,89\% \pm 13.37$ pour le pré-test et $57,37\% \pm 19.61$ pour le post-test. Les résultats de l'étude présentée confirment clairement l'influence positive de l'enseignement par projets en utilisant des robots éducatifs sur le développement des compétences de vie et de résolution de problèmes, essentielle pour le succès de l'apprentissage des élèves dans les domaines STEM que dans la vie quotidienne.

RÉFÉRENCES

- Bouaghad, E. H., Souitat, N., bourbough, h., Besri, Z., Benouda, J. E., Radouane, N., El Khantouti, I. et Souhair, N. (2022, 18-22 septembre). *Space education and outreach in Morocco through the introduction of the hands on CubeSat Farm experiment "Exolab-Mor-1" for K6 to 12 students* [Conférence]. 73rd International Astronautical Congress, Paris, France.
- Bybee R. W. (2010). What is STEM education? *Science*, 329(5995), 996.
<https://doi.org/10.1126/science.1194998>
- Coufal, P. (2020). Development of competencies of elementary school pupils using educational robotic kits. *The European Journal of Social & Behavioural Sciences*, 27(1), 31-40.
<https://doi.org/10.15405/ejsbs.267>
- Coufal, P. (2022). Project-based STEM learning using educational robotics as the development of student problem-solving competence. *Mathematics*, 10(23), Article 4618.
<https://doi.org/10.3390/math10234618>
- Coufal, P., Hubálovský, Š. et Hubálovská, M. (2021). Application of basic graph theory in autonomous motion of robots. *Mathematics*, 9(9), Article 919.
- Evripidou, S., Georgiou, K., Doitsidis, L., Amanatiadis, A. A., Zinonos, Z. et Chatzichristofis, S. A. (2020). Educational robotics: Platforms, competitions and expected learning outcomes. *IEEE Access*, 8, 219534-219562. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3042555>
- Fakaruddin, F. J., Shahali, E. H. M. et Saat R. M. (2024). Creative thinking patterns in primary school students' hands-on science activities involving robotic as learning tools. *Asia Pacific Education Review*, 25(1), 171-186. <https://doi.org/10.1007/s12564-023-09825-5>
- Hsieh, M.-C., Pan, H.-C., Hsieh, S.-W., Hsu, M.-J. et Chou, S.-W. (2022). Teaching the concept of computational thinking: A STEM-based program with tangible robots on project-based learning courses. *Frontiers in Psychology*, 12. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.828568>
- International Society for Technology in Education [ISTE]. (2011). *Operational definition of computational thinking for K-12 education*. https://cdn.iste.org/www-root/Computational_Thinking_Operational_Definition_ISTE.pdf
- Bastion, J. et Gudjons, H. (1998). *Gudjons: Das projektbuch II: Über die projektwoche hinaus – Projektlernen im Fachunterricht*. Bergmann; Helbig.
- Khoshaim, H. B. (2020). Mathematics teaching using word-problems: Is it a phobia! *International Journal of Instruction*, 13(1), 855-868.
- Kilpatrick, W. H. (1918). The project method. *Teachers College Record*, 19(4), 1-5.
<https://doi.org/10.1177/016146811801900404>
- Klieme, E., Artelt, C. et Stanat, P. (2014). Fächerübergreifende Kompetenzen: Konzepte und Indikatoren. Dans F. E. Weinert (dir.), *Leistungsmessungen in Schulen* (p. 203-218). Beltz.
- Koncept STEM. (2001). *Národní Ústav pro Vzdělávání*. <http://www.nuv.cz/pkap/koncept-stem>
- Korkmaz, G. et Kalayci, N. (2021). Problem and project-based learning as an educational philosophy: A novel conceptual model for higher education. *African Educational Research Journal*, 9(3), 774-789. <https://doi.org/10.30918/AERJ.93.21.111>
- Kratochvílová, J. (2009). *Teorie a praxe projektové výuky*. MU Brno.

- Lechhab, A., Benqassou, I., El-hars, F., Chekour, M. et Hafid, M. M. (2023). Teacher's perceptions of STEM education at the primary level in Morocco. *International Journal of Interactive Mobile Technologies*, 17(14). <https://doi.org/10.3991/ijim.v17i14.39877>
- Lessner, D. (2014). Analysis of term meaning "computational thinking". *Journal of Technology and Information Education*, 6(1), 71-88. <https://www.jtie.upol.cz/pdfs/jti/2014/01/06.pdf>
- Margot, K. C. et Kettler, T. (2019). Teachers' perception of STEM integration and education: A systematic literature review. *International Journal STEM Education*, 6, Article 2. <https://doi.org/10.1186/s40594-018-0151-2>
- Markula, A. et Aksela, M. (2022). The key characteristics of project-based learning: how teachers implement projects in K-12 science education. *Disciplinary and Interdisciplinary Science Education Research*, 4, Article 2. <https://doi.org/10.1186/s43031-021-00042-x>
- Martín-Páez, T., Aguilera, D., Perales-Palacios, F. J. et Vílchez-González, J. M. (2019). What are we talking about when we talk about STEM education? A review of literature. *Science Education*, 103(4), 799-822. <https://doi.org/10.1002/sce.21522>
- McDonald, C. V. (2016). STEM education: A review of the contribution of the disciplines of science, technology, engineering and mathematics. *Science Education International*, 27(4), 530-569. <https://www.icasonline.net/sei/december2016/p4.pdf>
- Ministerstvo Školství, Mládeže a Tělovýchovy [MŠMT]. (2021). *Rámcový Vzdělávací Program pro Základní Vzdělávání*. <https://msmt.gov.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/ucebni-dokumenty>
- Novák, P. (2005). *Mobilní roboty: pohony, senzory, řízení*. BEN.
- Saw, G. (2019). The impact of inclusive STEM high schools on student outcomes: A statewide longitudinal evaluation of Texas STEM academies. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(8), 1445-1457. <http://dx.doi.org/10.1007/s10763-018-09942-3>
- Siregar, N. C., Rosli, R., Maat, S. M. et Capraro, M. M. (2019). The effect of science, technology, engineering and mathematics (STEM) program on students' achievement in mathematics: A meta-analysis. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(1), Article em0549.
- Sorby, S., Veurink, N. et Streiner, S. (2018). Does spatial skills instruction improve STEM outcomes? The answer is 'yes.' *Learning and Individual Differences*, 67, 209-222. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2018.09.001>
- Suarez, A., García-Costa, D., Perez, J., López-Iñesta, E., Grimaldo, F. et Torres, J. (2023). Hands-on learning: Assessing the impact of a mobile robot platform in engineering learning environments. *Sustainability*, 15(18), Article 13717. <https://doi.org/10.3390/su151813717>
- Svobodová, R., Lacko, B. et Cingl, O. (2010). *Projektové řízení a projektové vyučování, aneb, Jak na výukové projekty podle zásad projektového řízení*. PM Consulting,
- Wahono, B., Lin, P.-L. et Chang, C.-Y. (2020). Evidence of STEM enactment effectiveness in Asian student learning outcomes. *International Journal of STEM Education*, 7, Article 36.
- Yata, C., Ohtani, T. et Isobe, M. (2020). Conceptual framework of STEM based on Japanese subject principles. *International Journal of STEM Education*, 7, Article 12.
- Žerovnik, A. et Nančovska Šerbec, I. (2021). Project-based learning in higher education. Dans C. Vaz de Carvalho et M. Bauters (dir.), *Technology supported active learning: Student-centered approaches* (p. 31-57). Springer.

VALORISATION DES MATHÉMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT

POST-PRIMAIRE ET SECONDAIRE AU BURKINA FASO

| SAWADOGO* SALIF

Résumé | Dans le but d'améliorer la compréhension des mathématiques vis-à-vis des élèves, ce travail de recherche met en valeur l'enseignement des maths au post primaire et secondaire. Il s'agit de la mise en place d'un espace numérique dont la création de cours numérique, d'exercices et de jeu de questionnaire. Des exemples d'extraits numériques déjà créés ont été présentés dans ce travail.

Mots-clés : élèves, compréhension, mathématiques, enseignement, espace numérique

Abstract | In order to improve the understanding of mathematics with respect to students, this research work highlights the teaching of maths in the primary and secondary post. This is the implementation of a digital space including the creation of digital courses, exercises and questionnaire game. Examples of digital extracts already created have been presented in this work.

Keywords: Students, understanding, mathematics, teaching, digital space

I. INTRODUCTION

Les mathématiques sont un ensemble de connaissances abstraites résultant de raisonnements logiques appliqués à des objectifs divers tels que les ensembles mathématiques, les nombres, les formes, les structures, les transformations, etc. ; ainsi qu'aux relations et opérations mathématiques qui existent entre ces objectifs. C'est une discipline qui semble être complexe parmi tant d'autres pour les apprenants. De par sa complexité, nombreux apprenants l'ont niée jusqu'à ignorer sa valeur. Au Burkina Faso en particulier, mes élèves du secondaire m'ont posé les questions à savoir « Comment faire pour comprendre les mathématiques ? Quelle est l'importance des mathématiques dans la vie quotidienne ? » Pour ces élèves les mathématiques sont très difficiles à comprendre et aussi ils ne trouvent pas son importance dans la vie. Ces interrogations me laissent penser qu'il faut avoir l'amour et la maîtrise de quelque chose afin de trouver sa valeur.

C'est pour cela que l'idée m'est parvenue de créer le projet « Valorisation des mathématiques ». L'objectif de cette recherche est de soutenir les apprenants à comprendre les mathématiques et à les considérer. Pour atteindre ces objectifs, le projet vise à développer un système d'apprentissage, à savoir la création d'un espace numérique. Dans la suite du travail je présenterai premièrement quelques outils numériques utilisés en Afrique subsaharienne. Deuxièmement, je montrerai le système de fonctionnement de cet espace numérique. Ensuite, je présenterai quelques extraits de l'espace numérique créé. Enfin, je terminerai en exposant des réactions d'élèves et enseignants qui l'ont essayé.

II. QUATRE OPTIONS D'ENSEIGNEMENT VIA LE NUMÉRIQUE EN AFRIQUE SUBSAHARIENNE

La pandémie de COVID-19 a obligé plusieurs pays à adopter le numérique afin d'assurer la continuité de l'apprentissage des élèves. Notamment en Afrique subsaharienne quatre options d'enseignement via le numérique ont été envisagées (Burns, 2020).

* École Normale Supérieure – Burkina Faso – sawsalifow@gmail.com

1. *La radio*

À une époque saturée par les technologies numériques et mobiles, la radio demeure la plus facile d'accès dans le monde. Selon les données de l'Institut de Statistiques de l'UNESCO (ISU, 2019), au niveau mondial, au moins 75 % des foyers ont accès à la radio et en Afrique subsaharienne, entre 80 et 90 % d'entre eux ont accès à un poste de radio en état de marche. De ce fait, de nombreux pays de l'Afrique subsaharienne ont utilisé la radio pour la diffusion de cours et de l'instruction interactive.

2. *La télévision*

En Afrique subsaharienne, la télévision nationale du Botswana (BTV) a proposé des programmes éducatifs quotidiens, principalement en mathématiques et sciences, diffusés sur 90 % du territoire national grâce à son émetteur terrestre et sur 100 % du territoire national grâce au satellite (ISU, 2019 ; UNESCO, 2015).

3. *Les téléphones portables*

Étant donné le nombre élevé de personnes possédant un téléphone portable partout dans le monde, les téléphones portables ont été considérés comme un autre outil éducatif important pour assurer la continuité de la scolarisation pendant cette pandémie. Ils ont été utilisés pour l'accès aux contenus, aux programmes d'études, à l'enseignement des langues et aux plans de cours. Au Niger par exemple, les SMS ont été utilisés pour l'enseignement de la lecture, de l'écriture et du calcul. L'institut Sud-africain a aussi proposé des livres d'histoires sur le téléphone portable. En plus, les applications éducatives et des médias sociaux ont été mise en place.

4. *L'apprentissage en ligne*

Un certain nombre de pays et de systèmes scolaires ont pratiqué l'apprentissage en ligne, par le biais de cours en ligne (via un système de gestion de l'apprentissage) ou de plate-forme d'enseignement virtuel (Webinaires en face à face via *Google Hangouts* ou *Zoom*).

III. LE SYSTÈME DE FONCTIONNEMENT DE L'ESPACE NUMÉRIQUE

Dans le cadre du projet « Valorisation des mathématiques », l'espace numérique est l'ensemble des données informatisées (bases de données, médias, logiciels, etc.) (Harmane, 2021). Il joue un rôle important dans l'enseignement. Dans ce projet, la création de l'espace numérique s'articule sur la création d'un site constitué de cours numériques, des exercices et un jeu de questionnaires.

1. *Cours numériques*

L'importance des cours numériques n'est plus à démontrer dans l'enseignement actuel. La disponibilité des Technologies d'Information et de Communication tels que les téléphones cellulaires, les ordinateurs portables, la télévision, la radio, etc. a fait que de nos jours la majorité des apprenants préfèrent l'utilisation de ces outils que le support manuel. Ils (les apprenants) trouvent que le numérique est facile à utiliser. De ce fait, il s'agit de stocker des cours numériques sous forme de PDF et de vidéos dans un site Web accessible pour les apprenants. Ces cours doivent être agencés et conçus de telle sorte que dans tous les niveaux de classes, les cours répondent aux objectifs du programme de chaque classe. Ces cours présentent beaucoup d'avantages pour tout apprenant.

D'abord, ils sont accessibles en tout temps et tout lieu. En effet, l'apprenant décide en quel moment et où il est prêt pour suivre son cours pour mieux comprendre. Étant donné que les élèves n'ont pas le même rythme de compréhension, les cours qu'on donne en classe ne favorisent pas certains élèves, puisque le temps de cours est programmé, donc ce temps consacré pour le cours ne leur suffit pas pour assimiler le contenu du cours du jour.

Aussi, certains élèves sont influencés par l'environnement. Soit ils n'apprécient pas la présence de leurs enseignants, soit ils se sentent gênés par leurs camarades. Pour cela, ces derniers ont des difficultés à poser des questions de compréhension dans la classe. Alors l'accès des cours numériques permettra à ces apprenants de suivre et comprendre leur cours quand ils veulent et où ils veulent.

2. *Création d'un exerciceur*

En mathématiques, le contenu du cours ne suffit pas pour la compréhension d'une leçon. Il est nécessaire de s'exercer pour mieux comprendre. Dans les cours qu'on donne en classe, on soumet des exercices aux élèves. Cependant, cela présente toujours des difficultés de compréhension au niveau des certains élèves. Pour une bonne compréhension, beaucoup d'apprenants ont besoin des évaluations répétées. En effet, traiter quelques exercices ne leurs suffisent pas pour maîtriser une notion. Pourtant avec le programme et le temps imparti pour les cours, l'enseignant est contraint de limiter souvent les exercices pour pouvoir respecter sa progression annuelle.

À cet effet, la création des bases d'exercices dans l'espace numérique sera un atout. Les exerciceurs tels que les exercices interactifs permettent à l'apprenant de s'exercer après chaque cours, vérifier sa compréhension du cours et de corriger lui-même ses lacunes. Avec ces exercices, c'est l'apprenant lui-même qui répond aux questions, constate ses erreurs, corrige, reprend l'exercice et répondre de nouveau aux questions, note à nouveau les erreurs résiduelles et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il trouve toutes les réponses. Ainsi, l'apprenant est maître de soi et il est dans un environnement d'apprentissage propice. Cela lui permet de maîtriser davantage les notions. Par ailleurs, ces exercices seront également conçus et classés par niveau de classe puis mis à la disposition des élèves. Les exercices doivent être constitués en tenant compte du programme enseigné dans chaque niveau de classe.

3. *Le jeu de questionnaires*

De nos jours, le jeu est devenu incontournable dans tous les domaines. Il est en même temps un moyen de divertissement mais aussi utile dans l'apprentissage de certains domaines. Au-delà de son loisir, certains jeux sont à but lucratif et éducatif. Avec le système numérique, différents types de jeux se sont répandus dans le monde. Ainsi, plusieurs usagers d'outils informatiques se focalisent plus sur les jeux, certains simplement pour le plaisir du jeu et d'autres pour le potentiel de gains.

Partant de là, il est nécessaire de créer des applications de jeux dans le domaine de l'enseignement, notamment en mathématiques. Ces jeux consistent à formuler des questionnaires pour chaque niveau de classe sous forme de jeux. Dans le jeu, on doit agencer de telle sorte que toutes les propriétés et les formules mathématiques soient évaluées pour amener les apprenants à réviser leurs cours. Par ailleurs, la cupidité d'argent a fait que plusieurs joueurs de jeux s'intéressent plus aux jeux lucratifs. De ce fait, les jeux qui seront créés vont inclure des jeux qui apportent des gains pour inciter les apprenants à jouer. Prenons l'exemple dans le domaine de football, lorsqu'on demande à un élève joueur de *Xbet* de décrire un star dans le foot, il le décrit correctement, mais incapable d'énoncer une simple formule qui lui est enseignée en classe. Tout cela est dû aux gains qu'il récolte aux jeux de *Xbet*. Alors mettre en place un jeu lucratif dans un domaine, c'est le valoriser. Par conséquent, un jeu de questionnaires

possédant des gains sera une source de motivation pour les apprenants de réviser leur cours afin de gagner le jeu.

IV. QUELQUES EXTRAITS DE L'ESPACE NUMÉRIQUE

Au-delà de ces propositions ci-dessus, voici quelques extraits de l'espace numérique créé.

D'abord, nous avons le projet « Math O'Lycée » (<http://maths.ac-amiens.fr/033-math-o-lycee.html>). C'est un projet d'un groupe d'enseignants de mathématiques depuis 2007, piloté jusqu'en 2013 par Vincent MAILLE¹ et à présent par Fatima ESTEVENS² sous la direction de Ludovic LEGRY³. Ce projet a mis en place des axes de travail (Figure 1) tels que :

- Création d'un exerciceur avec base d'exercices interactifs ;
- Création d'une base d'exercices papier modifiables (*éditeur LaTeX*) ;
- Recueil et suivi des capacités et compétences évaluées ;
- Création de cours en ligne avec création de briques.

Ainsi, les figures 1 et 2 présentent des captures d'écran du système de fonctionnement de l'exerciceur de ce projet soit l'interface professeur et des exemples d'exercices, telles que présentées aux pages 2 à 18 du diaporama Mol (Math O'Lycée).

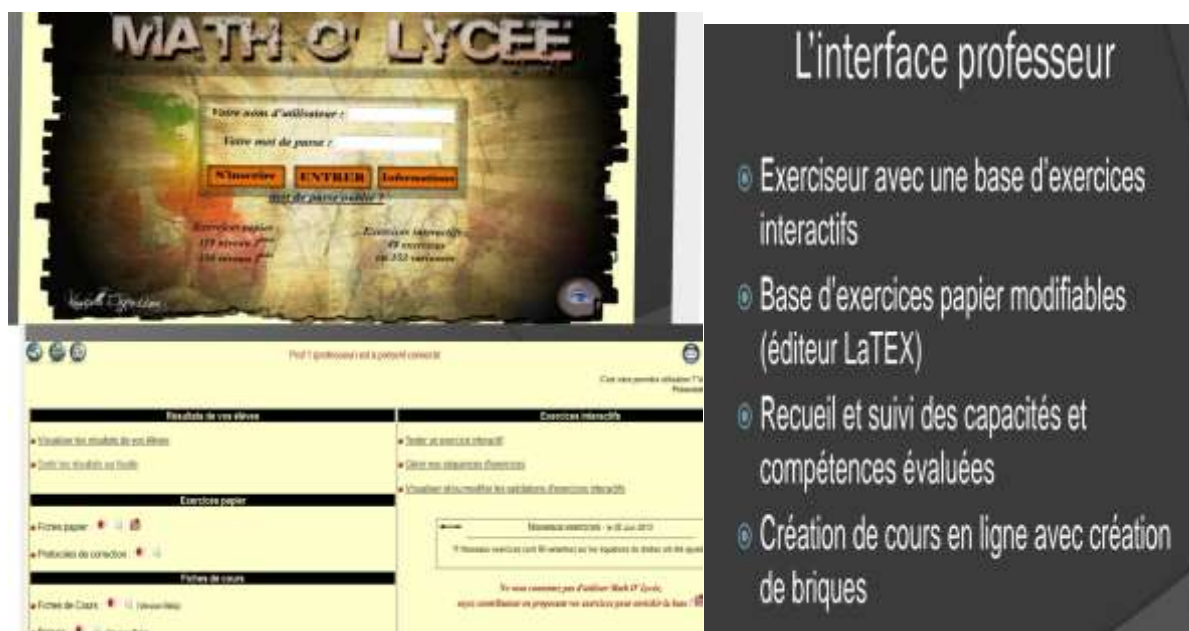


Figure 1 – Interface professeur de l'espace numérique « Math O'Lycée »

Dans cet exerciceur, l'enseignant peut planifier une séance à en classe ou à la maison. La liste d'exercices peut être créée par l'enseignant et/ou les exercices peuvent être extraits par la plateforme

¹ Vincent Maille est un Professeur et responsable de l'unité de recherche Développement, apprentissage et intervention en situations scolaires à la faculté Psychologie et des sciences de l'éducation de l'université de Genève (en 2007).

² Fatimata ESTEVENS-Lycée Pierre d'Ailly-Académie d'Amiens, Actrice d'Olympiade des Mathématiques (Professeur de Mathématiques formatrice académique).

³ Ludovic LEGRY-Directeur d'agence-SERGIC, Inspecteur d'Académie, Pédagogique Régional de Mathématiques Référent académique ISN.

de manière pertinente en fonction des erreurs rencontrées tout au long de la séance. L'enseignant peut également créer une fiche papier depuis une base d'exercices créés et dont les compétences ont déjà été extraites. Après avoir créé la fiche papier à partir des exercices de la base, un protocole de correction est accessible regroupant tous les items évalués dans les exercices.

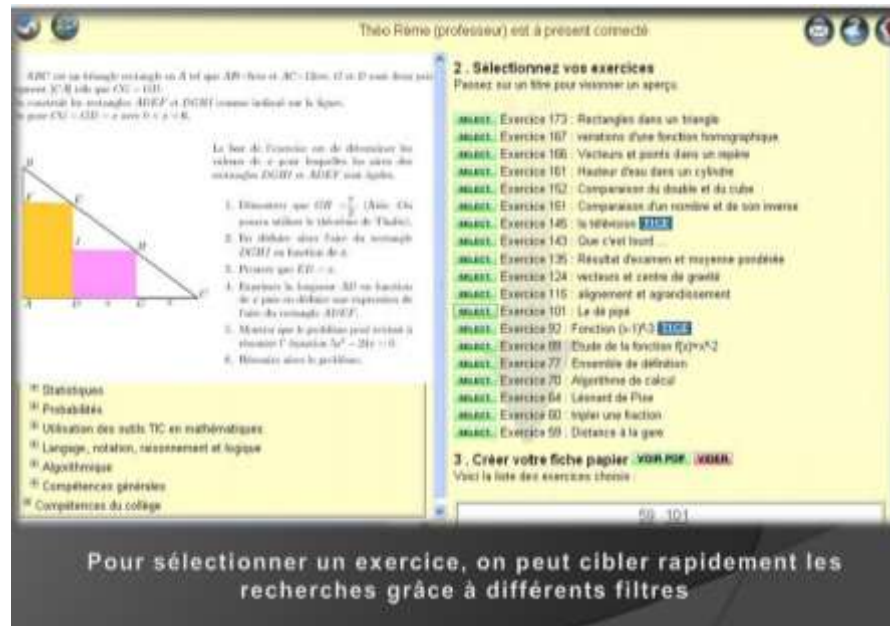


Figure 2 – Exemple d'exercices de l'espace numérique « Math O'Lyce »

L'élève, à son niveau, a la possibilité de récupérer les fiches qui lui sont destinées. Il peut visualiser l'état de validation de ses acquis. L'élève peut aussi choisir de faire quelques exercices interactifs d'entraînement ou une séance programmée par l'enseignant.

En plus, l'espace numérique inclut quelques captures d'écran de jeux de questionnaires proposés dans Alloprof (<https://www.alloprof.qc.ca/fr/eleves/bv/exercices>), un organisme bienfaisance québécois né en 1996 poursuivant la mission de carter le décrochage scolaire et d'accroître la motivation des jeunes à l'école en offrant des services gratuits d'aide aux devoirs.

V. LES RÉACTIONS DES ENSEIGNANTS ET ÉLÈVES

À travers cet essai d'utilisation du numérique dans l'enseignement au moment du Covid-19, le personnel enseignant et les apprenants ont donné leur avis vis-à-vis de son application dans l'apprentissage (Heilporn et al., 2023).

1. Le personnel enseignant

Premièrement, les personnes rencontrées ont souligné que le numérique permet de diversifier les activités d'enseignement et d'apprentissage. La technologie aide à fournir des approches différentes afin que le plus grand nombre d'élèves comprennent les notions, en prenant en compte leurs difficultés individuelles. Cette diversité d'outils offre des choix aux élèves qui sélectionnent ceux qui leur conviennent le mieux. L'apprentissage devient aussi plus accessible grâce aux ressources numériques. Par exemple, les élèves peuvent utiliser un site Web pour approfondir et consolider leurs connaissances.

L'usage du numérique dans l'enseignement offre aussi des opportunités de développement des capacités d'autodétermination des élèves, en particulier leur autonomie dans les apprentissages. Les élèves peuvent effectuer des exercices (en ligne) et des autocorrections, puis poser des questions uniquement sur les points qu'ils ont mal compris. Il renforce également le sens d'appartenance des élèves.

L'utilisation du numérique peut également faciliter la correction et les rétroactions pour les enseignants. Selon les enseignants, cela permet une rétroaction plus détaillée avant les examens, des commentaires audio plus approfondis et la possibilité de fournir des rétroactions en temps réel sur le travail des élèves.

2. Les élèves

Pour les apprenants, le recours au numérique dans leurs cours au secondaire est comparable à l'utilisation du papier et du crayon mais offre une diversité dans les activités et des possibilités de travail différentes. Des usages variés du numérique, qu'ils soient passifs, actifs ou collaboratifs favorisent leur participation en proposant diverses approches et méthodes.

L'utilisation du numérique influence aussi positivement leurs apprentissages et leur engagement de plusieurs manières. Par exemple ils apprécient l'organisation des ressources pédagogiques dans des environnements comme *Classroom*. Les vidéos captent leur intérêt et améliorent leur compréhension des sujets abordés en classe. Les élèves expliquent que lorsque les vidéos représentent ce qui est abordé en cours, c'est à ce moment-là que l'intérêt commence à se développer et que l'écoute d'une petite vidéo pour commencer la nouvelle notion aide mieux à comprendre. Ils montrent également que les activités interactives en ligne favorisent leur apprentissage en leur offrant des indices et des supports supplémentaires en cas de besoin. Par ailleurs, l'écriture numérique est appréciée pour sa rapidité et son côté moins intimidant que l'écriture manuelle, ce qui encourage les élèves à s'exprimer davantage. Enfin, la recherche sur le Web leur donne un accès rapide à une multitude de ressources, facilitant leurs travaux et leurs recherches.

VI. CONCLUSION

En somme, il ressort que la création de l'espace numérique au profit de l'enseignement est très capitale. Ainsi, nous avons eu à présenter son système de fonctionnement puis quelques extraits du système numérique. Et enfin, nous avons fait ressortir les réactions des acteurs de l'éducation vis-à-vis de cette nouvelle réforme de l'éducation. Au regard de ces différentes réactions des acteurs de l'apprentissage face à cet essai, nous supposons que la mise en place du numérique va contribuer positivement à l'éducation au secondaire. Pour ce faire, ce projet sera très utile pour améliorer l'apprentissage afin de relever certains défis dans l'enseignement secondaire.

RÉFÉRENCES

- Burns, M. (2020). *4 options d'enseignement à distance à envisager durant cette pandémie de COVID-19*. Partenariat mondial pour l'éducation (GPE). <https://www.globalpartnership.org/fr/blog/4-options-denseignement-distance-envisager-durant-cette-pandemie-de-covid-19>
- Harmane, I. (2021). *Le numérique dans l'enseignement* [Mémoire de master, Université de Franche-Comté]. HAL theses. <https://univ-fcomte.hal.science/hal-03448273/>

- Heilporn, G., Diab, F., Collin, S., Hamel, C., Lakhal, S. et Majdoub, M. (2023). *Usages du numérique en soutien aux apprentissages et à l'engagement des élèves : ce qu'en pensent des enseignants et des élèves*. École branchée. <https://ecolebranchee.com/usages-numerique-soutien-apprentissages-engagement-eleves/>
- Institut de statistique de l'UNESCO [ISU]. (2019). *Éducation en Afrique*. <https://uis.unesco.org/fr/topic/education-en-afrique>
- UNESCO. (2015). *Le numérique au service de l'éducation en Afrique*. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000231278/PDF/231278fre.pdf.multi>

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS : ANALYSE DES DIFFICULTÉS COURANTES DES ÉLÈVES DE LA TERMINALE D AU BURKINA FASO

| SIMBRE* ALASSANE

Résumé | Au Burkina Faso, les fonctions sont essentielles dans l'enseignement des mathématiques en terminale D. Cependant, les élèves rencontrent des difficultés dans leur traitement dans le registre graphique. Ce travail vise à identifier ces difficultés et à les analyser afin de proposer des stratégies de remédiations. Il a été montré sur la base des travaux de Duval (1993) et Vergnaud (1990), que la principale difficulté des élèves est la conversion entre les registres des fonctions.

Mots clés : représentations graphiques, fonctions numériques, changement de registres, apprentissage

Abstract | In Burkina Faso, functions are essential in mathematics teaching in the terminal D class. However, students encounter difficulties in their graphic register. This work aims to identify these difficulties and analyse them in order to propose remediation strategies. He showed, on the basis of the work of Duval (1993) and Vergnaud (1990), that the main difficulty for pupils is conversion between registers of functions.

Keywords : Graphical representations, numerical functions, register change, learning

I. INTRODUCTION

Les mathématiques occupent une place importante dans le développement d'une société. Au cœur de cette discipline, le concept de fonction occupe une place importante à travers l'histoire, car les fonctions selon Leonhard Euler (1748, cité par Montoya, 2019) sont à la base du développement plus moderne des mathématiques. Comme les autres notions mathématiques, les fonctions sont un outil pour résoudre des problèmes (Bonneval, 2006). En ce sens, Eisenberg (1992, cité par Hitt, 1998) ajoute que : « Développer chez les étudiants une sensibilité aux fonctions devrait être un objectif principal des curriculums de l'enseignement secondaire et universitaire ». Le concept de fonction étant étudié dans plusieurs registres, pour mieux l'appréhender, il est nécessaire selon Duval (1993) de pouvoir travailler dans chacun de ces registres et de passer d'un registre à un autre. Cependant, on note que les élèves ont des difficultés à convertir le registre algébrique dans un autre registre (Baudot, 2020, p. 24). Selon le même auteur, les apprenants ont des difficultés à passer du registre algébrique au registre graphique et à comprendre la procédure de conversion (qui sert de justification). D'une façon générale, nous pensons que si nous parvenons à identifier les erreurs que font les élèves, alors nous serons en mesure de les aider à surmonter ces difficultés. Pour ce faire, la présente recherche se propose d'analyser les difficultés courantes des élèves de la Terminale D au Burkina Faso lors de la représentation graphique des fonctions.

II. PROBLÉMATIQUE

Au Burkina Faso, la notion de fonction est découverte dans l'enseignement général dès la classe de sixième (septième année de scolarité), après celle de la relation. Elle s'approfondit au fur et à mesure que les apprenants évoluent dans leur cursus scolaire. En classe de terminale D (treizième année de

* École Normale Supérieure – Burkina Faso – alassanesimbre97@gmail.com

scolarité, série « Mathématiques et SVT »), les fonctions sont fondamentales dans l'enseignement des mathématiques. En effet, à ce niveau d'étude, toute évaluation de mathématiques comprend généralement un exercice sur les fonctions qui représente au moins 50 % de la note totale. La compréhension du concept de fonction implique l'articulation cohérente de plusieurs registres sémiotiques (Duval, 1993, p. 41). Toutefois, notre expérience dans l'enseignement des mathématiques a montré que les apprenants rencontrent beaucoup de difficultés dans la représentation graphique des fonctions. Cela se traduit par les mauvaises performances chez les élèves au cours des évaluations. De même, lorsque nous étions élèves, nous avons éprouvé, au même titre que nos camarades de classe, des difficultés à travailler avec les fonctions dans le registre graphique. Notre travail consistera à identifier ces difficultés, à en faire une analyse afin de proposer des solutions pour leur dépassement. L'hypothèse qui sous-tend notre travail est que l'enseignement des fonctions doit se faire en s'appuyant sur des changements de registres de représentations (Duval, 1993).

III. CADRE THÉORIQUE

Dans ce paragraphe consacré aux aspects théoriques de notre étude, nous définirons le concept de fonction et de difficulté, puis nous aborderons les registres de représentation des fonctions.

1. Le concept « fonction »

Le concept de fonction est un concept largement universel qui se rencontre pratiquement dans toutes les disciplines scientifiques : mathématiques, physique, biologie, technologie, mais également en sciences humaines, etc... En mathématiques, la définition la plus courante dans les manuels scolaires est la suivante : « Une fonction est une relation pour laquelle tout élément de l'ensemble de départ est associé à au plus un élément de l'ensemble d'arrivée » (Boucher *et al.*, 2010), cité par Montoya, 2019). La notation fonctionnelle sert à définir une fonction en précisant ses ensembles de départ et d'arrivée ainsi que sa règle de correspondance telle que la Figure 1 le présente.

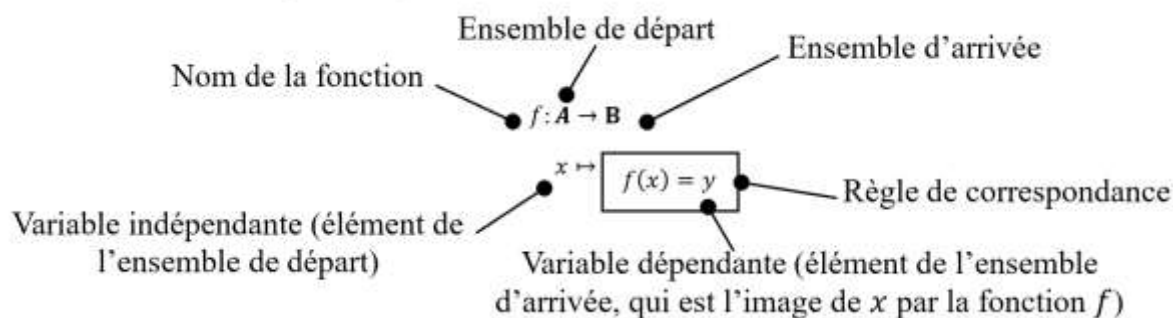


Figure 1 – Schéma notation fonctionnelle

Ce schéma représente une : « Fonction f de A vers B qui, à un élément x appartenant à A , fait correspondre un élément appartenant à B qu'on note $f(x)$. » Lorsque A et B sont des parties de $\mathbb{R}$, la fonction f est dite fonction numérique d'une variable réelle. Cette définition est très largement inspirée du courant des mathématiques modernes basé sur une vision ensembliste. Autrement, « une fonction est une relation qui fait correspondre à chaque valeur de la variable indépendante une ou aucune valeur de la variable dépendante. » (Scénarios 436 Tome 1, 1996, p. 6, cité par Passaro, 2007). Cette deuxième définition met l'accent sur l'idée de variable et de dépendance. Outre les idées d'ensemble, de variable et de dépendance, les deux définitions apportent l'idée de l'existence d'une relation de correspondance. Il convient donc de distinguer la notion de la simple relation à celle fonctionnelle. En effet, une relation

est dite fonctionnelle à condition qu'à un élément de l'ensemble de départ, il corresponde au plus un élément de l'ensemble d'arrivée. Dans le cadre de ce travail, nous ferons usage de la première définition.

2. Le concept « difficulté »

Dans différents domaines, plusieurs recherches ([Astolfi, 1997 ; Auriac et Fiard, 2005 ; Bachelard, 1983], cité par Alibi et Boilevin, 2021) ont abordé les difficultés comme concept clé et primordial dans le processus d'enseignement-apprentissage ainsi que les stratégies de remédiation. La notion de difficulté est une notion récurrente dans l'enseignement des mathématiques. Elle est définie selon Brousseau (2003, p. 1, cité par Alibi et Boilevin, 2021), comme « un caractère d'une situation qui accroît de façon significative la probabilité de non-réponse ou de réponse erronée des sujets actants impliqués dans cette situation ». Le sujet actant peut être un élève, mais aussi le professeur qui éprouve souvent des difficultés à obtenir les apprentissages qu'il projette. La difficulté peut être observée à travers la répétition des actions d'un même élève dans une situation donnée ou à travers un ensemble de réponses simultanées de groupes d'élèves considérés comme suffisamment comparables et soumis aux variantes de la situation. En mathématiques, les difficultés qualifient une situation d'inaptitude, chronique ou non, à construire la solution d'un problème mathématique¹.

3. Les registres de représentation associés aux fonctions

Les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles par la perception, il faut donc pouvoir les représenter. Dans les situations d'apprentissage, les problèmes étudiés sont exprimés dans différents registres. Il y a des représentations plus appropriées pour la recherche de certaines informations. L'ensemble des représentations d'un objet mathématique en donne une vue globale et donne ainsi plusieurs informations nécessaires à la compréhension de cette notion. Nous adhérons ainsi à l'idée de Duval (1993) selon laquelle un concept est acquis dès que l'élève sait manipuler le concept dans les différents registres, connaît les traitements propres à chacun d'eux, sait passer de l'un à l'autre dans des tâches de conversion ou d'association entre deux registres et arrive à choisir le registre le mieux adapté à son problème. D'après Vergnaud (1990), un concept n'est acquis qu'après que l'élève ait une compréhension du signifié, une maîtrise du signifiant et des savoir-faire associés au concept, un affranchissement des obstacles liés au concept et une maîtrise de la résolution des problèmes utilisant le concept.

En ce qui concerne les fonctions, les principales représentations selon Duval (1993) sont :

- - les représentations par des formules (registre algébrique) : c'est une formule qui permet de calculer l'image $f(x)$ pour tout x dans le domaine de définition ;
- - les représentations en tableau de valeurs (registre numérique) : la loi fonctionnelle est ici réduite à une description discrète : à tout élément de l'ensemble de départ est associé sur la ligne (ou la colonne) suivante, la valeur de son image ;
- - la représentation en tableau de variations : toutes les informations relatives aux variations de la fonction y sont contenues ;
- - les représentations en courbes (registre graphique) : c'est un ensemble de points du plan. Pour une fonction f , sa courbe se définit comme l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x \in D_f$ (D_f étant l'ensemble de définition de f) et $f(x) = y$;
- - le registre verbal : la loi fonctionnelle est exprimée en langage naturel.

¹ Source : [Difficultés en mathématiques — Wikipédia \(wikipedia.org\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Difficult%C3%A9s_en_math%C3%A9matiques) consulté le 26/08/2024.

Il importe de signaler que la typologie propose ici des représentations que peut prendre la fonction. Cela ne signifie pas que tout tableau de valeurs, toute formule, tout graphique ou tout mot représente une fonction. Pour notre travail, nous nous intéresserons au processus de conversion du registre tableaux et algébrique respectivement vers le registre graphique.

IV. MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

Le but de notre étude est d'analyser les difficultés des élèves de la classe de Terminale D dans la représentation graphique des fonctions au Burkina Faso. Pour cela, nous avons opté pour la méthode mixte dans notre méthodologie de recherche. En effet, nous effectuons une analyse statistique des données recueillies qui nous permet de situer l'ampleur des difficultés rencontrées par les élèves, et une analyse qualitative des informations collectées, notamment sur les erreurs, qui nous permettra de clarifier les difficultés des élèves et de proposer des pistes de solutions. Nous avons retenu pour notre collecte des données un test administré aux élèves de la classe de terminale D, les échanges avec ces élèves lors des séances de correction et un « questionnaire-enseignant » adressé aux enseignants de mathématiques tenants ou ayant tenu la classe de la terminale D.

Cent-vingt élèves choisis de façon aléatoire ont pris part au test (Annexe 1) d'une durée d'une heure trente minutes (1 h 30 min). En général, en classe de terminale, nous rencontrons trois types de problèmes : une fonction exprimée sous la forme algébrique à étudier, le tableau de variations d'une fonction qu'il faut étudier pour en déduire sa représentation graphique ou la courbe d'une fonction à étudier. Les deux premiers étant les plus récurrents dans les sujets d'examen au baccalauréat, nous avons donc choisi de proposer deux exercices de ces types dans le test. Les élèves soumis au test avaient tous fait le cours sur les fonctions numériques prévu dans le programme scolaire de la classe de la terminale D. En effet, l'administration du test s'est faite à quelques semaines de l'examen du baccalauréat (entre mi-mai 2024 et 4 juin 2024). Ces apprenants sont supposés posséder les acquis nécessaires pour réussir à ce type de test.

Quant aux enseignants, ils sont 20 à avoir rempli le questionnaire. Ils sont issus des établissements scolaires de la région du centre.

V. ANALYSE ET INTERPRÉTATIONS DES RÉSULTATS DE LA RECHERCHE

Les résultats des apprenants au test sont résumés dans l'annexe 2. Les taux de ce tableau confirment que les élèves ont de réelles difficultés dans la réalisation de certaines tâches liées à la représentation graphique des fonctions. En effet, seulement 13,54 % (13/96) des élèves ont réussi à tracer (C_f) contre 2,08 % (2/96) pour (C_h) (Annexe 2). Aussi, sur 20 enseignants soumis au questionnaire, 75 % pensent que les élèves rencontrent de grosses difficultés à faire la représentation graphique de fonctions (30 % pensent qu'ils ont un niveau très faible et 45 % un niveau faible) et seulement 5 (25 %) pensent que leur niveau de difficulté est moyen. De ces résultats, nous convenons donc que les difficultés des élèves sont bien réelles en matière de représentation graphique des fonctions.

L'analyse des erreurs récurrentes dans les productions de ces élèves au test, nos échanges lors des séances de correction en classe et les réponses des enseignants au questionnaire nous ont permis d'identifier quelques-unes des difficultés des élèves de la terminale D lors de la représentation graphique des fonctions. Ces difficultés se manifestent de plusieurs manières.

4. Une difficulté de conversion du tableau de variations à la représentation graphique (monotonie de la fonction dans les intervalles, le signe de la fonction, les bornes de la fonction) et du registre algébrique au graphique (limites aux bornes, les asymptotes, les tangentes)

Premièrement, en partant du tableau de variations à la représentation graphique, nos échanges lors des séances de corrections ont montré que les difficultés des élèves viennent de la méconnaissance des codes et des codages utilisés dans le tableau de variations ; de l'établissement de la correspondance entre les éléments dans un tableau de variations et la courbe représentative dans le plan euclidien. Par exemple, l'allure de la courbe (variations), l'ensemble de définition, les images, les antécédents et extrema de la fonction ne sont pas perçus par des apprenants à travers le tableau de variations. Nous présentons en Figure 2 l'extrait n° 1 de la production de deux élèves.

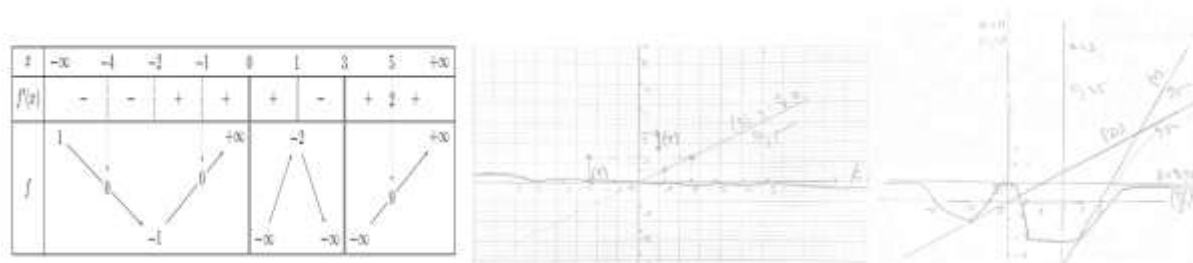


Figure 2 – Extrait n° 1 de la production de deux élèves au test.

Dans cet extrait, nous voyons que dans les deux graphiques, l'ensemble de définition n'est pas respecté. Dans le premier, l'allure de la courbe donnée dans le tableau de variations n'a pas servi de guide et les extrema sont non identifiés. Dans le deuxième, le maximum n'a pas été identifié. Nous voyons donc que les apprenants ont une difficulté de conversion des éléments du tableau de variations en lien avec les objets du registre graphique.

Deuxièmement, en partant du registre algébrique au registre graphique, les élèves rencontrent deux types de difficulté notamment les difficultés de transformation et de traitement dans le registre algébrique. Les difficultés de traitement sont les plus récurrentes (voir capture 3).

Nous présentons en Figure 3 l'extrait n° 2 de la production de deux élèves.



Figure 3 – Extrait n° 2 de la production de deux élèves au test.

Le premier élève n'a pas pu identifier l'asymptote oblique en $+\infty$, ce qui l'a induit en erreur sur $]0 ; +\infty[$. Le deuxième élève n'a pas pu déterminer l'ensemble de définition, la parité de la fonction, la position relative (Δ) par rapport à (C_h) et la dérivée de h . Il a donc faussé le tableau de variations et le tracé graphique. Les calculs erronés sont plus récurrents car dans l'exercice 2 (Annexe 2), 51,04 % (49/96) ont pu déterminer l'ensemble de définition, 73,96 % (71/96) ont faussé le calcul des limites et l'étude de la position relatives et 62,5 % (60/96) ont faussé la dérivée. Cela a entraîné un échec de

91,67 % (88/96) dans l'établissement du tableau de variations et de 97,92 % (94/96) dans la représentation graphique de la fonction (Annexe 2).

5. *L'apparition de règles-en-acte (Vergnaud) : « la courbe ne traverse pas les asymptotes ».*
Définie comme « une droite que la fonction va longer » ou « une droite vers laquelle la fonction tend », la notion d'asymptote est mal comprise par les élèves

Nous présentons ci-dessous l'extrait n° 3 de la production de deux élèves.

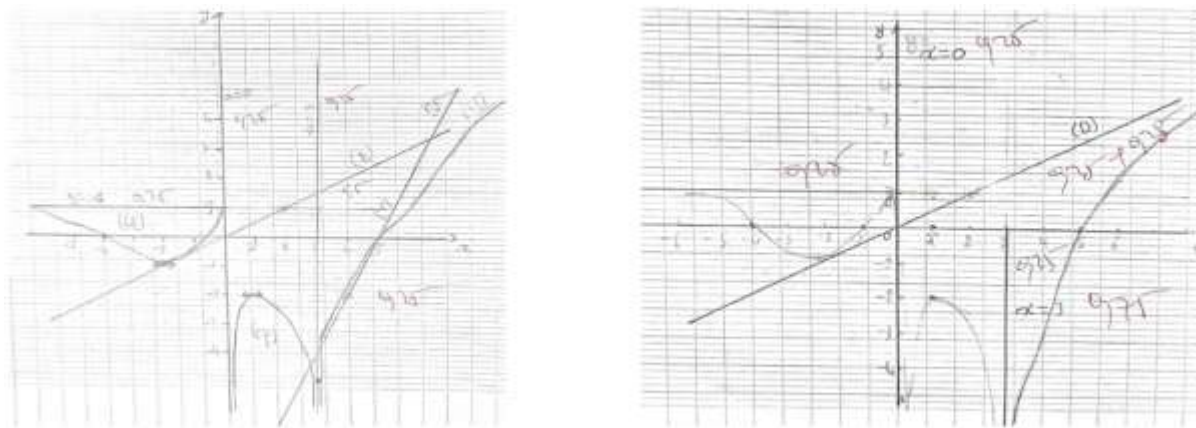


Figure 4 – Extrait n° 3 de la production de deux élèves au test.

De ces deux tracés, nous voyons que ces deux élèves mettent en œuvre la règle en acte « la courbe ne traverse pas l'asymptote » sur l'intervalle $] -\infty ; 0[$.

6. *Les connaissances sont prédictives mais ne sont pas opératoires (détermination de la limite et identification correcte des asymptotes mais cela ne se matérialise pas sur la courbe)*

En effet, sur le plan graphique, les concepts de « limite, asymptote, tangente, parité et périodicité » (réfèrent, signifié, signifiant) au sens de (Vergnaud, 1990) ne sont pas clairs pour certains élèves. Ces notions servent d'outils de vérifications ou de construction de la courbe représentative d'une fonction. Toutefois, elles sont mal traduites ou ignorées sur le plan graphique par beaucoup d'apprenants. Par exemple, la production du premier élève de l'extrait n° 2 montre que cet élève n'a pas tenu compte de l'implication géométrique de la parité qu'il a mise en évidence (symétrie) lors de sa construction. Aussi, Le graphique 2 de l'extrait n° 1, illustre la difficulté chez l'élève de donner sens à l'asymptote et à la tangente sur le plan graphique. Sur ce graphique, nous voyons que les asymptotes verticales $x = 0$, $x = 3$ et l'asymptote oblique $y = \frac{1}{2}x$ n'ont pas servi de guide. De plus, pour l'exercice 1 (Annexe 2), 89,58 % (57/96) des élèves ont réussi à donner les limites aux bornes de D_f , 45,83 % (44/96) ont réussi à donner les asymptotes (57,29 % pour l'asymptote oblique), 55,21 % (53/96) ont pu donner l'équation de la tangente (43,75 % ont pu étudier la dérivabilité en 1 et interpréter) et 43,75 % (42/96) ont pu tracer les asymptotes et tangentes, mais seulement 13,54 % (13/96) ont réussi à tracer correctement la courbe représentative de la fonction. Ces pourcentages décroissants sont aussi observés dans l'exercice 2 (Annexe 2).

VI. CONCLUSION

En somme, notre étude montre que la plupart des élèves de la terminale D au Burkina Faso n'arrivent pas à tracer correctement la courbe représentative d'une fonction à partir de son registre algébrique ou tableau de variations. Elle nous a permis de constater que les difficultés des élèves relèvent de la conversion entre les registres. Il s'agit notamment de la difficulté de conversion du tableau de variations au graphique et de l'algébrique au graphique, de la conception erronées de certaines notions (asymptote) et la difficulté de représentation ou d'usage graphique (signifiants) de certains concepts (limite, asymptote, tangente, parité et périodicité). Au vu de nos analyses, ces difficultés soulignent l'importance d'une approche pédagogique qui met l'accent sur l'apprentissage spécifique pour le tableau de variations tant pour le côté syntaxique (technique de construction et apprentissage des codes) que pour le côté conversion en lien avec les objets du registre graphique. Aussi, il est nécessaire d'insister sur le côté conversion de l'étude de fonction dans le registre algébrique en lien avec les objets du registre graphique. Enfin, il est important de bien noter le tracé de la courbe représentative de la fonction dans les évaluations et d'initier une pratique régulière de cette tâche en faisant beaucoup d'exercices avec les élèves. Dans la même logique d'aider les élèves à surmonter ces difficultés, une perspective de recherche serait d'approfondir cette étude pour identifier les origines de ces difficultés. Cette perspective sera la seconde étape de notre étude.

RÉFÉRENCES

- Alibi, I. et Boilevin, J. M. (2021). Typologie des difficultés d'apprentissage de l'accélération dans l'enseignement supérieur. *Mediterranean Journal of Education*, 1(2), 158-169.
- Baudot, M. (2020). Importance du changement de registre en mathématiques : changements de registre dans le cadre des fonctions [Mémoire de master, INSPE de Nantes]. HAL open science. https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-02612074v1/file/Nantes_BAUDOT_Manon_Mathe%CC%81matiques_2020.pdf
- Boisvert, J., Dulong, M., Fortin, J. et Lefebvre, D. (2009). *Zénith : français, langue d'enseignement : 3^e année du 2^e cycle du secondaire* [Manuel de l'élève]. ERPI.
- Bonneval, L. M. (2006). Pour des fonctions qui fonctionnent. *Dossier de l'APMEP*, (462), 88-104. <https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA06007.pdf>
- Dupont, J. (2010) Les canetons. *Revue canophile*, 13(1), 14-26.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport [MELS]. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise éducation préscolaire, enseignement secondaire*. Gouvernement du Québec.
- Hitt, F. (1998). Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6, 7-26.
- Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* [Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. <https://archipel.uqam.ca/8129/>
- Montoya, A. B. (1996). *Les interprétations et représentations de la notion de fonction chez les futurs enseignants de mathématiques au secondaire* [Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal]. Archipel. <https://archipel.uqam.ca/12801/1/M16093.pdf>

Passaro, V. (2007). *Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélées par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire* [Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal].

Surréalisme. (2003). Dans M.-É. de Villers (dir.), *Multidictionnaire de la langue française* (p. 1395). Québec Amérique.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10, 135-169.

ANNEXE 1

TEST SOUMIS AUX ÉLÈVES DE LA TERMINALE D DANS LES VILLES DE OUAGADOUGOU.

BURKINA FASO
Classe : 1^{re}D
Enseignant : M. SIMBRE

Année scolaire : 2023-2024
Date : ... / ... / 2024
Durée : 01 heure 30mn

ÉVALUATION DE MATHÉMATIQUES
 Le sujet comporte 02 pages
EXERCICE N°1 (09 points)

Soit une fonction f d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j) . On considère son tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$	-4	-2	-1	0	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	+	+	-	-	+	+
f	↘ 0		↗ 0		↘ -2		↗ 0		↘ $+\infty$

- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . (0,25 pt)
- (a) Déterminer les limites suivantes :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. (1,5 pts)
 (b) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe (C_f) de f . (0,75 pt)
- Déterminer les images des intervalles suivants : $] -4; -1[$; $]-2; -1[$ et $] 3; +\infty[$. (0,75 pt)
- (a) Déterminer les solutions de l'équation $(E) : x \in D_f, f(x) = 0$. (0,75 pt)
 (b) Déterminer les solutions des inéquations :
 $(I_1) : x \in D_f, f(x) < 0$. (0,5 pt) $(I_2) : x \in D_f, f(x) > 0$. (0,5 pt)
 (c) Déduire le signe de f sur D_f . (0,25 pt)
- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 5. (0,25 pt)
- On donne $f'_x(1) = \frac{1}{3}$ et $f'_x(1) = -2$
 (a) f est-elle dérivable en 1 ? Justifier votre réponse. (0,25 pt)
 (b) Donner une interprétation géométrique de la dérivabilité en 1. (0,25 pt)
- On considère la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0$.
 En déduire la nature de la droite (D) par rapport à la courbe (C_f) . (0,25 pt)
- Construire (D) , (T) , les asymptotes et la courbe (C_f) . (2,75 pts)
 Unité graphique : 1 cm

EXERCICE N°2 (11 points)

Soit la fonction numérique h définie par : $h(x) = 2x + \frac{x^2 + 1}{2(e^x - 1)}$.

On désigne par (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, i, j) .
 Unité graphique : 1 cm.

Partie A

- Déterminer l'ensemble de définition D de h et étudier la parité de h . (1,25 pts)
- Montrer que pour tout x de D , on a :

$$h(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1} \quad (0,25 \text{ pt})$$
- Calculer les limites de h aux bornes de D . (1,5 pts)
- (a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C_h) de h en $-\infty$. (0,5 pt)
 (b) Étudier la position relative de (C_h) par rapport à (Δ) . (0,5 pt)
 (c) Déterminer les autres asymptotes à la courbe (C_h) . (1 pt)

Partie B

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0. \quad (0,75 \text{ pt})$$
- Déterminer la fonction dérivée de h et dresser son tableau de variation. (3 pts)
- Tracer (C_h) ainsi que ses asymptotes dans le repère (O, i, j) . (2,25 pts)

On donne : $\ln(2) \approx 0,69$

Bonne inspiration !

ANNEXE 2

RÉSULTATS DES PRODUCTIONS DES ÉLÈVES AU TEST.

Exercice 1			Exercice 2		
Questions	Réponses correctes	Réponses fausses	Questions	Réponses correctes	Réponses fausses
Ensemble de définition de f	57 (59,38%)	39 (40,62%)	Ensemble de définition de h	49 (51,04%)	47 (48,96%)
Limites de f aux bornes de D_f	86 (89,58%)	10 (10,42%)	Parité de h	11 (11,46%)	85 (88,54%)
Asymptotes à la courbe (C_f)	44 (45,83%)	52 (54,17%)	Limites de f aux bornes de D	25 (26,04%)	71 (73,96%)
Solutions de l'équation (E): $f(x) = 0$	45 (46,88%)	51 (53,12%)	Asymptote oblique à la courbe (C_f)	65 (67,71%)	31 (32,29%)
Signe de f sur D_f	21 (21,88%)	75 (78,12%)	Position relative de (C_h) par rapport à (Δ)	25 (26,04%)	71 (73,96%)
Equation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 5	53 (55,21%)	43 (44,79%)	Autres asymptotes à la courbe (C_h)	2 (2,08%)	94 (97,92%)
Dérivabilité en 1 et interprétation	42 (43,75%)	54 (56,25%)	Dérivée de h	36 (37,50%)	60 (62,50%)
Asymptote oblique à (C_f)	55 (57,29%)	41 (42,71%)	Tableau de variation	8 (8,33%)	88 (91,67%)
Construction des droites	42 (43,75%)	54 (56,25%)	Construction des droites	2 (2,08%)	94 (97,92%)
Construction de (C_f)	13 (13,54%)	83 (86,46%)	Construction de (C_f)	2 (2,08%)	94 (97,92%)

(Source : Notre enquête de terrain/Résultats des productions des élèves au test)

INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE PAR LE CALCUL LITTÉRAL AU CAMEROUN

| TETSOPGUIM GUIMEYA* BRANDELLE

Résumé | La classe de 5e (élèves de 12-13 ans) est une classe stratégique pour les enseignants de mathématiques car c'est à ce niveau scolaire que prend place l'introduction formelle de l'algèbre par le calcul littéral mais également par la résolution de problèmes. Nous avons proposé des activités permettant de faciliter l'introduction de l'algèbre en 5e. Ces activités vont aussi permettre aux élèves d'identifier le statut de variable et d'inconnue de la lettre.

Mots-clés : calcul littéral, variable, inconnue, résolution de problèmes

Abstract | The 5th grade (pupils aged 12-13) is a strategic class for mathematics teachers, as it is at this level that the formal introduction of algebra through literal calculation and problem solving takes place. We proposed activities to facilitate the introduction of algebra in 5th grade. These activities will also allow students to identify the variable and unknown status of the letter.

Keywords: Literal calculation, variable, unknown, problems solving

I. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

L'origine de l'utilisation de la lettre en mathématique est très ancienne, en effet d'après J. Bair (2016) dans l'emploi de la lettre x en mathématique, le géomètre dauphinois J. Butéon (1492-1572) a utilisé en 1559 la lettre ρ qui se lit Rho pour désigner « une chose ». Dès lors la lettre a continué à être utilisée en mathématique jusqu'à nos jours où elle est devenue incontournable surtout en algèbre dans les expressions littérales (expressions comportant à la fois des chiffres et des lettres).

Notre étude se fait au Cameroun, pays d'Afrique centrale possédant deux langues officielles à savoir le français et l'anglais. Dans le programme éducatif du sous-système francophone Camerounais, l'algèbre est introduite au collège dans la classe de 5^e (élèves de 12-13 ans) par le calcul littéral et dès cet instant le calcul littéral et les expressions littérales influencent les chapitres à venir que ce soit en algèbre, en analyse ou en géométrie. Tout ceci nous montre donc l'importance de la compréhension de ce chapitre par les élèves mais aussi du travail qui repose sur l'enseignant. Bien que l'utilisation des lettres soit devenue incontournable en mathématique, nous déplorons le fait que la lettre ne soit toujours pas considérée comme un objet de savoir (entité ou concept qui peut être étudié, analysé ou compris dans un contexte académique) mais plutôt utilisée comme outil de travail (instrument utilisé pour accomplir une tâche dans un domaine précis). Comme difficultés d'apprentissage du calcul littéral nous avons par exemple $5 + 3a = 8a$ et $a^2 = 2a$ (Grugeon-Allys et al., 2012). Ces difficultés et la non prise en compte des différents statuts de la lettre pourraient avoir des répercussions sur la compréhension des chapitres tels que les équations, les vecteurs, les fonctions, le barycentre, les nombres complexes, etc., vus dans les classes ultérieures.

Les constats faits lors de notre pratique enseignante sont :

- Les difficultés des élèves à introduire une lettre pour résoudre un problème de modélisation ;
- L'absence dans les manuels et dans les programmes mathématiques du Cameroun d'activités d'introduction de l'algèbre.

* Université de Yaoundé I – Cameroun – brandelle.tetsopguim@fse-uy1.cm

On remarque donc qu'au Cameroun les activités d'intégration de l'algèbre sont presque inexistantes contrairement au programme de mathématique du Québec, mais aussi, que l'enseignement des différents statuts de la lettre n'est pris en compte ni par les manuels ni par les enseignants et donc son apprentissage est laissé à l'élève seul. Nous nous sommes alors posé la question de savoir dans quelle mesure un dispositif d'apprentissage convoquant les différents statuts de la lettre peut amener les élèves à saisir leurs sens dans les expressions littérales et à traiter correctement ces expressions dans l'activité mathématique. De cela découlent les deux questions de recherches suivantes :

1. Quels sont les manquements présents dans le programme de mathématique camerounais sur l'introduction du calcul littéral au collège ?
2. Comment améliorer l'introduction du calcul littéral au collège par les programmes de calcul et les activités de modélisation ?

L'objectif est donc de proposer des activités permettant d'introduire l'algèbre au Cameroun.

Les hypothèses de recherche sont :

- Une étude comparative des programmes de mathématique du Cameroun et du Québec pourra nous amener à relever les manquements présents dans le programme de mathématique du Cameroun sur l'introduction de l'algèbre ;
- Proposer des activités de modélisation et les programmes de calcul pourra amener les enseignants de mathématique du Cameroun à mieux introduire la lettre au collège.

II. INTRODUIRE LE CALCUL LITTÉRAL

Une expression littérale encore appelée expression algébrique est une expression contenant une ou plusieurs lettres, ces lettres désignant des nombres (Assude et Coppé, p. 9). Comme exemple d'expressions littérales on a : $3a - b$; $2a + 4b - c$; $x + 5y$; $x^2 - 8x + 7$. La lettre utilisée ici peut avoir différents statuts : Variable (dans les fonctions $f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$, les polynômes $P(x) = 2x^2 - 7x + 5, \dots$) ; inconnue (dans les équations $2a - 5 = 0$; les inéquations, les systèmes d'équations, ...) ; indéterminée (dans les identités remarquables $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, les propriétés, ...) et marque-place (dans l'écriture des coordonnées (x ; y), dans l'écriture des formules du périmètre et de l'aire d'une figure, ...). Nous nous intéresserons ici au statut de variable et inconnue uniquement.

Simon Daval (2018) dans son thèse intitulée « l'enseignement du calcul littéral en 4^e par les programmes de calcul » nous parle de l'introduction du calcul littéral qui est une étape importante dans le cursus scolaire de l'élève. Il pense aussi que l'introduction de la lettre ne devrait pas être automatisée par le professeur mais plutôt elle doit venir des élèves pour qu'ils comprennent l'intérêt de celle-ci. L'auteur a commencé par donner l'activité ci-dessous aux élèves :

Tableau 1 – Activité tirée de Daval (2018, p.10)

Programme 1 :	Programme 2 :	Programme 3 :
Choisis un nombre Ajoute 1 Ajoute le nombre de départ Ajoute 2	Choisis un nombre Prends son double Ajoute 3	Choisis un nombre Multiplie-le par 4 Ajoute 4 au résultat Retranche 2 au résultat Retire le double du nombre de départ

• Complète le tableau ci-dessous :

Nombre de départ	Programme 1	Programme 2	Programme 3
3			
0			
-1			

• Quelle hypothèse peux-tu faire ? Montre que cette hypothèse est vraie pour n'importe quel nombre choisi.

Les compétences visées à la fin de cette activité étaient : savoir modéliser, raisonner et calculer.

Le document « du numérique au littéral », tiré du site d'Eduscol en France (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche[MENESR]), nous parle du travail sur les formules et du fait que c'est de là que vient l'idée de l'utilisation des lettres pour résoudre les problèmes de désignation. Il se base sur l'exemple suivant : il s'agit d'établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux grisés d'une figure construite sur le modèle ci-dessous, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.

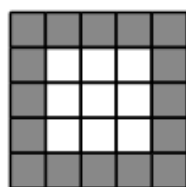


Figure 1 – Situation du carré bordé

Bien que ce problème puisse être interprété de plusieurs façons différentes, nous notons qu'à chaque interprétation l'utilisation d'une lettre est nécessaire. Ceci nous amène au fait que les expressions algébriques sont une traduction des méthodes de calculs mises en œuvre par les élèves. Le document nous montre qu'une élaboration préalable d'une méthode de calcul permet de produire une formule qui est utilisable même si la lettre est remplacée par une autre. Le travail sur les formules est un outil essentiel pour introduire le calcul littéral au collège.

Germi (1996) dans son article intitulé « Statut des lettres et notion de variable » nous parle de son expérimentation menée sur des élèves de 3^e (élèves de 13-14ans). Cette expérimentation avait pour but d'amener les élèves à travailler sur les formules ceci en associant figure géométrique et formules du cours pour obtenir une formule de base, ceci aboutira à la fin à une formule algébrique. Pour cela il a posé le problème suivant : ABCD est un carré de côté 10 cm dont une partie est hachurée comme indiqué par le dessin. On construit un carré AMNP, M étant un point du segment $[AB]$, tel que $AM=x$.

I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AD]$. Exprimer l'aire A de la partie hachurée située à l'intérieur du carré AMNP quand M varie sur le segment $[AB]$.

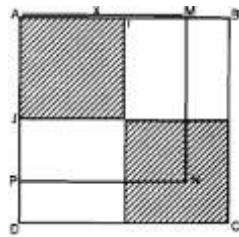


Figure 2 – Carré ABCD (tiré de Germi, 1996, p. 63)

Ensuite elle a permis de montrer le statut de variable des lettres A et x grâce aux différents tableaux de valeurs qu'ils ont remplis.

III. ÉTUDE COMPARATIVE DES PROGRAMMES OFFICIELS DE MATHÉMATIQUE DU CAMEROUN ET DU QUÉBEC SUR L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

Le Cameroun, pays d'Afrique centrale possède deux sous systèmes éducatifs à savoir : le sous système francophone et anglophone. Nous nous intéressons au programme de mathématique du sous-système francophone et nous allons faire une étude comparative avec celui du Québec. Cette étude ne se fera pas sur tout le programme mais uniquement sur la partie concernant l'introduction de l'algèbre, plus précisément sur le calcul littéral en classe de 5^e celui-ci est équivalent au 1^{er} cycle du secondaire au Québec. Il est important de préciser que tout comme le Québec, le Cameroun utilise la pédagogie de l'approche par les compétences (APC).

La classe de 5^e au Cameroun correspond à la deuxième année du 1^{er} cycle du secondaire au Québec. La charge horaire de cette classe est de 100 heures pour l'année répartie dans 4 modules qui sont les suivants : Relations et opérations fondamentales dans l'ensemble des nombres décimaux et fractions (32 heures) ; Organisation et gestion des données (11 heures) ; Configurations élémentaires du plan (46 heures) et Solides de l'espace (11 heures). L'introduction de l'algèbre par le chapitre « calcul littéral » se fait dans le module relations et opérations fondamentales dans l'ensemble des nombres décimaux et fractions ; ce chapitre est composé de trois leçons (Expression littérale à trois lettres ; Equations du type $a + x = b$ et Equations du type $ax = b$) comme nous montre le tableau 1. On constate que dès le début on parle d'expression littérale qui est considérée comme un savoir, on la définit comme une nouvelle notion, une notion à acquérir et à utiliser. Cette présentation de ce chapitre nous montre que les expressions littérales sont imposées aux élèves et il n'y a pas de processus d'acquisition par les élèves. Les exemples d'actions ne sont pas assez explicites pour que l'enseignant les utilise pour introduire l'algèbre et si l'enseignant n'est pas vigilant, ce chapitre pourrait être bâclé d'où le début des problèmes des élèves dans l'utilisation des lettres (voir tableau 1).

Tableau 2 – Extrait du programme officiel de mathématique du Cameroun p.32

CADRE DE CONTEXTUALISATION		AGIR COMPÉTENT		RESSOURCES			
Famille de situations	Exemples de situations	Catégories d'actions	Exemples d'actions	Savoirs	Savoir-faire	Savoir -être	Autres ressources
Représentation, détermination des quantités et identification des objets par des nombres.	Achat ou vente des biens de consommation, partage des biens, vérification d'une facture après paiement, comparaison des prix des objets. communication des informations comportant des nombres (numéros de téléphones, matricule, immatriculation d'un véhicule ...).	Détermination d'un nombre.	Compter des points dans une activité sportive, des objets... ; calculer des sommes mises en jeu dans une transaction ; situer un événement dans le temps, partager des biens....	III. NOMBRES DECIMAUX RELATIFS		Développer : l'esprit critique, l'esprit de curiosité, le sens de l'ordre et de la méthode, le sens de la rigueur et de la concision.	-Documentation. -Calculatrice. -Tableurs. -Matériel expérimental -Cartes en géographie. -Thermomètres. -Altimètre
				- o Opposé d'un nombre décimal. - o Puissance d'un nombre décimal relatif à exposant entier naturel non nul.	- o Additionner, soustraire, multiplier et diviser des nombres décimaux ; - o Calculer avec des puissances ; - o Comparer des nombres décimaux relatifs.		
				IV. CALCUL LITTÉRAL			
				- o Expression littérale à trois lettres au maximum. Équations : - o $a + x = b$ dans D. - o $ax = b$ où a et b sont des entiers, a non nul.	- o Déterminer la valeur d'une expression littérale simple de variables fixées. - o Résoudre des équations des formes $a + x = b$ et $ax = b$. - o Résoudre des problèmes se ramenant à ces équations.		

Le programme de mathématique du Québec est divisé selon les différentes branches de la mathématique à savoir arithmétique, algèbre, probabilités, statistiques, géométrie, mathématiques discrètes et mathématiques financières. Pour chaque chapitre de chaque branche on montre le niveau scolaire où il doit être acquis. Cette façon de faire est différente de celle utilisée au Cameroun mais, a l'avantage de nous donner un document plus réduit et aussi plus détaillé de ce qui doit être enseigné dans chaque niveau. Nous nous intéressons ici à l'algèbre et son introduction au collège dans la classe de 1^{ère} année du 1^{er} cycle du secondaire. Ici il n'y a pas de charge horaire prescrite pour les enseignements. Le tableau 2 nous montre de façon détaillée comment doit se faire l'acquisition des connaissances sur les expressions algébriques et il précise aussi l'acquisition des différents statuts de la lettre à savoir inconnue, variable, paramètre et coefficient.

Cette façon de détailler les différents apprentissages a l'avantage d'éviter qu'une connaissance soit oubliée et aussi elle permet à l'enseignant de savoir exactement ce qu'il doit enseigner.

Tableau 3 – Extrait de la progression des apprentissages au secondaire du Québec (p. 14-15)

Mathématique

Algèbre

Sens et manipulation des expressions algébriques

Sens et manipulation des expressions algébriques											
→	L'élève apprend à le faire avec l'intervention de l'enseignante ou de l'enseignant.					Secondaire					
★	L'élève le fait par lui-même à la fin de l'année scolaire.										
	L'élève réutilise cette connaissance.					1 ^{er} cycle	2 ^e cycle				
A. Expressions algébriques						6 ^e	1 ^{re}	2 ^e	3 ^e	4 ^e	5 ^e
1. Décrire, dans ses mots et à l'aide du langage mathématique, des régularités numériques											
2. Décrire, dans ses mots et à l'aide du langage mathématique, des suites de nombres et famille d'opérations						★					
3. Ajouter de nouveaux termes à une suite dont au moins les trois premiers termes sont donnés						★					
4. Décrire le rôle des composantes des expressions algébriques :											
a. inconnue Note : Ce concept, a été abordé sans qu'il soit nommé comme tel, au primaire, dans le contexte de la recherche d'un terme manquant.						→	→	★			
b. variable, constante							→	★			
c. paramètre Note : Le concept de paramètre est abordé, de façon intuitive, sans qu'il soit nommé comme tel, aux trois premières années du secondaire.							→	→	→	→	★
d. coefficient, degré, terme, terme constant, termes semblables							→	★			
5. Construire une expression algébrique à partir d'un registre (mode) de représentation							→	★			

CST

TS

SN

									CST
b. des expressions algébriques	★								TS
	★								SN

IV. PROPOSITION D'EXERCICES POUVANT FACILITER L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE AU CAMEROUN

Comme nous l'avons expliqué plus haut, au Cameroun on note l'absence des exercices pour introduire l'algèbre. Nous proposons donc quelques exercices qui pourraient permettre d'introduire la lettre au collège en classe de 5^e.

Exercice 1 :

On donne le programme de calcul suivant :

- *Je choisis un nombre.*
- *Je retranche 3.*
- *J'ajoute 5 au résultat.*

1. *Quel est le résultat final si le nombre choisi est 8 ?*
2. *Quel est le résultat final si le nombre choisi est 11 ?*
3. *Traduis ce programme mathématiquement.*
4. *Quel doit être le nombre de départ pour que le résultat final soit 15 ?*

Ce programme de calcul a été obtenu après modification d'un programme de calcul tiré du mémoire de Simon Daval intitulé « l'enseignement du calcul littéral en 4^e par les programmes de calculs ». Cette modification est faite pour adapter l'exercice au niveau de la classe de 5^e. Les deux premières questions permettront aux élèves de tester le programme et la troisième question quant à elle a pour but d'amener les élèves à utiliser une lettre pour généraliser un problème ce qui fait de cet exercice un idéal pour introduire l'algèbre. Il permettra de mettre en évidence le statut de variable de la lettre.

Exercice 2 :

Je pense un nombre, j'en retranche 12 et j'obtiens 7,5. Quel est le nombre pensé ?

Cet exercice tiré du document « du numérique au littéral » du site Eduscol (p. 3) a été légèrement modifié pour être adapté à la classe de 5^e. C'est un exercice approprié pour introduire l'algèbre car il est sous forme de devinette et pourra piquer la curiosité de l'élève. Le but est de pousser l'élève à utiliser une lettre pour résoudre la devinette. Cet exercice permettra de mettre en évidence le statut d'inconnu de la lettre.

Exercice 3 :

Alice et Bertrand disposent chacun d'une calculatrice. Ils affichent un même nombre sur leur calculatrice. Alice multiplie le nombre affiché par 3, puis ajoute 4 au résultat obtenu. Bertrand, lui, multiplie le nombre affiché par 2, puis ajoute 7 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Comme le précédent, il est tiré du document « du numérique au littéral » du site Eduscol (p. 3) et peut être vu comme une devinette. Cet exercice permettra de mettre en évidence le statut inconnu de la lettre.

V. CONCLUSION

Nous avons fait une étude comparative entre le programme de mathématique du Cameroun et celui du Québec sur l'introduction de l'algèbre au secondaire. Nous avons remarqué que malgré le fait que ces deux pays utilisent l'approche par les compétences l'introduction de l'algèbre n'est pas la même dans les deux pays. Le programme du Québec est beaucoup plus détaillé et il nous montre clairement les étapes à suivre mais aussi il nomme les différents statuts de la lettre ce qui n'est pas observé dans le programme du Cameroun. En plus de cela nous avons remarqué que dans le programme du Québec les différentes branches de la mathématique sont mises en avant dès le 1^{er} cycle du secondaire ce qui familiarise les élèves avec les termes tel que : algèbre, probabilité, géométrie...etc. Au Cameroun, par contre, on note une absence de telles appellations dans le programme ce qui réduit considérablement l'impact qu'elles pourraient faire lors de leur apprentissage. Nous remarquons dans le programme du Cameroun qu'il n'y a pas mention de l'utilisation des programmes de calcul et encore moins celui des activités de modélisation qui sont pourtant les éléments phares pour introduire l'algèbre. Pour remédier à cela nous avons proposé des exercices extraits d'autres documents qui peuvent être utilisés au Cameroun pour introduire l'algèbre.

RÉFÉRENCES

- Assude, T., Coppé, S. et Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 41-62.
<https://shs.hal.science/halshs-00940357v1>
- Bair, J. (2016). Sur l'emploi de la lettre x en mathématiques . *Losanges*, (33), 24-33.
https://orbi.uliege.be/bitstream/2268/206353/1/L33_Emploix.pdf
- Daval, S. (2018). *L'enseignement du calcul littéral en 4^e par les programmes de calcul* [Mémoire de Master, ESPE de Franche-Comté]. Dumas. <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-04503173v1>
- Éduscol. (s.d.). *Du numérique au littéral*. Ministère de l'Éducation nationale de France.
- Germi, P.-E. (1996). Statut des lettres et notion de variable. *Petit x*, (45), 59-79.
- Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevotot, F. et Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (numéro spécial), 133-158.
- Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport [MELS]. (2009). *Progression des apprentissages au secondaire – Mathématique*. Gouvernement du Québec. <https://cdn-contenu.quebec.ca/cdn-contenu/education/pfeq/primaire/progressions-apprentissages/PFEQ-progression-apprentissages-mathematique-primaire.pdf>
- Ministère des Enseignements Secondaires [MINESEC]. (2023). *Programme d'études – Mathématiques 6^e, 5^e, 4^e et 3^e*. <https://www.minesec.gov.cm/web/index.php/fr/systeme-educatif/programmes-officiels>

LA LOGIQUE ET L'APPRENTISSAGE DE LA DÉMONSTRATION À LA TRANSITION SECONDAIRE-UNIVERSITÉ

| TILMAN* ÈVE

Résumé | Ce travail de recherche examine les difficultés logiques rencontrées par les étudiants lors de l'apprentissage de la démonstration mathématique à la transition secondaire-université. Il identifie plusieurs obstacles, tels que la manipulation des variables liées, la négation, la quantification implicite et la distinction entre contraposée et réciproque. L'étude analyse comment ces difficultés sont traitées dans les cours d'initiation à la démarche mathématique en Fédération Wallonie-Bruxelles et propose des perspectives de poursuite du projet.

Mots-clés : didactique des mathématiques, logique, démonstration, difficultés d'apprentissage, transition secondaire-université

Abstract | This research work examines the logical difficulties encountered by students when learning mathematical demonstration at the high school-university transition. It identifies several obstacles, such as the manipulation of related variables, negation, implicit quantification and the distinction between contraposed and reciprocal. The study analyzes how these difficulties are dealt with in introductory courses to the mathematical approach in the Wallonia-Brussels Federation and proposes prospects for continuing the project.

Keywords: Didactics of mathematics, logic, demonstration, learning difficulties, Secondary school-university transition

I. CONTEXTE

Ce projet vise à explorer les questions de logique et d'apprentissage de la démonstration à la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, dans le cadre d'une thèse en didactique des mathématiques.

Dans l'enseignement secondaire belge francophone, « Les concepts et méthodes de la logique ne font pas l'objet d'un cours spécifique, mais prennent naturellement leur place dans la plupart des unités. » (Ministère de l'Enseignement obligatoire et de promotion sociale de la Communauté française, 2025)

Les étudiants de première année de bachelier en sciences mathématiques arrivent souvent avec une vision utilitaire et technique des mathématiques. Ils rencontrent des difficultés face au langage abstrait et au concept de démonstration. En 2004, à l'université de Namur et à la suite de l'allongement des études, le cours d'initiation à la démarche mathématique est créé. Il aborde la logique des propositions et son utilisation dans des problèmes mathématiques, les stratégies de démonstration et certains concepts de base comme les ensembles et les relations. Il a pour objectif d'accompagner les étudiants et de leur faire manipuler les techniques et les concepts vus dans les cours d'analyse et d'algèbre.

Des initiatives similaires ont eu lieu dans les différentes universités de la Fédération Wallonie-Bruxelles.

* Université de Namur – Belgique – eve.tilman@unamur.be; Centre Scolaire Asty-Moulin – Belgique – tilev@site.asty-moulin.be

II. INTRODUCTION

Nos questions de recherche sont les suivantes :

- Quels sont les obstacles rencontrés par les apprenants dans leur pratique de la logique mathématique ?
- Comment ces obstacles apparaissent-ils dans les cours d'introduction à la démarche mathématique en FWB ?
- Comment les étudiants de première année se situent-ils par rapport à ces obstacles ?
- Quelles sont les pratiques enseignantes qui favorisent la disponibilité des outils de la logique mathématique ?

Ce travail vise à réaliser un état de l'art de la didactique de la logique afin d'identifier les difficultés liées à l'apprentissage de la démonstration et de chercher de quelle manière ces difficultés sont abordées au sein des cours introductifs.

Pour cela, nous allons présenter certaines difficultés connues en les illustrant par des exemples concrets. Nous allons également illustrer notre analyse par des réponses d'étudiants.

III. ÉTAT DE L'ART

Nous nous sommes intéressés aux difficultés bien connues que les étudiants peuvent rencontrer lorsqu'ils doivent comprendre ou créer une démonstration. Certaines sont d'ailleurs déjà identifiées pour les élèves de secondaire.

Pour cela, nous allons lister plusieurs difficultés, les expliquer et donner des exemples dans lesquels elles sont rencontrées.

1. *Les variables liées*

Les variables liées sont déterminées par les quantificateurs universel et existentiel. En analyse, par exemple, la définition de limite utilise des variables liées qui doivent être maniées avec prudence. Durand-Guerrier et Arsac (2003) donnent l'exemple d'une démonstration erronée du théorème des accroissements finis généralisé¹ fréquemment rencontrée chez les étudiants.

Cette démonstration consiste en l'application du théorème des accroissements finis² successivement aux deux fonctions f et g , et conclure en faisant le quotient.

L'erreur provient du fait que le réel c du théorème des accroissements finis est lié à la fonction (f ou g) sur laquelle le théorème est appliqué. Dans la pratique, les mathématiciens éviteront cette erreur en utilisant une instanciation différente du réel à chaque application du théorème.

Cette difficulté est traitée dans le cours d'initiation à la démarche mathématique. Nous allons donc pouvoir étudier comment elle est traitée.

¹ **Théorème des accroissements finis généralisé** : Étant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et deux fonctions numériques f et g définies et continues sur l'intervalle fermé $[a; b]$, dérivables sur l'intervalle ouvert $]a; b[$, si la dérivée g' de la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]a; b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a; b[$, tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

² **Théorème des accroissements finis** : Étant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction numérique f définie sur l'intervalle fermé $[a; b]$, si f est continue sur l'intervalle fermé $[a; b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a; b[$, tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

2. La négation

La négation a pour effet de changer la valeur d'une proposition. Elle est problématique dans de nombreux cas. Illustrons cela par un exemple issu du séminaire du réseau des IREM du 20 mars 2024 (Lac, Bernard et Mesnil, 2024) présentant la brochure de Logique et raisonnement.

Lorsqu'on demande à des enseignants ou des étudiants en formation d'enseignant de donner la négation de la proposition suivante :

- « Si le triangle ABC est rectangle en A , alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$? »,

beaucoup répondent :

- « Si le triangle ABC n'est pas rectangle en A , alors $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$? »,

Or, d'une implication universellement quantifiée fait apparaître une existentielle et une conjonction :

- « Il existe un triangle ABC rectangle en A tel que $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ ».

Il est évident que si cette difficulté est présente pour les enseignants, elle est aussi présente pour les élèves.

Nous retrouvons également cette difficulté dans les réponses d'étudiants. Nous avons accès aux réponses données dans le cadre des « Passeports pour le bac » (Massart, 2025)³. Il s'agit d'un projet comprenant une évaluation formative des prérequis, sous forme de questionnaire à choix multiples, à destination des étudiants en début de première année d'université à l'université de Namur et à l'UCLouvain Saint-Louis Bruxelles. Ces étudiants n'ayant pas encore reçu d'enseignement universitaire, ce sont leurs connaissances antérieures qui sont évaluées.

La question ciblée dans notre analyse est la suivante :

34. La négation de la phrase « personne n'aime tout le monde » est :

- (a) Personne n'aime personne.
- (b) Tout le monde aime quelqu'un.
- (c) Tout le monde aime tout le monde.
- (d) Il y a au moins quelqu'un qui aime tout le monde.
- (e) Il y a au moins quelqu'un qui n'aime personne.

Figure 1 – Question 34 des Passeports pour le bac 2024 sur la négation

Cette question regroupe de nombreuses difficultés. Tout d'abord, la phrase est écrite en français. Cela augmente le recours à l'usage de la langue française plutôt qu'à la logique mathématique. Ensuite, les expressions « personne » et « tout le monde » font référence au quantificateur logique universel. Enfin, la négation est elle-même une difficulté. Dans son habilitation à diriger des recherches, Viviane Durand-Guerrier explique en détail les difficultés liées à la négation, et en particulier la distinction entre négation et contraire. Elle y explique que deux propositions sont contraires si elles ne peuvent être vraies simultanément, alors que deux propositions sont la négation l'une de l'autre, si elles échangent

³ Le nom du projet vient du fait qu'en Belgique, le nom du diplôme de premier cycle d'université est le bachelier, usuellement abrégé en « bac ».

leurs valeurs de vérité, c'est-à-dire que lorsque l'une est vraie, l'autre est fausse et inversement (Durand-Guerrier, 2005).

Bien que la réponse correcte soit la réponse (d), les répondants donnent majoritairement les réponse (b). En effet, ce distracteur est un contraire de la proposition à nier.

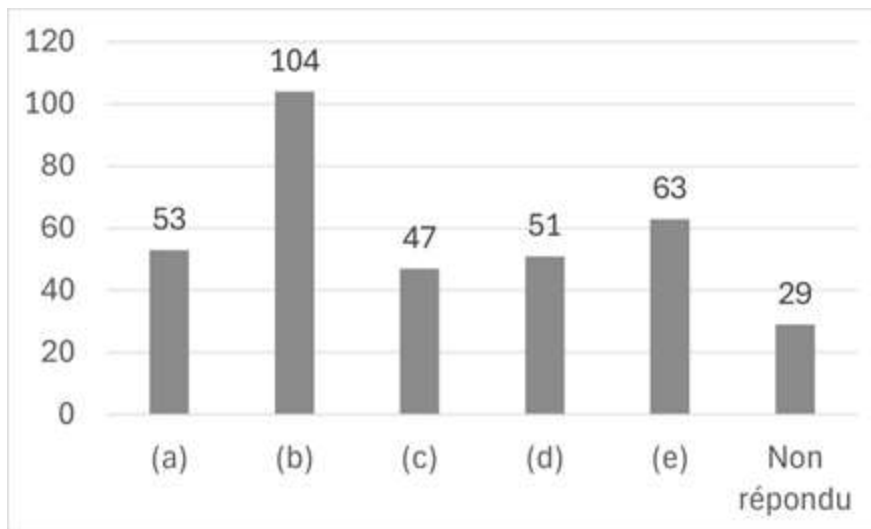


Figure 2 – Réponses données par les étudiants à la question 34 du Passeport pour le bac 2024

Cette difficulté est traitée dans le cours d'initiation à la démarche mathématique. Nous allons donc pouvoir l'analyser également.

3. La quantification implicite

La quantification implicite est problématique, car elle peut aboutir à une contingence de la valeur de vérité. Durand-Guerrier (1999) analyse cette contingence dans l'exemple du labyrinthe (voir figure 3).

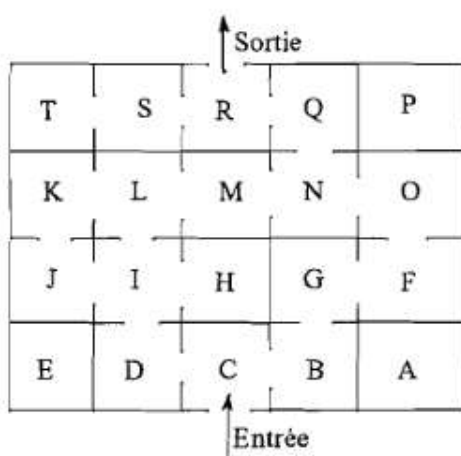


Figure 3 – Exemple du labyrinthe

L'énoncé est le suivant : une personne, que nous appellerons X , a traversé ce labyrinthe, de l'entrée à la sortie, sans jamais passer deux fois par la même porte. Les pièces sont nommées $A, B, C \dots$ comme

il est indiqué sur la Figure 3. Pour chaque proposition, les élèves doivent dire si elle est vraie, fausse ou si on ne peut pas savoir si elle est vraie ou fausse.

La proposition amenant le plus de contingence est : « Si X est passé par L , alors X est passé par K ». Durand-Guerrier analyse dans son article que cette incertitude est causée par l'existence de chemins passant par L et K aussi bien que de chemins passant par L , mais pas par K . La quantification étant implicite, les élèves ne savent généralement pas se prononcer sur la valeur de vérité de l'énoncé.

On retrouve également cette contingence chez les élèves plus jeunes. Voici un exemple donné dans Durand-Guerrier et Arsac (2003), dont la source est un énoncé universellement quantifié faux : « Soit Q un quadrilatère. Si les diagonales de Q sont perpendiculaires, alors Q est un losange ».

Cette fois encore, on peut donner des exemples où l'énoncé est vérifié et d'autres où il ne l'est pas. La quantification étant implicite, on ne peut pas dire si cet énoncé est vrai ou faux.

La quantification implicite est également traitée dans le cours d'initiation à la démarche mathématique. Par exemple, un exercice demande d'écrire sous forme mathématique la définition d'une application injective : deux points distincts ont des images distinctes.

4. *Implications dont la prémisse est fausse*

La table de vérité de l'implication amène toujours des discussions et des difficultés. En particulier, lorsque la prémisse est fausse. Or, cette propriété est utilisée dans toutes les implications universellement quantifiées. Dans la présentation de la brochure sur la logique (Lac, Bernard, et Mesnil, 2024), Mesnil illustre son propos en expliquant que dans la démonstration d'une implication, on ne démontre que le cas où la prémisse est vraie, car on sait que l'implication est vraie lorsque la prémisse est fausse. Elle donne également un exercice pour travailler l'implication : « Démontrer que pour tout entier naturel n , $(10n + 1 \text{ divisible par } 9) \Rightarrow (10n+1 + 1 \text{ divisible par } 9)$ ».

5. *Distinction entre contraposée et réciproque d'une implication*

La confusion entre contraposée et réciproque d'une implication est bien connue et travaillée en conséquence dans le cours d'initiation à la démarche mathématique. Par exemple, l'exercice suivant est proposé : « Énoncé (en français) la négation, la contraposée et la réciproque de l'implication suivante : "Si je réussis mes examens et si j'ai assez d'argent, alors je pars en vacances" ».

6. *Distinction entre démonstration par contraposée et par l'absurde*

Les démonstrations par contraposée et par l'absurde peuvent facilement être confondues. Les deux stratégies reposent sur la négation. Une démonstration par l'absurde nie le contexte, une démonstration par l'absurde nie quant à elle la thèse d'une implication explicite et conclut en niant son hypothèse.

La preuve par l'absurde est majoritairement utilisée pour la démonstration de non-existence ou l'unicité. Celle par contraposée est quant à elle utilisée pour démontrer les implications dont l'antécédent est compliqué. S'il est simple, on utilisera plutôt une preuve directe.

Cette distinction est explicitée dans le cours sous la forme suivante :

Preuve par contraposée :	
à démontre	$P \Rightarrow Q$
on démontre	$\neg Q \Rightarrow \neg P$

Preuve par l'absurde :	
à démontrer	$P = 1$
on démontre	$\neg P = 0$ (on suppose que la négation est vraie et on essaie d'aboutir à une contradiction)

Figure 4 – Distinction entre démonstration par contraposée et par l'absurde

D'autres difficultés, comme la récurrence, existent et pourraient être creusées. Nous décidons cependant de ne pas nous y attarder dans un premier temps.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons identifié, expliqué et illustré, au sein de la logique, les difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'apprentissage de la démonstration. Cela nous a permis d'étudier la manière dont ils sont traités dans les cours d'introduction à la démarche mathématique à l'université de Namur.

Nous pourrions étendre cette analyse aux autres universités de la Fédération Wallonie-Bruxelles et analyser des réponses d'étudiants au sein de l'évaluation de ces cours.

Dans un second temps, notre travail portera sur la manière dont les étudiants de première année se situent par rapport à ces difficultés dans les cours de mathématiques générales tels que l'analyse ou l'algèbre.

Nous nous demanderons également ce que nous pouvons mettre en place pour que les étudiants et les enseignants puissent rentrer les éventuels obstacles non traités dans le cadre des cours d'initiation.

RÉFÉRENCES

- Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x*, (50), 57-79.
- Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique* [Habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard – Lyon I]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-00201626v1>
- Durand-Guerrier, V. et Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(3), 295-342.
- Lac, P., Bernard, D. et Mesnil, Z. (2024, 20 mars). *Présentation de la brochure Logique et raisonnement de la commission Inter-Irem Lycée* [Vidéo]. Serveur vidéo de l'IREM de Paris. <https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/w/e7abb54e-b593-4046-b937-82ff6fb23ba7>
- Massart, X. (2025). *Passeport pour le BAC*. Repéré le 30 juin 2025 au : <https://www.passeportspourlebac.be/>
- Ministère de la Communauté française. (2014, 17 avril). *Arrêté du Gouvernement de la Communauté française déterminant les compétences terminales et savoirs requis à l'issue de la section de transition des humanités générales et technologiques en mathématiques, en sciences de base et...* (Numac : 2014029173) Service Public Fédéral Belge. <https://www.ejustice.just.fgov.be/eli/arrete/2014/01/16/2014029173/moniteur>

LA DÉVOLUTION DE LA LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE EN CLASSE DE TERMINALE EN ALGÉRIE

| ZEDEK-LEDJIAR* NACIMA

Résumé | L'enseignement des probabilités et des statistiques, l'acquisition de la pensée aléatoire et la maîtrise du hasard sont faiblement étudiés dans les lycées algériens au contraire des lycées français. Depuis les années 2000, l'enseignement des probabilités au lycée pour le programme français est passé d'une approche fréquentiste à une approche Laplacienne. Mes recherches présentent deux objectifs principaux : étudier comment l'objet dit « linéarité de l'espérance » vit-il dans le système scolaire français. Analyser, l'introduction de cette notion en classe par le professeur : Dévolution.

Mots-clés : dévolution de la linéarité, espérance mathématique, contrat didactique, probabilités, obstacle didactique

Abstract | The teaching of probability and statistics, the acquisition of random thinking, and the mastery of chance and poorly studied in Algerian high schools, unlike in French high schools. Since the 2000s, the teaching of probability in French high school curricula has shifted from a frequentist approach to a Laplacian approach. My research has two main objectives. First, it focuses on studying how the concept known as "linearity of expectation" is integrated into the French educational system. Second, it analyzes how teachers introduce this concept in the classroom.

Keywords: Devolution of linearity, mathematical expectation, expected value, didactic contract, probabilities, didactic obstacle

I. INTRODUCTION

Pourquoi l'étude des probabilités fait-elle si peur, aussi bien aux élèves qu'aux enseignants ? Est-ce trop abstrait dans leur esprit ? Pourquoi ne parviennent-ils pas à matérialiser cette notion ? Ces questionnements font écho à ceux de Raoult et Arnoux (2013) :

Cette place de ces disciplines au sein de l'édifice mathématique est de plus en plus reconnue par les chercheurs ; pourquoi donc la retombée de cette conviction sur la pratique enseignante rencontre-t-elle tant d'obstacles en France ? Et pour ceux qui objectent le manque d'attractivité de ces branches de programmes, telles qu'ils les voient en œuvre dans les collèges et lycées aujourd'hui, nous voudrions les persuader que, au contraire, nombre d'élèves peuvent être stimulés par le fait qu'on peut leur présenter là des mathématiques « en action », avec des possibilités de traitement réfléchi de données réelles (et non « de manière passive » comme semble le juger inévitable Pierre Colmez. Encore faudrait-il que les programmes soient largement repensés et les enseignants mieux aidés. (Arnoux et Raoult, 2013, s. p.)

C'est ce qui m'a motivée à vouloir observer comment l'enseignant et les élèves appréhendent cette notion, en classe.

II. ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LES INSTITUTIONS FRANCOPHONES EN ALGÉRIE

L'enseignement des disciplines dites scientifiques en Algérie dans les milieux scolaires francophones se fait au primaire et au collège dans les deux langues ; Arabe littéraire¹ et Français. Dans l'enseignement secondaire, en France, la notion de probabilité est intégrée dans le domaine « statistiques et

* Lycée Privé El Malak – Algérie – zedeknacima@gmail.com

¹ L'arabe littéraire langue de scolarisation n'est pas le même que l'arabe dialectale parlé au sein des familles.

probabilités ». Dans la section « Modéliser le hasard, calculer des probabilités » du programme de seconde (élèves de 15-16 ans) (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, 2019a, p. 14), les contenus à l'étude sont les suivants :

- Ensemble (univers) des issues. Événements. Réunion, intersection, complémentaire.
- Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un événement : somme des probabilités des issues.
- Relation $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
- Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.

Dans ce même programme, les capacités attendues des élèves sont les suivantes :

- Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.
- Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
- Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves. (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, 2019a, p. 14)

Les notions abordées en classe de première (élèves de 16-17 ans) (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, 2019b), selon la nouvelle réforme mise en vigueur depuis 2019 sont : les variables aléatoires discrètes, les lois de probabilité de variables aléatoires discrètes et le schéma de Bernoulli. L'enseignement s'organise entre autres autour des buts suivants :

- Introduire la notion de probabilité conditionnelle, sous-jacente dans toute modélisation probabiliste, et mettre en évidence la problématique de l'inversion des conditionnements ;
- Formaliser la notion d'indépendance ;
- Introduire la notion de variable aléatoire, en lien étroit avec les applications des probabilités ;
- Introduire les notions d'espérance, de variance et d'écart-type d'une variable aléatoire ; [...]
- Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème (mise pour un jeu équitable...). (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, 2019b, p. 12-14)

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire est estimée comme une moyenne observée sur un échantillon. Il n'y a aucune allusion à la propriété de linéarité.

En terminale (élèves de 17-18 ans), le nouveau programme a réintégré le calcul combinatoire et le dénombrement où les ensembles considérés sont finis, on étudie les probabilités conditionnelles, la notion d'indépendance, les lois de probabilité de variables aléatoires discrètes vues en classe de 1^{re}.

Le schéma de Bernoulli est considéré fondamental : succession de n épreuves identiques indépendantes à deux issues. Tirage avec remise dans une urne de Bernoulli, lancers de pièce, etc. L'indépendance des expériences se traduit par la propriété multiplicative : la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités des résultats. La linéarité de l'espérance introduite dans le nouveau chapitre « somme de variables aléatoires » donne un outil très puissant permettant de déterminer l'espérance d'une variable aléatoire sans avoir à en déterminer la loi. L'additivité de la variance pour les variables indépendantes est présentée dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes. Elle permet d'établir l'expression de la variance de la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire (mise pour un jeu équitable...). (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse, 2019c).

III. PROBLÉMATIQUE

Comment le professeur va-t-il faire pour se placer dans un processus de dévolution de la propriété de linéarité de l'espérance mathématiques ?

L'étude sera basée sur l'observation de la séance d'activité mise en place par l'enseignant. Deux questions spécifiques de recherche, d'abord centrées sur l'enseignant, sont établies dans ce contexte :

1. Quelles stratégies l'enseignant met-il en place pour aborder cet objet ?²
2. Quelles sont les difficultés qu'il rencontre pour mettre en place ce dispositif ?

Le cadre théorique de la transposition didactique nous permettra de définir une méthodologie, pour analyser la démarche choisie par le professeur de la mise en place en classe du dispositif expérimental.

La théorie de la transposition didactique telle qu'elle a été développée par Chevallard (1991), est celle des savoirs et des institutions. Cette théorie met en évidence le problème de légitimation des objets de savoir enseignés, et l'apparition systématique de l'écart entre un savoir enseigné et les références qui les légitiment, écart dû à des contraintes pesant sur le fonctionnement du système d'enseignement.

Nous avons étudié cette transposition et la démarche activée au sein de la classe de terminale, spécialité mathématiques, dans le Lycée International Alexandre Dumas³, à Alger, en suivant trois étapes :

- a) La présentation des programmes officiels de la classe de terminale, spécialité mathématiques ;
- b) Comment cette définition des programmes conduit-elle à des praxéologies exprimées dans le manuel ;
- c) De quelle manière le professeur l'adapte-il à ses élèves.

La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème, et, accepte lui-même les conséquences de ce transfert. La dévolution, ou le processus de dévolution, désigne l'ensemble des actions de l'enseignant visant à rendre l'élève responsable de la résolution d'un problème ou d'une question en suspens (Brousseau, 1998).

Le concept de dévolution apparaît ainsi pour rendre compte de certains dysfonctionnements dans le déroulement didactique d'une séquence d'enseignement. Comment expliquer que certains élèves n'identifient pas les objets proposés par l'enseignant comme éléments d'un milieu pour apprendre ?

Le fondement épistémologique de la dévolution et du contrat didactique est étroitement associé à la théorie des situations.

Nous souhaitons aussi décrire comment les élèves construisent la notion de linéarité de l'espérance mathématique en utilisant des connaissances antérieures et comment vont-ils lui donner du sens dans une situation nouvelle. Autrement dit, une troisième question de recherche, celle-ci centrée sur les élèves, est établie :

² Nous questionnerons aussi le rôle de l'enseignant dans la gestion des artefacts numériques (logiciels, comme par exemple la calculatrice) qui encadrent l'activité.

³ Lycée de programme français.

3. De quelle manière les élèves vont se saisir d'un enseignement précis sur la propriété de la linéarité de l'espérance mathématique, sous un contrat didactique nécessaire à la pratique du professeur ?

IV. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

1. *Présentation du problème proposé aux élèves*

Le professeur propose aux élèves un exercice qu'il a réfléchi, conçu et écrit au tableau, il leur explique ensuite l'activité d'étude et de recherche (AER), en prenant appui sur le référentiel théorique. Ici, l'événement élémentaire considéré, comme on le voit sur la Figure 1, est le suivant : « Nous notons X le nombre de fois qu'on a obtenu PILE » (avec une pièce de 1 €). L'événement élémentaire présenté à la Figure 2 est celui-ci : « Nous notons Z le nombre de fois qu'on a obtenu PILE » (avec les deux pièces).⁴

Cette étape fait appel au référentiel théorique des probabilités (la notion d'événements et d'événements contraires). Les élèves doivent identifier les événements considérés en accord avec l'activité proposée par le professeur. Le travail des élèves doit prendre appui sur les résultats issus du lancer des deux pièces.

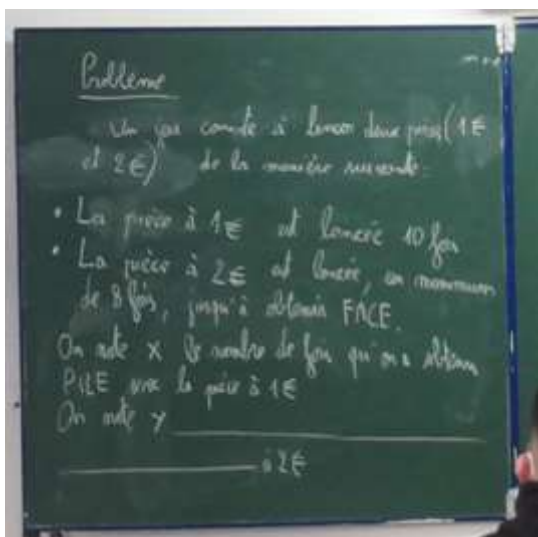


Figure 1

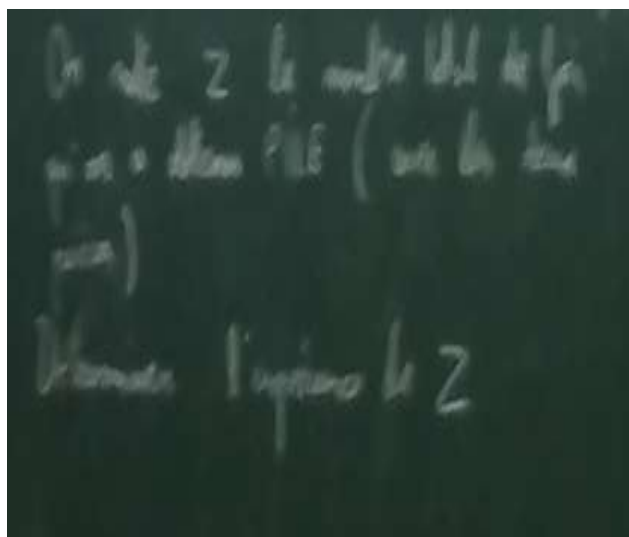


Figure 2

2. *Analyse à priori de la séance*

L'analyse a priori réalisée par le didacticien permet de prévoir les conduites probables des élèves sur le dispositif en relation avec les objets de savoir sollicités. Le professeur veut que les élèves mobilisent leurs connaissances sur la loi binomiale et la loi géométrique tronquée, vues lors des séances préalables avec lui pour la résolution de la tâche, enjeu de l'étude (Dialectique ancien-nouveau).

⁴ Cette explication participe à la dévolution de la situation.

Il pense que les élèves mobiliseront une approche Laplacienne, en prenant appui sur un outil sémiotique tel qu'un arbre de dénombrement ou un tableau à double entrée, afin d'institutionnaliser la tâche liée à la propriété de linéarité de l'espérance mathématique, enjeu de l'étude.

Cette activité a été conçue par le professeur de telle sorte à ce que la question principale aboutisse à un obstacle que les élèves doivent confronter. Ils devront se poser alors d'autres questions au cours de la recherche, et les nouvelles réponses obtenues leur permettront d'aboutir à la réponse.

Cette activité nous permet de rencontrer deux variables X et Y , leurs lois de probabilités respectives et leurs espérances respectives. Les élèves auront à définir chacune des variables, ainsi que leurs loi et espérances, respectives.

3. *Le moment de première rencontre*

Le moment de première rencontre par définition permet de rencontrer le type de tâche. Il s'agit ici, d'un moment de première rencontre auquel les élèves ont déjà été exposés lors des séances précédentes des cours sur la loi binomiale et la loi géométrique.

Cependant, ici, le nouveau moment de première rencontre est le moment de rencontre d'une tâche du type, t : « calcul de l'espérance de Z , somme de deux variables X et Y ».

Ce type de tâches $t \in T$: « comment démontrer que l'espérance d'une somme est la somme des espérances ? ». Les élèves savent calculer l'espérance pour une loi binomiale, ils savent le faire pour la loi géométrique. Ils vont essayer d'articuler leurs connaissances pour démontrer que $E(Z) = E(X) + E(Y)$.

La question est : Comment faire ? D'où le moment exploratoire. Les élèves exploitent leurs connaissances pour explorer le type de tâche de leur activité. Ils travaillent en autonomie, chacun à sa place, le professeur les laisse faire. Il constate des éléments technologiques qui émergent chez certains élèves, avec des erreurs chez les uns, des non aboutis chez les autres.

Tous s'affairent à l'activité, le professeur va guider, conseiller, mais il laisse un topo assez large aux élèves dont voici quelques ébauches.

Quand on observe l'activité humaine dans différentes institutions, il apparaît presque toujours un discours autour de la technique pour accomplir T , même si ce discours est naturalisé, évanouissant, discours dont le but est de légitimer, de justifier la manière de faire τ , c'est la troisième composante du modèle que nous appellerons la technologie Θ . Ce mot de technologie est à prendre dans son sens étymologique, discours (logos) sur la technique (techne). C'est une nécessité qui surgit dès qu'on demande une description du faire. Une technologie peut différer suivant l'institution dans laquelle la praxéologie est observée, et il n'y a pas de norme : une technologie relative à une technique peut être sans rapport avec la théorie scientifique. Notons que cette remarque vaut aussi pour les techniques : une technique peut être maladroite, ne pas bien marcher. (Artaud et Sahraoui-Kaidi, 2004, p. 4).

Nous verrons que quelques élèves se rapprochent quand-même de la bonne technologie dont voici le brouillon de l'un d'entre eux :

Tableau de la loi binomiale $X \sim B(10, \frac{1}{2})$

k	$P(X=k)$
0	$\frac{1}{1024}$
1	$\frac{10}{1024}$
2	$\frac{45}{1024}$
3	$\frac{120}{1024}$
4	$\frac{210}{1024}$
5	$\frac{252}{1024}$
6	$\frac{210}{1024}$
7	$\frac{120}{1024}$
8	$\frac{45}{1024}$
9	$\frac{10}{1024}$
10	$\frac{1}{1024}$

Calculs :

$$P(X=2) = P(X=2) + P(X=2) = \frac{45}{1024} + \frac{10}{1024} = \frac{55}{1024}$$

$$P(X=1) = P(X=1) + P(X=1) = \frac{10}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{11}{1024}$$

Figure 3 – Brouillon d'un élève

L'heure arrive presque à sa fin, le professeur veut mettre au tableau, par un élève, les ingrédients technologiques nécessaires.

$$X \sim B(10, \frac{1}{2})$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

Loi de probabilité de X

X_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

$$P(X=k) = (1-p)^k p$$

$$E(X) = p \sum_{k=0}^n (1-p)^k k$$

$$E(X) = \frac{p}{1-p} [1 - (1-p)^{n+1}]$$

Loi de probabilité de Y

Y_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(Y=Y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$

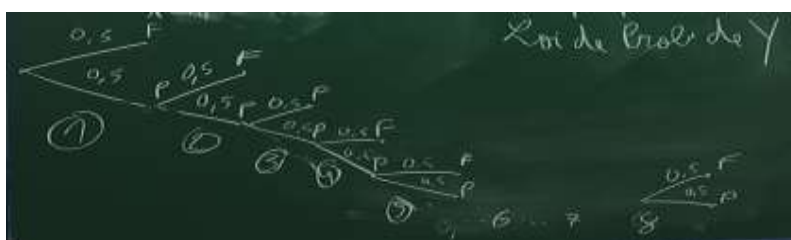


Figure 4

Seulement, les élèves se rendent compte que la loi de probabilité de la variable Y est erronée : la somme des probabilités ne donne pas 1.

L'heure sonne, la première séance s'arrête car il est 17h. Le professeur ayant compris d'où venait l'erreur, demande aux élèves de reprendre l'activité chez-eux pour qu'ils parviennent à le comprendre eux-mêmes.

Après la sortie des élèves le professeur me fait remarquer que les élèves n'ayant pas fait un arbre complet, ont oublié de comptabiliser la probabilité sur une branche d'où le manquement pour une somme de probabilité de 1. Il reprend le lendemain matin à la première heure, c'est-à-dire 8 heures du matin. Et là, bonne nouvelle le tableau n'est pas effacé depuis la veille, l'enseignant commence par un retour sur des erreurs repérées lors de la séance précédente (Figure 5). Tous les éléments sont encore présents pour confronter la bonne réponse apportée le matin par certains élèves, par rapport à l'erreur de la veille.



Figure 5

Un élève passe au tableau, reprend l'arbre et continue de traiter l'exercice en utilisant un tableau à double entrée pour commencer le calcul de la somme de variable aléatoire $Z=X+Y$.

$$P(Z=0) = P(X=0) \times P(Y=0)$$

$$P(Z=0) = \frac{1}{1048} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2096}$$

$$P(Z=1) = P(X=0) \times P(Y=1) + P(X=1) \times P(Y=0)$$

$$P(Z=1) = \frac{10}{1048} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1048} = \frac{11}{2096}$$

$$P(Z=2) = P(X=1) \times P(Y=1) + P(X=2) \times P(Y=0)$$

Figure 6 – calcul de variable aléatoire $Z=X+Y$

On sait que $Z = X + Y$
Déterminons toutes les valeurs que prend Z

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Figure 7 – Tableau double entrée

Les élèves font remarquer que les deux événements sont indépendants et commencent le calcul de $P(Z=0)$, $P(Z=1)$ et $P(Z=2)$ comme le montre le tableau à droite, ci-dessus.

Nous remarquons, lors de cette étude, qu'il y'a une partielle rupture de contrat didactique. Car les élèves vont vite s'apercevoir que leurs connaissances sur $E(X)$ et $E(Y)$ ne suffisent pas à trouver une formule à partir du tableau à double entrées qu'ils établissent.

L'extrait du verbatim entre le professeur et les élèves qui suit, témoigne de la manière dont l'enseignant va conduire la classe par un jeu de questions-reponses pour faire émerger la technique.

- P : « Vous avez à la fois les valeurs prises par X et les valeurs prises par Y,...inaudible..., on entre dans une forme de complexité qui fait intervenir plusieurs variables aléatoires, c'est tout l'enjeu de l'activité, un enjeu important ». Silence dans la salle puis le professeur reprend.
- P : « ... en mathématique, on a souvent à décomposer les problèmes complexes en problèmes plus simple ». Silence dans la salle les élèves travaillent chacun devant sa feuille. Le professeur passe dans les rangs, observe les brouillons des élèves.

C'est à partir de cet instant que la question que le professeur veut dévoluer aux élèves émerge chez certains d'entre eux. Le professeur décide alors de faire passer un élève au tableau :

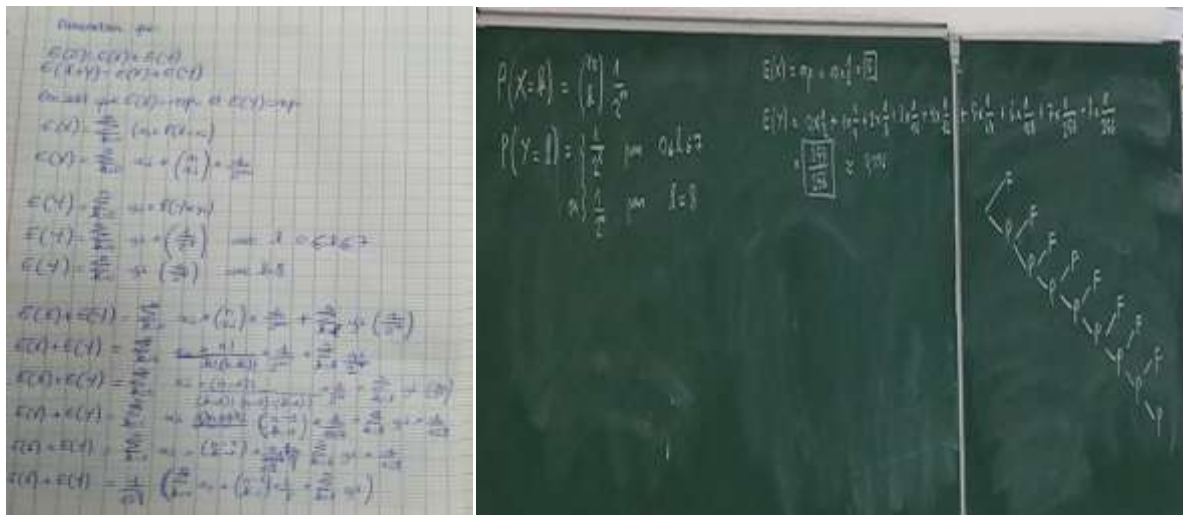


Figure 8

Nous pouvons constater ci-dessus, que l'élève a décidé de reprendre l'arbre pondéré de la loi géométrique sur le tableau, et a commencé, ensuite, à redéfinir la loi de chacune des deux variables aléatoires X et Y, puis à calculer l'espérance pour chacune d'entre elles selon ses pré-requis. Ce qui fera émerger un nouveau questionnement : Comment faire ? Sachant que dans l'organisation mathématique du cursus, les élèves ne sont pas censés rencontrer le « SIGMA », sauf que cette classe-là, l'avait étudié au préalable avec le professeur. Ainsi le professeur a surmonté la contrainte de non-existence de ce symbole officiellement dans le programme, en le faisant rencontrer à ses élèves dans des séances précédentes à travers des activités.

Le rapport des élèves à ce savoir (Σ) hors du contrat didactique du programme a été renforcé par le professeur. Ce qui a rendu ce rapport non vide. Mais cela a coûté un temps didactique supplémentaire. Ainsi, le programme officiel confronte les élèves à ce type de tâches, mais ne donne pas la technique de démonstration requise.

Les élèves ont un nouvel ingrédient qu'il faudrait ensuite amalgamer à la réponse déjà mise en forme. Ce processus d'amalgamation d'un certain nombre de réponses entre elles nous semble être rendu spécialement nécessaire pour produire la technologie nécessaire pour cette AER. Pour finalement définir la théorie autour de « Lois des grands nombres » établit les conditions sous lesquelles la moyenne de la somme de n variables aléatoires indépendantes, centrées sur leur espérance mathématique, converge en loi. Même si elle n'est pas énoncée explicitement, en tant que telle par les élèves.

$$P(X=2) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

$$P(Y=1) = \binom{n}{k-1} \frac{1}{2^n}$$

Démonstration que :

$$E(Z) = E(X) + E(Y)$$

Figure 9

On aboutit lors de la séance observée à un résultat de nature technologique et à l'émergence d'une nouvelle question cruciale : Peut-on trouver ce résultat d'une manière moins longue ? Effectivement, le professeur leur montre sur le tableau, comment investir leurs connaissances autrement, et de là l'institutionnalisation.

V. CONCLUSION

L'analyse de la séance de travail a mis en évidence les difficultés chez les élèves sur la maîtrise des propriétés d'associativité des sommes et révèle les obstacles didactiques et épistémologiques dans l'enseignement et l'apprentissage de ses objets. Ce qui a été un frein pour les élèves à l'aboutissement de la démonstration de manière optimale de la linéarité de l'espérance mathématique, alors que les autres objets semblaient mieux acquis, notamment la loi de probabilité, l'application de la loi binomiale et la loi géométrique tronquée. Le milieu sera pertinent pour l'analyse des phénomènes observés lors de l'expérimentation présentée. La démonstration des élèves s'avérait plus couteuse que celle du professeur. Nous constatons lors de l'économie de la technique apportée par le professeur que les élèves arrivent à donner du sens à la problématique.

RÉFÉRENCES

- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.
- Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Dans N. Bednarz et C. Garnier (dir.), *Construction des savoirs, obstacles et conflits* (p. 41-63). CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516581v1>
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112. <https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/>
- Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R. et Floris, R. (dir.). (2002). *Actes de la 11^e école d'été de didactique des mathématiques, 21-30 août 2001, Corps (Isère)*. La pensée sauvage.
- Ministère de l'Education nationale (MEN), et Direction de l'Enseignement Scolaire. (2019). *Mathématiques. Classe de première des séries générales*. Centre national de documentation pédagogique.
- Raoult, J.-P. et Arnoux, P. (2013). *Pourquoi enseigner les probabilités et la statistique dans les cours de mathématiques*. Image des maths. <https://images.math.cnrs.fr/billets/pourquoi-enseigner-les-probabilites-et-la-statistique-dans-les-cours-de-mathematiques-completer/>

**PROJET SPÉCIAL 2 |
MATHÉMATIQUES ET
SOCIÉTÉS**

BILAN DU PROJET SPÉCIAL 2

MATHÉMATIQUES ET SOCIÉTÉS

| SINCLAIR* NATHALIE, SALONE** JEAN-JACQUES ET BELBACHIR*** HACÈNE

Au cours des deux sessions du Spé2, il y a eu cinq présentations. Nous résumons ci-dessous chacune d'entre elles.

1. **Achraf HAJBY**: « *Comment des enseignants de Guadeloupe conçoivent-ils la contextualisation didactique lors d'activités de résolution de problèmes ?* »

La présentation a porté sur l'exploration de la manière dont les spécificités territoriales colorent les savoirs mathématiques et comment elles peuvent être prises en compte dans les pratiques d'enseignement, en cherchant à valoriser les contextes locaux dans l'enseignement des mathématiques sans pour autant renforcer les inégalités scolaires.

L'idée est de tenter de comprendre comment les enseignants conçoivent la contextualisation des savoirs mathématiques et d'étudier l'intégration des spécificités territoriales dans leurs pratiques.

Les savoirs étant socialement situés, leur perception et leur transmission sont influencées par le contexte dans lequel ils s'inscrivent. Ainsi, avant l'enseignement, les discussions entre enseignants portaient principalement sur la progression des élèves (dans une planification basée sur une logique technico-pédagogique). Après l'enseignement (transformation), les échanges se sont déplacés vers la planification prenant en compte la dimension culturelle du savoir et donc une sensibilité aux réalités locales et aux expériences proches des élèves.

Des effets de contexte sont identifiés :

- Prises de conscience de la puissance pédagogique de la contextualisation.
- Ajustements en temps réel rendus possibles par une meilleure conscience des enjeux contextuels.
- Aller au-delà l'adaptation locale du curriculum.
- La contextualisation n'est pas un simple habillage, mais une reconfiguration du rapport au savoir.

Il y a eu une discussion à propos du concept de contexte. Sachant que les auteurs de référence en proposent tous des catégorisations différentes, est-ce vraiment un concept ? Pour Hajby, le concept de contexte est défini dans ses recherches comme l'ensemble de règles actuelles ou potentielles, explicites (institutionnelles) ou implicites (partagées en pratique). Selon lui le contexte n'est pas que socio-culturel, il est aussi lié à l'écologie, ce qui est très important, par exemple, dans les recherches portant sur les connaissances autochtones.

* Simon Fraser University – Canada – nathalie_sinclair@sfu.ca

** CRREF, Université des Antilles – France (Guadeloupe) – jean-jacques.salone@univ-antilles.fr

*** USTHB, Laboratoire RECITS – Algérie – hacenebelbachir@gmail.com; hbelbachir@usthb.dz

2. **David GUILLEMETTE** : « Une réflexion conjointe sur les enjeux sociaux et politiques de l'enseignement des mathématiques »

Cette présentation a abordé la question des enjeux socio-politiques dans l'enseignement des mathématiques. Les chercheurs ont tenté de documenter une réflexion à propos de ces enjeux et de la manière d'en tenir compte dans la pratique. Les chercheurs sont allés voir pour cela des enseignants pour réfléchir avec eux mais sans apporter quoi que ce soit comme base de discussion. Cela a suscité une discussion ouverte et spontanée. Quatre enseignants et une équipe de quatre personnes issues du monde de la recherche ont ainsi été conviés à trois réunions d'une demi-journée.

Des thèmes ont émergé qui ne cadraient pas nécessairement avec les anticipations des chercheurs :

1. Évaluation
2. Question de genre
3. Changement climatique

L'équipe de chercheurs/enseignants a ensuite créé quatre textes autour de ces thèmes émergents sous la forme de récits dialogiques. David en a lu un à haute voix.

3. **Shaula FIORELLI** : « Comparaison de deux dispositifs de recherche mathématique : Stage ludique et travail de master »

La présentation portait sur les activités en médiation mathématique à l'Université de Genève par rapport au programme Marmottes, qui est un camp de mathématiques pour les jeunes filles de 16 à 18 ans. Les filles n'ont pas de profil préétabli pour participer. Il y a de la publicité dans les écoles des cantons de Genève, Vaud et Valais. L'objectif : mettre les filles en situation de recherche. On souhaite également faire en sorte que les filles développent une attitude positive vis-à-vis de l'échec. Il s'agit d'un enseignement informel puisque le camp n'est pas dans un cadre scolaire. Il y est question de problèmes ouverts à partir desquels les campeuses travaillent comme par exemple à partir d'un tour de magie avec des cartes mathématiques ou autour des ballons de foot qui ne sont pas tous pareils et leur fabrication.

L'étude cherchait à établir une comparaison avec un travail de Master pour mettre en évidence les divergences et les ressemblances, notamment dans les objectifs réels d'apprentissage. L'analyse de raisons de l'échec et des pistes d'amélioration s'est faite au travers d'un cahier de bord constitué de feuilles avec des questions. Mais les données n'étaient pas très éclairantes à cause de la gestion de leur collecte (pas de temps alloué) et de la faible motivation des filles à entrer dans une réflexion.

La discussion s'est déroulée autour de la question des cahiers de bord. Pourquoi ne pas échanger à l'oral ? Pour les feuilles, est-ce envisageable de fournir une liste de questions plus tôt pour laisser une marge de manœuvre ? La chercheuse se demande si avec des entretiens les filles pourraient se sentir évaluées.

On a aussi suggéré :

- *Brainstormer* de manière collective autour de leur projet. Ces moments pourraient même être enregistrés.
- Pour motiver et éviter que les filles sollicitent trop les encadrantes, il pourrait y avoir un système de jetons.

On a suggéré que les concepts de capacitation ou d'agentivité pourraient servir de lentille pour analyser l'attitude vis-à-vis l'échec.

4. **Jean-Berky NGUALA et Dominique TOURNÈS** : « *Contextualisation forte et développement professionnel : expérience d'un dispositif de formation à Mayotte* »

La présentation a commencé avec une description des enjeux éducatifs à Mayotte

- Inégalités éducatives
- Inégalités sociales
- Inégalités matérielles (manques de locaux)

La question posée est « en quoi l'implication des étudiants stagiaires (enseignants en formation initiale) dans un dispositif de formation spécifique contextualisé permet de développer chez eux des gestes professionnels » ? Le dispositif est celui dit des « œuvres coopératives » (Salone, 2019) qui avait déjà été expérimenté dans le premier degré et qui pour cette étude a été adapté pour le second degré. Les enseignants stagiaires concernés sont donc dans des parcours MEEF second degré en mathématiques.

Le dispositif s'étale sur les 4 semestres de formation initiale :

- Semestre 1 : Choix d'un thème local et enquête de terrain
- Semestre 2 : Conception de ressources et d'une œuvre
- Semestre 3 : Conception d'un projet pédagogique plus long et mise en œuvre en classe
- Semestre 4 : Suite de la mise en œuvre du projet en classe et réalisation d'un dossier de synthèse.

Ce dispositif devrait être prolongé par un projet INTERREG plus large réunissant la Réunion, Mayotte et Madagascar. L'idée est de créer un réseau entre les formateurs d'enseignants pour :

- identifier comment les mathématiques s'inscrivent dans les langues locales,
- réaliser un inventaire d'artefacts,
- élaborer des ressources pédagogiques,
- améliorer la formation en s'appuyant sur l'ethnomathématique et la contextualisation,
- ultimement améliorer la motivation des élèves.

Pendant la discussion, l'auteur a pu souligner que ce projet s'est accompagné d'un changement radical en quelques années qui a vu de nombreux enseignants locaux jusqu'alors contractuels devenir titulaires suite à la mise en œuvre depuis 2016 de la masterisation de la formation initiale des enseignants de Mayotte. L'auteur remarque aussi que la notion de contextualisation est en lien avec l'histoire des mathématiques, le patrimoine culturel et l'ethnomathématique. Il note encore que le dispositif des œuvres coopératives a aussi comme objectif de former les étudiant.es aux pédagogies actives.

5. **Jean-Jacques SALONE** : « *Contextualisations didactiques de problèmes mathématiques par les étudiants en master MEEF second degré de Guadeloupe* »

Dans le cadre d'un master MEEF second degré pour des enseignants de mathématiques en Guadeloupe, la recherche s'intéresse à la compétence de contextualisation. Les questions de recherche sont : (1) Comment les langues locales sont-elles prises en compte dans les documents contextualisés produits par les professeurs de mathématiques en formation initiale ? (2) Dans quelle mesure les éléments patrimoniaux non linguistiques relèvent-ils pour ces étudiants de pratiques ou de savoirs à enseigner ?

Le cadre théorique s'appuie sur Salone (2022), qui définit et mesure des degrés de contextualisations disciplinaire et linguistique dans des discours ou des documents à finalité didactique. Le but est de comprendre comment les pratiques, savoirs et artéfacts traditionnels sont pris en compte dans les pratiques enseignantes en mathématiques.

Les résultats montrent que la contextualisation linguistique est généralement très faible ou absente, alors que la contextualisation mathématique oscille entre adaptations authentiques et inclusion d'éléments technologiques autochtones.

Pendant la discussion, on a demandé à l'auteur quelle est la place du créole dans les cours en Guadeloupe ? Certaines écoles sont bilingues, mais la grande majorité est en langue de scolarisation, soit le français. Il y a aussi d'autres langues : l'anglais, l'espagnol, etc.

On a également discuté des enjeux autour de la décolonisation. Les enseignant.es ne revendiquent pas tous le multilinguisme dans leurs classes.

Une autre question concerne le « théorème du samoussa » : est-ce que fabriquer des samoussas relève d'une pratique culturelle locale et quel rapport avec les mathématiques au-delà de la modélisation ? Le chercheur a répondu que la pratique est bien évidemment internationale même si elle est courante en Guadeloupe. Mais l'enjeu de la formation est plus didactique que contextualisant, et c'est le potentiel didactique de la technologie du pliage du samoussa qui est l'objet d'intérêt.

Les présentations ont donc été assez diverses, touchant d'une part aux enjeux liés à la contextualisation dans le travail de l'enseignement, surtout par rapport aux différences culturelles, et d'autre part à la question de la dimension socio-politique (de la didactique) des mathématiques. Une présentation s'est plutôt intéressée à la question de la culture de la pratique mathématique et la possibilité d'y intégrer des filles entre 16-18 ans. Les dimensions sociales et culturelles évoquées dans la description du projet spécial 2 ont donc bien été abordées. Cependant, la dimension écologique n'a pas été évoquée. Nous espérons que la publication récente des actes de colloque du ICMI Study 27 suscitera l'intérêt des chercheurs de l'EMF, surtout dans les territoires francophones comme Mayotte et la Guadeloupe où les enjeux écologiques ont des conséquences locales qui méritent notre attention.

Nous tenons à remercier Claudia Corriveau pour ses notes, qui nous ont permis de rédiger ce bilan.

COMMENT DES ENSEIGNANTS DE GUADELOUPE CONÇOIVENT-ILS LA CONTEXTUALISATION DIDACTIQUE LORS D'ACTIVITÉS DE RÉOLUTION DE PROBLÈMES ?

| HAJBY* ACHRAF, RAMSAMY** PRISCILLA, FORISSIER*** THOMAS ET LE PALLEC****

MAËLLE

Résumé | Cette étude explore les effets de la contextualisation didactique en mathématiques dans les collaborations entre enseignants de collège et de lycée. Elle se concentre sur la conception d'activités de résolution de problèmes adaptées aux contextes territoriaux. En utilisant une méthodologie mixte, incluant des entretiens et des observations, l'analyse se focalise sur les choix de contextualisation tirés de manuels français et québécois. Les résultats attendus mettent en lumière l'importance des ajustements pédagogiques pour répondre aux besoins spécifiques des élèves dans leur environnement d'apprentissage.

Mots-clés : contextualisation didactique, pratique enseignant, résolution de problème, effet de contextes

Abstract | This study explores the effects of didactic contextualization in mathematics through collaborations between middle and high school teachers. It focuses on the design of problem-solving activities adapted to territorial contexts. Using a mixed methodology, including interviews and classroom observations, the analysis focuses on contextualization choices drawn from French and Quebec textbooks. The expected results highlight the importance of pedagogical adjustments to meet the specific needs of students in their learning environment.

Keywords: Didactic contextualization, teaching practice, problem-solving, context effect

I. APPROCHE THÉORIQUE

1. Contextualisation didactique

Lorsqu'on en vient à aborder, de façon générale, la question de l'enseignement au sein des régions françaises ultramarines, celle du contexte, et plus précisément de sa prise en compte dans les pratiques enseignants, ainsi nommée contextualisation didactique (Blanchet, 2009), apparaît alors comme étant très importante pour ne pas même parfois dire épineuse. En témoignent, pour cela, les nombreux travaux qui ont émergé depuis ces quinze dernières années (Blanchet et al., 2009 ; Cadousteau, 2023). Pourtant, ce concept, qui se présente sous la forme d'une expression, revêt un nombre important de considérations, du fait que la notion de contexte soit vue pour certains comme étant elle-même bien trop polysémique (Bazire et Brézillon, 2005). En effet, la question « mais de quel(s) contexte(s) parle-t-on ? » peut vite se poser, lorsque l'on s'intéresse à la contextualisation dite didactique.

Diverses modélisations permettent cependant de caractériser cette idée. Ainsi, ce concept, pris au sens d'un processus transpositionnel, peut être observé selon différents degrés — faible, intermédiaire, forte (Delcroix et al., 2013), ou encore, coloration, adoption, inclusion et intégration (Salone, 2022).

* UQÀM – Canada – achraf.hajby@gmail.com

** Université des Antilles – Guadeloupe – priscilla.ramsamy@univ-antilles.fr

*** Université des Antilles – Guadeloupe – thomas.forissier@univ-antilles.fr

**** Université Libre de Bruxelles – Belgique – maelle.le.paltec74@gmail.com

Dans le cadre de ce travail, cette contextualisation est perçue comme un processus collectif et interactif d'élaboration et d'analyse de situations didactiques qui mène à l'émergence d'effets de contextes.

2. *Effets de contextes*

Le concept d'effet de contextes est apparu au cours de travaux de psychologie cognitive des années 1980 portant sur les « constructive perception ». Ainsi, McClelland, James et Rumelhart (1981) construisent un modèle d'effet de contextes basé sur la perception des lettres lors de la lecture. L'exemple le plus classique en est « THE CAT » où le H et le A sont remplacés par un unique caractère. La quasi-totalité des personnes lisent « the cat » interprétant ce caractère en fonction de lettre voisine soit comme un H soit comme un A. Ces travaux connaissent également des développements dans le champ du marketing en termes d'effet de compromis, d'effet d'attraction et de similarité (Roederkerk et al., 2011). La perception d'un bien de consommation que l'on souhaite acheter dépend de ce qui l'entoure en termes de gamme de prix ou d'affiche publicitaire.

L'effet de contextes en didactiques est en accord avec l'idée que l'on perçoit un objet en fonction de ce qui l'entoure. Nous insistons, alors, sur le fait que l'on comprend un objet scientifique en fonction des conceptions initiales que l'on a construites dans des contextes particuliers. Il est défini comme un événement cognitif provoqué par la confrontation de deux contextes internes, construit au cours d'une séquence collaborative impliquant des apprenants de deux contextes externes différents et provoquant des changements d'états émotionnels individuels et collectifs observables (Forissier 2019).

Le terme d'effet de contextes fait écho au concept d'effet de contrat proposé par Guy Brousseau (1983). Les effets de contrat y apparaissent comme des révélateurs du contrat didactique implicite. L'effet de contexte peut également apparaître comme le révélateur d'écart de contextes entre différents acteurs impliqués dans une situation didactique. Le contrat didactique sera par la suite défini (Brousseau, 1986) comme la double intelligence de l'attente de l'enseignant et de l'apprenant. Ce mécanisme, en miroir de la compréhension de l'attente de l'autre, ne trouve qu'un écho imparfait dans le cadre de l'effet de contexte pensé comme un événement émergeant de la confrontation de deux conceptions (Le Bail et al., 2021).

3. *Résolution de problèmes*

La résolution de problèmes en didactique des mathématiques est un processus cognitif complexe nécessitant l'application de concepts et de stratégies mathématiques, impliquant un raisonnement logique et méthodique. Le contexte joue un rôle clé dans la compréhension et la résolution des problèmes, facilitant l'activation des connaissances antérieures si ancré dans la réalité de l'élève. Cependant, un contexte éloigné peut enrichir l'apprentissage en encourageant un raisonnement abstrait, à condition que l'élève soit bien guidé. Dans certains cas, un contexte trop complexe peut néanmoins devenir un obstacle à la compréhension (Brousseau, 1997 ; Schoenfeld, 1985).

4. *Question de recherche*

En se penchant sur la manière dont les enseignants de mathématiques au collège et au lycée intègrent les particularités territoriales lorsqu'ils travaillent ensemble pour concevoir et analyser des activités de résolution de problèmes, nous cherchons à explorer comment ces spécificités locales — qu'elles soient culturelles, économiques, géographiques ou sociales — sont prises en compte dans le processus de création des problèmes mathématiques. L'objectif est de comprendre dans quelle mesure ces contextualisations enrichissent l'expérience d'apprentissage des élèves, en rendant les concepts abstraits plus concrets et pertinents pour leur quotidien.

Par ailleurs, cette étude s'intéresse également aux défis que pose cette contextualisation. Elle examine si les contextes choisis reflètent de manière équilibrée les réalités vécues par tous les élèves ou si elles favorisent certains groupes au détriment d'autres. En somme, nous voulons identifier des pratiques qui permettent aux enseignants de créer, de mettre en place et comprendre des activités de résolution de problèmes à la fois adaptées à leur environnement territorial et capables de renforcer l'engagement et la compréhension des élèves.

II. MÉTHODOLOGIE

1. *Corpus de passation*

Cet article présente les résultats d'une étude qualitative sur les pratiques de contextualisation des enseignants en résolution de problèmes mathématiques en Guadeloupe, en collaboration avec l'Université du Québec à Montréal et l'Université des Antilles. Les enseignants de collège et de lycée ont été approchés informellement et choisis pour leur expérience variée. Le projet s'appuie sur une communauté de pratique inter-ordres (Bourassa et al., 2007), où les enseignants ont réfléchi collectivement à l'adaptation des problèmes pour les contextualiser en fonction des besoins de leurs élèves tout en respectant les exigences du ministère de l'Éducation Nationale. La méthodologie privilégie l'interaction et la co-construction des connaissances, permettant de comprendre la culture professionnelle des enseignants et d'analyser leurs discours (Legendre, 2008 ; Taylor et Bogdan, 1984 ; Dumez, 2011).

2. *Collecte de données*

La collecte de données a été organisée en quatre phases complémentaires visant à comprendre la contextualisation des mathématiques en classe. D'abord, un questionnaire initial a permis de dresser le profil pédagogique des enseignants participants et de recueillir leurs premières impressions sur la contextualisation des mathématiques. Ensuite, lors d'une séance préparatoire, les enseignants ont choisi un problème parmi plusieurs extraits de manuels scolaires français et québécois. Ils avaient la possibilité d'ajuster le problème en fonction de leur perception des variables didactiques, à savoir des éléments de la tâche qui influencent les exigences pédagogiques. La discussion pendant cette phase était modérée par un chercheur expérimenté dans la facilitation de groupe, ce qui a permis d'encourager la participation active et une analyse collaborative des problèmes.

La troisième phase consistait en des observations en classe. Les chercheurs se sont concentrés sur la manière dont les enseignants contextualisaient le problème choisi lors de leurs leçons de mathématiques, en observant des aspects tels que la médiation enseignante, la dynamique de classe et les méthodes de contextualisation. Ces observations ont ensuite été codées pour identifier des thématiques émergentes.

Enfin, des entretiens de retour ont été menés pour que les enseignants puissent réfléchir aux stratégies de contextualisation qu'ils avaient mises en œuvre en classe et discuter des approches alternatives qu'ils auraient pu envisager, en s'appuyant sur leur expérience avec le problème sélectionné. Cette phase a permis d'approfondir la réflexion sur l'impact de la contextualisation dans l'enseignement des mathématiques.

3. *Analyse des données*

L'analyse des données présentées dans ce texte provient d'une collecte effectuée au sein de cette communauté de pratique. Elle se concentre sur les dynamiques interactionnelles au sein de la

communauté. Pour compléter le processus d'analyse des commentaires des membres de la communauté de pratique, l'équipe de recherche s'est inspirée des étapes proposées par L'Écuyer (1990). Tout d'abord, les discussions de la communauté de pratique ont été réécoutées dans leur intégralité afin de sélectionner les moments clés des réunions. Ces moments clés ont ensuite été transcrits. Puis, une lecture flottante des commentaires des participants a permis d'identifier les unités de sens. Après cette identification, une grille de codage a été construite à partir de catégories préétablies, résultant du réseau de transposition et des degrés de contextualisation. Nous pensons que le croisement des deux approches est éclairant. Nous croisons ces degrés de contextualisation avec les différents niveaux de transpositions précédemment présentés afin d'obtenir une compréhension plus détaillée, complète et complexe du phénomène de contextualisation. Le codage interjuges, réalisé par les membres de l'équipe de recherche, s'est avéré nécessaire pour approfondir le sens des déclarations des participants. Cela a nécessité des réunions fréquentes pour parfaire l'analyse de chaque passage codé. Pour chaque sous-catégorie, des résumés ont été rédigés. L'analyse minutieuse et rigoureuse des données a conduit à la description scientifique des résultats.

4. *Limites méthodologiques et considérations éthiques*

Le texte présente quatre mesures éthiques mises en place pour cette recherche : les participants ont été informés de l'objectif de l'étude, leur consentement éclairé a été obtenu, des pseudonymes ont été attribués pour protéger leur identité, et les données ont été stockées de manière sécurisée. Cependant, plusieurs limites méthodologiques sont reconnues, notamment la non-généralisabilité des résultats en raison de l'échantillonnage non aléatoire, la nature ponctuelle des observations en classe, le biais potentiel des auto-déclarations des enseignants, et la subjectivité de l'analyse thématique. Ces limites sont considérées lors de l'interprétation des résultats, et des précautions sont prises pour ne pas généraliser les conclusions au-delà des situations didactiques étudiées.

III. RÉSULTATS ET ANALYSES

1. *Émergence des contextes*

Lors des différentes phases précédemment décrites, et plus précisément au cours des trois dernières, diverses références aux contextes sont apparues. Deux exemples vont ici être tirés de la séance préparatoire.

Lors de cette dernière, c'est au moment de la découverte d'un énoncé lié à l'eau qu'un enseignant s'est interrogé sur le niveau de complexité du problème à résoudre et donc de la faisabilité de sa passation au sein de sa classe, compte-tenu du niveau de ses élèves. Les réactions sont d'ailleurs assez cinglantes et font l'objet d'un débat autour du problème du niveau des élèves de façon plus générale. Elles comportent, d'ailleurs, essentiellement des accords entre les enseignants A et C interviewés à ce moment-là :

- (A) En 6^e, oh punaise, on va les perdre.
- (C) C'est chouette ! Ils n'ont tellement pas l'habitude de trier les données.
- (A) Ah là, non, je les perds direct !
- (Chercheur) Quand vous dites trier les données, c'est choisir les données ?
- (C) Ouai, choisir les données.

- (A) Ouai.
- (C) ça c'est quelque chose ! On a tellement de problèmes qui sont mâchés.
- (A) Ah au primaire.
- (C) Mais même au Lycée, plus on s'approche du BAC, plus c'est fait : les données sont triées et présentées dans l'ordre d'utilisation.
- (A) Ah ouai, à ce point-là !
- (C) C'est dire qu'au Baccalauréat, il suffit de lire l'ordre des questions, l'ordre dans lequel on les présente, dans l'ordre des questions...
- (A) Ah ouai, parce que moi, un truc comme ça je peux leur donner en devoir maison et ils ont toute la semaine pour travailler dessus.

Le niveau des élèves apparaît ainsi comme une question d'importance et d'une certaine envergure, puisque le constat ne se limite pas qu'à des élèves de 6^e, faisant ainsi écho aux discussions sur la baisse du niveau scolaire en France (Bodin, 2009). Dans cet extrait d'une durée de deux minutes, une proposition de remédiation possible est effectuée, consistant notamment à donner en devoir ce travail de résolution de problème.

Par ailleurs, toujours lors de l'analyse de cette même proposition d'énoncé par ces deux mêmes enseignants, la problématique de l'eau, faisant l'actualité et relative au contexte socio-politique en Guadeloupe (Cabrion, 2021), est également apparue, mais à la suite toutefois, d'une question du chercheur, et donc de façon légèrement provoquée.

- (Chercheur) Puis qu'est-ce que le problème par rapport à la situation...
- (A) Après, on est sur du concret, on est sur ce dont on parle actuellement. C'est complètement contextualisé... Et d'autant plus qu'en Guadeloupe, le problème de l'eau est très sensible. On a un léger problème d'eau en Guadeloupe très [rires], voir même inexistant, existence de l'eau. En fait, il y a beaucoup de coupures, on vit dans un pays de coupures.
- (Chercheur) OK.
- (A) Et aux Aymes notamment, là où je travaille, les coupures sont normales. Ne pas avoir d'eau fait partie de...
- (Chercheur) ça dure combien de temps ?
- (A) Oh ça va, 12h, 24 h !

Cet extrait d'une durée d'une minute, permet de comprendre que pour au moins l'un des enseignants, la question de la contextualisation se rapporte à ce que vivent les élèves au quotidien ou presque, à leur réalité sociale ultramarine.

Ainsi pour une même proposition d'énoncé, outre la problématique récurrente de l'accès à l'eau potable sur ce territoire (une minute de discours), c'est avant tout celle relative à ce que les élèves sont en mesure de réaliser sur le plan disciplinaire qui émerge en premier et sur une durée de deux minutes. Cependant, l'apparition du terme « contextualisé » dans le discours de l'un des enseignants, fait apparaître que pour au moins l'un d'entre eux, la contextualisation est tout d'abord une affaire de prise en compte de la réalité des élèves.

2. Émergence des contextes



Figure 1 – Les différents contextes abordés par les enseignants

Les contextes signalés par les enseignants sont la progressivité des élèves, le niveau des élèves, les dimensions culturelles, langagières, géographiques socio-économiques et politiques (Figure 1).

La progressivité des élèves (17 min 30s) est l'objet le plus discuté lors des entretiens pré-enseignement. Il semble que lors de la préparation de cours de mathématique de collège la progressivité des élèves soit l'objet le plus pris en compte. Il est suivi par le niveau des élèves (10 min), les dimensions culturelles (8 min 30s) puis langagières (5 min).

Lors des entretiens post-enseignement, le classement des contextes abordés est bien différent. La dimension culturelle est la plus discutée avec 6 min de durée cumulée suivie par les discussions sur le niveau scolaire (4 min) puis langagier (2 min) et géographique (1 min). La progressivité des élèves est totalement absente des entretiens postérieurs à l'enseignement.

Outre les surprises apparues lors des enseignements (essentiellement d'ordre culturel) Cette hétérogénéité des classements entre pré et post-enseignement reflète la variation des préoccupations lors de la démarche didactique menée par ces enseignants confirmés. La préparation de cours est organisée autour des contextes pédagogiques notamment de progressivité et du niveau présumé ou attendu des élèves. Lors du guidage réalisé pendant l'enseignement d'autres contextes apparaissent importants notamment ceux liées aux contextes culturels, historiques et géographiques. Lors de l'autoévaluation de ces enseignements (entretiens post-enseignement) ce sont ces derniers contextes qui cumulent logiquement le plus de temps d'échange.

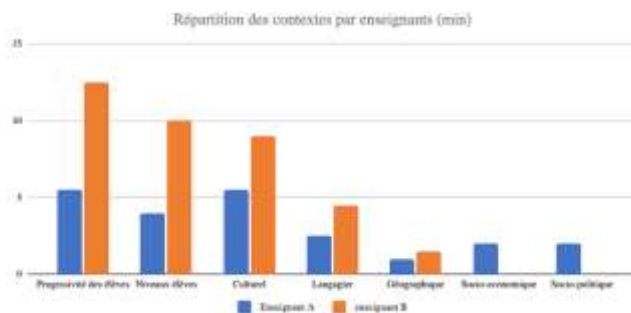


Figure 2 – La répartition des contextes par enseignant

Les temps d'échanges consacrés aux différents contextes ne sont pas répartis de manière identique entre les enseignants (Figure 2). Si l'enseignant A s'exprime sur tous les contextes pour une durée comprise entre une et cinq minutes, l'enseignant B s'exprime principalement et abondamment sur la progressivité des élèves (12 min 30 s), le niveau des élèves (10 min) et les dimensions culturelles (9 min).

Si cette différence illustre une limite importante de cette recherche qualitative, elle peut également être comprise à travers les dynamiques communicationnelles lors d'un échange professionnel. L'enseignant A souhaitant se positionner en experte pédagogique tenant notamment en entretien pré-enseignement des discours assez long sur les élèves concernés et sur les spécificités du territoire où les enseignements se déroulent. L'enseignant A adopte en réponse une position d'ouverture décrivant succinctement l'ensemble des contextes prévus et observés.

3. *Analyse des interactions didactiques*

L'étiquetage des difficultés est central dans cette perspective. Becker (1963) explique que la déviance est une construction sociale, issue des interactions avec les figures d'autorité. Dans les documents analysés, les enseignants qualifient souvent les élèves de « perdus » lorsqu'ils sont confrontés à des informations trop complexes. Par exemple, l'enseignant A estime que la TVA n'est pas adaptée à des élèves de sixième : « La TVA n'apparaît qu'à la dernière ligne, mais pas en sixième » (Enseignant A, 27:30). Cet étiquetage influence les adaptations pédagogiques, façonnant la perception des compétences des élèves.

Les compétences scolaires se construisent également dans ces interactions. Contrairement à une vision statique, Becker (1963) et Goffman (1967) montrent que les compétences se développent à travers un processus itératif. L'enseignant B, par exemple, propose un accompagnement graduel : « Il faudra beaucoup les accompagner » (Enseignant B, 17:50), soulignant que l'excès d'informations peut freiner la compréhension. Ainsi, les compétences se forment grâce aux ajustements continus des enseignants selon les besoins des élèves.

Le contexte socio-culturel des élèves joue aussi un rôle clé dans leur apprentissage. Becker (1994) montre que le contexte façonne les comportements. L'enseignant A souligne que ses élèves proviennent de milieux défavorisés, ce qui complique leur compréhension de certaines notions comme les factures : « Les parents ne vont jamais parler de ce qu'ils payent comme facture » (Enseignant A, 12:08). Les enseignants ajustent alors leurs méthodes pour adapter l'enseignement à la réalité des élèves (Dubet, 1994).

Enfin, les enseignants, en tant que figures d'autorité, structurent les normes scolaires. Becker (1963) note que les attentes académiques sont influencées par l'action des enseignants. L'enseignant A insiste sur la maîtrise des méthodes mathématiques : « Si c'est pour vérifier qu'ils maîtrisent les priorités opératoires [...] pas de problème » (Enseignant A, 3:46), tandis que l'enseignant B adopte un accompagnement plus individualisé. Cela montre que les enseignants façonnent directement la manière dont les élèves acquièrent les compétences et se conforment aux normes.

En somme, l'analyse des interactions pédagogiques montre que la réussite ou la difficulté scolaire n'est pas une donnée objective, mais une construction sociale issue des interactions entre enseignants et élèves. L'étiquetage des difficultés, les ajustements pédagogiques et l'adaptation aux contextes socio-culturels jouent un rôle déterminant dans la construction des compétences et des trajectoires d'apprentissage des élèves.

IV. DISCUSSION ET CONCLUSION

Dans cette analyse, l'interactionnisme symbolique, tel que décrit par Howard Becker (1963), met en lumière l'importance des interactions sociales entre enseignants et élèves pour expliquer la réussite ou l'échec scolaire. Cette perspective théorique souligne que les compétences des élèves ne sont pas des entités fixes, mais se construisent progressivement à travers les échanges sociaux, notamment les

étiquettes et jugements émis par les figures d'autorité. Les enseignants jouent un rôle central en adaptant leurs pratiques pédagogiques aux réponses des élèves, ces dernières étant influencées par leurs contextes socio-culturels. De ce fait, la réussite scolaire doit être appréhendée comme une construction sociale, façonnée par les perceptions que les enseignants ont des élèves, ainsi que par les soutiens et ajustements apportés dans le cadre de leur apprentissage.

Au cours des phases d'enseignement observées dans le cadre des séances préparatoires, l'importance du contexte social et pédagogique est apparue de manière récurrente. Par exemple, lors de l'analyse d'un énoncé mathématique en lien avec la thématique de l'eau, un enseignant a exprimé ses préoccupations quant au niveau de complexité du problème, soulignant que le niveau de ses élèves pourrait poser des difficultés quant à la résolution de la tâche. Les échanges entre deux enseignants (A et B) ont renforcé cette préoccupation, mettant en évidence comment la perception des capacités des élèves influence les ajustements pédagogiques effectués par les enseignants. L'enseignant B a évoqué la tendance à simplifier et à structurer les données dans les exercices scolaires, une pratique qui s'accroît jusqu'au lycée. Il a également suggéré une remédiation possible, consistant à donner cette tâche complexe en devoir maison afin de permettre aux élèves de s'y consacrer sur une plus longue période.

En contraste, la théorie des situations didactiques développée par Brousseau (1986) met l'accent sur l'interaction entre l'élève et le savoir mathématique, en considérant que l'acquisition des connaissances se réalise principalement à travers les situations d'apprentissage. Selon cette approche, c'est la situation didactique qui permet à l'élève de s'appropriier les savoirs, et non les interactions sociales. Le rôle de l'enseignant est alors de structurer l'environnement d'apprentissage pour que l'élève puisse progressivement découvrir le savoir par lui-même, au travers des mécanismes de « contrat didactique » et de « dévolution ». Cependant, les résultats exposés dans cet article remettent en question cette approche, qui pourrait négliger l'importance des dynamiques sociales influençant l'apprentissage, notamment les interactions entre enseignants et élèves.

L'interactionnisme de Becker (1963), en revanche, met en exergue que la progression des élèves est fortement influencée par des facteurs sociaux, tels que les étiquettes de réussite ou d'échec assignées par les enseignants, les ajustements pédagogiques en fonction du contexte spécifique des élèves, ainsi que les attentes institutionnelles auxquelles ces derniers doivent répondre. Par exemple, l'enseignant A, en qualifiant ses élèves de « perdus » face à certaines situations, illustre la manière dont l'étiquetage peut influencer sur les stratégies d'accompagnement pédagogique et, par conséquent, sur la réussite des élèves.

Par ailleurs, l'analyse des énoncés mathématiques révèle l'importance de la contextualisation dans l'apprentissage. En effet, lors de la discussion portant sur l'énoncé mathématique relatif à l'eau, l'enseignant A a souligné que ce problème était particulièrement pertinent en Guadeloupe, où les coupures d'eau sont fréquentes. Cette référence au contexte local montre que, pour certains enseignants, la contextualisation représente un moyen de rendre l'apprentissage plus significatif pour les élèves en lien avec leur réalité quotidienne. Toutefois, bien que la question de l'accès à l'eau potable en Guadeloupe ait été mentionnée, l'essentiel des échanges entre les enseignants a porté sur la capacité des élèves à résoudre le problème mathématique en question.

L'analyse des échanges montre que les contextes abordés par les enseignants varient selon le moment de l'enseignement. Avant l'enseignement, les discussions se concentrent sur la progressivité, le niveau des élèves, ainsi que les dimensions culturelles et langagières. Après l'enseignement, les priorités changent, avec une plus grande importance accordée à la dimension culturelle, au niveau

scolaire et aux aspects langagiers. La disparition de la progressivité dans les échanges post-enseignement reflète l'évolution des préoccupations pédagogiques des enseignants.

Ces variations mettent en lumière les dynamiques communicationnelles entre les enseignants. Par exemple, l'enseignant A, se positionnant en experte pédagogique, a développé des discours relativement longs sur les spécificités du territoire et les caractéristiques des élèves lors des entretiens pré-enseignement. En revanche, l'enseignant B a principalement abordé la question de la progressivité des élèves et du niveau scolaire, se concentrant sur des aspects techniques et organisationnels.

En conclusion, l'interactionnisme offre une perspective permettant d'intégrer les dynamiques sociales à l'apprentissage des mathématiques, en reconnaissant que les compétences scolaires peuvent être façonnées par les interactions constantes entre l'enseignant, l'élève et le contexte social et institutionnel. La théorie des situations didactiques, qui suppose que l'efficacité des situations d'apprentissage repose principalement sur la structuration des savoirs. Notre travail suggère finalement que ces approches sont complémentaires pour une prise en compte globale des contextes, qu'ils soient didactiques, culturels, historiques, politiques ou socio-économiques, afin de mieux comprendre comment l'échec ou la réussite scolaire est influencé par une diversité de facteurs contextuels.

RÉFÉRENCES

- Bazire, M. et Brézillon, P. (2005). Understanding context before using it. Dans A. Dey, B. Kokinov, D. Leake et R. Turner (dir.), *Modeling and using context. CONTEXT 2005. Lecture notes in computer science* (Vol. 3554, p. 29-40). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/11508373_3
- Becker, H. S. (1963). *Outsiders: Studies in the sociology of deviance*. The Free Press.
- Becker, H. S. (1994). *Tricks of the trade: How to think about your research while you're doing it*. University of Chicago Press.
- Blanchet, P., Rahal, S. A. et Moore, D. (2009). *Perspectives pour une didactique des langues contextualisée*. Archives contemporaines.
- Bodin, A. (2009). *La baisse du niveau scolaire en France : mythes et réalités*. Presses universitaires de France.
- Brousseau, G. (1983). D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. *Actes de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques* (p. 39-60). IREM d'Orléans.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115. <https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/>
- Brousseau, G. (1997). *Théorie des situations didactiques en mathématiques*. La pensée sauvage.
- Cabron, G. (2021). *La gestion de l'eau en Guadeloupe : entre réalité sociale et enjeux politiques*. Presses universitaires de l'Antilles.
- Cadoustau, L. (2023). *Contexte et éducation : une perspective actualisée*. Presses académiques françaises.
- Delcroix, M., Fouilloux, M. et Maury, E. (2013). Contextualisation didactique et degrés d'inclusion : une approche comparative. *Revue Française de Didactique*, 32(2), 55-72.
- Dubet, F. (1994). *Sociologie de l'expérience scolaire*. Seuil.
- Forissier, T. (2019). *Contextualisation et effets de contextes dans l'apprentissage des sciences*. Université des Antilles.

Goffman, E. (1967). *Interaction ritual: Essays in face-to-face behavior*. Pantheon Books.

Le Bail, C., Baker, M., Détienne, F., Bernard, F.-X., Chartofylaka, L. et Forissier, T. (2021). Grounding and knowledge elaboration across cultural and geographical contexts: An exploratory case study. *Learning, Culture and Social Interaction*, (28), article 100477. <https://doi.org/10.1016/j.lcsi.2020.100477>

Legendre, R. (2008). *Dictionnaire actuel de l'éducation* (3^e éd.). Guérin.

L'Écuyer, R. (1990). *Méthodologie de l'analyse développementale de contenu : méthode GPS et concept de soi*. Presses de l'Université du Québec.

McClelland, J. L. et Rumelhart, D. E. (1981). An interactive activation model of context effects in letter perception: I. An account of basic findings. *Psychological Review*, 88(5), 375-407. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.88.5.375>

Rooderkerk, R. P., Van Heerde, H. J. et Bijmolt, T. H. A. (2011). Incorporating context effects into a choice model. *Journal of Marketing Research*, 48(4), 767-780. <https://doi.org/10.1509/jmkr.48.4.767>

Salone, J.-J. (2022). Contexte et contextualisation à Mayotte : Une approche systémique. *Contextes et didactiques*, (20). <https://doi.org/10.4000/ced.3848>

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Taylor, S. J. et Bogdan, R. (1984). *Introduction to qualitative research methods: The search for meanings*. Wiley.

UNE RÉFLEXION CONJOINTE SUR LES ENJEUX SOCIAUX ET POLITIQUES DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

| GUILLEMETTE* DAVID, ABTAHI** YASMINE, BARWELL*** RICHARD, HAJBY**** ACHRAF,
SABOYA***** MIREILLE ET ST-CYR***** MARIE-FRÉDÉRIK

Résumé | Dans cette contribution, nous présentons le résumé d'une recherche qui a été menée auprès de quatre enseignant.es du secondaire de la région de Montréal. L'étude prend la forme d'une recherche participative où enseignant.es, chercheuses et chercheurs se sont réunis pour développer conjointement leur réflexion quant aux enjeux sociaux et politiques de l'enseignement des mathématiques. Nous présentons ici quelques résultats préliminaires à partir de récits dialogiques, encore en chantier, qui en sont issus.

Mots-clés : enjeux sociaux et politiques, recherche participative, justice sociale, changement climatique, dialogisme

Abstract | In this contribution, we present an ongoing research that was conducted in collaboration with four secondary school teachers from the Montreal region. The study takes the form of participatory research where teachers and researchers came together to develop their reflection on social and political issues of mathematics education. We present here some preliminary results coming from dialogic narratives which are being produced.

Keywords: Social and political issues, participatory research, social justice, climate change, dialogism.

I. INTRODUCTION

Nous présentons ici un projet de recherche qui porte sur des aspects peu discutés de l'éducation mathématique du côté francophone : ses dimensions sociales et politiques. En effet, sous le couvert d'universalité et de neutralité, les mathématiques et l'éducation mathématique ont tendance à se soustraire aux questions sociales et politiques. Du côté anglophone, ces thématiques sont pourtant très largement répandues et discutées en recherche. Notre projet de recherche souhaite explorer ces questions en établissant, en contexte francophone, une réflexion conjointe entre enseignant.es, chercheuses et chercheurs intéressés.

1. *Enjeux sociaux et politiques de l'enseignement des mathématiques*

Comme toute activité humaine, les mathématiques ont une dimension sociale et culturelle. Un examen attentif de l'histoire des mathématiques nous montre, par exemple, que les mathématiques sont pratiquées dans des contextes spécifiques et qu'elles répondent aux besoins des sociétés et des cultures qui influencent leur orientation et leur mise en œuvre. Ainsi, à travers différentes pratiques mathématiques comme la résolution de problèmes, la modélisation ou l'élaboration de conjectures, d'argumentations ou de preuves, tout un ensemble d'attitudes et de manières d'être sont sollicitées et montrent comment les mathématiques s'ancrent foncièrement dans le social et le culturel.

* Université du Québec à Montréal – Canada – guillemette.david@uqam.ca

** Universitetet i Sørøst-Norge – Norvège – Yasmine.Abtahi@usn.no

*** Université d'Ottawa – Canada – richard.barwell@uottawa.ca

**** Université du Québec à Montréal – Canada – hajby.achraf@courrier.uqam.ca

***** Université du Québec à Montréal – Canada – saboya.mireille@uqam.ca

***** Université du Québec à Montréal – Canada – st-cyr.marie-frederick@uqam.ca

La mise en lumière de ces dimensions fut d'ailleurs l'un des points principaux du programme de recherche ethnomathématique d'Ubiratan D'Ambrosio pour qui les mathématiques ont toujours été façonnées par les structures économiques, sociales et symboliques au sein desquelles elles ont été pratiquées et développées. Il suggérait par exemple que la source originelle de l'abstraction (mathématique et autre) se trouve dans la production matérielle de la vie et dans les manières culturelles d'interagir avec les autres. C'est aussi au sein des structures économiques, sociales et symboliques de la société que se définissent les besoins à satisfaire en termes éducatifs, tout comme les « manières » de satisfaire ces besoins. Ces « manières » sont en fait des « manières de faire les choses » et apparaissent comme des « connaissances » (voir D'Ambrosio, 2006). C'est ainsi que la perspective ethnomathématique trouve sa base ontologique et épistémologique fondamentale dans le social, et le culturel, mais c'est aussi à ce niveau que le politique et les relations de pouvoirs, parfois de dominations, ont pu aussi être mis en évidence.

Plus spécifiques aux enjeux sociaux et politiques, les approches « socioculturelles » et « critiques » contemporaines de l'enseignement des mathématiques tentent de mettre en lumière ces dimensions de l'enseignement des mathématiques, et d'explorer et de promouvoir l'enseignement et l'apprentissage dans ce sens (voir Adler et al., 2005; Skosmose, 2012). Elles sont dites « socioculturelles » parce qu'elles s'appuient sur une perspective sociale et culturelle de l'enseignement et de l'apprentissage, mais aussi « critiques » parce qu'elles mettent en lumière ou soulignent les formes de gouvernementalité, de domination et les dynamiques d'aliénation dans le contexte de l'enseignement des mathématiques.

Par ailleurs, les questions sociales et politiques sont de moins en moins marginales et prennent petit à petit une place importante, voire centrale pour certaines communautés, dans la réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Par exemple, en 2014, aux États-Unis, une enquête de grande envergure menée par le *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) auprès de chercheuses et chercheurs et d'enseignant.es du primaire et du secondaire de tout le pays a mis en évidence trois défis majeurs qui animent fortement la communauté : 1) changer les perceptions de ce que signifie faire des mathématiques, 2) changer les perceptions du public sur le rôle des mathématiques dans la société et 3) parvenir à l'équité dans l'enseignement des mathématiques (Stephan et al., 2015). Ainsi, la nécessité de prendre en compte les dimensions sociales et politiques et d'élargir le spectre de la réflexion et de la discussion pédagogiques semble être apparue dans plusieurs communautés de recherche et de pratique. Dans cette mouvance, nous observons que trois thématiques principales peuvent être actuellement mises en évidence : (1) la justice sociale (2) l'équité-diversité-inclusion et (3) la protection de l'environnement. Pour nous et pour plusieurs (p. ex. Abtahi et Wagner, 2016; Barwell, 2013; Gutstein, 2006), l'éducation mathématique n'est pas neutre quant à ces enjeux et les acteurs du milieu se doivent de penser à la manière dont elle peut contribuer à relever ces défis contemporains cruciaux.

II. VERS UNE RECHERCHE PARTICIPATIVE AUPRÈS DES ENSEIGNANTS DU SECONDAIRE

Malgré la prise de conscience et l'effervescence de certains milieux de recherche et d'enseignement autour de ces questions, ainsi que la création d'initiatives et d'études intéressantes (p. ex. Lunney-Borden's, 2021; Nicol et al., 2022; Rubel, 2018), plusieurs problèmes majeurs sont vécus quant à l'appropriation et à la valorisation de ces questions en classe de mathématiques.

Dans la francophonie, les études de terrain qui ont cherché à rendre compte de la manière dont les enseignant.es répondent à ces enjeux sociaux et politiques sont rares (Guillemette et Nicol, 2016). Malgré leur valeur réelle, notre constat est qu'elles n'ont pas réussi à comprendre finement les défis

auxquels font face les enseignant.es, ainsi que les raisons et les manières dont sont pris en compte les enjeux sociaux et politiques en classe de mathématiques.

D'autre part, ces enjeux accentuent maintenant fortement les programmes de formation des enseignant.es. Par exemple, le récent *Référentiel de compétences professionnelles : profession enseignante* du Gouvernement du Québec (2020), stipule, au travers d'une toute nouvelle compétence transversale, que l'enseignant.e doit agir en professionnel éthique dans le respect de la diversité. On précise qu'« agir de manière éthique suppose aussi de la part de l'enseignante ou de l'enseignant une adhésion à un certain nombre de dispositions (attitudes ou valeurs) qui influencent la manière dont elle ou il s'acquitte de ses tâches » (*id.*, p. 81). On souligne d'emblée que « [les inégalités socioéconomiques] interpellent l'école et le personnel enseignant quant à leur capacité à promouvoir une éducation équitable et inclusive en utilisant les leviers d'intervention à leur disposition dans une perspective de justice sociale » (*id.*, p. 17).

Bien que très louables, ces attentes, qui rejoignent plusieurs éléments discutés en recherche, pèsent lourdement sur les épaules des enseignant.es de mathématiques. Il est donc fort légitime de se demander : De quelles manières les enseignant.es comptent répondre à ces attentes ? Comment mobiliser les connaissances en recherche pour appuyer leur pratique, et ce, tout en considérant les contraintes et les difficultés vécues et escomptées ? Ces questions qui appellent à la fois à une meilleure compréhension des pratiques enseignantes et aux développements d'appuis pour la pratique nous ont incités à emprunter une approche participative.

III. UNE PERSPECTIVE HISTORICO-CULTURELLE DE L'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE

Notre étude s'ancre dans une perspective historico-culturelle de l'enseignement-apprentissage des mathématiques (Radford, 2011, 2021; Roth et Radford, 2011). La classe est ici pensée comme le lieu de la rencontre entre le sujet et l'objet de savoir, et l'objectivation qui permet cette rencontre est un processus éminemment social. Le propre de cette approche est de penser le problème de l'apprentissage comme un problème éthique, car la socialité du processus d'apprentissage ne veut pas simplement dire que l'apprentissage est fait de relations sociales, mais signifie la formation et la transformation de la conscience, qui est justement (con)science, c'est-à-dire « savoir en commun » ou « savoir-avec-d'autres » (Radford, 2011, p. 12). Dans cette perspective éthique, d'ailleurs très en phase avec la thématique de notre recherche, l'activité de classe ne peut donc pas être perçue comme un jeu de contrôle de variables dans l'optique d'une optimisation de ressources cognitives et matérielles. Elle offre plutôt « des manières d'être et de connaître selon la façon dont les élèves s'engagent en groupe dans leur quête du savoir culturel visé » (Radford, 2011, p. 15). L'apprentissage des mathématiques est ainsi compris comme un processus social de prise de conscience graduelle d'un savoir historico-culturellement médiatisé à travers lequel la conscience des individus est formée et transformée.

IV. OBJECTIFS DE RECHERCHE

Dans ce contexte théorique, et dans l'optique à la fois de recherche et d'appui aux enseignants, notre étude s'est donné pour objectifs de (1) documenter les réflexions pédagogiques et didactiques qu'entretiennent les enseignant.es du secondaire sur les enjeux sociaux et politiques, (2) rendre compte, par la production conjointe de situations d'apprentissage, des manières qu'ont les enseignant.es de développer des outils pédagogiques et didactiques par rapport à ces enjeux et (3) décrire les contraintes et problématiques d'enseignement vécues et appréhendées en classe.

V. UNE APPROCHE PARTICIPATIVE ET DIALOGIQUE

Comme souligné précédemment, nos objectifs nous invitent à entreprendre une recherche de type participative. Les approches méthodologiques de ce type qui concernent la pratique enseignante, notamment la recherche collaborative en didactique des mathématiques, tiennent leurs ancrages et influences épistémologiques du socioconstructivisme et de l'ethnométhodologie (voir Desgagné, 2007). Or, il nous est apparu nécessaire d'ajuster notre cadre méthodologique à notre positionnement en éducation mathématique, lequel ne s'articule pas entièrement avec ces ancrages. Cette articulation a été envisagée en convoquant une perspective dialogique (Abtahi et Barwell, 2019; Guillemette, 2021) pour l'analyse des données. Celle-ci cherche à rendre compte de la multiplicité des vécus, réflexions et expériences des participant.es. Elle ne cherche pas à présenter « côte à côte » les témoignages, mais à décrire véritablement l'interaction dialogique qui émerge des rencontres, et ce, en incluant les chercheuses et chercheurs.

1. Contexte de l'étude

Quatre enseignant.es du secondaire ont été recrutés sur une base volontaire. Les participant.es, deux femmes et deux hommes, étaient tous des enseignant.es à mi-carrière (12 à 25 ans d'expérience à titre d'enseignant titulaire en mathématiques au secondaire). Lors d'une première rencontre en ligne d'une heure ont été établis des objectifs de collaboration. Des activités ont été proposées (élaboration d'activités d'apprentissage, lectures de travaux de recherche ou discussions autour de thèmes précis, etc.) et un échéancier produit.

2. Collecte et analyse des données

Trois rencontres collaboratives de 150 minutes ont ensuite eu lieu entre février et avril 2023 dans les locaux d'une école de la région de Montréal. Une chercheuse et un chercheur, ainsi qu'une assistante et un assistant de recherche ont pris part activement aux rencontres. Ces dernières ont été captées à l'aide de caméras numériques. La transcription des enregistrements a été effectuée immédiatement après chaque rencontre en vue d'une analyse en concomitance à la collecte et d'un ajustement constant du projet de collaboration.

La perspective dialogique développée par Mikhaïl Bakhtine (1981) que nous empruntons pour l'analyse souligne que chaque énoncé d'un discours est nécessairement une réponse à d'autres énoncés dans une sphère donnée de communication. Un discours est alors perçu comme incrusté dans un dialogue, mais ce dialogue ne se résume pas à une simple conversation. Globalement, nous parlons ici de dialogues tant au niveau de la langue qu'au niveau des idées et des manières d'être. Pour Bakhtine, quand on parle, on s'investit subjectivement, aucun mot ne peut être prononcé sans un accent évaluatif, sans une attitude ou un mode d'être adopté à l'égard de ce dont on parle (accord, sympathie, objection, exécution, etc.). Il en est de même pour l'auditrice ou l'auditeur et sa réplique. Il en résulte que ce qui se dit se fait toujours dans un langage qui unit et divise à la fois, un langage qui est un tourbillon de forces divergentes et convergentes. Autrui fournit ici une perspective supplémentaire et externe (dite exotopique) nécessaire à la conceptualisation de nous-mêmes en tant que totalités qui avons cohésion et sens (et vice-versa). Cette interaction dialogique est capitale dans l'expérience intersubjective humaine et dans la formation d'une conscience proprement éthique.

Pour l'analyse des interactions dialogiques qui ont émergé lors des rencontres, la question principale était donc de savoir « d'où » se manifestent les différents points de vue (voir Skinner et al., 2001). Chaque énoncé (prise de parole) était alors considéré comme une « proposition », le suivant comme une « réaction » et le suivant encore comme « une réaction à une réaction » ou « une conclusion »

(Krzychala, 2019). Chaque énoncé était ainsi décrit, non seulement dans son sens littéral, mais aussi dans son sens *dialogique*, c'est-à-dire en précisant la manière dont il apparaît dans la chaîne d'énoncés.

Très concrètement, notre démarche d'analyse a supposé d'abord une lecture attentive de la retranscription des enregistrements et de sa division en « passages significatifs », c'est-à-dire en lien avec nos objectifs de recherche. Ces extraits ont ensuite été disposés sur les lignes d'un tableur. Pour chaque énoncé était indiqué le « sens littéral », dont la description était orientée par (1) une rubrique thématique (réflexion pédagogique/didactique, orientation de la coproduction ou contrainte vécue ou appréhendée) et par (2) un mode d'activité (objectif, action ou opération). Enfin, pour chaque énoncé, était indiqué le « sens dialogique » décrit à partir de (1) sa situation (proposition, réaction, conclusion) et (2) de son orientation appréciative (accord, sympathie, objection).

3. Vers la création de récits dialogiques

Après ces analyses fines, rencontre par rencontre et énoncé par énoncé, l'équipe a cherché à rassembler et à faire sens globalement des résultats. Pour ce faire, la création de « récits dialogiques » (Guillemette, 2015, 2021) a été envisagée pour chacune des thématiques émergeant des analyses. Ces courts textes permettent de présenter et de mettre en tension les postures des participant.es tout en préservant et développant leur caractère dialogique.

Pour ce faire, une première étape a été de créer des schémas narratifs pour chacun des passages significatifs (extraits de la transcription) choisis et analysés. Ces schémas désignent les protagonistes du dialogue parmi les huit participant.es, mais aussi une certaine montée en tension de l'interaction dialogique autour d'une question ou d'un thème particulier. Plus précisément, cette montée en tension est illustrée par un diagramme à ligne brisée marquant la plupart du temps un énoncé déclencheur, le développement de points de discussions, une pointe où la tension atteint son paroxysme, une désescalade et un dénouement. Un petit texte résumé était ensuite produit. La figure 1 en présente un exemple (des abréviations désignent les protagonistes du dialogue).

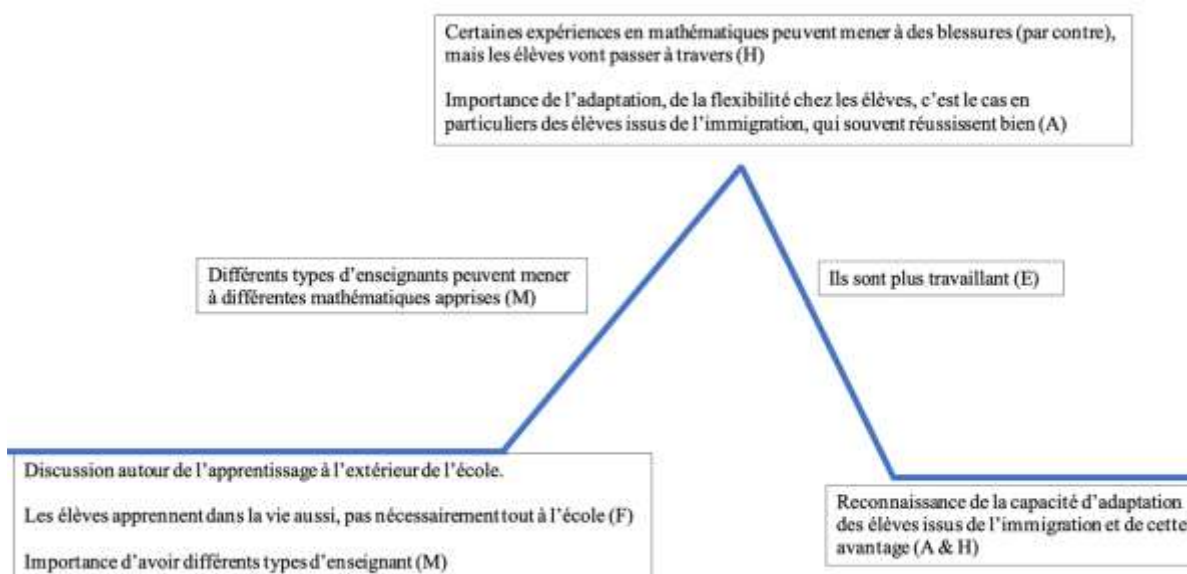


Figure 1 – Exemple de schéma narratif

Ces schémas narratifs (23 ont été produits au total) ont ensuite été rassemblés autour de quatre thématiques particulières : Inégalités sociales engendrées par l'enseignement des mathématiques –

Exploration des inégalités sociales et économiques en classe de mathématiques – Authenticité de l'activité mathématique en salle de classe – Activité en salle de classe autour de la protection de l'environnement. Un récit dialogique a ensuite été produit pour chacune de ces thématiques.

Ces courts textes, qui sont toujours pour le moment en chantier, présentent et mêlent dans une narration polyphonique les points de tensions, d'interrogations ou de consensus mis au jour dans les analyses et organisés par l'entremise des schémas narratifs. Pour Bakhtine, tout mouvement de conscience est lui-même dialogique, pénétré par et en dialogue avec ceux des autres, et ne peut donc être abordé en dehors des mouvements de conscience auxquels il répond, et qu'il permet en guise de réponse. Il s'agit donc de restituer ici, à travers l'écrit, le monde commun de sens (c'est-à-dire, un monde de sens toujours dialogique, tiraillé, contesté, fuyant) qui a émergé lors des rencontres avec les participants, un monde dans lequel nous habitons aussi comme chercheuse ou chercheur. Dans notre contexte de recherche, ces récits dialogiques constituent un moyen de mettre en scène et de penser ce monde en commun que nous proposerons de vivre mathématiquement et qui fait écho au processus social de prise de conscience graduelle d'un savoir historico-culturellement médiatisé, qui est celui des mathématiques, à travers lequel la conscience des individus se forme et se transforme.

VI. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Comme mentionné précédemment, quatre thématiques ont émergé de nos analyses. Nous nous concentrerons ici sur une seule d'entre elles : une activité en salle de classe autour de la protection de l'environnement. En effet, lors de la première rencontre, une activité a été proposée par un enseignant autour de l'utilisation de voitures à essence et de voitures électriques. L'idée était de comparer, à l'aide de système d'équations linéaires, les coûts associés à leur utilisation (voir quelques extraits en annexe). Nous rapportons ici un extrait du récit dialogique consacré à cette thématique. L'extrait met en scène une discussion entre Hannah, Maurice et Martin (pseudonymes), trois des enseignant.es, ainsi que Mireille et David, chercheuse et chercheur, coresponsables du projet. L'activité en question avait été proposée par Maurice.

- Moi, ce qui m'interpelle de cette situation, c'est l'objectif même..., lança David. On veut optimiser, non ? On veut économiser, on analyse donc économiquement cette situation. On cherche ce qui est le plus rentable pour la personne qui souhaite acheter un véhicule. Est-ce qu'on ne pourrait pas avoir un objectif qui serait autre chose que la rentabilité économique ?

David suggérerait que l'objectif devrait être de véritablement répondre à la crise climatique par les mathématiques, et non de montrer que l'utilisation d'un véhicule électrique est intéressante d'un point de vue financier.

- Il y a un risque d'avoir des mathématiques plaquées, comme on en a discuté précédemment, mais aussi des mathématiques au service de l'économie plutôt que de l'environnement, ajouta-t-il.

Au fond, les mathématiques sont-elles, doivent-elles être au service de quelque chose ? Leur application au monde phénoménal n'est qu'une facette de l'activité mathématique. Je crois qu'il y a là quelque chose de fondamental quant aux enjeux sociaux et politiques de/dans l'enseignement des mathématiques. On ne peut faire l'impasse d'une réflexion sur les mathématiques et l'éducation mathématique elles-mêmes, leurs finalités, leur épistémologie et leur actualité.

Interloqué, Maurice rétorqua : « Moi, ce que, euh... tout à l'heure... dans l'aspect culture, je reviens avec mon idée, l'élève va rencontrer toutes sortes d'adultes dans son parcours. Il faut leur faire confiance à ces adultes pour transmettre. C'est un gros jeu de confiance, transmettre des valeurs intéressantes, par le prétexte de leur discipline enseignée. Par exemple, mes élèves vont retenir de moi la rigueur, que, les formules, on peut savoir d'où elles viennent, et que c'est le fun le jogging ».

Le choix du contexte d'application des mathématiques transmettrait des valeurs et des manières d'être en mathématiques. Il y a une forme de richesse qui est perçue dans la diversité des caractères et des valeurs des enseignants; diversité d'être, d'agir, de valeurs des enseignants, comme autant de possibilités d'être, d'agir et de valeurs pour les élèves. Le fait de s'intéresser à la lutte aux changements climatiques est une possibilité comme une autre. C'est une valeur. Cela dit, la valeur est ce qui dévalorise, disait Jean-Luc Marion. C'est, peut-être, au fond, le relativisme est ses écueils. Il y a quelque chose ici à penser.

- Mais est-ce que la situation intéressera les élèves ?!, demanda Mireille, plus terre-à-terre. Le fait d'acheter une voiture et de discuter d'un budget n'est-ce pas quelque chose pour les plus vieux ?

- Oui, au début ils auront plus une voiture usagée, répondit Maurice blagueur. Mais les élèves sont au courant des enjeux environnementaux et de la possibilité d'un engagement écocitoyen. Ça ne les concerne pas directement, mais ça concerne leurs parents et leur famille.

Hannah s'inséra subitement : « L'important c'est l'engagement des élèves, il est possible de changer la thématique (en gardant la même exploration mathématique) pour intéresser davantage les élèves ». Elle suggère aussi qu'il faut garder les deux, l'exploration de l'enjeu environnemental et de l'enjeu économique par les mathématiques. Tout dépend selon elle des sensibilités.

- Est-ce que l'analyse que vous faites à la fin, est-ce que c'est les élèves qui la font ? À savoir, si c'est possible que tout le monde ait une voiture électrique, etc., demanda Martin à Maurice. Est-ce que les élèves sont capables, sont-ils trop jeunes justement ?

Maurice signifia qu'il ne le savait pas, mais la question de Martin l'interpellait.

- C'est que je trouve intéressant le fait de discuter de ça avec les élèves, de dire « ouin !, est-ce que tout le monde peut avoir une voiture électrique ? Est-ce que... c'est-tu l'option ultime ? La meilleure option ?, ajouta Martin.

- Oui la décroissance !, ajouta tout de go, Maurice.

Le groupe se questionna un moment. L'ouverture à la réflexion plus large avec les élèves quant aux méthodes pour diminuer les émissions de gaz à effet de serre, est-elle possible, comment ? Cette réflexion irait bien sûr au-delà de la simple résolution du système d'équations, d'une application plaquée, désincarnée.

Maurice avança timidement : « Je ne sais pas, la résolution du système d'équations n'est peut-être pas l'objectif principal ici... ».

Je¹ m'enthousiasmais de ces questions, de cette tension. Oui, en effet, quel est le véritable objectif de cette activité ? C'est la réflexivité qui me semblait à l'œuvre. Je pense à Bourdieu et la réflexivité en recherche en sciences humaines, un regard sur « ce qu'on fait » à titre de scientifique, un pas de côté. Ce qui se donnait à voir pour nous, c'était peut-être la formation et la transformation des consciences (je pense à Radford), c'est ce qui me semblait en(jeu).

Cet extrait nous a semblé intéressant, car il présente l'interaction dialogique entre cinq des huit participant.es, mais aussi avec des discours et injonctions ambiants, tout un ensemble de voix qui soutiennent des attitudes, postures morales, modes de consommations et manières d'être autour, dans ce cas précis, de l'utilisation de la voiture électrique. Ces voies interagissent et révèlent une tension fondamentale autour des finalités et des fondements mêmes de l'éducation mathématique. En effet, les participant.es se questionnent explicitement à propos des rôles éducatifs de l'activité proposée et montrent une certaine ambivalence entre un pôle « économique », optimisant et rationalisant, où les mathématiques montrent leur pouvoir proprement positif, et un pôle « écologique » où se trouvent et se formulent leurs aspirations sociales, morales et éducatives.

D'Ambrosio (2016) fut l'un des premiers à mettre en évidence les liens qui unissent éducation mathématique et enjeux environnementaux. Dans une perspective freirienne critique, il a suggéré que

¹ « Je » désigne ici David Guillemette, l'auteur de ce récit dialogique.

l'éducation mathématique devait prendre un tournant éthique en portant une attention aux différents développements et applications mathématiques qui se gardent de réflexivité et d'une vision foncièrement écologique de la science et de l'activité humaine. Ainsi, une inexorable tension apparaît entre les mathématiques qui se sont développées dans un contexte d'applicabilité au monde phénoménal, dans une optique d'optimisation, de contrôle et de rationalisation, et celles qui se sont déployées dans une prise descriptive de compréhension et de développement de nouvelles attentions et de manières d'être dans le monde (voir Barwell, 2023). Il est intéressant de se voir vivre ici ces questions de manière très concrète par les participant.es.

On peut remarquer aussi que cette tension fondamentale porte avec elle les réflexions et les questions qui lui sont propres, mais place aussi les participant.es dans des modes d'être très particuliers marqués par la réflexivité. On peut d'ailleurs percevoir clairement Maurice qui, à la toute fin de l'extrait, manifeste cette attitude en se questionnant sur le rôle éducatif de l'activité, avec en arrière-plan un regard réflexif sur l'éducation mathématique même qui ne peut se résumer ou se réduire à la simple transmission de modes d'abstraction et de communication et de techniques de résolution de problème.

VII. CONCLUSION

Dans cette contribution, nous avons cherché à décrire et à rendre compte des résultats préliminaires d'une recherche participative auprès d'enseignant.es du secondaire au sujet des enjeux sociaux et politiques de l'enseignement des mathématiques. En nous concentrant sur une thématique émergente, celle de l'introduction d'activités portant sur la protection de l'environnement en salle de classe, nous avons suggéré comment sont entrés en tension, chez les participant.es, des postures contrastées entre assiduité quant au programme vécu et exigences contemporaines en contexte de crise climatique.

Notre approche dialogique a permis de mettre en relief les contrastes, les points de jonction et les consensus qui animent le groupe, et ce, sans que notre voix de chercheuse ou chercheur se trouve hégémonique ou directive, mais plutôt jointe de manière équipollente à la multiplicité de celles qui se sont manifestées. D'autres résultats, plus précis et élaborés, sont attendus prochainement.

RÉFÉRENCES

- Abtahi, Y. et Barwell, R. (2019). Migration and dialogue in mathematics classrooms. Dans J. Subramanian (dir.), *Proceedings of the 10th international Mathematics Education and Society conference* (p. 199-202). MES.
- Abtahi, Y. et Wagner, D. (2016). Violence in un-rooted mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 36(3), 38-40.
- Adler J., Ball D., Krainer K., Lin F-L. et Novotna J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 359-381.
- Bakhtine, M. M. (1981). *The dialogic imagination: Four essays*. University of Texas Press.
- Barwell, R. (2013). The mathematical formatting of climate change: critical mathematics education and post-normal science. *Research in Mathematics Education*, 15(1), 1-16.
- Barwell, R. (2023). Wolf diminished: Mathematics, education and biodiversity. *For the learning of mathematics*, 43(2), 2-7.
- D'Ambrosio, U. (2006). *Ethnomathematics: Link between traditions and modernity*. Sense.

- Desgagné, S. (2007). Le défi de coproduction de savoir en recherche collaborative : une démarche de reconstruction et d'analyse de récits de pratique enseignante. Dans M. Anadon (dir.), *La recherche participative : multiples regards* (p. 89-121). Presses de l'Université du Québec.
- Guillemette, D. (2021). Phenomenological approach and Bakhtinian dialogism: Epistemological tensions and methodological responses. *Forum: Qualitative Social Research*, 22(1), Article 11. <http://dx.doi.org/10.17169/fqs-22.1.3544>
- Guillemette, D. et Nicol, C. (2016). Mathematics education and social justice or learning to meet the Others in the classroom: a collective reflection. *For the Learning of Mathematics*, 36(3), 38-45.
- Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: Toward a pedagogy for social justice*. Routledge.
- Krzychala, S. (2019). Professional praxis community in a dialogical perspective: Towards the application of bakhtinian categories in the documentary method. *Forum: Qualitative Social Research*, 20(1), Article 17. <http://dx.doi.org/10.17169/fqs-20.1.3073>.
- Lunney Borden, L. (2021). Decolonising mathematics education in a time of reconciliation. Dans A. Andersson et R. Barwell (dir.), *Applying critical mathematics education* (p. 47-70). Brill.
- Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport [MELS]. (2020) *Référentiel de compétences professionnelles : profession enseignante*. Gouvernement du Québec.
- Nicol, C., Gerofsky, S., Nolan, K., Francis, K. et Fritzlan, A. (2020). Teacher professional learning with/in place: Storying the work of decolonizing mathematics education from within a colonial structure. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 20(2), 190-204.
- Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation (M. Catlla, trad.). Dans *Groupe premier cycle – Éléments 1* (p. 53-87). IREM de Toulouse. <https://bibnum.publimath.fr/ITO/ITO11003.pdf>
- Radford, L. (2021). *The theory of objectification. A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Brill/Sense.
- Roth, W.-M. et Radford, L. (2011). *A cultural historical perspective on teaching and learning*. Sense.
- Rubel, L. (2018). Equity-directed instructional practices: beyond the dominant perspective. *Journal of Urban Mathematics Education*, 10(2), 66-105.
- Skinner, D., Valsiner, J. et Holland, D. (2001). Discerning the dialogical self: A theoretical and methodological examination of a Nepali adolescent's narrative. *Forum: Qualitative Social Research*, 2(3), Article 18. <https://doi.org/10.17169/fqs-2.3.913>
- Skovsmose, O. (2012). Towards a critical mathematics research programme? Dans O. Skovsmose et B. Greer (dir.), *Opening the cage: Critique and politics of mathematics education* (p. 343-368). Sense.
- Stephan, M., Chval, K. B., Wanko, J. J., Civil, M., Fish, M., Herbel-Eisenmann, B., Konold, C. et Wilkerson, T. (2015). Grand challenges and opportunities in mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(2), 134-146.

ANNEXES

Partie 1: Projection économique...



415 km d'autonomie
20 000 km / année

Hyundai

Kona électrique

Électrique

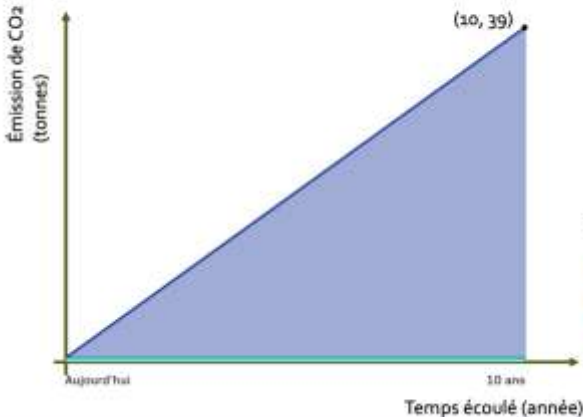
- Prix du véhicule: 46 695\$
- Subventions gouvernementales: 13 000\$
- Coût total au bout de 5 ans: 36 995\$

Essence

- Coût total au bout de 5 ans: 43 124\$
- Coût total au bout de 8 ans: 52 124\$

- Trace un graphique qui permet de mettre en relation le coût (\$) total du véhicule électrique ET du véhicule à essence en fonction du temps écoulé (année) depuis l'achat du véhicule.
- Quel est le coût initial du véhicule à essence?
- Quel est le coût annuel d'une voiture électrique et celui d'une voiture à essence?
- Après combien de temps atteint-on une équivalence économique? Arrondis ta réponse au dixième près.
- Calcule l'économie d'argent que l'on fait avec le véhicule électrique après 10 ans.
- Si le gouvernement n'offrait pas de subvention serait-on avantagé économiquement par le véhicule électrique après 10 ans?

Partie 2: Projection de l'impact environnemental...



Temps écoulé (année)

- Quelles sont les règles associées à chacune des droites?
- Quel type de fonction permet de modéliser chacune des droites?

Véhicule à essence

Véhicule électrique

COMPARAISON DE DEUX DISPOSITIFS DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE : STAGE LUDIQUE ET TRAVAIL DE MASTER

| FIORELLI* SHAULA ET RAPHAEL** ELISE

Résumé | L'article compare deux dispositifs de recherche mathématique : un stage d'initiation à la recherche pour jeunes filles et un travail de master en mathématiques. Il explore les différences entre les contrats didactiques et analyse comment ces contextes influencent les stratégies de résolution de problèmes. L'étude aborde également l'échec de la récolte de données en identifiant les problèmes et les moyens de les surmonter pour une future analyse comparative.

Mots-clés : démarche d'investigation, stage ludique, stratégies de recherche, récolte de données

Abstract | The article compares two mathematical research frameworks: an engaging math workshop for young girls and a master's thesis in mathematics. It explores the differences between the didactic contracts and analyses how these contexts influence problem-solving strategies. The study also addresses the failure in data collection, identifying the obstacles and ways to overcome them for a future comparative analysis.

Keywords: Investigative approach, engaging math workshop, research strategies, data collection

I. INTRODUCTION

Dans cet article, nous souhaitons mettre en parallèle les stratégies mises en œuvre pour mener un travail de recherche mathématique par deux groupes distincts. Le premier se compose d'étudiant.es réalisant leur travail de master à la Section de mathématiques de l'Université de Genève. Le deuxième groupe est constitué des participantes au Camp des Marmottes, un stage d'initiation à la recherche en mathématiques pour les jeunes filles âgées de 16 à 18 ans basé sur le modèle des Cigales au CIRM. Durant ce camp de cinq jours, chaque petit groupe de deux à quatre participantes travaille sur un sujet parmi ceux proposés par des chercheurs et chercheuses invitées.

Bien que le but soit le même – mener des recherches en vue de résoudre un problème ouvert – les enjeux didactiques sont très différents : travail certificatif pour l'un et aboutissement d'un stage ludique et découverte des méthodes de recherche mathématique pour l'autre.

Il s'agira de voir si les stratégies mises en œuvre par les deux groupes se ressemblent ou diffèrent complètement, autrement dit si la différence entre les enjeux implique ou non des approches radicalement différentes. On comparera plus précisément l'organisation du travail, les moyens de surmonter des difficultés, l'attitude face à l'échec ainsi que la manière de conclure un tel travail.

La finalité de cette analyse est d'une part de mieux comprendre les stratégies mises en œuvre lors d'activités ludiques et d'autre part de pouvoir expliquer en quoi elles sont similaires ou différentes de celles d'un travail universitaire.

Dans un premier temps, nous analyserons les deux contrats didactiques – celui du stage et celui du travail de master – ainsi que les objectifs d'apprentissage, afin de mieux comprendre leurs différences et similitudes. Sur la base de cette analyse, nous dégagerons ensuite les principaux points de comparaison qui structureront notre étude.

* Shaula Fiorelli – Mathscope et G·EM, Section de Mathématiques, Université de Genève – Suisse – shaula.fiorelli@unige.ch

** Elise Raphael – NCCR SwissMAP et G·EM, Section de Mathématiques, Université de Genève – Suisse – elise.raaphael@unige.ch

Malheureusement, malgré le dispositif mis en place, la récolte des données prévue lors du camp des Marmottes a été infructueuse. Par conséquent nous n'avons pas non plus lancé la récolte de données au niveau des étudiant·es en master. Nous allons donc examiner les causes probables de cet échec et proposer des solutions pour y remédier.

Enfin, nous présenterons le point de vue d'une des autrices ayant une expérience à la fois dans la direction de travaux de master et dans l'encadrement de stages. Cela nous permettra d'identifier des résultats préliminaires qui orienteront plus précisément notre analyse future.

II. CONTRATS DIDACTIQUES ET OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Tentons tout d'abord d'explicitier les contrats didactiques pour chacune des deux situations, le camp d'initiation à la recherche et le travail de master, ainsi que les objectifs d'apprentissage.

1. *Camp d'initiation à la recherche*

Le Camp des Marmottes est un stage d'initiation à la recherche en mathématiques pour les jeunes filles âgées de 16 à 18 ans. Durant cinq jours, chaque petit groupe de deux à quatre participantes travaille sur un sujet parmi ceux proposés par des chercheurs et chercheuses invitées. Exposés de mathématicien·nes, activités sportives, jeux et moments conviviaux viennent ponctuer la semaine.

L'idée du camp est de mettre les jeunes filles en situation de recherche sur des problèmes ouverts (au sens de (Fabre, 1999)) et adaptés aux participantes. Ces dernières sont libres d'attaquer le problème comme elles le souhaitent et même de s'en écarter pour suivre des pistes qui les intéressent. Les encadrant·es sont là pour donner des pistes de réflexion ou pour les aider à réfléchir mais, en principe, pas pour leur donner des réponses. Lorsque cela s'avère nécessaire un point théorique peut être donné, en particulier si les participantes ne l'ont pas encore abordé à l'école.

À la fin du camp, les jeunes filles doivent faire une présentation d'un quart d'heure environ pour expliquer leur travail, les résultats obtenus mais aussi les pistes explorées et les difficultés rencontrées. Cette présentation a lieu devant les autres participantes et les encadrant·es.

Dans ce contrat didactique, il y a avant tout une absence d'évaluation des participantes de la part de l'encadrant·e qui ne donne pas d'appréciation ou de note sur le travail ni ne sanctionne une réponse fausse. Il n'y a pas non plus d'obligation de réussite : le travail de recherche peut se conclure sans que le but annoncé ait été atteint. La posture de l'encadrant·e est celle de l'accompagnant·e : iel pose des questions les plus ouvertes possible et n'y répond pas. Iel détient aussi un certain savoir, car iel peut donner des points théoriques si le besoin s'en fait sentir.

Pour les participantes, le but est de mener en groupe des recherches afin de répondre à la situation de recherche proposée. Elles peuvent poser des questions aux encadrant·es qui leur fourniront des pistes de réflexion et non des réponses. Il faut noter que les encadrant·es passent régulièrement dans les différents groupes et non uniquement dans le leur, ceci pour amener des regards extérieurs et de nouvelles pistes.

Notons que le plus souvent, l'encadrant·e connaît la réponse aux questions qu'il pose ou du moins peut la trouver plus ou moins facilement. Cette ambiguïté entre la posture d'accompagnement et de celle de détention complète du savoir conduit à une possibilité de rupture du contrat didactique : les participantes savent que l'encadrant·e connaît les réponses et essayent de les obtenir, dérogeant ainsi au contrat.

On demande de plus un certain degré d'autonomie aux participantes et on leur explique dès le premier jour que l'échec est quelque chose de normal et qu'il fait partie intégrante du processus de recherche.

On est donc dans le cas de situations d'apprentissage adidactiques où la dévolution est un élément fondamental (Brousseau, 1998). Plus précisément, par l'absence d'évaluation, le contrat didactique est fondamentalement proche du contrat didactique de vulgarisation au sens de (Pelay, 2019) et (AlPaGe, 2019).

Il y a cependant une nuance qu'il semble important de relever. Les encadrant·es sont tous et toutes issues du milieu universitaire et ont par conséquent des attentes qui vont de soi dans un travail de recherche académique : le fait que le groupe organise son travail avec un partage de tâches et des moments de mise en commun, qu'il développe des techniques et de nouvelles approches pour surmonter les difficultés et qu'il ait une attitude positive face à l'échec et le reconnaisse comme composante intégrante du travail.

Si ces attentes font partie intégrante du contrat didactique du point de vue de l'encadrant·e, elles ne vont pas de soi pour les participantes qui n'ont bien souvent pas l'habitude d'être confrontées à ces problématiques dans le cadre de leur cursus scolaire. De plus, l'expérience montre que ces attentes ne sont pas clairement verbalisées en début de camp. Cette non-verbalisation entraîne alors des recadrages et des renégociations du contrat tout au long de la semaine. L'encadrant·e est souvent amené·e à verbaliser ses attentes et est parfois surpris·e de devoir le faire.

2. *Travail de master*

Pour obtenir le titre de Master en mathématiques, les étudiant·es doivent généralement réaliser un travail de recherche original. Pour ce travail, iels sont encadré·es par un chercheur ou une chercheuse qui leur propose un sujet. Les étudiant·es choisissent leur encadrant·e en fonction de la thématique de recherche qu'ils souhaitent aborder mais en partie aussi pour leurs affinités pour la personne.

Tout comme pour le camp et pour tout travail de recherche en général, l'encadrant·e endosse la posture d'accompagnant·e en ne répondant pas aux questions ouvertes qu'il pose tout en détenant un certain savoir. Toutefois, à la différence de l'encadrant·e du camp, iel n'a pas toutes les réponses, même s'iel a généralement des idées sur les résultats que l'on peut obtenir.

La différence fondamentale réside dans le fait que l'encadrant·e a aussi une posture d'évaluateur : iel va décider du moment où le travail arrive à son terme et va l'évaluer. Bien que le travail, par sa nature de recherche originale, peut se conclure autrement que selon le but annoncé, il y a une obligation de réussite, car il s'agit d'un travail certificatif.

Le but des étudiant·es est aussi très similaire à celui des participantes du stage. La différence principale résidant dans le fait qu'iels ont une obligation de réussite liée à la nature certificative du travail.

Notons aussi que tout comme pour le camp, le contrat didactique intègre aussi des attentes autour de l'autonomie, de l'organisation du travail et de l'attitude face à l'échec.

3. *Objectifs d'apprentissage : différences et similitudes*

Tentons maintenant d'explicitier quels sont réellement les objectifs d'apprentissage dans ces deux situations.

Le camp se veut une initiation à la recherche mathématique. Le travail de master quant à lui est le premier vrai travail de recherche que fait un étudiant en mathématiques. Dans les deux cas, on observe un changement radical du contrat didactique par rapport aux attentes précédentes. Aussi bien dans le cadre scolaire que dans le cadre des premières années académiques, les participantes et les étudiant·es sont en position d'apprenant·es face à une personne en posture de détentrice du savoir.

Avec le camp et le travail de master, le paradigme change. On demande aux participantes et aux étudiant·es d'acquérir les outils nécessaires pour mener des recherches au sens académique du terme. Ces outils sont principalement ceux précédemment mentionnés, à savoir l'autonomie, l'organisation du travail, les moyens de surmonter des difficultés et l'attitude face à l'échec. Les objectifs d'apprentissage de ces deux situations sont donc en partie identiques.

Dans le cas du camp, il n'y a pas d'objectif précis d'apprentissage autre que celui-ci. Notons cependant qu'il existe un volet plus sociologique. En effet, ces stages et écoles non mixtes sont des occasions pour les filles de prendre confiance en elles, et les études en montrent la nécessité, car les initiatives mixtes excluent certaines filles¹.

Dans le cas du travail de master, s'ajoute à ces objectifs la maîtrise du sujet donné, et c'est cette dernière composante qui sera plus particulièrement évaluée.

Il faut remarquer qu'aussi bien dans le cadre du camp que dans celui du travail de master l'objectif d'apprentissage principal, l'acquisition des compétences pratiques, reste toujours dans un certain degré d'implicite.

III. LES POINTS DE COMPARAISON ET LES PRINCIPALES DIFFÉRENCES

Maintenant que l'on a déterminé les différences et les similitudes entre les deux contrats didactiques, nous pouvons choisir les points de comparaison. Comme mentionné précédemment, l'organisation du travail, les moyens de surmonter des difficultés et l'attitude face à l'échec sont les principaux objectifs d'apprentissage aussi bien du stage que du travail de master. Nous allons par conséquent nous concentrer sur ces trois aspects. Nous souhaitons de plus en ajouter un dernier qui est la manière de conclure un travail de recherche.

Bien que l'objectif soit le même – mener des recherches en vue de résoudre un problème ouvert – et que, sur ce plan, les contrats didactiques se rejoignent, nous avons aussi souligné plus haut une différence fondamentale : celle de l'évaluation.

Il s'agira donc d'analyser si les stratégies mises en œuvre par les deux groupes sont similaires ou différent complètement, autrement dit si l'enjeu de l'évaluation implique ou non des approches fondamentalement différentes.

Dans nos conclusions, nous serons de plus attentives aux principales différences entre ces situations, à savoir la durée, le fait d'être seul·e ou en groupe et la manière de conclure le travail.

En effet, dans le cas du camp, le travail de recherche est nécessairement limité à une durée de cinq jours. À l'inverse, le travail de master, bien que soumis à une durée maximale de deux semestres, peut être achevé plus tôt.

¹ Voir à ce sujet l'ouvrage (Perronnet, Marc, et Paris-Romaskevich 2024)

Concernant la conclusion, dans le cas du master, c'est principalement l'encadrant·e qui détermine si le travail est suffisant pour l'obtention du diplôme. Dans le cas du stage, cette décision est partagée entre les participantes et l'encadrant·e et est principalement induite par le temps limité.

Enfin, l'étudiant·e en master travaille seul·e tandis que les participantes au camp évoluent en groupe.

IV. EN PRATIQUE

La récolte de données devait se faire au travers d'un cahier de bord comportant pour chaque jour des questions en lien avec les différentes étapes du travail de recherche. Les questions posées sont en annexe de cet article. Les jeunes filles avaient le choix de confier ou non ce cahier aux organisatrices à la fin de la semaine.

Sur les 13 filles présentes au stage, une seule a tenu son cahier de bord tous les jours. Toutes les autres ont cessé de le remplir après un ou deux jours seulement ou n'ont pas souhaité le confier aux organisatrices à la fin de la semaine.

Pour le travail de master, nous souhaitons poser essentiellement les mêmes questions que celles posées aux participantes du camp (celles avec un astérisque dans l'Annexe 1). L'idée était de distribuer le questionnaire aux étudiant·es en train d'effectuer leur travail ou l'ayant tout juste fini.

Au vu de ce manque de données sur les participantes du camp, nous n'avons pas lancé l'étude sur les étudiant·es en master.

V. EXPLICATIONS POSSIBLES DE L'ÉCHEC DE LA RÉCOLTE DE DONNÉES ET PISTES D'AMÉLIORATION

Comme nous n'avons pas réussi à obtenir des données exploitables, nous avons décidé de présenter ici la manière dont a été organisée la récolte de données ainsi que ses faiblesses. Au travers de cette analyse, nous souhaitons montrer l'importance de chaque détail pour que les participantes adhèrent à cette étude. A posteriori, nous avons identifié deux sources potentielles de problèmes : la définition du cahier de bord et la gestion de la récolte durant le stage d'autre part.

1. Le cahier de bord

L'idée du cahier de bord était de donner aux participantes un objet permettant de réunir toutes leurs productions écrites durant le camp. Parmi ces productions devaient se trouver les réponses aux questions pour l'étude, mais les jeunes filles pouvaient aussi prendre des notes durant les exposés ou y consigner leurs données de recherche. On désirait ainsi avoir une vue d'ensemble de ce que les participantes considéraient comme utile durant leur stage.

Pour ne pas coincer les jeunes filles dans une organisation figée du cahier, nous leur avons fourni les questions sur une feuille à part.

Cette idée qui nous semblait bonne au départ a finalement conduit à une définition floue du cahier de bord rendant difficile une adoption de ce dispositif de la part des participantes.

Une meilleure stratégie serait la suivante : distribuer en début de semaine le questionnaire sur des feuilles prévues à cet effet avec de la place pour répondre aux questions directement sur les feuilles. Ainsi, seules les données nécessaires se trouveraient sur le formulaire, ce qui rendrait le dispositif plus clair.

La question s'est aussi posée d'en faire une version en ligne afin d'offrir les deux possibilités aux participantes.

2. *Gestion de la récolte durant le stage*

Lors de la séance d'introduction le premier jour, le projet d'étude a été expliqué oralement aux participantes et le matériel, cahier et questions, a été distribué. Puis durant la semaine, les encadrant·es ont rappelé aux participantes de remplir le cahier. L'ambiance du camp étant très informelle, nous ne souhaitions pas donner un cadre formel à cette étude.

Avec le recul, on peut remarquer plusieurs défauts à ce système.

Avant tout, l'absence de temps spécifique pour répondre aux questions conduisait à une mise de côté de cette tâche qui n'était pas considérée prioritaire. Les plages dédiées à la recherche avaient lieu le matin de 8 h 30 à 12 h 30 avec une pause à 10 h, essentiellement du mardi au jeudi — le premier jour étant dédié au choix des sujets et le dernier aux présentations orales. Ainsi, lors de ce temps finalement assez court, les participantes préféraient se plonger intégralement dans leurs recherches plutôt que de répondre aux questions de l'étude. Pour contrer cela, un moyen simple serait d'allouer des plages spécifiques pour remplir le formulaire.

Nous pourrions aussi récolter les réponses à la fin de chaque journée. Nous craignons toutefois que cela ne brise la dynamique décontractée du stage.

Nous nous sommes aussi rendu compte a posteriori que le fait de donner un cadre formel donne aussi plus de crédibilité à l'étude et qu'une forme d'engagement est nécessaire à son bon fonctionnement. L'idée serait alors de distribuer en début de camp une feuille expliquant clairement les objectifs et ce que l'on attend des participantes. Si elles décident de prendre part à l'étude, elles devraient alors s'engager formellement en signant un papier. Nous laisserions cependant la possibilité de se retirer en cours de stage.

Un autre point que l'on pourrait mettre en avant réside dans le fait que les questions permettent de prendre du recul sur la démarche de recherche. Verbaliser les démarches parfois inconscientes (par exemple sur le choix du sujet) permet d'avoir une idée plus claire des motivations et de ce qu'elles impliquent. Décrire comment le travail est organisé permet aussi de visualiser la démarche d'investigation. Il s'agira donc d'expliquer que les questions posées sont utiles non seulement pour l'étude mais aussi comme outil d'introspection de leur travail.

En mettant en place ces quelques points identifiés ci-dessus — à savoir un formulaire d'adhésion, un questionnaire distinct, des plages spécifiques et la possibilité de le remplir en ligne, sans oublier une meilleure explication de ce qu'il peut apporter dans le cadre d'une activité de recherche — nous espérons obtenir des données utilisables lors de la prochaine édition du camp des Marmottes au printemps 2025.

3. *Gestion de la récolte durant le travail de Master*

Les difficultés rencontrées lors de la récolte durant le stage se seraient aussi sans doute retrouvées dans le cadre du travail de master. Ainsi les mêmes stratégies, hormis les plages spécifiques, seront à mettre en place lors de la récolte de données.

VI. POINT DE VUE D'UNE ENCADRANTE

Faute de pouvoir proposer une analyse fondée sur les réponses des participant·es à l'étude, nous présentons ici des éléments de réflexion tirés de l'expérience de la seconde autrice, ayant à la fois

encadré de travaux de master et des camps des Marmottes. Ce point de vue est également partagé et complété par la première autrice qui a aussi eu l'opportunité d'encadrer un groupe de travail lors du camp.

Bien que l'échelle de temps soit évidemment différente — le camp des Marmottes cherchant à condenser un processus similaire à celui d'un travail de master en seulement cinq jours —, certaines similitudes apparaissent. La première phase, celle de la découverte du sujet, se déroule de manière assez comparable dans les deux contextes : c'est une phase d'exploration souvent bien vécue par les participantes comme par les étudiant·es, tant que des ressources classiques sont disponibles. Cette phase est toutefois rapidement suivie par une période de désorientation (« et maintenant, que faire ? »), révélatrice de la nouveauté que constitue cette liberté dans l'apprentissage.

Aux Marmottes, l'intégration des participantes dans un groupe de travail leur offre une diversité de pistes à explorer et atténue le sentiment d'isolement souvent ressenti dans le cadre d'un master. En revanche, les étudiant·es en master sont généralement plus capables de déterminer s'ils ou elles parviennent à un résultat intéressant ou non, et de compléter (ou du moins reconnaître le degré d'avancement) de leurs démonstrations. Dans le cadre des Marmottes, cette étape requiert beaucoup plus d'encadrement, car les participantes peuvent facilement s'égarer dans des pistes infructueuses, entraînant parfois découragement et frustration. Dans les deux situations, la compréhension de l'importance d'un résultat négatif (« cette piste ne mène à rien ! ») demande un accompagnement pour ne pas être perçue comme une perte de temps.

En cas d'impasse, le cadre des Marmottes propose des solutions plus immédiates : les participantes évoluent déjà au sein d'un groupe travaillant sur un même sujet, ce qui favorise le dialogue et les échanges. Le tournus d'encadrant·es permet aussi un regard extérieur pour débloquer des situations. En master, en revanche, l'élève dispose rarement d'interlocuteurs du même niveau ou d'une telle accessibilité, et doit généralement se tourner exclusivement vers son encadrant·e. De plus, le cadre informel des Marmottes et la disponibilité constante des encadrant·es facilitent un recours plus fréquent aux questions, ce qui n'est pas toujours possible dans un suivi universitaire. Toutefois, cette accessibilité accrue peut avoir des effets contre-productifs : les participantes tendent à solliciter rapidement de l'aide au lieu de prendre le temps de buter sur le problème.

Curieusement, la conclusion des travaux aux Marmottes émane plus souvent des élèves que dans le cadre des masters, probablement parce que nous n'y fixons pas d'objectifs précis. Un accent particulier est mis sur la communication des résultats aux autres participantes, soulignant l'importance du partage des découvertes — une pratique qui mériterait d'être davantage intégrée dans le processus académique.

VII. COMMENTAIRES

En se basant sur ce point de vue, nous pouvons déjà dégager quelques pistes pour mieux cerner notre problématique.

Les moyens employés pour surmonter les difficultés constituent la principale différence entre les participantes du camp et les étudiant·es en master. Les premières sollicitent beaucoup plus facilement les encadrant·es, tandis que les second·es font preuve de davantage d'autonomie et explorent d'autres méthodes pour surmonter leurs obstacles. Il s'agira de déterminer dans quelle mesure l'attitude des étudiant·es en master est déterminée par le contexte de l'évaluation ou si elle résulte d'un contexte plus général d'autonomie résultant de leur formation universitaire. On pourra aussi interroger les participantes du camp afin de comprendre si elles poseraient autant de questions si elles étaient évaluées.

L'attitude face à l'échec semble poser des difficultés aussi bien dans le cadre du camp que dans celui du travail de master, nécessitant un accompagnement permettant d'intégrer l'échec comme une étape normale et nécessaire. Il sera intéressant de classifier les différentes réponses au questionnaire pour identifier des catégories d'attitudes similaires et examiner si chaque catégorie inclut des membres des différents groupes étudiés, ou si elles sont propres à l'un ou l'autre.

Enfin, la manière de conclure un travail de recherche est aussi spécifique à chaque groupe. Il s'agira de comparer les deux modèles afin de comprendre ce qui provient de l'enjeu de l'évaluation.

VIII. L'APPORT DU COLLOQUE

Lors du colloque, quelques pistes ont été proposées par les participant·es du groupe de travail pour affiner la récolte de données. Nous présentons ici celles que nous avons retenues, car elles peuvent être mises en place sans altérer la dynamique du stage. Elles seront en outre facilement applicables aux étudiant·es en master.

Une première suggestion consiste à organiser des groupes de discussion où les jeunes filles pourraient partager leurs joies et leurs frustrations. Cela leur permettrait de prendre conscience qu'elles ne sont pas seules face aux difficultés et que l'échec constitue une étape nécessaire dans la recherche. Ces échanges pourraient être enregistrés ou faire l'objet de prises de notes par la personne animant la discussion. Ils pourraient être mis en parallèle avec des groupes similaires réunissant des étudiant·es en master, afin de comparer les attitudes face à l'échec.

Une autre piste consiste à mener des entretiens informels avec les participantes, par exemple lors des activités sportives, et à consigner rapidement des notes après la discussion. Bien que ces données soient plus difficiles à analyser, elles offriraient un éclairage complémentaire sur les attitudes des participantes. Cette approche pourrait également être adoptée avec les étudiant·es en master.

Enfin, la proposition d'utiliser des jetons pour solliciter de l'aide – afin d'en limiter le recours et de faciliter la comparaison avec les étudiant·es en master – apparaît très intéressante, même si elle risque de modifier légèrement la dynamique du stage.

IX. CONCLUSION

Cet échec dans la récolte de données nous a finalement permis de mieux comprendre les stratégies à adopter pour mener une étude plus pertinente. Il nous a également offert l'opportunité de mieux affiner notre problématique. Nos questions pourront ainsi être plus ciblées pour mieux analyser comment les moyens employés pour surmonter les difficultés sont directement liés à l'enjeu d'évaluation ou de non-évaluation.

Nous espérons qu'à la suite de ce travail, notre collecte de données sera plus efficace et pertinente, et que nous pourrions présenter des conclusions intéressantes dans un futur article.

Nous tenons aussi à remercier les participant·es du Spé2 pour leurs précieux apports.

RÉFÉRENCES

- AlPaGe. (2019). Regards sur les ateliers récréatifs. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMF2018 « Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines », 22-26 octobre 2018, Gennevilliers, Paris* (p. 1298-1309). IREM de Paris. https://emf2018.sciencesconf.org/data/actes_EMF2018.pdf
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.
- Fabre, M. (1999). *Situations-problèmes et savoir scolaire*. Presses universitaires de France.
<https://shs.cairn.info/situations-problemes-et-savoir-scolaire--9782130496199-page-119?lang=fr>
- Pelay, N. (2019). Esquisse d'un modèle didactique d'analyse pour les actions de diffusion des mathématiques. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMF2018 « Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines », 22-26 octobre 2018, Gennevilliers, Paris* (p. 1317-1324). IREM de Paris.
https://emf2018.sciencesconf.org/data/actes_EMF2018.pdf
- Perronnet, C., Marc, C. et Paris-Romaskevich, O. (2024). *Matheuses : les filles, avenir des mathématiques*. CNRS éditions.

ANNEXE 1

QUESTIONNAIRE DISTRIBUÉ LORS DU CAMP DES MARMOTTES 2024

Les questions marquées d'un astérisque étaient également destinées à être posées aux étudiant·es en master.

Carnet de bord Marmottes

Lundi 8 avril

*Comment choisir ?

Comment avez-vous choisi votre sujet ? Expliquez par exemple ce qui vous a intéressé, si c'est un coup de cœur, si c'est par exclusion, si vous avez eu immédiatement des idées, si c'est un sujet que vous connaissez et que vous souhaitez approfondir, si c'est pour travailler avec certaines personnes,...

*Comment commencer ?

Expliquez comment vous avez commencé à travailler sur le sujet. Êtes-vous parties dans tous les sens ou vous êtes-vous donné une direction précise ? Vous êtes-vous partagées le travail ou avez-vous travaillé toutes ensemble ? ...

Les petits bonheurs du jour

Les moments difficiles du jour

Mardi 9 avril

*Comment continuer ?

Expliquez comment vous avez organisé votre travail aujourd'hui. Quelles ont été les difficultés, comment vous les avez surmontées ou ce qui vous a bloqué ? Avez-vous persévéré ou abandonné une piste ? ...

Vous êtes-vous fixées un but à atteindre ou pensez-vous aller le plus loin possible dans le temps imparti ? ...

Les petits bonheurs du jour

Les moments difficiles du jour

Mercredi 10 avril

Le travail du jour

Expliquez comment vous avez organisé votre travail aujourd'hui. Quelles ont été les difficultés, comment vous les avez surmontées ou ce qui vous a bloqué ? Avez-vous persévéré ou abandonné une piste ? ...

Les petits bonheurs du jour

Les moments difficiles du jour

Jeudi 11 avril

Le travail du jour

Les petits bonheurs du jour

Les moments difficiles du jour

***Comment terminer ?**

Expliquez comment vous avez mis un point final à votre recherche. Avez-vous des regrets, des points que vous auriez souhaité explorer plus ou moins ? Avez-vous atteint l'objectif que vous vous étiez fixées ?

***Comment présenter ?**

Quel est le contenu que vous souhaitez présenter ? Sous quelle forme ? Privilégiez-vous les démarches ou les résultats ? Parlez-vous de vos échecs, des pistes infructueuses ?

Vendredi 12 avril

***Bilan de la semaine :**

***Joies**

***Frustrations**

Pistes pour poursuivre la réflexion

USAGES ET STRATÉGIES DES ÉLÈVES EN LANGUES DE PREMIÈRE SOCIALISATION EN MATHÉMATIQUES À MAYOTTE. ÉTUDE STATISTIQUE ET DIDACTIQUE

| NGUALA* JEAN-BERKY, MANOU-ABI** SOLYM ET TCHONANG YOUKAP*** PATRICK

Résumé | Cette étude explore l'influence des langues de première socialisation sur les capacités des élèves à résoudre des problèmes en mathématiques dans le contexte plurilingue de Mayotte, à partir d'une enquête menée auprès de 167 élèves. L'analyse s'appuie sur des techniques de modélisation statistique pour évaluer l'efficacité des méthodes didactiques utilisées, notamment en termes de représentations et de contextualisation. L'objectif est de comprendre comment le plurilinguisme des élèves influence leur apprentissage et leur raisonnement mathématique, ainsi que de questionner la pertinence des stratégies pédagogiques actuelles pour soutenir une meilleure inclusion linguistique en classe.

Mots-clés : langue d'enseignement, première langue de socialisation, résolution de problème, contextualisation, apprentissage des mathématiques

Abstract | This study examines the impact of students' first socialization languages on their problem-solving skills in mathematics, based on a survey of 167 students in Mayotte's multilingual context. Using statistical modeling techniques, the study assesses the effectiveness of current didactic approaches, particularly regarding representation and contextualization strategies. The goal is to understand how students' plurilingualism influences their mathematical learning and reasoning, and to question the relevance of current pedagogical strategies in supporting linguistic inclusion in the classroom.

Keywords: Language of instruction, first socialization language, problem-solving, contextualization, mathematics learning

I. CONTEXTE D'ÉTUDE ET PROBLÉMATISATION

1. Contexte de l'étude

L'enseignement des mathématiques en France est un domaine complexe qui présente de nombreux défis, tant pour les enseignants en formation que pour ceux en exercice, notamment en raison du langage spécifique à la discipline et du niveau d'abstraction des concepts à transmettre. À l'échelle nationale, les résultats en mathématiques demeurent faibles, comme le montrent régulièrement les évaluations internationales du Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA) en 2012, 2015, 2018 et 2022. Dans l'académie de Mayotte, les évaluations nationales et locales, notamment les contrôles continus, renforcent ce constat d'échec scolaire, de nombreux élèves rencontrant des obstacles multiples dans la résolution de problèmes. Ce phénomène est aggravé par un déficit de travail personnel en dehors des heures scolaires, tant en famille qu'au sein des structures socio-éducatives organisées, ainsi que par diverses autres inégalités. Dès le cours préparatoire (CP), les taux de réussite sont très faibles (DEPP, 2021), notamment en résolution de problèmes, avec des taux de succès de 20 % et 25 % respectivement en 2021 et 2022.

* LIM - Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques/ Université de Mayotte - 2, rue Joseph Wetzell 97490 Sainte-Clotilde – France – jean-berky.nguala@univ-mayotte.fr

** Laboratoire de Mathématiques et Applications UMR 7348, University of Poitiers – France – solym-mawaki.manou-abi@umontpellier.fr

*** LIM - Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques/ Université de Mayotte - 2, rue Joseph Wetzell 97490 Sainte-Clotilde – France, ptchonangyoukap@univ-mayotte.fr

Par ailleurs, des lacunes dans la maîtrise de la langue d'enseignement ont été observées dès le début de la scolarité, comme le révèlent les mêmes évaluations nationales. En français, par exemple, en 2021 et 2022, les taux de compréhension des phrases lues par l'enseignant étaient de 32 % et 33 %, tandis que la compréhension des phrases lues par les élèves eux-mêmes atteignait entre 39 % et 44 %. Le plurilinguisme est très présent en milieu scolaire à Mayotte.

Des études linguistiques, notamment celles de Maturafi (2021), indiquent que le shimawore, une langue d'origine bantoue, est parlée par 71,3 % de la population, et que le kibushi, une langue austronésienne, est pratiquée par 22,5 %. D'autres langues locales apparentées, issues des Comores et de Madagascar, sont également utilisées sur l'île (Laroussi, 2009). En revanche, la langue d'enseignement, le français, qui est aussi la langue officielle, n'est maîtrisée que par 2,2 % de la population. Ainsi, les élèves de l'île aux parfums utilisent principalement leur langue maternelle dans leur quotidien, que ce soit en famille, entre amis ou même à l'école, sauf lors des interventions orales encadrées par l'enseignant.

Il nous semble essentiel d'étudier et d'explorer les dimensions culturelles et linguistiques au cours des activités mathématiques, notamment lors de la résolution de problèmes, qui constitue à la fois une introduction et un objectif des apprentissages en mathématiques. Dans cette perspective, comme le souligne Brun (1990), la résolution de problèmes pour un élève en action commence par la compréhension d'une situation initiale pour atteindre un but déterminé. Cela nécessite l'élaboration de stratégies, permettant ainsi de concevoir une série d'actions ou d'opérations en vue de cet objectif.

Le texte mathématique, en tant que support d'activité, présente des spécificités. Il articule à la fois un texte en langage naturel (ici, en français) et des écritures symboliques qui sont des composantes des registres de représentation sémiotiques (Laborde, 1982, p. 18, Duval, 1993). Dans notre étude, nous interrogeons les pratiques langagières au sens de Hache (2019) pour analyser les actions des élèves lorsque des processus sont enclenchés pour comprendre la situation proposée durant l'apprentissage, souvent accompagnées d'écrits en langue d'enseignement. Par la suite, nous présenterons la problématique, suivie de la méthodologie utilisée, avant de discuter les résultats de l'expérience.

2. *Problématique*

Quand des élèves se retrouvent en situation de précarité linguistique en langue d'enseignement, cela peut provenir d'un lexique personnel insuffisant, d'une mauvaise maîtrise des représentations sémiotiques ou d'un défaut de mise en lien entre les différents éléments du texte à traiter. Or la maîtrise de ces différents aspects est souvent nécessaire pour se représenter et résoudre des tâches en mathématiques. Nous nous demandons dans quelle mesure et dans quelles situations les élèves utilisent leurs langues de première socialisation comme un levier pour apprendre. Quand le texte est donné en français, que fait l'élève qui n'a pas bien compris pour s'appuyer sur sa langue de première socialisation ? De ce fait, nous interrogeons l'efficacité et la pertinence des techniques personnelles des élèves qu'ils développent comme stratégie pour représenter les situations d'enseignement qui leur sont proposées.

II. ANALYSE DIDACTIQUE, REPRÉSENTATION SÉMIOTIQUE ET CONTEXTUALISATION

Nous orientons cette étude sur les trois axes suivants. Les questions d'usages de langage dans l'apprentissage des mathématiques (Laborde, 1982 ; Hache, 2019) est notre premier axe. Le second prend en compte les difficultés spécifiques rencontrées par les élèves ayant eux-mêmes de grosses lacunes de compréhension dans la langue d'enseignement qu'ils ne pratiquent en réalité que

ponctuellement et seulement en classe (Mendonça Dias, 2020 ; Millon-Fauré, 2020). Le dernier axe évoque les éléments de contextualisation pouvant éventuellement aider l'enseignant/l'apprenant à construire un environnement favorable à la réussite des tâches à réaliser (Delcroix, 2013 ; Salone, 2022). Cet aspect du contexte sémantique favorable agit en lien avec les processus de représentation (Julo, 1995) en résolution de problèmes (Nguala, 2005) : interprétation et sélection des données, passage aux opérations ou aux tracés géométriques...

Ces processus, toujours en interaction, se structurent en un tout cohérent. Concernant la première entrée du langage, Laborde (1982) a bien posé les bases dans ce domaine en étudiant les pratiques liées au langage mathématique (langue, langage, formulation, codes imbriqués, etc.) dans sa thèse, questionnant ainsi ces concepts sous-jacents du langage mathématique. Dans la continuité de la recherche citée, les conclusions de Hache (2019) sur les pratiques langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ont encore fait évoluer ces problématiques. Pour illustrer cette évolution, nous évoquons la réflexivité nécessaire sur les usages langagiers : formulation et reformulation collective, par les élèves en classe, des théorèmes, des définitions du cours, des démonstrations. Pour la prise en compte des difficultés des élèves dans la langue d'enseignement, nous nous référons à ce qui est fait au sein des équipes plurielles où des chercheurs en didactique du français collaborent avec ceux qui travaillent en didactique des mathématiques sur des sujets communs. De ce fait, Millon-Fauré (2020) a fait des analyses quantitatives et qualitatives sur les difficultés dans l'apprentissage des mathématiques des élèves à besoins spécifiques, notamment au niveau linguistique. De cela, la question de la compréhension des consignes est mise en évidence : « Nous avons ainsi pu observer que lors de notre expérimentation, plus d'un tiers des élèves ne parvenaient pas à résoudre certains exercices dont la consigne était en français alors qu'ils disposaient des savoirs mathématiques nécessaires. » (Millon-Fauré, 2020, p. 214). Ici, la difficulté se trouvait souvent au niveau de la compréhension des lexiques spécifiques aux mathématiques et leur mise en lien avec les savoirs/connaissances disciplinaires qui sont déjà là. Cet élément est un enjeu également crucial que nous pensons questionner dans nos analyses. Nous retenons aussi pour notre étude, certaines implications didactiques de l'appropriation du français développées par Mendonça Dias (2020), entre les langues d'enseignement/d'apprentissage, la langue de première socialisation des élèves et les difficultés rencontrées par ces derniers dans leurs apprentissages. S'appuyant sur cela, nous nous projetons dans les interprétations à venir dans cette sphère, discussions et prolongement des corrélations.

Par ailleurs, comme déjà indiqué précédemment, la complexité du langage mathématique pour ce profil d'élèves proviendrait surtout de la présence de l'imbrication des deux codes issus du langage naturel et du langage symbolique : ce sont là deux registres de représentation sémiotique (Duval, 1993). De plus, les éléments de contextualisation nous apportent, à l'instar des problèmes ressemblants en modalité de multiprésentation (Julo, 1995 ; Nguala, 2005), des contextes favorables de représentation des activités à réaliser, des contextualisations fortes des objets d'enseignement/d'apprentissage (Delcroix, 2013 ; Salone, 2022 ; Nguala et Tournès, 2025). Par la suite de l'étude, nous appellerons le processus de conversion-traduction, le processus qui consiste à s'appuyer sur sa langue de première socialisation pour traduire l'énoncé posé en langue d'enseignement avant de le résoudre. De ce fait, différentes implications et imbrications évoquées précédemment sont des bases nécessaires à une modélisation que nous exploiterons notamment pour certains profils d'élèves en clusters.

III. MÉTHODOLOGIE

1. Contexte de l'expérience, description et recueil des données

Cet article s'inscrit dans une recherche plus large visant à identifier et analyser les facteurs influençant les performances des élèves en mathématiques dans le contexte scolaire de Mayotte. Pour cela, nous avons réalisé une enquête auprès de 167 élèves, accompagnés de leurs professeurs, afin de recueillir des données à la fois quantitatives et qualitatives.

L'enquête a consisté en un questionnaire numérique portant sur plusieurs variables : le niveau en mathématiques des élèves (évalué par leur moyenne sur 10), leur attitude (rapport) face à la discipline, les types de difficultés qu'ils rencontrent, ainsi que les domaines mathématiques spécifiques où ces difficultés se manifestent. En complément, des aspects linguistiques ont été pris en compte, tels que la compréhension des cours et des tâches après une traduction (conversion-traduction), et l'usage des consignes en langue de première socialisation.

Afin d'approfondir certaines observations, nous avons également mené des entretiens semi-directifs. Les analyses des données ont été réalisées en deux approches. D'une part en une approche didactique qui permettra de décrire certains contenus mathématiques et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre leur enseignement et leur apprentissage. D'autre part, les traitements statistiques ont été effectués à l'aide du logiciel R, permettant d'explorer les corrélations entre les variables et d'identifier des tendances significatives. La figure 1 ce dessous présente une vue partielle des données collectées.

Etablissement	Niveau_classe	Note_Math	Type_difficultes	Comprehension_langue_maternelle	Notions_expliquees_langue
Lycée de Mamoudzou Nord	SECONDE	7.00	Aucune	/N	Mathematiques generales
Lycée de Mamoudzou Nord	SECONDE	5.00	Entraînement	Oui de maniere generale	Fonction lineaire
Lycée de Mamoudzou Nord	SECONDE	7.00	Aucune	Oui de maniere generale	Aucune
Lycée de Mamoudzou Nord	SECONDE	8.00	Aucune	Oui de maniere generale	Aucune
Lycée de Mamoudzou Nord	SECONDE	3.00	Entraînement	Oui de maniere generale	Aucune
Lycée de Mamoudzou Nord	SECONDE	4.00	Entraînement	/N	Aucune
Lycée de Mamoudzou Nord	SECONDE	3.00	Entraînement	Oui de maniere generale	Mathematiques generales
Lycée de Mamoudzou Nord	SECONDE	9.00	Aucune	/N	Aucune
Lycée de Mamoudzou Nord	SECONDE	5.00	Entraînement	Oui de maniere generale	Mathematiques generales
Dembeni high school	SECONDE	6.00	Entraînement	Oui par des exemples	Aucune
Dembeni high school	PREMIERE	4.50	Aucune	/N	Aucune
Dembeni high school	PREMIERE	5.00	Entraînement	/N	Aucune
Lycée de Mamoudzou Nord	SECONDE	4.50	Entraînement	Oui de maniere generale	Aucune
Dembeni high school	PREMIERE	5.00	Entraînement	Oui par des exemples	Aucune
Lycée de Mamoudzou Nord	SECONDE	8.00	Aucune	Oui par des exemples	Aucune
Dembeni high school	PREMIERE	5.00	Entraînement	Oui de maniere generale	Mathematiques generales
Dembeni high school	PREMIERE	6.00	Entraînement	Oui de maniere generale	Aucune
Dembeni high school	PREMIERE	7.00	Entraînement	Oui par des exemples	Mathematiques generales
Manohani high school	PREMIERE	6.00	Entraînement	Oui de maniere generale	Aucune

Showing 1 to 18 of 167 entries, 0 total columns

Figure 1 – Vue partielle de la donnée collectée

2. Classification Hiérarchique sur Composantes Principales

Pour identifier les profils d'élèves à partir des variables recueillies dans notre enquête, nous avons utilisé une analyse en composantes principales (ACP), conformément à la méthode proposée par Jambu (1977). Cette analyse vise à réduire la dimensionnalité des données tout en conservant l'essentiel de l'information, afin de mettre en lumière les structures sous-jacentes. L'ACP a été choisie comme étape préliminaire pour explorer la variabilité de nos données et mieux comprendre la relation entre les différentes variables. En effet, les premières composantes principales extraites capturent la majorité de l'information pertinente, tandis que les dernières dimensions sont souvent associées au bruit ou à des variabilités mineures. L'ACP nous permet ainsi de simplifier la représentation des données,

facilitant ainsi leur interprétation avant l'application d'une méthode de classification. Nous avons ensuite appliqué une méthode de classification non supervisée afin de regrouper les élèves selon des typologies émergentes, sans hypothèse a priori. La classification non supervisée repose sur l'idée d'identifier des clusters d'observations qui partagent des caractéristiques similaires sur la base des variables mesurées. La combinaison de l'ACP et du clustering permet de maximiser la pertinence des groupes obtenus, en s'assurant que les dimensions principales extraites par l'ACP guident efficacement le processus de classification. Nous avons utilisé la fonction « *hpc* » du logiciel R, qui permet d'associer l'ACP à une méthode hiérarchique de classification. Cette fonction offre une visualisation pratique des composantes principales ainsi que des regroupements obtenus, facilitant ainsi l'interprétation des profils d'élèves identifiés. Les résultats sont représentés sous forme de graphiques, permettant d'établir des corrélations entre les profils d'élèves et les différentes variables mesurées.

IV. RÉSULTATS ET DISCUSSION

L'analyse statistique des variables mesurées dans le cadre de notre enquête indique quelques corrélations comme le niveau en mathématiques des élèves varie en fonction de leur langue de première socialisation, notamment le Kibushi, le Malgache et le Shimawore. La capacité des élèves à comprendre les situations mathématiques et à réaliser les tâches scolaires dépend également de leur initiative personnelle pour traduire et convertir ces situations dans leur langue de première socialisation. Ce processus de compréhension est en outre influencé par le niveau en mathématiques des élèves ainsi que par les types de difficultés rencontrées. Parmi ces difficultés, les élèves mentionnent un manque de concentration, de motivation, de discipline et d'entraînement, comme illustré dans la figure en annexe.

Notamment, de nombreux élèves affichant un bon niveau en mathématiques ne rapportent pas de difficultés particulières, à l'exception de quelques-uns qui rencontrent des problèmes de compréhension des textes en classe. Le fait qu'un élève puisse traduire une tâche donnée à résoudre dans sa langue de première socialisation donnée (L'appropriation linguistique d'une tâche donnée) ne semble pas directement corrélée aux performances en mathématiques, où la compréhension du vocabulaire spécifique joue également un rôle crucial. Les élèves performants, dont la langue maternelle est le français ou le malgache, sont suivis par ceux dont la langue maternelle est le Shimawore et d'autres langues africaines.

L'utilisation de la langue de première socialisation pour comprendre les situations mathématiques varie également selon le niveau en mathématiques. Par exemple, parmi les élèves ayant un niveau supérieur à la moyenne, sept sur dix font appel à leur langue maternelle pour faciliter leur compréhension. Ces élèves précisent qu'ils effectuent des traductions-conversions dans divers domaines mathématiques, tels que l'algèbre, l'analyse, la statistique et la géométrie. Cependant, une simple conversion-traduction des concepts de la langue d'enseignement vers la langue maternelle ne suffit pas à garantir la réussite des tâches d'étude. Il est nécessaire d'associer ce processus à d'autres modalités et paramètres, tels que la motivation liée à ces conversions, les études supérieures envisagées et les attitudes face aux mathématiques. Cela permet à l'apprenant d'explorer plus en profondeur la représentation symbolique qui coexiste avec le langage naturel converti (Nguala, 2023).

Prenons par exemple l'élève numéro 22, âgé de 17 ans, qui fréquente la classe de première avec un niveau évalué à 8 sur 10. Né à Mayotte et parlant Shimaoré comme langue maternelle, il avait initialement l'ambition de se diriger vers les sciences économiques et sociales, mais il se retrouve finalement en sciences physiques et mathématiques. Il admet éprouver des difficultés à comprendre les cours, déclarant que « le français est un peu complexe ». Pour surmonter cela, il recourt à sa langue maternelle afin de mieux saisir les concepts enseignés. Il souligne également l'importance de la pratique

quotidienne, affirmant : « C'est la pratique de tous les jours qui fait que je comprends mieux en langue maternelle. » Cette observation révèle un rapport réflexif sur l'utilisation de sa langue maternelle pour effectuer des conversions et traductions.

L'élève numéro 29, dont le niveau en mathématiques est moyen (5 sur 10), partage son rêve de devenir enseignant. Il opte pour des matières à caractère humaniste, telles que la littérature et la philosophie. Cependant, il éprouve des difficultés à mémoriser certaines formules, avouant : « Ça m'arrive de les confondre. » Pour mieux les retenir, il crée des histoires en Shimaoré, illustrant ainsi l'interaction entre sa culture et sa langue maternelle, une dynamique que l'on retrouve dans de nombreux témoignages similaires. Pour lui, « il faut absolument réussir la seconde où tout se joue. » D'autres élèves évoquent la nécessité d'une concentration intense lors des allers-retours entre la langue d'enseignement et leur langue maternelle, mentionnant parfois le caractère « sacré » de cette culture, en résonance avec leurs croyances religieuses.

L'élève numéro 27, âgé de 16 ans et scolarisé en seconde, exprime sa satisfaction quant à sa compréhension des définitions, qu'il attribue aux explications et reformulations fournies par un camarade de classe en Shimawore. De son côté, l'étudiant numéro 32 admet ne pas avoir totalement acquis la langue française, déclarant : « Oui, je n'ai pas totalement acquis la langue française. » Il explique qu'il comprend mieux grâce à sa pratique de la langue maternelle depuis l'enfance. Cette idée est renforcée par les propos de l'élève numéro 35, qui précise : « C'est plus la compréhension des choses, par exemple en physique-chimie ou dans d'autres matières. Lorsque j'ai une définition et qu'on me l'explique dans ma langue maternelle avec des termes que je connais, je vais plus comprendre. » Il souligne que les explications données en Shimawore sont réalisées avec « délicatesse », ce qui lui permet de mieux appréhender des notions comme $Ax + By$, éléments qu'il retient en mathématiques (comme déjà évoqué pour l'élève numéro 36).

Un rapport social lié à l'utilisation de la langue et de la culture régionale s'est également réveillé à Mayotte en rapport à l'immobilier et aux mobiliers des établissements scolaires. Les cours commencent souvent à 7 h du matin mais pour des raisons d'embouteillage de circulation, il y a des élèves qui arrivent au moins 1 h en avance quittant leur domicile familial très tôt. Entre le temps d'arrivée dans l'établissement et le début des cours, parmi ces élèves groupés par affinité, certains d'entre eux, y compris ceux qui n'ont pas le temps d'apprendre à la maison, se racontent les cours en langues maternelles. Cette manière particulière de réviser en se racontant des histoires impacte également leur niveau en mathématiques dans les contrôles continus.

En revanche, certains élèves pratiquent des conversions-traductions tout en présentant des niveaux en mathématiques remarquablement faibles. À titre d'exemple, considérons l'élève numéro 39 (19 ans, Terminale générale), l'élève numéro 47 (16 ans, en seconde) et l'élève numéro 48 (18 ans, Terminale, souhaitant intégrer un BTS). Le premier, noté 1 sur 10, déclare : « Je déteste les maths. » Le second, également très faible avec une note de 2 sur 10, exprime : « C'est trop dur » en référence à l'apprentissage des mathématiques. Enfin, la troisième rencontre des difficultés dans plusieurs matières, notamment en mathématiques et en français. Il regrette de ne pas avoir approfondi ses connaissances en mathématiques. En classe, il recourt à sa langue maternelle, qu'il désigne par le terme « comorien », pour « comprendre des exercices avec des contextes », affichant un niveau de 3 sur 10 en mathématiques.

Ces trois élèves font partie d'un ensemble plus large, représentant 50 % des cas, qui utilisent la compréhension par la langue maternelle. En général, les élèves de ce sous-groupe, dont le niveau est inférieur à la moyenne, traduisent et convertissent les activités (cours, exemples, consignes, etc.) fournies dans la langue d'enseignement vers leur langue maternelle. Cependant, malgré cette démarche,

leurs résultats aux contrôles ou aux évaluations trimestrielles demeurent faibles. Cela souligne qu'une simple substitution de mots, de groupes de mots ou de phrases ne suffit pas à garantir le succès.

Un texte mathématique, ou langage mathématique, dépasse la simple traduction d'un langage naturel. Il représente une entité plus complexe, englobant des écritures symboliques, des représentations sémiotiques et divers registres. Cette complexité a été mise en avant par Laborde (1982) et reprise par plusieurs chercheurs, tels que Barrier et Durand-Guerrier (2017, p. 7), ainsi que Njomgang et Tchonang (2015). Ces derniers soulignent que « le plus souvent, les énoncés du langage mathématique empruntent aux deux registres, celui de la langue naturelle et celui du symbolisme logico-mathématique. Cependant, sa complexité dépasse celle de la simple juxtaposition de ces deux registres. »

Ce n'est donc pas qu'une simple conversion-traduction, juste une juxtaposition des mots, qui fait que l'élève réussisse ou non en mathématiques. Ici, nous sommes en présence d'un degré de contextualisation faible (Delcroix 2013 ; Salone 2022). Comme déjà signalé, il y a encore autre chose à mettre en association pour aller vers un degré de contextualisation forte.

Ceci rejoint certains de nos résultats antérieurs concernant les contextes favorables de certains problèmes ressemblants :

« Les raisons variées de choix du problème n'influent pas forcément sur la réussite. Si l'élève choisit un problème parce qu'il est le premier sur la liste ou parce que son voisin l'a aussi choisi, ce choix n'explique pas une meilleure réussite. S'il le choisit parce qu'il lui semble facile, ou parce qu'il savait le faire (l'élève a repéré que les problèmes sont « ressemblants » ou une stratégie possible ou une stratégie déjà pratiquée), le choix explique une meilleure réussite. Si l'élève choisit un problème qui plaît par le contexte, l'effet de cette raison sur la réussite est à discuter notamment si son choix est basé seulement sur le fait d'aimer beaucoup les oranges et de ne pas aimer les pains au chocolat ! » (Nguala, 2009, p. 172-188)

Ces résultats corroborent également les observations de Nguala (2009) concernant les performances des élèves, notamment en ce qui concerne les inférences relatives à la qualité du contrôle développée par des élèves en situation d'échec. Suite à une expérience de re-enseignement, qui incluait une série de problèmes et des entretiens, les élèves ont pu bénéficier d'un enrichissement des contextes sémantiques des problèmes, présenté sous une modalité de multiprésentation. Duval (1993, p. 39) renforce cette idée en soulignant l'interconnexion entre langage et pensée :

« On ne peut pas faire comme si les représentations sémiotiques étaient simplement subordonnées aux représentations mentales, puisque le développement des secondes dépend d'une intériorisation des premières. Seules les représentations sémiotiques permettent de remplir certaines fonctions cognitives essentielles, comme celles de traitement. »

Ces éléments pourraient expliquer pourquoi certains élèves, malgré l'utilisation de substitutions de mots de la langue d'enseignement par leur langue maternelle pour réaliser des tâches ou comprendre les cours, ne parviennent pas à améliorer leur niveau de réussite en mathématiques.

Avec Shaftel (2006), Campbell (2007) et Mendoça Dias (2020), nous disons que la maîtrise des termes spécifiques aux mathématiques (objets mathématiques, compréhension des consignes, etc.) est un levier pour réussir en mathématiques, même moyennant des conversions-traductions de la langue d'enseignement en langue maternelle.

V. CONCLUSION

La recherche a permis de mettre en lumière les formes d'influence du niveau en mathématiques de l'élève par les langues maternelles en utilisant des stratégies personnelles à la suite des difficultés

mathématiques rencontrées pendant les cours. La conversion-traduction des tâches à réaliser et/ou des consignes, de la langue d'enseignement en langue maternelle, par l'élève, de son propre gré, génère des performances en réussite variable, ainsi que la recherche d'exemple pour illustrer ce qui est enseigné. Ce rapport établi entre les deux langues se traduit auprès d'un apprenant sur deux par des multiples reformulations pour une meilleure compréhension des éléments de cours via la langue maternelle. Il est variable en fonction du niveau en mathématiques des élèves. Ceci éclaire davantage le fait que la complexité du langage mathématique réside surtout dans l'imbrication de deux codes, deux langages, deux registres. Le fait d'avoir bien compris ce qui doit être fait ne suffit pas pour résoudre et réussir l'activité proposée, la conversion-traduction, de la langue d'enseignement à une langue de première socialisation, ne génère pas toujours les compétences langagières spécifiques nécessaires pour réaliser la tâche donnée. Une mise en relation entre codes, naturel et sémiotique, est nécessaire puisque ce n'est pas une simple substitution d'un mot non familier par un autre plus contextualisé qui permet de résoudre le problème ressemblant non réussi.

Les profils d'élèves qui en tiraient profit sont ceux qui commençaient à dépasser la simple lecture recherche des mots inducteurs ou une simple traduction-conversion d'une langue à une autre pour inférer une opération arithmétique. De plus, la nature de vérification du résultat trouvé permet d'émettre les hypothèses sur le lien bien établi entre le langage naturel et le langage sémiotique du langage mathématique proposé à l'énoncé de problème. Sous hypothèse d'avoir des connaissances déjà là (Houdement, 2006) à mobiliser, les processus de représentation de problèmes, la mémoire de problèmes réussis fonctionneraient mieux. De ce fait, nous pointons aussi l'interdépendance, la dialectique entre pensée et langage, entre penser et parler ; ce qui nous fait retrouver également l'hypothèse théorique fondamentale de Hache (2019). Comme prolongement, nous étudions l'impact du patrimoine local autre que le contexte linguistique (jeux traditionnels, conte, etc.) comme support d'enseignement, d'apprentissage et formation à Mayotte.

RÉFÉRENCES

- Barrier, T. et Durand-Guerrier, V. (2015). La quantification au cœur des relations entre langage, raisonnement et apprentissages mathématiques [Communication]. Dans G. Train (dir.), *Actes du Colloque CORFEM2015, 11-12 juin, Nîmes*. <https://www.univ-irem.fr/actes-du-colloque-corfem-2015>
- Brun, J. et Conne, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et Recherche*, 12(3), 261-286.
- Campbell, A. E., Davis, G. E. et Adams, V. M. (2007). Cognitive demands and second-language learners: A framework for analyzing mathematics instructional contexts. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(1), 3-30.
- Delcroix, A., Forissier, T. et Anciaux, F. (2013). Vers un cadre d'analyse opérationnel des phénomènes de contextualisation didactique. Dans F. Anciaux, T. Forissier et L. F. Prudent (dir.), *Contextualisations didactiques : approches théoriques* (p. 141-185). L'Harmattan.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Edmonds-Wathen, C., Trinick, T. et Durand-Guerrier, V. (2016). Impact of differing grammatical structures in mathematics teaching and learning. Dans R. Barwell (dir.), *Mathematics education and linguistic diversity* (p. 23-46). Springer.

- Hache, C. (2019) *Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques* [Habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot].
- Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presse universitaire de Rennes.
- Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique* [Thèse de doctorat, Université de Grenoble I].
- Laroussi, F. (2009). Le plurilinguisme à Mayotte : états des lieux et perspectives. Dans F. Laroussi (dir.), *Langues, identités et insularité : regards sur Mayotte* (p. 27-43). PURH.
- Maturafi, L. et Dureysseix, F. (2021). *Rapport d'évaluation des dispositifs bilingues en maternelle 2014-2021 et proposition de plan d'action pour le plurilinguisme dans l'Académie de Mayotte*. Rectorat de Mayotte ; Centre universitaire de formation et de recherche de Mayotte.
- Mendonça Dias, C. (2020). Implications didactiques de l'appropriation du français sur une année scolaire, par les élèves allophones. Dans C. Mendonça Dias, B. Azaoui et F. Chnane-Davin (dir.), *Allophonie. Inclusion et langues des enfants migrants à l'école* (p. 187-201). Lambert-Lucas.
- Millon-Fauré, K. (2020). Analyse quantitative et qualitative des difficultés rencontrées par les élèves allophones dans leurs apprentissages mathématiques. Dans C. Mendonça Dias, B. Azaoui et F. Chnane-Davin (dir.), *Allophonie. Inclusion et langues des enfants migrants à l'école* (p. 203-216). Lambert-Lucas.
- Ministère de l'Éducation nationale et de la jeunesse [MENJ]. (2021). *Évaluations 2021 Point d'étape CP : premiers résultats*. DEPP.
- Nguala, J.-B et Tournès, D. (2025, 26-30 mai). *Contextualisation forte et développement professionnel : une expérience de formation des enseignants à Mayotte* [Communication – SPÉ2]. Colloque Espace Mathématique Francophone (EMF2025), Montréal, Canada.
- Nguala, J.-B. (2005). La multireprésentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes. *Grand N*, (76), 45-63.
- Nguala, J.-B. (2009). *Multiprésentation de problèmes comme dispositif de réapprentissage au cycle 3 de l'école primaire. Mise en place, portée et limites* [Thèse de doctorat, Paris VII Denis Diderot].
- Nguala, J.-B. (2023). Contextes sémantiques et dispositifs de multi-représentation de problèmes : enjeux, structuration du milieu didactique, portée et limites. Dans P. Bourdier et S. Pesce (dir.), *Les pratiques d'enseignement et de formation à l'épreuve des contextes : Questions épistémologiques et méthodologiques* (p. 179-199). Téraèdre.
- Njomgang, J. et Tchouang, P. (2015). Le changement de langage dans l'activité mathématique. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF2015 « Pluralité culturelle et universalité des mathématiques enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage », 10-14 octobre 2015, Alger, Algérie* (p. 752-764).
- Salone, J. J. (2022). Contexte et contextualisation à Mayotte, une approche systémique. *Contextes et didactiques*, (20).
- Shafteel, J., Belton-Kocher, E., Glasnapp, D. et Poggio, J. (2006). The impact of language characteristics in mathematics test items on the performance of English language learners and students with disabilities. *Educational Assessment*, 11(2), 105-126.

ANNEXE

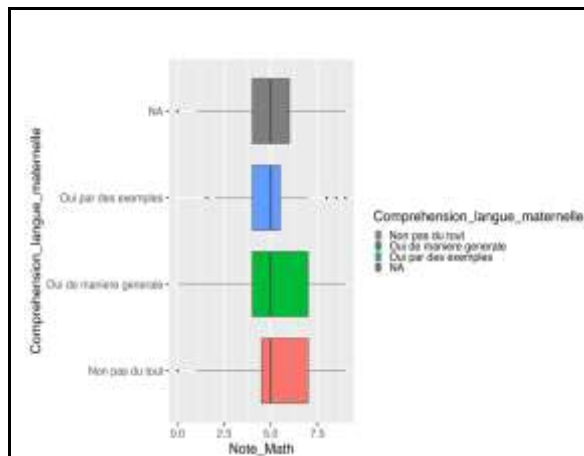


Figure 1 – Boxplot du niveau en maths en fonction des déclarations de compréhension par la langue maternelle

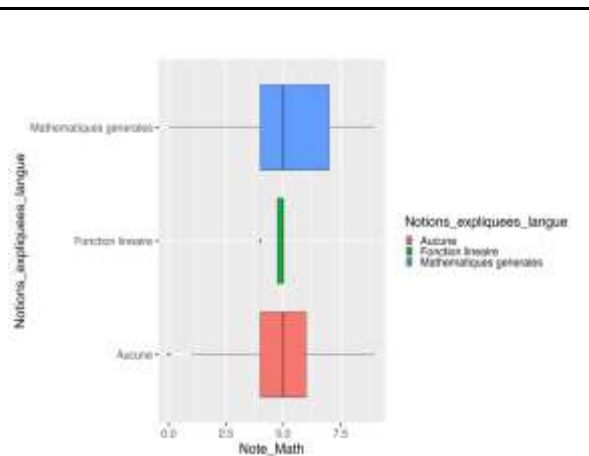


Figure 2 – Boxplot du niveau en maths en fonction des notions expliquées

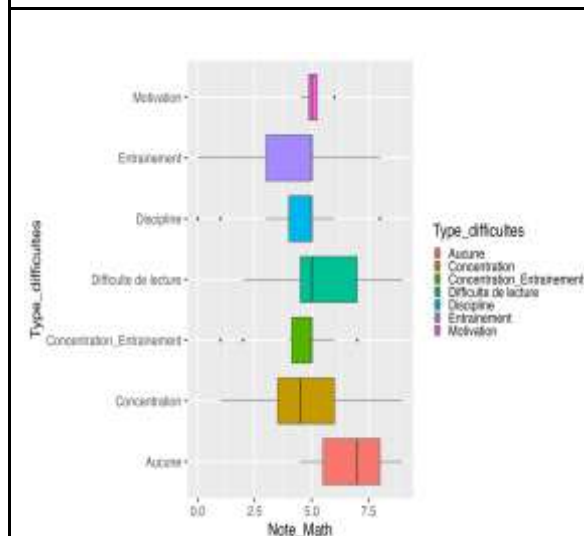


Figure 3 – Boxplot du niveau en maths en fonction des types de difficulté rencontrées

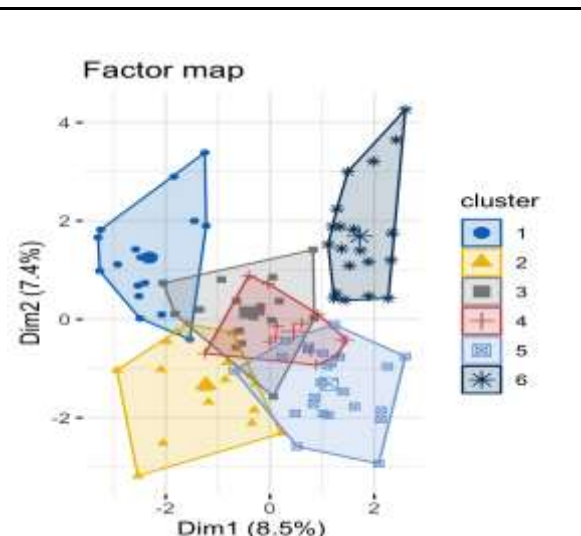


Figure 4 – Plan factoriel et clusters

CONTEXTUALISATION FORTE ET DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL :

EXPÉRIENCE D'UN DISPOSITIF DE FORMATION À MAYOTTE

| NGUALA* JEAN-BERKY ET TOURNÈS** DOMINIQUE

Mots-clés : contextualisation, ethnomathématique, geste professionnel, pratique enseignante

La présentation a commencé avec une description des enjeux de cette région de l'étude. De ce fait, Mayotte est un territoire qui concentre des inégalités comme sur le plan scolaire avec des scores de réussite les plus faibles aux différentes évaluations nationales (MEN, 2021), des inégalités éducatives (Léglise et Muni Toke 2024), inégalités sociales et matérielles, le manque de salles de classe, un déficit en temps de travail scolaire personnel en dehors du temps institutionnel (Nguala et Manou-Abi, 2023). De plus, la langue d'enseignement, n'est pas la langue de première socialisation des élèves pratiquée au quotidien, aussi bien en famille et entre amis, qu'à l'école, excepté le temps d'une prise de parole accordée par l'enseignant pour s'exprimer (Laroussi 2011). L'île se singularise aussi dans l'organisation de l'enseignement en rotation, c'est-à-dire deux groupes classes différents utilisent la même salle à des moments différents d'une même journée (Priolet 2021). Cela entraîne par exemple une organisation du temps de classe ne respectant pas les rythmes de l'enfant. Tenant compte de tous ces défis et enjeux éducatifs et écartant d'emblée une visée universaliste, en formation initiale à l'INSPE (Institut National Supérieur de Professorat et de l'Éducation), nous nous sommes demandé comment adapter et réajuster l'offre de formation pour une pratique moins générique, décentrée (Tournès, 2023, Léglise et al., 2024) et plus contextualisée au niveau disciplinaire, didactique et pédagogique.

Ensuite, le cadrage théorique était abordé pour expliquer ce que c'est contextualiser les pratiques d'enseignement et de formation pour notre étude. Fort d'un constat des confusions à répétition de nos étudiants limitant cette contextualisation à une substitution de certains mots d'une situation par d'autres estimés plus locaux comme l'ont aussi observé Nguala (2005) dans les dispositifs de multi-présentation d'un même problème, Salone (2022) avec l'appellation coloriage d'une contextualisation faible, nous cherchions des dispositifs de contextualisation forte. Des recherches ont montré que ces contextualisations fortes peuvent créer chez les apprenants des conditions favorables pour apprendre (Delcroix, Forissier et Anciaux, 2013, Robo 2021, Nguala 2023). De ce fait, les œuvres coopératives (Salone 2019), un dispositif pluridisciplinaire du premier degré (illustré avec le projet sur le banga, une habitation traditionnelle) qui a fait ses preuves à l'Université de Mayotte s'y prêtait, nous a inspiré pour ensuite l'adapter et ajuster.

Dans cette communication, nous cherchions à déterminer, dans le cadre de la formation des enseignants du Master MEEF 2D Parcours Mathématiques, en quoi l'implication des étudiants stagiaires à un dispositif de formation spécifique contextualisé mis en place permet de développer des gestes et postures professionnels. Ce dispositif, étalé sur quatre semestres, inclut des phases de recueil des données à la suite d'enquêtes en ethnologie avec des acteurs de terrain et des chercheurs du domaine du patrimoine matériel et/ou immatériel choisi, de construction et animation des séquences d'enseignement utilisant des données récoltées. Dans l'optique de faire apprendre tous les élèves de la

* Laboratoire d'informatique et de mathématiques LIM, Université de la Réunion – France – jean-berky.nguala@univ-mayotte.fr

** Laboratoire d'informatique et de mathématiques LIM, Université de la Réunion – France – dominique.tournes@univ-reunion.fr

classe, les séquences construites sont analysées a priori et a posteriori. À la fin de chaque semestre, des communications publiques sous forme de séminaire de recherche sont organisées pour permettre aux différents acteurs d'avoir des échéanciers, ce qui entretient la motivation et la régularité du travail attendu en équipe constituée par affinité de trois ou quatre étudiants chacune. Le tableau ci-dessous synthétise ces éléments développés.

Pédagogie de projet en formation des enseignants de mathématiques de collège et lycée à l'Université de Mayotte (Dominique Tournès, Jean-Berky Nguala)

Semestre 1 Choix d'un thème culturel local ; Enquêtes de terrain et interviews de chercheurs Présentation des travaux à la fête de la science.	Semestre 2 Conception d'activités pédagogiques s'appuyant sur le contexte local ; Pré-expérimentations en stage ; Présentation des travaux pendant la semaine des mathématiques.
Semestre 3 Conception d'un projet pédagogique ; (progression, séances, analyses a priori) ; Mise en œuvre du projet en classe ; Réalisation d'une affiche et présentation des travaux au colloque ARMIES.	Semestre 4 Suite de la mise en œuvre du projet en classe ; Réalisation d'un dossier de synthèse et d'une fiche de synthèse.

L'affiche suivante illustre le projet du groupe sur le cocotier.

Comment donner du sens à notre enseignement en mathématiques via le patrimoine de Mayotte ?

Le cocotier, un excellent support d'apprentissage en mathématiques
 DIEME M./MOHAMED S. et Z./SOLIDIKI M.

Matériels	Exploitations pédagogiques
- Feuilles de cocotier - PC (Scratch, etc.) - Calculatrices - Appareil photo	- Proportionnalité - Scratch (orientation) - Théorème de Thalès - Cycle de vie - Formes géométriques - Statistiques

Produits dérivés

TICE et pédagogie

Modélisation du sommier

Modélisation du parcours

Hypothèses

- Contextualisation
- Apprentissage par les jeux
- Résolution de problèmes

Recherche

- Expérimentations
- Observations (coutumes, environnement, etc.)
- Clad, entretiens, etc.

Données

Grands cocotiers (25 à 30 m)
Première récolte : 7 à 10 ans
De 60 à 100 fruits/arbre/an

Nains (hauteur de 12 m)
Première récolte : 3 à 4 ans
De 80 à 150 fruits/arbre/an

4 variétés de cocotiers à Mayotte sur 710 au plan mondial

Conclusion

Contextualisons nos activités afin de sensibiliser nos élèves (préservation simultanée du cocotier et de l'environnement) en remplaçant les sacs en plastique ou en utilisant les produits du coco (huile, lait, etc.).

Apprenons en jouant !

La notion de contextualisation est en lien dans le temps avec l'histoire des mathématiques et dans l'espace avec le patrimoine culturel et l'ethnomathématique, sans oublier les aspects didactiques : les liens entre les blocs sont ainsi bien tissés. Les participants au projet (presque tous étaient déjà enseignants contractuels avant leur réussite au concours) ont indiqué que cette pédagogie active a transformé leur rapport à l'enseignement surtout dans la construction des séances pour introduire des concepts. L'enquête mise en place révèle un consensus sur la contextualisation de l'enseignement consistant à adapter les contenus à l'environnement culturel, social ou quotidien des élèves au-delà d'une simple substitution des mots (noms, objets, etc.) pour aller faire vivre le patrimoine. Ceci est dans le but principal de donner du sens aux apprentissages et faciliter la compréhension du concept en jeu, en plus de la valorisation de l'estime de soi des apprenants à la suite d'un engagement soutenu dans la réalisation de la tâche sur un support contextualisé : une autre manière de reconfigurer le rapport au savoir mathématique.

Des observateurs extérieurs au projet venant du Rectorat ou de l'Université de Mayotte soulignent également le développement professionnel de ces étudiants stagiaires lors des visites institutionnelles surtout dans la prise en charge de la diversité des élèves en prenant en compte aussi le plurilinguisme et multilinguisme du territoire.

Enfin, la suite de ce dispositif est un projet plus large au niveau régional réunissant la Réunion, Mayotte et Madagascar qui vient d'être lancé. L'idée est de créer un réseau entre les formateurs d'enseignants. Plusieurs objectifs sous-tendent : identifier comment les mathématiques s'inscrivent dans les langues locales, réaliser un inventaire d'artefacts, élaborer des ressources pédagogiques, améliorer la formation en s'appuyant sur l'ethnomathématique et la contextualisation, et ultimement améliorer la motivation des élèves.

RÉFÉRENCES

- Delcroix, A., Forissier, T. et Anciaux, F. (2013). Vers un cadre d'analyse opérationnel des phénomènes de contextualisation didactique. Dans F. Anciaux, T. Forissier et L.-F. Prudent (dir.), *Contextualisations didactiques : approches théoriques* (p. 141-185). L'Harmattan. <https://hal.univ-antilles.fr/hal-01530871v1>
- Léglise, I. et Muni Toke, V. (2024). Inégalités éducatives : langues et accès aux savoirs dans les Outre-mer. *Contextes et Didactiques*, (24). <https://doi.org/10.4000/1396o>
- Léglise, I., Rossille, A., Tiennot, L. et Tournès, D. (2024). De l'intérêt de décentrer les mathématiques occidentales ? Retour sur deux expériences. *Contextes et Didactiques*, (24). <https://doi.org/10.4000/1396r>
- Ministère de l'Éducation nationale et de la jeunesse. (2021). *Évaluations 2021. Point d'étape CP : premiers résultats*. DEPP. <https://www.education.gouv.fr/evaluations-2021-point-d-etape-cp-premiers-resultats-322673>
- Nguala, J.-B. (2005). La multi-présentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes. *Grand N*, (76), 45-63.
- Nguala, J.-B. (2023). Contextes sémantiques et dispositifs de multi-représentation de problèmes : enjeux, structuration du milieu didactique, portée et limites. Dans P. Bourdier et S. Pesce (dir.), *Les pratiques d'enseignement et de formation à l'épreuve des contextes : questions épistémologiques et méthodologiques* (p. 179-199). Téraèdre.
- Nguala, J.-B. et Manou-Abi, S. (2023). *Contextualisation des situations et apprentissage en mathématiques : exemples d'heuristiques des élèves s'appuyant sur la langue locale à Mayotte*. <https://hal.science/hal-04224291v1>

- Priolet, M. (2021). *L'école à Mayotte : approches plurielles*. Sépia.
- Robo, E. (2021, septembre). *Le contexte dans la pratique déclarée des professeurs des écoles de Polynésie française et de Guyane française : le cas des mathématiques* [Communication]. Biennale Internationale de l'Éducation, de la Formation et des Pratiques professionnelles, Paris, France.
- Salone, J.-J. (2019). La contextualisation, une compétence professionnelle au centre du master MEEF 1^{er} degré de Mayotte. *La nouvelle revue – Éducation et société inclusives*, 85(1), 221-243.
<https://doi.org/10.3917/nresi.085.0221>
- Salone, J.-J. (2022). Contexte et contextualisation à Mayotte, une approche systémique. *Contextes et Didactiques*, (20). <https://doi.org/10.4000/ced.3848>
- Tournès, D. (2023). What history training for future mathematics teachers? Personal experiences and reflections. Dans É. Barbin, R. Capone, M. N. Fried, M. Menghini, H. Pinto et F. S. Tortoriello (dir.), *Proceedings of the 9th European Summer University “History and epistemology in mathematics education”*, 18-22 juillet 2022, University of Salerno, Fisciano, Italie (p. 26-47). https://hal.science/hal-03935653v1/file/tournes_2023c_esu9.pdf

CONTEXTUALISATIONS DIDACTIQUES DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES PAR LES ÉTUDIANTS EN FORMATION AU MÉTIER D'ENSEIGNANT EN GUADELOUPE

| SALONE* JEAN-JACQUES ET RAMSAMY** PRISCILLA

Résumé | Dès 2023, un protocole de recherche a été mis en œuvre à l'Institut National sur l'Enseignement et la Formation (INSPE) de Guadeloupe pour analyser comment les étudiants s'emparent du concept de contextualisation didactique abordé dans leurs cours de Master. Les données, à savoir des énoncés de problèmes, obtenues auprès des étudiants du parcours mathématiques montrent comment les degrés de contextualisation linguistique et disciplinaire évoluent sur l'année universitaire dans leurs pratiques.

Mots-clés : contextualisation didactique, degrés de contextualisation, linguistique, problèmes mathématiques, master MEEF

Abstract | Since 2023, a research protocol has been implemented at the l'Institut National sur l'Enseignement et la Formation (INSPE) of Guadeloupe to analyze how students in masters courses grasp the concept of didactic contextualization. The data, which consist on problem-solving statements, obtained on students in the second-degree course in mathematics, show how the students' didactic contextualization practices evolve over the year.

Keywords: Didactic contextualization, degrees of contextualization, mathematical problems, master MEEF

I. INTRODUCTION

Depuis 2010, le centre de recherches et de ressources en éducation et formation (CRREF), devenu depuis l'unité de recherche UR6_3 Contextes, Recherches et Ressources en Éducation et Formation, a pour principal objet d'étude la contextualisation didactique c'est-à-dire d'une part les « interactions entre les activités d'apprentissage, d'enseignement ou de formation et le contexte de déroulement de ces activités » (Delcroix et al., 2013, p. 1) et, d'autre part « la contextualisation de l'intervention didactique per se, notamment par l'élaboration de ressources didactiques et pédagogiques » (*ibid.*). Dès lors les travaux théoriques ont été féconds pour dégager des concepts suffisamment pertinents pour permettre la description des effets des contextes sur les processus didactiques puis l'analyse et la compréhension des pratiques de contextualisation didactiques (Anciaux et al., 2013 ; Delcroix et al., 2015 ; Delcroix, 2019).

Or, avec une école de la république prônant l'inclusion des diversités culturelles et linguistiques, la compétence de contextualisation (Sauvage-Luntadi et Tupin, 2012) est devenue au fil des années une compétence professionnelle attendue de la part des enseignants. Les chercheurs du CRREF étant généralement impliqués dans la formation des enseignants dans les INSPE de Guadeloupe et de Martinique, les concepts théoriques et les outils méthodologiques qu'ils ont développés ont donc très vite constitué des contenus d'enseignement dans les master MEEF. L'effet de ces enseignements sur les pratiques de contextualisation des étudiants est ainsi un objet d'étude légitime que nous adoptons dans cette communication. Compte-tenu du faible effectif de notre échantillon, notre étude est à ce jour exploratoire et demeure qualitative.

* CRREF, Université des Antilles – France (Guadeloupe) – jean-jacques.salone@univ-antilles.fr

** CRREF, Université des Antilles – France (Guadeloupe) – priscilla.ramsamy@univ-antilles.fr

Dans une première partie nous préciserons donc notre cadre théorique en rappelant quelque résultats à propos de la contextualisation didactique et en décrivant l'échelle de contextualisation à 4 degrés linguistiques et disciplinaires (Salone, 2022) que nous utilisons pour mesurer la compétence de contextualisation d'un groupe d'étudiants. Puis, dans une seconde partie, nous présenterons le groupe d'étudiants pris pour sujet d'étude et nous expliciterons les protocoles mis en place pour à la fois développer et mesurer leurs compétences de contextualisation. Nos analyses permettront ensuite de mieux comprendre les processus de contextualisation didactique qui sont les leurs en dégagant quelques schèmes qui apparaissent dans leurs pratiques.

II. CADRE THÉORIQUE ET QUESTIONS DE RECHERCHE

Quand on propose à des étudiants en formation MEEF de décrire ce qu'est le contexte dont devrait tenir un compte un enseignant dans ses classes (Salone, 2022), les réponses formulées font apparaître le caractère binaire de ce concept, déjà identifié par Van Wissen, Kamphorst et Van Eijk (2013), à savoir un contexte interne lié à la classe et aux pratiques enseignantes et un contexte externe davantage relié à un environnement culturel partagé. Sauvage-Luntadi et Tupin (2012) précisent cette approche binaire du contexte en proposant un modèle de sphères concentriques : au centre du modèle se trouve le « micro-contexte situationnel » de la classe et de ses acteurs, puis viennent successivement un « micro-contexte périphérique » où se situent des composantes relatives à l'établissement scolaire, aux familles et leurs cadres de vie, puis un contexte « médian » correspondant aux spécificités disciplinaires ou curriculaires des matières enseignées et aux contraintes ou conditions institutionnelles du métier d'enseignant, et enfin un « macro-contexte » qui englobe la société tout entière avec des éléments d'ordre social, politique, culturel ou linguistique. En termes de pratiques enseignantes, les auteurs identifient alors trois niveaux de contextualisation didactique : un niveau « ontologique [...] s'appuyant exclusivement sur le vécu individuel de chaque enfant », un niveau « situationnel [...] s'appuyant sur le vécu en classe », et un niveau « authentique [...] s'appuyant sur le vécu extérieur à la classe ».

Mais dans sa thèse de doctorat, Robo (2021) montre que le contexte que prennent en compte les enseignants de son étude est principalement un contexte « médian » ou « micro-périphérique ». Robo qualifie ce contexte de « régional » (Robo, 2021, p. 466) signifiant ainsi que les éléments constitutifs du contexte effectivement retenus sont extérieurs à la classe et puisés dans un environnement socio-culturel immédiat des acteurs. Par ailleurs nos travaux antérieurs (Salone, 2019) avec d'autres étudiants de master MEEF dans une autre région du monde (Mayotte) avaient déjà révélé que ce contexte socio-culturel de référence est principalement constitué d'éléments langagiers puisés dans les langues véhiculaires et d'éléments non langagiers issus des patrimoines naturels, culturels matériels ou culturels immatériels (UNESCO, s.d.). La contextualisation didactique qui est alors à l'œuvre s'appuie sur ces éléments patrimoniaux pour enrichir les ressources pédagogiques utilisées dans les situations d'enseignement et d'apprentissage. Pour conduire nos analyses nous avons donc développé un outil constitué de deux échelles (Salone, 2022) qui permettent de définir et de mesurer des degrés de contextualisation dans des discours ou des documents à finalité didactique. Cet outil répond donc à deux questions de recherche :

- comment les langues locales sont-elles prises en compte dans les documents contextualisés produits par nos étudiants ?
- dans quelle mesure les éléments patrimoniaux non linguistiques relèvent-ils pour nos étudiants de pratiques ou de savoirs à enseigner ?

1. *Échelle des degrés de contextualisation disciplinaire*

La première échelle proposée autorise la mesure de la place accordée aux éléments patrimoniaux contextuels non linguistiques dans les enjeux didactiques a priori disciplinaires qui sont associés au document analysé. Nous présentons ici de façon synthétique les quatre degrés de cette échelle dite « disciplinaire » :

- Degré 1 : coloration. L'enjeu didactique est exclusivement disciplinaire. Des éléments contextuels sont présents, mais ils n'ont pas d'effets sur les compétences en jeu et il n'y a pas d'objectifs pédagogiques qui leur soient associés.
- Degré 2 : adaptation. L'enjeu didactique est là aussi exclusivement disciplinaire. Les éléments contextuels présents ne modifient pas la nature des compétences en jeu, mais ils fournissent des informations authentiques qui doivent être prises en compte pour réaliser les tâches attendues.
- Degré 3 : inclusion. L'enjeu didactique n'est plus exclusivement disciplinaire, il inclut aussi l'acquisition de connaissances relatives aux éléments contextuels. Les compétences disciplinaires en jeu permettent d'apporter des informations nouvelles, non explicitées dans le discours, sur les éléments contextuels.
- Degré 4 : intégration. L'enjeu didactique intègre pleinement l'étude de pratiques et de savoirs relatifs aux éléments contextuels.

2. *Échelle des degrés de contextualisation linguistique*

La seconde échelle proposée s'intéresse à l'aspect langagier de la contextualisation. Elle s'étale aussi sur quatre degrés mesurant le contact entre la langue de scolarisation et la ou les langues véhiculaires ou vernaculaires (que nous désignerons ci-après par « langue 2 ») :

- Degré 1 : coloration. La langue 2 est présente par quelques mots, essentiellement des noms propres de personnes et de lieux ou des noms communs d'objets de la vie quotidienne. Le contact des langues n'a quasiment aucun impact sur la compréhension du discours.
- Degré 2 : adaptation. Des morphèmes plus idiomatiques ou plus authentiques apparaissent en langue 2, comme des phrases de la vie courante ou des expressions familières, des proverbes... Ce contact n'ajoute pas de difficultés particulières de compréhension.
- Degré 3 : inclusion. La langue 2 alterne codiquement avec la langue de scolarisation, avec par exemple des insertions de dialogues en langue 2. La maîtrise de la langue 2 n'est pas attendue, mais en connaître quelques éléments de base est nécessaire. Un glossaire peut être proposé.
- Degré 4 : intégration. Le bi(pluri)linguisme est pleinement assumé avec par exemple différentes versions du même discours. La comparaison des langues devient possible.

3. *L'objet de recherche*

Dans ces deux échelles, quand aucun des degrés décrits n'est atteint, nous parlerons de degré 0. Ainsi l'échelle disciplinaire et l'échelle linguistique constituent dans nos recherches des outils de mesure de la compétence de contextualisation. Elles permettent de reformuler nos questions de recherche :

- 1/ Quels sont les degrés de contextualisation linguistique et disciplinaire des problèmes mathématiques produits par nos étudiants au début des séquences d'enseignement ?

- 2/ Comment ces degrés de contextualisation évoluent-ils pendant l'année en fonction des apports théoriques qui sont faits et des situations d'enseignement qui sont mises en œuvre ?
- 3/ Quels degrés de contextualisation sont finalement atteints en fin de parcours ?

Nous formulons les hypothèses que nos étudiants de première année du master MEEF second degré mathématique n'ont initialement aucune compétence en termes de contextualisation didactique patrimoniale (degrés 0 aussi bien disciplinairement que linguistiquement), mais que cela évolue pendant l'année pour aboutir à des degrés de contextualisation élevés, supérieurs ou égaux à trois sur les deux échelles.

III. CADRE METHODOLOGIQUE

La cohorte prise pour sujet d'étude est donc celle constituée par les étudiants en première année du master MEEF second degré en mathématiques de l'année universitaire 2023-2024. Dix étudiants la composent qui seront potentiellement désignés par E1 à E10. Le protocole expérimental s'étale sur l'année comme suit :

- au semestre 1 : un enseignement nommé « Maîtriser les savoirs disciplinaires et leur didactique en Analyse, Probabilités et Statistiques » prévoit 46 heures de cours magistraux et de travaux dirigés répartis en 25 séances de 1 à 2 heures. Deux corpus de problèmes sont prélevés dans celui-ci (voir tableau synoptique 1). Pour le corpus 1 il s'agit de prélever en début de protocole des énoncés de problème produits sans apports théoriques sur la contextualisation. Le corpus 2 est quant à lui prélevé à la fin du semestre avec une consigne demandant explicitement de « rendre les énoncés de problèmes engageants et motivants ». Cet enseignement est animé par l'un des deux auteurs et chaque corpus se compose d'un énoncé par étudiant ;
- au semestre 2 : un autre enseignement nommé cette fois-ci « Enseigner en contextes et innover » proposant 20 heures est animé par l'autre auteur. Cinq nouveaux corpus sont prélevés : le corpus 3, qui correspond à la production d'un énoncé visant à effectuer la démonstration d'une propriété mathématique étudiée dans le cours et relative à une pratique de la vie quotidienne en Guadeloupe (le « théorème du samoussa »), le corpus 4, qui rassemble des énoncés similaires, mais après que les degrés de contextualisation disciplinaire et linguistique aient été présentés dans le cours, le corpus 5, qui est un écrit réflexif sur la contextualisation didactique, le corpus 6, constitués d'énonces produits librement dans et hors cours, et le corpus 7 qui correspond en réalité à une évaluation sommative en temps limité.

Le tableau 1 ci-après présente plus en détail les contenus de ces EC et précisent les tailles des corpus en nombre de documents qu'ils comprennent.

Tableau 1 – *Vue synoptique des éléments de contenus et des corpus*

Déroulement des séances	Éléments de contenus	Corpus et effectifs
Séance 1 – Semestre 1	Réappropriation de la notion de fonction, en faisant un focus sur celles dites « numériques » telles que présentées dans l'enseignement secondaire français. Comparaison avec les notions d'applications ou encore de fonctions dites multivoques.	

Déroulement des séances	Éléments de contenus	Corpus et effectifs
Séance 2 – Semestre 1	Brève réappropriation des premiers outils permettant l'étude des fonctions de la variable réelle à valeurs réelles. Repères orthonormés, représentations graphiques et première sensibilisation à des problèmes didactiques possibles.	
Séance 3 – Semestre 1	Rappels sur le domaine de définitions, la parité et la périodicité pour une réduction des cadres d'analyse.	Corpus 1. Effectif : 10
Séances 4 à 18 – Semestre 1	Présentation et passage en revue d'outils d'analyse plus complexes (limite et continuité, dérivabilité et calcul de dérivées, primitives et intégrales)	
Séances 19 et 20 – Semestre 1	Retour sur les suites numériques	
Séances 21 et 22 – Semestre 1	Proportions et dénombrement.	
Séances 23 et 24 – Semestre 1	Bref rappel des notions de tribu, mesure, espace mesurable, espace probabilisable et espace de probabilités. Retour sur le calcul des probabilités.	
Séance 25 - Semestre 1	Rappels sur les statistiques univariées et bivariées.	Corpus 2. Effectif : 5
Séance 1 - Semestre 2	Présentation d'une pratique de la vie courante (pliage d'un samoussa). Apports théoriques sur le processus de mathématisation (Yvain-Prébisky, 2018). Formulation du « théorème samoussa » : le pliage du samoussa aboutit à un triangle équilatéral.	
Séance 2 – Semestre 2	Recherche en groupes de démonstrations du « théorème samoussa » et mise en lien avec les programmes officiels.	
Séance 3 – Semestre 2	Corrections des démonstrations en géométrie euclidienne et en géométrie vectorielle. Apports théoriques sur les typologies de problèmes (Gano ; Houdement).	
Séance 4 – Semestre 2	Élaboration individuelle d'énoncés de problèmes autour du théorème samoussa avec explicitation des niveaux de classes concernées et des prérequis.	Corpus 3. Effectif : 9
Séance 5 – Semestre 2	Apport théorique sur la contextualisation didactique (typologies des contextes et effets de contextes). Contextualisations individuelles guidées des énoncés de problèmes sur le théorème samoussa.	
Séance 6 – Semestre 2	Apport théorique sur les degrés de contextualisation. Reprise de l'écriture des énoncés contextualisés.	Corpus 4. Effectif : 9
Séance 7 – Semestre 2	Présentation des énoncés contextualisés et débat. Production d'un écrit réflexif « quel est votre regard sur la contextualisation ? »	Corpus 5. Effectif : 7
Séance 8 – Semestre 2	Production autonome d'un énoncé de problème contextualisé sur thème disciplinaire non imposé. Poursuite hors classe de l'activité.	

Déroulement des séances	Éléments de contenus	Corpus et effectifs
Séance 9 – Semestre 2	Présentation et discussion des énoncés.	Corpus 6. Effectif : 7
Séance 10 – Semestre 2	Évaluation (contextualisation didactique d'un jeu traditionnel).	Corpus 7. Effectif : 7

La programmation de séquences et de séances qui vient d'être présentée laisse apparaître les places relatives accordées aux savoirs enseignés : il s'agit principalement d'un cours de mathématiques dont la finalité est de préparer nos étudiants au concours de recrutement des professeurs certifiés du second degré. Les savoirs enseignés relatifs aux mathématiques et à sa didactique sont donc largement prépondérants. A contrario les savoirs enseignés relatifs à la contextualisation didactique sont très ponctuels : même si le problème proposé dès la séance 1 du semestre 2 est ancré dans la vie quotidienne autour d'une recette de cuisine constitutive du patrimoine culinaire antillais, les samoussas, ils n'apparaissent qu'aux séances 5 et 6 du semestre 2. En outre, afin de minimiser les biais potentiellement induits par nos doubles postures d'enseignants et de chercheurs, il est clairement explicité aux étudiants qu'aucune connaissance théorique sur la contextualisation n'est attendue de leur part et que les degrés de contextualisations dans lesquels se situeront leurs productions, dont l'évaluation sommative, ne font pas partir des critères d'évaluation. Ils sont donc invités à contextualiser leurs trois dernières productions (corpus 4, 6 et 7) comme ils le souhaitent et sont seulement informés du fait que ces travaux constitueront des données de recherche. Ainsi, la méthode de recherche retenue permet de mesurer quelles places des étudiants informés de ce qu'est la contextualisation didactique accordent aux langues et aux éléments patrimoniaux dans les savoirs qu'ils auront à enseigner.

Dans les résultats présentés ci-après, nous mettrons en parallèle les productions d'un élève spécifique, E6, dont la compétence de contextualisation mesurée à partir des degrés de contextualisation linguistique et disciplinaire est en nette évolution tout au long de l'année avec les productions de l'ensemble de la cohorte.

IV. RÉSULTATS

Les premiers énoncés produits par les étudiants présentent des degrés de contextualisation faibles, inférieurs à 1, que ce soit sur le plan linguistique ou sur le plan disciplinaire (Figures 1 et 2).

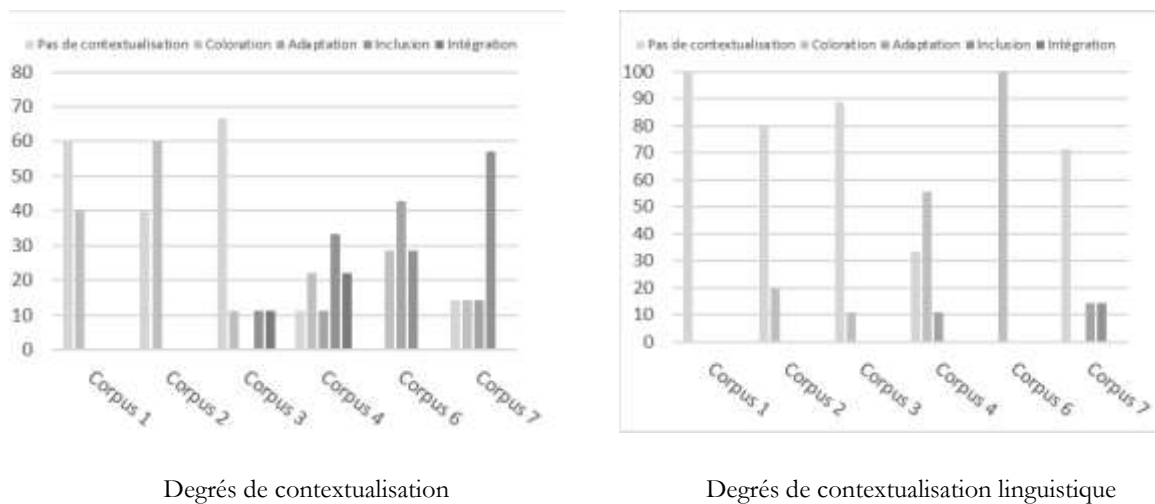


Figure 1 – Diagrammes en barres des degrés de contextualisation par corpus

Ainsi, dans les deux premiers énoncés produits (corpus 1 et corpus 2), l'insertion d'éléments patrimoniaux de la Guadeloupe demeure très superficielle avec aucun impact sur les compétences mathématiques en jeu.

Dans l'exemple ci-après, E6 évoque dans son énoncé du corpus 2, classé au niveau 0, la fabrication de jouets pour les fêtes de Noël, mais sans situer ses propos explicitement dans le contexte guadeloupéen :

« Dans une entreprise de production de jouets, la proportion de jouets défectueux est modélisée par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

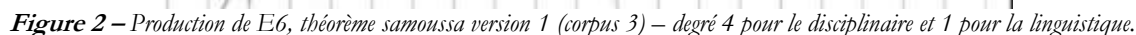
$$f(x) = 3\exp(-x + 1) - 5$$

Le réel x : temps écoulé en année depuis le 1er janvier 2000. Le nombre $f(x)$ modélise la proportion de jouets défectueux. À partir du modèle, quelle est la proportion de jouets défectueux au 1er janvier 2023 ? Étudier les limites de la fonctions en $+\infty$ et $-\infty$. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. » (E6, corpus 2).

Cependant la contextualisation disciplinaire n'est pas inexistante et même si le contexte guadeloupéen n'est pas référencé de façon explicite, nous estimons qu'elle relève de la coloration pour près de la moitié des deux corpus (40 % du corpus 1, 60 % du corpus 2). En outre elle répond à une injonction didactique du formateur consistant à « rendre les énoncés plus motivants ».

Sur le plan linguistique, par contre, les contacts de langues n'apparaissent quasiment pas dans les deux premiers corpus : 0 % du corpus 1, 20 % du corpus 2.

Avec l'entrée dans la séquence consacrée à la contextualisation au milieu de second semestre, les degrés de contextualisations atteints évoluent rapidement à la hausse. Alors que le « théorème samoussa » est présenté aux étudiants comme étant un élément culturel du patrimoine guadeloupéen, il n'est pas immédiat pour chacun d'eux qu'il faille rappeler ce contexte dans leur premier énoncé (corpus 3) : plus de 66 % d'entre eux ne contextualisent pas. Seulement trois d'entre eux, sur neuf, rappellent le contexte, dont l'élève E6 qui dès son premier énoncé présente le pliage du samoussa comme un savoir-faire digne d'une étude mathématique (voir Figure 2)



Nom de l'événement : On ne prépare samoussas !
 Dans le cadre de la "Diwali : la Fête des lumières", Lorie et
 sa grand-mère Octavia Golaphan-Latchoumanin préparent des
 samoussas pour la fête qui aura lieu dans le quartier
 de l'Autre-Bord au Moule.
 Pour le pliage du samoussa, la grand-mère de Lorie lui
 dit : "On ka pliè-w kon sa premiè fwa la"
 Mais, Lorie, passionnée par les mathématiques se
 demande alors combien mesure l'angle lorsque l'on pli la
 première fois la feuille de samoussa.

Figure 3 – Production de E6, théorème samoussa version 2 (corpus 4) – degré 4 pour le disciplinaire et 2 pour la linguistique.

« Selon moi, la contextualisation est au cœur du processus de transposition didactique. En effet on sait que la transposition didactique c'est le fait "d'approprier" un savoir : et il est clair que en "appropriant" le savoir, il va y avoir de la contextualisation. Ainsi, la contextualisation est un moyen de motiver les élèves dans un travail, elle permet selon moi de susciter un "intérêt" dans ce qu'ils font. » E6, corpus 5.

En ce qui concerne le corpus 6, l'énoncé de problème librement produit par les étudiants pendant et hors le cours, les choses progressent encore un peu. Les sept étudiants qui ont participé à cette activité ont tous contextualisé leurs énoncés : E1 situe son énoncé autour des moulins à vent (celui du lieu dit Bézard) pour calculer des volumes, E2 propose une recette de cuisine, les marinades, pour effectuer des calculs de fréquence à partir d'une loi de probabilité, E3 propose des calculs d'aire et une modélisation autour de l'île de Guadeloupe, E4 s'intéresse aux sinobols et autres cornets de glace pour calculer des volumes, E5 est aussi sur une recette de cuisine, la pâtisserie « tourments d'amour » et propose des calculs de masses, de quantités et de contenances en lien avec de la proportionnalité, E6, toujours très original, produit un énoncé sur la mode capillaire des dread locks avec la modélisation par une fonction affine de la chevelure d'un personnage du folklore guadeloupéen, Ti-Jean (voir extrait suivant), et enfin E7 propose des calculs de volume autour d'un instrument de musique traditionnel, le ka, et de produits alimentaires, les sinobols. Les éléments patrimoniaux évoqués sont ainsi majoritairement culturels et matériels (6/8) et les compétences mathématiques en jeu sont principalement issues du domaine grandeurs et mesures (5/8).

« Ti Jean possède des locks de 8 cm. Ses cheveux poussent de 12 cm par an. Lorsqu'il tourne ses locks 1 fois par mois, elles grandissent de 0,9 cm à chaque fois.

La fonction f modélise la longueur d'une locks :

$N \rightarrow Df : x \rightarrow 12(x + 0,9) + 8$ Sachant que Ti Jean possède 62 locks que nous pouvons associer à des cylindres de rayon 3 mm,

- 1) Quelle longueur mesureront les locks de Ti Jean en 2026 ? 2030, 2035 ?
- 2) Calculer le volume des locks en 2035
- 3) Ti-Jean¹ achète une capote (bonnet pour locks) pouvant contenir un volume de x ml.
- 4) Dans combien d'années la capote sera-t-elle trop petite ? » (E6, corpus 6)

Sur le plan linguistique, nous pouvons remarquer que plus aucun étudiant n'a tenté de contextualiser en insérant du créole dans les énoncés. Une interprétation possible est que bien qu'étant tous créolophones, nos étudiants ne pensent pas que l'usage de langues régionales dans l'enseignement des mathématiques soit pertinent sur un plan didactique ou pédagogique, pour des raisons potentiellement plurielles : la prétendue « universalité » des mathématiques, la présence déjà très grande d'obstacles technologico-théoriques internes, les difficultés de compréhension qui pourraient être ajoutée par l'introduction d'une langue en plus de la langue de scolarisation, le fait que la classe de mathématiques n'est pas un lieu pour promouvoir une langue régionale...

Pour le corpus 7, dans une situation d'évaluation, l'énoncé présente un jeu traditionnel en voie de disparition dans les usages : les méréelles. Il s'agit de jeux consistant à réaliser des alignements de pions sur un plateau de jeu présentant généralement des carrés emboîtés et reliés par leurs sommets, les milieux de leurs côtés et leur centre. L'énoncé demande explicitement de travailler des compétences du cycle 4 dans le domaine géométrique ou dans le domaine grandeurs et mesures à partir de figures géométriques complexes. Le calcul d'aires apparaît 3/15, l'identification de symétries 2/15, l'identification de figures géométriques simples 3/15 ou leurs propriétés 3/15 De façon ponctuelle : construction d'une figure complexe 2/15, utilisation d'une transformation 1/15, repérage dans le plan 1/15. En termes de contextualisation, la majorité de la cohorte atteint des degrés supérieurs avec 57 % d'inclusion (degré 3) sur le plan disciplinaire. Sur le plan linguistique, plus de 71 % de la cohorte n'a cependant pas fait appel au créole dans les énoncés, résultat qui confirme la tendance déjà observée

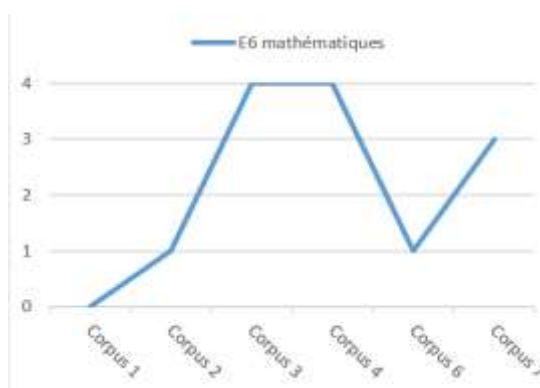
¹ x est le nombre d'années écoulées depuis 2023. La réponse à la question 3 :

Soit N le nombre d'années recherchées. Le volume en cm^3 des locks est $62 \cdot \pi \cdot 0,3^2 [12(N+0,9)+8]$ et doit être supérieur strictement à X . Sachant que $1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$, on doit avoir $N > [X / (62 \cdot \pi \cdot 0,3^2) - 8] / 12 - 0,9$. Par exemple, pour $X = 10000$ (10 Litres), on a $N > 45$ années.

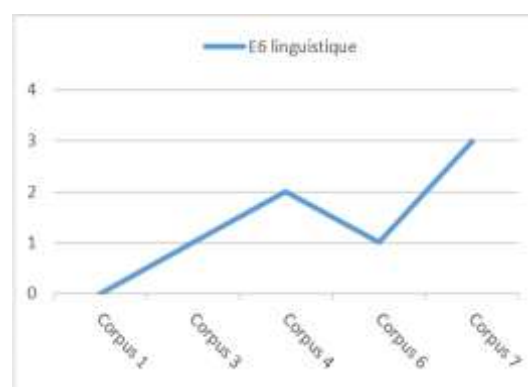
dans le corpus précédent. E6 conserve sa spécificité avec des degrés 3 de contextualisation atteints tant sur le plan disciplinaire que linguistique (extrait suivant).

« Durant les vacances de Pâques, Lucie est venue passer une semaine chez sa grand-mère Josette Lubin à Pointe-à-Pitre. Durant un de leurs échanges, Josette qui parle pas le français couramment lui parle d'un jeu auquel elle jouait avec ses amis "an tan sorin" (c'est-à-dire pendant la guerre vers les années 1940). Sé on jé timon, an tan lontan tè ka joué onlo kisé a raz a yo, ben an lékol-la. Yo té ka maké ladwaz, atè, anlé on mach leskalié. Josette fait alors un schéma du jeu. (Note : le schéma dessiné par Josette représente un carré et ses 4 axes de symétrie). Or sa petite fille Lucie en classe de 5e voit actuellement en classe la symétrie axiale et centrale. Dans la figure ci-dessous repère la symétrie axiale et centrale. (Un second schéma apparaît dans l'énoncé, identique au précédent, mais où tous les points de la figure sont nommés par des lettres capitales) » (E6, corpus 7)

L'évolution remarquable de E6 est visible de façon synthétique dans les deux graphiques de la figure 5.



Évolution des degrés de contextualisation de E6



Évolution des degrés de contextualisation disciplinaire de E6

Figure 4 – Diagrammes d'évolution des degrés de contextualisation de E6

V. CONCLUSION

En conclusion de cette étude, il apparaît donc que nos hypothèses de départ sur les degrés de contextualisation atteints par nos étudiants ne sont que partiellement vérifiées.

Sur le plan disciplinaire, les énoncés mathématiques produits par nos étudiants au début des séquences d'enseignement sont faibles, mais pas nuls : pour la majorité d'entre eux, amener des éléments contextuels locaux est une façon de rendre plus attrayants les énoncés qu'ils produisent. Au fur et à mesure de l'avancement dans les séquences d'enseignement sur la contextualisation, les degrés atteints croissent ensuite avec un point culminant dans une situation de production libre des énoncés. La situation d'évaluation terminale montre quant à elle que, de façon majoritaire, les degrés de contextualisation disciplinaire se stabilisent au niveau de l'inclusion, un niveau qui accorde donc une certaine place aux éléments patrimoniaux en les incluant pour partie dans l'enjeu didactique. C'est ainsi que les questions dans les énoncés concernés n'intègrent pas directement des savoirs et des pratiques mathématiques liées à leurs productions (comme c'était le cas pour le pliage des samoussas) ou à leurs usages. Une première interprétation possible de ce résultat est que, comme le soulignent Delcroix, Forissier et Anciaux (2013) nos étudiants ne rencontrent généralement dans les médias dont ils disposent, manuels scolaires et sites internet, que des énoncés faiblement contextualisés, demeurant généralement au degré de coloration et rarement au degré plus « authentique » de l'adaptation. Ils n'ont

donc pas l'habitude de travailler avec des énoncés inclusifs. Toujours en accord avec les auteurs cités, cette absence de contextualisation didactique inclusive des patrimoines et des langues locales est exacerbée par une absence de contextualisation forte, c'est-à-dire explicitement attendue par les programmes officiels d'enseignement. Une seconde interprétation est que même s'il est assez aisé de se situer au niveau de l'inclusion en proposant des questions mathématiques à même de produire des informations à propos d'éléments patrimoniaux, il est bien plus difficile de produire des questions visant à étudier des pratiques ou des savoirs traditionnels liés à ces mêmes éléments contextuels. La raison en est simple : ces pratiques et savoirs traditionnels sont généralement ignorés par nos étudiants et pour remédier à cela une enquête à minima ethnographique et bibliographique serait nécessaire, ce que nos étudiants n'ont ni l'injonction ni le temps de faire.

Quant à la contextualisation linguistique, elle demeure faible tout au long des séquences, de l'ordre uniquement de la coloration des énoncés par quelques mots issus du créole guadeloupéen. L'évaluation terminale souligne encore davantage ce peu d'intérêt pour la langue, à de rares exceptions près. Une des raisons majeures de ce phénomène est que, selon nous, nos étudiants n'étant encore que dans la première année de leur formation initiale au métier d'enseignant, ils ne perçoivent pas encore l'intérêt que pourrait avoir l'emploi de langues régionales dans un cours de mathématiques. En outre, de façon plus générale, il semblerait que pour eux la classe de mathématiques n'est pas un lieu de revalorisation ou de transmission du patrimoine local, qu'il soit linguistique ou non, et ce quelle que soit sa valence identitaire.

Compte tenu du faible nombre d'étudiants que nous avons pu suivre cette année, une perspective de recherche majeure pour nous est maintenant de consolider et de préciser ces résultats en reconduisant nos expérimentations dans d'autres cohortes à venir et en regardant ce qui reste de ces pratiques de contextualisation didactique en deuxième année. Nous avons également commencé des expérimentations avec des étudiants dans d'autres disciplines académiques (EPS, sciences...) et autour de la production d'autres types de documents pédagogiques (préparation de séances) afin d'entrer dans une comparaison du développement de la compétence de contextualisation en fonction de la discipline.

RÉFÉRENCES

- Anciaux, F., Forissier, T. et Prudent, L. F. (2013). *Contextualisations didactiques. Approches théoriques*. L'Harmattan.
- Delcroix, A., Forissier, T. et Anciaux, F. (2013). Vers un cadre d'analyse opérationnel des phénomènes de contextualisation didactique. Dans F. Anciaux, T. Forissier et L. F. Prudent (dir.), *Contextualisations didactiques. Approches théoriques* (p. 141-185). L'Harmattan.
- Delcroix, A. (2019). Contextualisation didactique : un concept en tension ? *Contextes et Didactiques*, (14).
- Delcroix, A., Cariou, J.-Y., Ferrière, H. et Jeannot-Fourcaud, B. (2015). *Apprentissages, éducation, socialisation et contextualisation didactique ; approches plurielles*. L'Harmattan.
- Robo, E. (2021). *Étude comparée des interactions à visée d'apprentissage lors de séances de géométrie au cycle 3 de l'école primaire : le cas de la Polynésie française et de la Guyane française* [Thèse de doctorat inédite]. Université des Antilles.
- Salone, J.-J. (2019). La contextualisation, une compétence professionnelle au centre du master MEEF 1er degré de Mayotte. *La nouvelle revue – Éducation et société inclusives*, 85(1), 221-243.
<https://doi.org/10.3917/nresi.085.0221>

Salone, J.-J. (2022). Contexte et contextualisation à Mayotte, une approche systémique. *Contextes et Didactiques*, (20).

Sauvage-Luntadi, L. et Tupin, F. (2012). La situation professionnelle au cœur de la situation d'enseignement-apprentissage. *Phronesis*, 1(1), 102-117.

UNESCO (s. d.) *La liste du patrimoine mondial*. <https://whc.unesco.org/fr/list/>

Van Wissen, A., Kamphorst, B. et Van Eijk, R. (2013). A constraint-based approach to context. Dans P. Brézillon, P. Blackburn et R. Dapoigny (dir.), *Proceedings of the 8th International and Interdisciplinary Conference on Modeling and Using Context (CONTEXT'13)* (p. 171-184). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-40972-1_13

**PROJET SPÉCIAL 3 |
NEUROSCIENCES ET
DIDACTIQUE DES
MATHÉMATIQUES**

BILAN DU PROJET SPÉCIAL 3

NEUROSCIENCES ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

| RODITI* ÉRIC, BARALLOBRES** GUSTAVO, GARDES*** MARIE-LINE ET MAHEUX****

JEAN-FRANÇOIS

Les recherches en neurosciences cognitives qui traitent de questions d'éducation se développent. Parallèlement, les neuroscientifiques occupent une part croissante de l'espace médiatique dédié à l'éducation, et, dans différents pays, ils intègrent les instances qui influencent les décideurs. Le champ de recherche se spécialise, avec notamment le développement des neurosciences éducationnelles.

I. DÉBUTS D'UNE RÉFLEXION DIDACTIQUE AU SUJET DES NEUROSCIENCES DANS LE CADRE DE L'EMF : COTONOU, 2022

Durant le colloque de l'EMF qui s'est tenu à Cotonou (Bénin) en 2022, un dispositif de « discussion programmée » a été inauguré. Ce dernier a été mis à profit pour proposer aux participants de s'interroger sur le thème : « neurosciences cognitives et didactique des mathématiques ». Les cinq présentations suivantes ont ouvert cette discussion programmée : 1°/ G. Barallobres et L. Bergeron : *Positionnement(s) des chercheurs en neurosciences cognitives vis-à-vis de l'éducation et plus particulièrement de l'enseignement des mathématiques* ; 2°/ J.-F. Maheux : *Objets de recherche, méthodes et données produites : de la psychologie du développement aux neurosciences cognitives et réflexion du point de vue de l'éducation mathématique* ; 3°/ J. Giroux : *Différentes approches de la difficulté d'apprentissage en mathématiques et de l'intervention scolaire selon l'ancrage scientifique : psychologie, didactique et neurosciences cognitives* ; 4°/ É. Roditi : *Analyse d'une recherche en neurosciences cognitives sur la comparaison des nombres décimaux* ; 5°/ M.-L. Gardes : *Intérêts d'une collaboration entre chercheurs en didactique des mathématiques et chercheurs en neurosciences cognitives : témoignages et réflexions*.

À partir de ces cinq présentations, de nombreuses questions ont été discutées. En quoi les recherches en neurosciences cognitives se distinguent-elles ou se rapprochent-elles de celles développées en didactique des mathématiques quant à l'approche des questions éducatives ? La production en didactique est-elle prise en compte dans les recherches en neurosciences cognitives, comment ? Les résultats de ces recherches peuvent-ils nous conduire à modifier nos problématiques, voire nos méthodes ? Si oui, dans quel sens ? Comment les neurosciences abordent-elles les troubles de l'apprentissage en mathématiques et quelles propositions didactiques suggèrent-elles ? Les recherches en neurosciences cognitives renouvellent-elles les apports de la didactique ? La didactique des mathématiques pourrait-elle tirer parti des travaux en neurosciences, à quelles conditions, suivant quelles précautions ? Pour quels objectifs et selon quelles modalités, didacticiens des mathématiques et neuroscientifiques pourraient-ils s'engager conjointement dans des recherches interdisciplinaires ?

De cette première expérience a émergé l'importance, en didactique des mathématiques, de réfléchir à ces recherches, et de le faire en s'associant à des chercheurs d'horizons différents. Lors de la rencontre

* Université Paris Cité, EDA, F-75006 Paris – France – eric.roditi@u-paris.fr

** Université du Québec à Montréal – Canada – barallobres.gustavo@uqam.ca

*** Haute École Pédagogique de Lauzanne – Suisse – marie-line.gardes@hepl.ch

**** Université du Québec à Montréal – Canada – jfuqam@gmail.com

de l'EMF à Montréal en 2025, la réflexion amorcée en 2022 s'est prolongée dans le cadre d'un nouveau « Projet spécial ».

II. PROLONGEMENTS DE LA RÉFLEXION SUR NEUROSCIENCES ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : MONTRÉAL, 2025

Sept présentations ont été discutées lors des trois séances consacrées à ce Projet spécial. À une ou plusieurs voix, elles ont engagé des didacticiens et didacticiennes des mathématiques bien sûr, mais aussi — et c'était le souhait des organisateurs — des collègues inscrivant leurs travaux dans d'autres champs scientifiques : neurosciences cognitives, psychologie du développement, mathématiques et histoire des mathématiques.

La présentation de **J.-F. Maheux** était intitulée *Travaux sur le système nerveux et didactique des mathématiques, le cas du concept de « représentation » et de l'énaction*. L'auteur est intervenu sur les questions soulevées par les neurosciences pour la recherche en éducation, et en didactique des mathématiques en particulier. Sa présentation a porté sur la possibilité de mettre en lien des travaux en imagerie cérébrale afin de questionner ou d'inspirer des recherches dans notre domaine. Dressant un parallèle avec le travail de Brousseau autour du concept de « représentation » tiré de la psychologie, l'auteur développe le cas de la théorie de l'énaction qui, basée entre autres sur l'étude du système nerveux, informe ses propres recherches en soutenant une déconstruction de concepts / phénomènes (dont celui de « représentation »).

M.-L. Gardes, M.-C. Croset, J. Prado et A. Samson ont proposé une présentation intitulée *Articuler des méthodes de recherche en didactique des mathématiques et en sciences cognitives : un exemple de conception et validation d'un test*. Le test cité en exemple portait sur les premiers apprentissages du nombre, et deux questions principales ont été discutées à son sujet. La première porte sur le travail pluridisciplinaire effectué pour que l'ensemble du champ des premières compétences numériques (telles que perçues en neurosciences cognitives et en didactique des mathématiques) soit bien évalué. La seconde question abordée est celle de la validation du test, pour laquelle les critères sont différents suivant les disciplines.

Toujours sur la question de l'apprentissage du nombre, mais en concentrant l'attention sur l'activité de comptage des jeunes enfants, **J. Fanjat et É. Roditi** ont partagé leur recherche par une présentation intitulée *Interrogations didactiques à propos de la ligne numérique mentale*. La ligne numérique mentale est un concept issu de la psychologie qui connaît un développement actuel en neurosciences cognitives, en particulier quant à son orientation innée de gauche à droite. Certains auteurs supposent un lien entre cette orientation et le sens du comptage effectué sur une collection d'objets alignés. Une expérimentation a été conduite pour interroger ce lien avec une perspective didactique : le nombre avait une fonction dans la réalisation de la tâche, et l'efficacité de la réalisation dépendait du sens du comptage.

Encore sur l'acquisition des premiers nombres, la présentation de **D. Silva Labra** était intitulée *Compter c'est prendre en compte : le défi de la constitution de l'unité numérique et de la multiplicité d'uns de la numération pour les neurosciences dans l'éducation mathématique*. Après un retour historique qui montre qu'il a fallu attendre la Renaissance pour que « un » prenne le statut de nombre en mathématiques, l'auteur interroge divers supports pédagogiques allant de manuels diffusés au milieu du XX^e siècle jusqu'à des logiciels récemment mis au point par des équipes de neuroscientifiques. Il apparaît que la notion de nombre n'est pas pleinement partagée.

La différence de point de vue scientifique est mise à profit dans une recherche en cours présentée par **A. Gomes, J. Mithalal et L. Hanssen**. La présentation qui en a été effectuée s'intitule *Troubles de*

la coordination et visualisation en géométrie : le cas d'une collaboration entre sciences cognitives et didactique des mathématiques ; elle propose une exploration de la relation entre la visualisation en géométrie et les troubles de la coordination motrice (dyspraxie) à travers une collaboration entre sciences cognitives et didactique des mathématiques. La question des difficultés spécifiques rencontrées par les élèves dyspraxiques lorsqu'ils abordent des tâches géométriques y est traitée, ainsi que celle des aménagements didactiques et instrumentaux susceptibles de leur permettre d'accéder efficacement aux apprentissages en géométrie.

La question des différences disciplinaires relatives à un « même » objet est aussi soulevée par **C. Lemrich, M.-L. Gardes et E. Sander** dans leur présentation intitulée *La notion de conception sous l'angle de la didactique des mathématiques et de la psychologie du développement. Un exemple sur le concept de fraction*. Les auteurs interrogent, à propos des fractions, comment et avec quelles différences la notion de « conception » est utilisée, en didactique des mathématiques et en psychologie du développement, dans le but de comprendre et prédire les comportements des individus dans des situations d'apprentissage.

La différence de point de vue disciplinaire est également à l'origine de la présentation de **M. Guenais** intitulée *Évaluations nationales au CP en mathématiques en France : biais et impacts sur le traitement des données issues du dispositif EVALAIDE*. Avec son regard de mathématicienne, l'autrice examine le contenu des évaluations à l'entrée au cours préparatoire (élèves de 6 ans) conçues par le Conseil scientifique de l'Éducation nationale présidé par le neuroscientifique Stanislas Dehaene. M. Guenais montre que les questions d'évaluation n'évaluent pas toujours des compétences mathématiques, c'est le cas notamment des questions qui prétendent porter sur des apprentissages en géométrie. Elle montre également que les formats de réponses, davantage issus de tests psychométriques que d'évaluations scolaires, rendent difficiles les interprétations des réponses des élèves quant à leurs acquis en mathématiques. Elle montre enfin que l'évaluation valorise une attitude compétitive, génératrice de stress et particulièrement défavorable aux filles. Ce dernier point la conduit à interroger les prétendues différences entre filles et garçons en mathématiques, différences imperceptibles dans beaucoup d'autres évaluations en France.

Ces sept présentations ont été discutées par la quarantaine de personnes réunies pour ce « projet spécial ».

III. UNE DIVERSITÉ D'INTÉRÊT POUR LE LIEN ENTRE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET NEUROSCIENCES COGNITIVES

En lien avec ces sept présentations, les personnes qui ont participé au « SPE 3 » ont témoigné d'une certaine diversité de manières de s'intéresser aux liens entre neurosciences cognitives et didactique des mathématiques. Une première d'entre elles relève de la connaissance des orientations des chercheurs qui traitent d'objets mathématiques et de leur apprentissage, notamment en psychologie du développement et en neurosciences. Il apparaît nécessaire que des chercheurs poursuivent des analyses précises de travaux menés dans ces champs, de leurs théories et méthodes sous-jacentes pour armer les chercheurs et les enseignants face aux discours auxquels ils sont confrontés. Les participants ont souligné l'importance que des didacticiens continuent de s'expliquer sur ce qui les conduit à des emprunts ou des inspirations issues d'autres disciplines, mais aussi à des controverses lorsque les différences conduisent à des divergences. Le « projet spécial » a renouvelé la réflexion sur les questions de pluridisciplinarité et d'interdisciplinarité. Il apparaît toutefois que le dénominateur commun aux préoccupations exprimées n'est pas tant la nature des collaborations de recherche que la question des objets sur lesquels les recherches portent, avec leurs spécificités scientifiques, un intérêt commun.

TRAVAUX SUR LE SYSTÈME NERVEUX ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, LE CAS DU CONCEPT DE « REPRÉSENTATION » ET DE L'ÉNACTION

| MAHEUX* JEAN-FRANÇOIS

Résumé | La recherche en neurologie soulève des questions en éducation. Peut-on mettre au service de notre discipline des travaux en imagerie cérébrale ? J'examine comment la théorie de l'énaction, basée entre autres sur l'étude du système nerveux, informe mon travail en soutenant une déconstruction de concepts/phénomène. Parlant de « représentation », je propose qu'un élément essentiel concerne le positionnement épistémologique.

Mots-clés : enaction, imagerie cérébrale, épistémologie, interdisciplinarité, déconstruction post-moderne

Abstract | Research in neurology raise educational questions. How can we use brain imaging research in our discipline? I examine how the enaction theory, based in part on the study of the nervous system, informs my work by supporting a deconstruction of concepts/phenomena such as that of “representations”. I argue that an essential element concerns the epistemological positioning.

Keywords: Enaction, brain imaging, epistemology, interdisciplinarity, port-modern deconstruction

I. FAIRE DES PONTS ENTRE NEUROSCIENCE ET DIDACTIQUE

Les avancées en neurosciences, notamment en lien avec les mécanismes du système nerveux, suscitent un intérêt grandissant dans divers domaines de l'éducation (Howard-Jones, 2010), y compris à propos de l'apprentissage des mathématiques par exemple (e.g. Dehaene, 2011). De Smedt et al. (2011) offrent une discussion intéressante de la manière dont on souhaiterait que les deux champs s'enrichissent mutuellement, et des difficultés à y parvenir. En 2016, un numéro de la revue ZDM est consacré au thème *Cognitive Neuroscience and Mathematics Learning*, une suite du numéro de 2010 du même titre. Une critique majeure soulevée dans ce numéro est que la vaste majorité des études auxquelles on s'intéresse sont toujours menées sur des adultes, et toujours dans des environnements contrôlés. Les tâches utilisées sont aussi très loin de ce qui est vécu en contexte de classe, ce qui « limite » (le mot est faible) l'applicabilité des observations aux contextes éducatifs. C'est aussi l'objet de la réflexion de Leikin (2018) par exemple, et celle du ICIM Study Group 21 sur le thème *Neuroscience and Mathematics Education/Cognitive Science* (Schwank et Gardes, 2024), qui répète pourtant le souhait qu'une meilleure compréhension des « processus mentaux » par les neurosciences puisse être utilisée « avec succès » pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (p. 415).

Malgré ces prudenances de plusieurs, d'autres affirment haut et fort l'existence d'implications directes de thèses ou d'observations en neuroscience sur le quotidien de l'enseignement, allant jusqu'à parler de « neurodidactique » des sciences ou des mathématiques (e.g. Masson, 2007), s'exposant alors à des critiques aiguës (par exemple celle de Barallobres [2018] par rapport aux travaux de Masson). Naturellement, des questions se posent relativement à la « rigueur » dont il convient de faire preuve quand on fait des parallèles, qu'on tire des conclusions, ou qu'on formule des conseils sur la base de travaux provenant d'une autre discipline. Mais la tension vient aussi en partie de nos ambitions comme

* UQAM / LEAM – Canada – jfmaheux@mail.com

chercheurs. La didactique des mathématiques a toujours eu des préoccupations à l'égard des « retombées pratiques » de ses avancées (e.g., Lunkenbein, 1995 ; Proulx, 2007). On a souligné des limites par rapport à ce que l'on peut dire ou faire (e.g., Kilpatrick, 1981 ; Brousseau, 1994), mais plusieurs travaillent toujours dans l'espoir d'apporter des solutions aux besoins de la pratique. La question des retombées est au cœur de la proposition que je vais développer dans les pages suivantes à l'aide d'un cas : le concept de « représentation » et les travaux autour de ce qu'on appelle l'énaction.

II. LA QUESTION ÉPISTÉMOLOGIQUE

Je voudrais d'une part avancer que la difficulté de joindre neuroscience et didactique des mathématiques n'est un problème que pour certains, et qu'il l'est pour des raisons épistémologiques. L'argument est pour ainsi dire déjà fait. Je l'ai écrit plus haut : une des principales difficultés adressées aux études en neuroscience vis-à-vis de leur apport potentiel pour l'enseignement des mathématiques est dans la distance évidente entre les contextes. La recherche en neuroscience se fait dans des laboratoires, généralement avec des adultes et autour de tâches simples. On a donc un problème de représentativité (de l'étude, de ses résultats). Même chose si on situe plutôt la limite sur le terrain instrumental. En effet, une seconde difficulté fort importante à formuler concerne la manière dont les résultats d'études neuroscientifiques sont le fruit d'un filtrage énorme au niveau de l'information captée par les instruments. Ce filtrage donne une dimension arbitraire et implique d'inévitables biais qui donnent des raisons de douter de la signification et de l'exemplarité de ce qui est mesuré. Est-ce que telle microvariation de signal sur telle microfréquence de telle microzone du système nerveux est un bon signal de ce qui intéresse le chercheur ? Est-ce représentatif de ce qui se passe ? Même du point de vue des neurosciences, ces questions se posent, et font partie de limites évidentes, pour les collègues neuroscientifiques, des études réalisées. Il n'est pas évident, cependant, que ces nuances se traduisent et sont considérées quand les champs se croisent.

Le problème de la représentativité est une question épistémologique, car elle interroge la validité des connaissances que l'on tire d'un échantillon ou d'une expérience pour généraliser à un ensemble plus large. Le souci de représentativité s'inscrit dans une perspective épistémologique qui se préoccupe de la portée des conclusions que l'on peut tirer à partir de situations particulières. En effet, lorsqu'il s'agit de produire des connaissances générales à partir de cas spécifiques, la question se pose de savoir dans quelle mesure ces situations, échantillons ou contextes étudiés sont représentatifs d'une réalité plus large. L'enjeu central réside dans l'équilibre entre la fidélité des observations faites en contexte et la tentation d'en faire des généralisations.

En sciences humaines et sociales, mais également en didactique des mathématiques, cette problématique se manifeste dans les tentatives d'extrapoler les résultats de recherches sur des groupes ou des contextes restreints à des pratiques pédagogiques plus universelles. De telles généralisations reposent cependant sur la conception que l'on se fait de la réalité ou de la vérité. En cherchant à établir des résultats généralisables, on présuppose, consciemment ou non, l'existence d'une vérité objective que l'on peut découvrir et modéliser par des observations représentatives. Ce cadre suppose que les phénomènes étudiés peuvent être mesurés de manière fiable, et que ces mesures permettent de dégager des lois, etc. La recherche de représentativité trahit un engagement envers un réalisme qui considère plus ou moins négligeables la complexité et la variabilité des phénomènes et, par exemple, leur nature dynamique et culturellement située.

D'autres adoptent une posture différente par rapport au monde et à l'observation, mettant par exemple l'accent sur la construction contextuelle de tout savoir. D'autres encore refusent même ces approches (qu'on pourrait dire post-structuralistes) et défendent une action plus engagée, plus assumée, que celle de la quête de « savoirs ». C'est dans une telle optique que se situe notre travail au

Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématiques (LEAM). Il illustre à une des manières dont des liens pourraient être tissés entre la recherche en didactique des mathématiques et en neuroscience.

III. LE CAS DE L'ÉNACTION ET DU CONCEPT DE REPRÉSENTATION

1. *Quelques mots sur l'énaction*

Quand les travaux de recherche d'une discipline ont pour fonction *d'inspirer* le travail dans une autre, la question de la transférabilité ne se pose plus. C'est la rigueur interne à chacune des disciplines concernées qui permet d'apprécier la valeur des travaux réalisés. Mais qu'est-ce que « inspirer » peut vouloir dire, concrètement ? J'en présente une illustration autour du concept de « représentation », et du cas de l'énaction.

L'énaction, développée par les biologistes Humberto Maturana et Francisco Varela, est une approche en sciences cognitives. Contrairement à d'autres qui considèrent la cognition comme un processus interne, l'énaction propose que la connaissance émerge de l'engagement actif de l'organisme avec son milieu. Cette approche a été développée en bonne partie sur la base de travaux en neuroscience. Maturana réalise par exemple une étude intitulée *Directional movement and horizontal edge detectors in the pigeon retina* (Maturana et Frenk, 1963) dans lequel il est expliqué comment les cellules ganglionnaires font plus que de simplement transmettre des informations lumineuses au cerveau. Varela, de son côté, dépose à Harvard une thèse intitulée *Insect retinas: information processing in the compound eye* (Varela, 1970) où, à l'aide de mesures fines de l'activité dans le système nerveux, il montre comment le cerveau ne fait pas que « traiter l'information » visuelle, par exemple pour construire une représentation de ce qui est vu. Ses observations suggèrent plutôt que le système nerveux est impliqué dans une activité globale par laquelle ce qui est vu « émerge » à travers l'interaction constante entre des processus internes et l'environnement. Un récent article de Varela et al. (2001) récapitule et illustre ce type de travaux de manière relativement accessible, et met bien en valeur la façon dont le phénomène de plasticité, par exemple, s'articule avec l'apparente spécialisation de certaines régions du cerveau (j'y reviendrai) :

The emergence of a unified cognitive moment relies on the coordination of scattered mosaics of functionally specialized brain regions. Here we review the mechanisms of large-scale integration that counterbalance the distributed anatomical and functional organization of brain activity to enable the emergence of coherent behaviour and cognition. Although the mechanisms involved in large-scale integration are still largely unknown, we argue that the most plausible candidate is the formation of dynamic links mediated by synchrony over multiple frequency bands.

De telles observations contribuent à la formulation de la théorie de l'énaction, dont l'un des chevaux de bataille concerne la question de la représentation.

2. *Brousseau et le concept de représentation*

Particulièrement intéressant pour nous, le concept de « représentation » occupe une place de choix dans la recherche en didactique des mathématiques. Brousseau (2004) en offre une excellente analyse dans un texte qui présente des échos très forts avec les questions que nous nous posons concernant les neurosciences, mais par rapport à la psychologie :

Pour réussir à jeter un pont entre les chercheurs qui étudient directement « la représentation » avec les instruments habituels de la psychologie cognitive et ceux qui l'approchent avec d'autres instruments théoriques, cet article doit relever le défi de souligner ces différences épistémologiques (p. 242).

En effet, le concept de représentation, y compris celui de « représentation mentale », repose sur l'hypothèse de l'existence du triplet a) chose représentée, b) chose le représentant, et c) forme de correspondance (car la représentation peut être de différent type). Brousseau souligne la dimension épistémologique et les implications pratiques qui peuvent s'y rattacher. Une posture réaliste ou empiriste donne à la représentation un rôle (et une nature) qui ultimement « désarment l'action de l'enseignant en renvoyant à des lois d'apprentissage [...] et] vident à l'avance les processus didactiques de leur substance » (p. 245). On voit bien là certaines craintes formulables à l'égard des neurosciences, face auxquelles on pourrait formuler le même type de craintes. Brousseau explique ensuite comment une épistémologie différente, celle de la théorie des situations didactiques, définit le concept de représentation de manière située, et comme « construction » déterminée par la fonction qu'on lui donne. Il s'inspire des différents sens qu'on peut prêter au mot « représentation » pour distinguer des situations, des tâches et des rôles qui conduisent à s'attarder à l'activité du sujet et non à la représentation elle-même. Une véritable déconstruction de la notion de représentation qui, on pourrait l'argumenter, devient un prétexte pour s'attarder aux processus didactiques.

L'analyse que fait Brousseau illustre aussi très bien sa posture épistémologique à l'égard des résultats de la recherche. Rappelons d'abord cette position concernant les retombées de la didactique des mathématiques sur la pratique :

...les fonctions sociales assignées à ce domaine de recherche sont décrites comme des défis mortels auxquels [le chercheur] est confronté. L'obligation de remplir immédiatement une fonction sociale, de se présenter selon les canons et les pratiques d'une science établie, de déterminer des orientations pour l'éducation, de proposer des solutions pratiques pour tous les problèmes des divers niveaux scolaires et universitaires et de toutes les institutions en présence, se plier au développement que d'autres sciences hasardent en direction de l'enseignement, etc. La didactique est l'objet d'attentes démesurées et de critiques excessives. [...] l'avenir de la didactique en tant que moyen socioculturel d'amélioration de l'enseignement est lié à l'émergence d'une conception plus professionnelle du métier d'enseignant (p. 2-4 de la version en ligne).

La conception « plus professionnelle » dont il est question s'oppose à une vision « technicienne » où l'enseignant aurait principalement pour fonction de bien mettre en œuvre des activités éprouvées. L'enseignant comme professionnel est d'avantage critique et réflexif, il dispose de moyens de concevoir, d'apprécier et d'ajuster ses enseignements. Or, le modèle que présente Brousseau à propos des enjeux de la représentation répond précisément à cela. Il ne s'agit pas de tirer de la psychologie des recettes d'enseignement, mais de se servir de la problématisation du concept de représentation, appuyée entre autres sur des travaux en sociologie et en psychologie, pour mettre en lumière des manières de concevoir, d'apprécier et d'ajuster des enseignements.

Dans l'exemple qu'il donne autour du codage, Brousseau insiste ainsi sur les nombreuses variations qui ont été expérimentées, et sur la nécessité d'adapter les activités aux contextes de la classe où les fait vivre. Il n'offre pas une méthode, mais des principes : on cherche à confronter les élèves à certaines tensions pour faire naître un besoin, etc. Ces principes sont des principes didactiques, enracinés dans le travail et les cadres du didacticien. Et le modèle n'est pas là pour garantir le succès de l'enseignement, mais pour en exposer les possibilités. Ceci passe par une sorte de réinvention, donc, du concept de représentation : une conceptualisation didactique de cet objet qui elle-même permet et soutient l'activité professionnelle de l'enseignant à son propos.

3. *La représentation du point de vue de l'énaction*

C'est un peu dans le même type de démarche que situent nos travaux au LEAM. Le concept de représentation fait l'objet d'importantes discussions dans les écrits en énaction, servant même à clarifier la posture épistémologique qui fonde cette théorie. Des études empiriques du système nerveux ont

conduit Maturana et Varela à rejeter complètement l'hypothèse selon laquelle les organismes vivants, dont l'humain, fonctionnent à l'aide de représentations (e.g., Varela, 1996)¹. Dans leur approche, la connaissance du monde n'est pas une question de traitement de l'information (modèle qui imprègne l'idée de représentation) : la cognition est plutôt envisagée comme une forme de « faire » soulignant l'importance des interactions sensori-motrices. Ils s'appuient sur des études comme celles de Hubel et Wiesel (1956), qui ont observé l'activité électrique de neurones dans le cortex visuel primaire de chats en réponse à des stimuli (des lignes dont l'orientation ou la taille varie). Ces travaux, importants dans la démonstration de la plasticité du système nerveux, montrent aussi la présence d'interactions significantes dans le cortex visuel lui-même. Pour faire simple, d'une part, on réalise que, si certaines régions *ont tendance* à réagir davantage à certains stimuli, il n'y a pas vraiment de neurones dédiés à des fonctions précises. D'autre part, on apprend qu'une partie de l'activité cognitive impliquée dans la reconnaissance de motifs s'effectue *avant* l'activation du cortex préfrontal et du cortex pariétal. Des travaux subséquents montrent qu'une partie du travail se fait même *dans les yeux*, au niveau des cellules ganglionnaires de la rétine (e.g., Maturana et Frenk, 1963, cité plus haut). C'est donc en réaction à de telles observations que Maturana et Varela développent une alternative à la notion de représentation, et, nécessairement, à la manière dont on définit généralement le « savoir » et la « connaissance » (voir l'excellente explication du lien donnée dans Brousseau, 2004). Pour eux, toute connaissance est action et toute action est connaissance : il n'y a pas d'accumulation de connaissances (e.g., dans le cerveau) mises en œuvre face à des situations, mais l'activation d'une myriade de processus qui se coordonnent en continu, entre eux et avec l'environnement, de telle sorte qu'émerge « un monde de signification »².

Je me limite à une évocation très rapide de l'énaction, sans doute trop rapide même pour qu'on puisse l'apprécier. Je ne m'attarderai pas non plus à discuter des nombreux travaux en didactique des mathématiques qui ont été réalisés en s'appuyant sur cette théorie. Le lecteur curieux consultera l'article de Goodchild (2014) et les écrits de Thom Kieren, Brent Davis, Andy Begg, Elain Simmt, Alf Coles, David Reid, Jo Towers, Sandy Dawson, Maria Dolores Lozano, Heinz Steinbring, et d'autres encore incluant, dans le monde francophone, Jérôme Proulx ou Sophie René de Cotret (e.g., 1999). Il me semble plus pertinent de revenir sur la manière dont cette mise à l'écart du concept de représentation, basée donc sur des travaux en sciences cognitives, a influencé notre travail. Mais juste avant, notons d'abord que d'autres avant nous ont relevé l'importance de ce point. Kieren (1995), par exemple, distingue un regard « représentationniste » de l'enseignement des mathématiques de celui mis de l'avant par l'énaction et souligne :

a student is not seen as making correct representations in their heads and then responses for the teacher [...] The student is observed as involved in the community of mathematics in which (s)he exists with fellow students and the teacher. This means that maintaining and participating in the inter-action is key to learning (p. 14)

Dans cet extrait (et le texte, que je recommande fortement), Kieren met fort bien la table à ce qui suit. On voit aussi très bien dans ses travaux comment l'énaction sert d'inspiration à un travail didactique qui n'a rien à voir avec ce qui serait « l'application » simpliste de résultats en neuroscience à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Kieren explique que l'énaction nous conduit à *regarder* les élèves, l'enseignant et les situations de classe d'une certaine manière. En particulier ici : de le voir non pas comme des individus qui répondent à des questions sur la base de représentations mentales, mais plutôt comme des membres d'une communauté mathématique en interaction. S'y révèle une posture épistémologique bien différente de celles voulant que la recherche en neuroscience donne

¹ Ils rejoignent en cela d'autres travaux par exemple en théorie du langage, mais je n'en parlerai pas ici. Voir par exemple Maheux et Proulx (2012).

² Proulx (2008) présente très bien la posture épistémologique de l'énaction en la contrastant avec celle du constructivisme.

des réponses aux problèmes de l'enseignement, et une posture bien différente aussi en ce qui a trait à la nature de la connaissance et de l'activité mathématiques en classe. L'espace me manque pour en discuter plus à fond, mais Kieren le fait assez bien dans son propre texte.

IV. ÉNATION ET REPRÉSENTATIONS DANS NOS TRAVAUX

C'est en poussant plus loin l'idée mise de l'avant par Kieren par exemple que Proulx et moi avons développé au LEAM la théorie du « faire | mathématique », dans laquelle nous proposons de mettre de côté les concepts de savoir et de connaissance pour nous concentrer sur l'activité mathématique elle-même. Nous avons d'abord abordé ceci (e.g., Proulx et Maheux, 2012) en posant la question : peut-on imaginer une didactique des mathématiques dans laquelle on ne tient pas pour acquis que les élèves agissent sur la base de représentations (mentales) ou de connaissance (qui seraient stockées dans leur cerveau) ?

D'emblée, il ne s'agit donc pas, ici encore, d'appliquer à la didactique des mathématiques (ou à l'enseignement) des résultats de recherche en neuroscience, mais de se servir de tels résultats pour questionner nos approches, et pour ouvrir à d'autres possibilités. La proposition initiale d'une didactique qui se contente de parler de ce que *font* (visiblement) les élèves et les enseignants a été mise en œuvre dans différentes études. Nous avons d'une part clarifié certains aspects méthodologiques (Maheux et Proulx, 2014a), parallèlement mis à l'épreuve dans certaines études. Proulx s'est ainsi intéressé au cas du calcul mental, et a montré comment on pouvait s'attarder aux stratégies énoncées par les élèves pour faire avancer notre discipline de différentes manières, et ce, sans avoir formulé d'hypothèses sur ce que « savent » les élèves, ou la manière dont ils se « représentent » différentes choses (e.g., Proulx, 2015). Ses écrits ont entre autres mis de l'avant la manière dont les stratégies énoncées peuvent enrichir les analyses conceptuelles et a priori. Il a aussi, par exemple, contribué à développer un modèle permettant de caractériser l'action collective, modèle intéressant pour distinguer des dynamiques de classe (McGarvey et al., 2015).

Ces avancées ont le potentiel d'apporter aux enseignants des moyens d'enrichir, de raffiner, de revoir ou même de changer leurs pratiques. Mais il est important encore une fois d'en situer la visée : il ne s'agit pas d'applications de travaux en neuroscience, ni même de contributions prétendant régler des problèmes de la pratique. Un peu comme les conceptualisations développées par Brousseau, les distinctions et les modèles de Proulx pourraient venir permettre et soutenir une activité professionnelle de l'enseignant préoccupé par le développement de stratégies, par exemple. La déconstruction du concept de représentation à l'aide de travaux en neuroscience nous met au défi d'aborder différemment ce qui se passe en classe, et c'est comme didacticiens des mathématiques que nous élaborons ces nouvelles approches.

Dans le même souffle, Proulx et moi nous sommes aussi intéressés à la résolution de problème, autre thème important en didactique des mathématiques. Ceci nous a conduits questionner le concept de résolution de problème, dont l'interprétation courante est également « représentationniste » : l'existence (objective ou subjective) d'un problème à résoudre, et de sa solution. Un regard en termes de faire | mathématique conduit plutôt à parler de « problématisation » continue à partir d'énoncés que l'on transforme de manière plus ou moins assurée (Maheux et Proulx, 2014b). Une approche reprise pour examiner la résolution de problème collective également (Gandell et Maheux, 2019). Ces études visent dans un premier temps à développer un nouvel éclairage sur le sujet. Cet éclairage pourrait amener à revoir les visées généralement associées à la résolution de problème en mathématique, et à apprécier de manière différente le travail des élèves dans ce contexte. La conception d'un nouveau « modèle », très différent de celui de Polya par exemple, pourrait également venir outiller la pratique.

Quoi qu'il en soit, remarquons que c'est donc bien « de l'intérieur » de la didactique des mathématiques que nous avons souhaité apprécier la pertinence des leçons tirées des études en sciences cognitives. Et surtout pas en faisant reposer la validité de nos propos sur le poids des « évidences » mesurées dans les études sur le système nerveux. Exemple supplémentaire : un autre thème sur lequel nous nous penchons depuis un moment est celui de la « transposition didactique ». On devine assez rapidement comment cette notion repose sur l'idée de représentation à différentes échelles : représentation sociale, collective, dans l'activité, individuelle, etc. Mais comment parler de la « circulation du savoir » si on met de côté le concept même de savoir, de connaissance et de représentation ? Une façon d'y arriver : s'intéresser de manière primordiale aux *traces*, que l'on peut considérer comme vecteurs de certaines activités. Plutôt que de parler de « transposition », on réfléchit en termes de « propagation mathématique » (voir Maheux, 2023), une approche qui permet de rendre compte de la circulation des idées ou des pratiques tant à l'échelle sociohistorique que dans la classe. La manière dont les recherches en neuroscience informent ce travail n'ont pas fait l'objet d'une explicitation, mais le fait de considérer l'activité et ses traces comme faisant partie de l'environnement avec lequel le système nerveux interagit rend le lien assez évident. L'explosion depuis quelques années du nombre d'études en neurologie invite naturellement à vouloir aller puiser à la source, pour ainsi dire : est-ce que de nouveaux résultats sur la manière dont nous interprétons les traces de l'activité pourraient nourrir cette conceptualisation, et peut-être même mener à regarder de façon différente ce qui se dit ou s'écrit en classe de mathématiques ? Sans doute que oui !

...En même temps, et je conclus là-dessus, un obstacle majeur reste présent. Maturana et Varela sont de grands vulgarisateurs de la recherche en neuroscience. Ils ont su parler des travaux et de leurs résultats, identifier ceux qui sont le plus évocateurs, traduire les observations en termes de questionnements et inventer de nouvelles hypothèses, étant eux-mêmes directement impliqués dans ces recherches. Pour nous didacticiens, étrangers à ce champ de recherche³, lire et faire sens du dernier article publié dans le *Journal of Neuroscience Research* n'est pas chose évidente. Juger de la qualité et de la portée de tel papier dépasse généralement nos compétences. Ainsi, je lisais récemment une étude fascinante intitulée *Sensorimotor synchronization and neural entrainment to imagined rhythms in individuals with proficient imagery ability* (Whitton et al., 2024). L'étude semble démontrer que les distractions auditives ont un effet plus grand que les distractions visuelles lors de tâches demandant des associations/coordinations, mais aussi que les structures associées à l'imagerie visuelle semblent pouvoir soutenir le travail de celles associées à l'auditif, et ce, même en l'absence de stimuli visuels. La notion « d'imagerie rythmique » discutée dans l'article est évidemment séduisante. Surtout quand on pense aux travaux en didactique proposant de s'attarder au rythme, ou même d'en utiliser en classe avec les élèves (e.g., Bautista et Roth, 2012 ; Chahine et Montiel, 2023). Je peux cependant difficilement juger de la qualité de l'étude de Whitton et al. (2024). Néanmoins, leur travail peut m'inspirer comme didacticien, me faire réaliser que la dimension « sonore » d'une activité semble rarement prise en compte dans nos analyses, qu'il pourrait s'agir d'une « variable didactique » intéressante à solliciter, et ainsi de suite (on parle ici de « distractions sonores » : pas question ici d'élèves sourds, pour qui on sait que l'aspect langagier amène des défis en lien avec les mathématiques).

³ Un collègue me suggère d'utiliser le mot « touristes », qui donne une image intéressante de la manière dont nous découvrons / explorons ces champs de recherche pour lesquels nous ne sommes pas formés !

V. EN GUISE DE CONCLUSION

La présence de points de contact entre les sciences cognitives et la didactique des mathématiques est évidente et inévitable. Mais il m'est impossible de ne pas partager les conclusions de Brousseau (2004) quand il écrit :

Il me semble difficile, voire illégitime, contraire à l'éthique, dans son principe, d'importer directement en didactique des prescriptions, des suggestions ou même de simples concepts issus des sciences cognitives, directement, c'est-à-dire sans les intégrer spécifiquement dans une analyse du système didactique (p. 274)

Alors quoi ? Il y a bientôt 10 ans de cela, Bowers (2016) écrit « there are no current examples of neuroscience motivating new and effective teaching methods », un constat toujours valide à mon avis, et continue en affirmant « [I] argue that neuroscience is unlikely to improve teaching in the future » (p. 600). Son argument repose sur l'impossibilité d'appliquer (autrement que naïvement, fausement ou de façon injustifiée) aux problèmes d'enseignement et d'apprentissage des observations en neuroscience, car ils ont des objets fondamentalement différents. Une exception, suggère-t-il, serait dans le paradigme médical : la mise au point, sur la base d'études en neuroscience, d'implants ou de médicaments aidant les apprenants à voir, à entendre, ou à se concentrer... voilà qui peut, en effet, aider certains élèves à apprendre ! Mais, explique-t-il, ce n'est pas du tout ce type de contribution auxquelles on pense en « neuroéducation », où généralement on vise plutôt à justifier l'adoption d'approches pédagogiques. Et c'est là où, selon Bowers, on se fourvoie.

Dans le cadre de ce texte, j'ai voulu mettre en lumière une autre manière dont la recherche en neuroscience pourrait contribuer à la didactique des mathématiques⁴. En nous invitant à questionner nos modèles, nos épistémologies et les choses que nous tenons pour acquies, les avancées en neuroscience peuvent nous provoquer comme didacticiens des mathématiques. Et c'est en y réagissant *en tant que didacticiens des mathématiques* que nous pouvons faire progresser notre champ à travers ces travaux. C'est aussi ce que veut dire Brousseau (2004), je pense, quand il s'oppose à ce qui « [vide] les processus didactiques de leur substance » (p. 245, cité plus haut). C'est aussi le cœur de la réaction de Barallobres (2018).

Évidemment, les didacticiens des mathématiques n'ont pas l'exclusivité en ce qui a trait à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Certainement, la médecine peut changer bien des choses. La sociologie ou la politique, par exemple, peuvent aussi venir en transformer les conditions à un point tel que certaines questions disparaissent et d'autres deviennent dominantes. Le meilleur exemple de ceci est sans doute celui donné par les outils technologiques, dont le développement exponentiel semble annoncer un véritable raz-de-marée dans les années à venir. Est-ce à dire que les travaux en intelligence artificielle devraient dicter l'adoption de nouvelles approches pédagogiques ? Comme didacticiens des mathématiques, nous serons sans doute très prochainement confrontés à des écologies nouvelles. Beaucoup des choses que nous tenons pour certaines ou évidentes risquent d'être bousculées⁵. C'est en s'y intéressant d'un point de vue didactique que nous pourrions continuer de faire notre différence : certainement pas en réglant les problèmes de la pratique, mais peut-être en contribuant, comme l'écrivait Brousseau, à nourrir l'exercice professionnel du métier d'enseignant. Il en va de même pour l'apport potentiel des avancées en neuroscience.

⁴ Je pourrais parler de la contribution possible de la didactique des mathématiques aux neurosciences, mais ce n'est pas tant ce qui nous intéresse comme didacticiens... Bowers (2016) évoque quelques pistes.

⁵ Il y aurait probablement beaucoup à apprendre d'études sur la manière dont les développements technologiques (en particulier la calculatrice, puis l'ordinateur portable) ont globalement affecté l'éducation mathématique d'une part, et notre discipline de l'autre. Des travaux en ce sens existent déjà.

RÉFÉRENCES

- Barallobres, G. (2018). Réflexions sur les liens entre neurosciences, mathématiques et éducation. *McGill Journal of Education*, 53(1), 169-188.
- Bautista, A. et Roth, W. M. (2012). The incarnate rhythm of geometrical knowing. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 91-104.
- Bowers, J. S. (2016). The practical and principled problems with educational neuroscience. *Psychological Review*, 123(5), 600-612. <https://doi.org/10.1037/rev0000025>
- Brousseau, G. (1994). Perspectives pour la didactique des mathématiques. Dans M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavnnot et N. Balacheff (dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (p. 51-66). La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(2), 241-277. <https://doi.org/10.7202/012669ar>
- Chahine, I. et Montiel, M. (2023). Teaching modeling in algebra and geometry using musical rhythms: Teachers' perceptions on effectiveness. *Journal of Mathematics Education*, 8(2), 126-138.
- de Smedt, B., Ansari, D., Grabner, R. H., Hannula-Sormunen, M., Schneider, M. et Verschaffel, L. (2011). Cognitive neuroscience meets mathematics education: It takes two to tango. *Educational research review*, 6(3), 232-237.
- Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford University Press.
- Gandell, R. et Maheux, J.-F. (2019). Problematising: The lived journey of a group of students doing mathematics. *Constructivist Foundations*, 15(1), 50-60.
- Goodchild, S. (2014). Enactivist theories. Dans S. Lerman (dir.), *Encyclopedia of mathematics education*. Springer.
- Howard-Jones, P. (2010). *Introducing neuroeducational research: Neuroscience, education and the brain from contexts to practice*. Routledge.
- Hubel, D. H. et Wiesel, T. N. (1962). Receptive fields, binocular interaction, and functional architecture in the cat's visual cortex. *Journal of Physiology*, 160(1), 106-154.
- Kilpatrick, J. (1981). The reasonable ineffectiveness of research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 2(2), 22-29.
- Kieren, T. (1995). *Teaching mathematics (in-the-middle): Enactivist views on learning and teaching mathematics* [Conférence plénière]. Queen's/Gage Canadian National Mathematics Leadership Conference for Teachers, Queens University, Kingston, Ontario.
- Leikin, R. (2018). *How can cognitive neuroscience contribute to mathematics education? Bridging the two research areas* [Lecture]. 13th International Congress on Mathematical Education.
- Lunkenbein, D. (1995). Qu'est-ce que la didactique des mathématiques. *Instantanés mathématiques*, 32(1), 6-17. https://www.amq.math.ca/wp-content/uploads/instantanes-math/Vol_XXXII_no_1_1995_Septembre_pages_6_17.pdf
- Maheux, J.-F. et Proulx, J. (2014a). Vers le faire mathématique : essai pour un nouveau positionnement en didactique des mathématiques (Débat : article original). *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Revue internationale de didactique des mathématiques*, 19, 17-52.

- Maheux, J.-F. et Proulx, J. (2014). De résoudre un problème à problématiser mathématiquement : Vers une nouvelle approche de l'activité mathématique de l'élève. *Éducation et francophonie*, 42(2), 24-43.
- Maheux, J.-F. (2023). *Transposition didactique ou propagation mathématique ?* [Communication] Colloque de l'ACFAS 2022. <https://jfmaheux.uqam.ca/publications/Maheux2023PropagationACFAS.pdf>
- Masson, S. (2007). Enseigner les sciences en s'appuyant sur la neurodidactique des sciences. Dans P. Potvin, M. Riopel et S. Masson (dir.), *Enseigner les sciences : regards multiples* (p. 308-321). MultiMondes. <https://static1.squarespace.com/static/510c0d84e4b0cdc785fa72c5/t/5117946ae4b04c436edbdee1/1360499818520/Masson2007.pdf>
- Maturana, H. R. et Frenk, S. (1963). Directional movement and horizontal edge detectors in the pigeon retina. *Science*, 142(3594), 977-979.
- McGarvey, L. M., Davis, B., Glanfield, F., Martin, L., Mgombelo, J., Proulx, J., Simmt, E., Thom, J. et Towers, J. (2015). Collective learning: Conceptualizing the possibilities. Dans T. G. Bartell, K. N. Bieda, R. T. Putnam, K. Bradfield et H. Dominguez (dir.), *Proceedings of 37th Annual Conference of PMENA, 5-8 novembre 2015, Michigan State University, USA* (p. 1333-1342). <https://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2037%202015%20Proceedings.pdf>
- Proulx, J. (2007). Les recherches en didactique des mathématiques : perspectives personnelles sur les perspectives d'avenir. Dans N. Bednarz (dir.), *Actes du 40e colloque du GDM2007, 4-8 juin 2007, Université du Québec à Rimouski, Canada* (p. 229-238).
- Proulx, J. (2008). Some differences between Maturana and Varela's theory of cognition and constructivism. *Complicity: An International Journal of Complexity and Education*, 5(1).
- Proulx, J. et Maheux, J.-F. (2012). De la connaissance et du faire : vers un nouveau positionnement en didactique des mathématiques. Dans *Actes du 44e Colloque du GDM2012, 23-25 mai 2012, Université Laval, Québec, Canada* (p. 100-116).
- Proulx, J. (2015). Calcul mental et stratégies : un regard en termes de potentialités. Dans C. Sabena et B. Di Paola (dir.), *Actes de la 67e rencontre de la CIEAEM, 20-24 juillet 2015, Aoste, Italie* (p. 341-345). https://sites.unipa.it/grim/CIEAEM_67_Proceedings_QRDM_Issue_25_Suppl.2.pdf
- René de Cotret, S. (1999). Perspective bio-cognitive pour l'étude des relations didactiques. Dans F. Conne et G. Lemoyne (dir.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 103-120). PUM.
- Schwank, I. et Gardes, M. L. (2024). Neuroscience and mathematics education/cognitive science. Dans J. Wang (dir.), *Proceedings of the 14th International Congress on Mathematical Education, 11-18 juillet 2021, Shanghai, Chine* (volume I, p. 413-416).
- Varela, F. J. (1996). *Invitation aux sciences cognitives*. Seuil.
- Varela, F., Lachaux, J. P., Rodriguez, E. et Martinerie, J. (2001). The brainweb: Phase synchronization and large-scale integration. *Nature Reviews Neuroscience*, 2(4), 229-239.
- Whitton, S. A., Sreenan, B., Luo, C. et Jiang, F. (2024). Sensorimotor wynchronisation and neural entrainment to imagined rhythms in individuals with proficient imagery ability. *Journal of Neuroscience Research*, 102(9), Article e25383.

ARTICULER DES MÉTHODES DE RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET EN SCIENCES COGNITIVES : UN EXEMPLE DE CONCEPTION ET VALIDATION D'UN TEST

GARDES* MARIE-LINE, CROSET** MARIE-CAROLINE, PRADO*** JÉRÔME ET SAMSON****

ADELINE

Résumé | Au sein d'études interventionnelles se pose la question du choix des tests pour évaluer les connaissances et les progrès des élèves avant et après la séquence d'enseignement. L'analyse didactique des tests existants nous a conduits à concevoir nous-mêmes un test, afin qu'ils puissent répondre plus précisément à nos questions de recherche. Nous souhaitons mettre en évidence l'apport de nos différents regards (statistique, didactique et cognitif) dans la conception et la validation d'un test pour évaluer les connaissances des élèves sur la construction du nombre à l'école maternelle.

Mots-clés : apprentissage du nombre, évaluation de connaissances, école maternelle, cognition numérique, didactique des mathématiques

Abstract | In intervention studies, the question arises of the choice of tests for assessing students' knowledge and progress before and after the teaching intervention. The didactic analysis of existing tests led us to design the tests ourselves, so that they could respond more precisely to our research questions. Our aim is to highlight the contribution of our different perspectives (statistical, didactic and cognitive) in the design and validation of a test to assess students' knowledge of the concept of number in pre-school.

Keywords: Number learning, knowledge assessment, preschool, cognition, mathematics didactics

I. CONTEXTE

Dans un contexte où les performances mathématiques des élèves français dans les évaluations internationales telles que TIMSS et PISA suscitent des préoccupations, le gouvernement français a encouragé le développement d'études interventionnelles¹. L'une des nécessités de ces études est l'élaboration d'outils d'évaluation des connaissances adaptés à différents âges, permettant d'analyser de manière satisfaisante le développement des connaissances des enfants. Ces études, menées en classe, impliquent souvent la collaboration de chercheurs issus de divers domaines, par exemple la psychologie cognitive et la didactique des mathématiques. Nous pensons que cette interdisciplinarité enrichit les études par la diversité des perspectives et des méthodologies mais impose également un défi : la création de tests de connaissances capables de satisfaire les exigences de l'ensemble des chercheurs concernés.

Dans cet article, nous proposons de décrire un travail impliquant psychologues et didacticiens autour de la conception et de l'évaluation d'un test de connaissances du concept de nombre destiné à des enfants de 5-6 ans. Nous commençons par présenter un modèle didactique des connaissances sur le nombre sur lequel s'est basée la conception du test. Nous décrivons ensuite la méthode utilisée pour

* Haute École Pédagogique Vaud, UER MS, Lausanne – Suisse – marie-line.gardes@hepl.ch

** Université Grenoble Alpes, CNRS, LIG, Grenoble – France – marie-caroline.croset@univ-grenoble-alpes.fr

*** Centre de Recherche en Neurosciences de Lyon (CRNL), INSERM U1028 - CNRS UMR5292, Université de Lyon – France – jerome.prado@univ-lyon1.fr

**** Université Grenoble Alpes, CNRS, LJK, Grenoble – France – adeline.leclercq-samson@univ-grenoble-alpes.fr

¹ Une étude interventionnelle vise à évaluer les effets d'un enseignement spécifique sur les apprentissages des élèves.

concevoir chaque item du test, de manière à contraindre les techniques des élèves et à identifier précisément les connaissances mobilisées. Enfin, nous présentons les analyses statistiques menées pour valider ce test. En conclusion, nous discutons de l'intérêt de combiner analyses quantitatives et qualitatives pour offrir une image précise et fidèle des connaissances des élèves.

II. MODÈLE DIDACTIQUE : UNE CARTE DES CONNAISSANCES SUR LE NOMBRE

Chevallard introduit la notion de rapport personnel qu'un élève entretient avec un objet de savoir comme un concept unificateur des aspects fragmentaires sous lesquels on décrit communément la connaissance (Chevallard, 1989). Ainsi regroupe-t-il les notions de savoir-faire, conceptions et savoir au sein de la notion du rapport personnel à un objet de savoir. Bosch et Chevallard (1999) proposent un quadruplet praxéologique pour décrire les connaissances des élèves attendues par une institution : un type de tâches accompli par des techniques qui se justifient par des technologies au sein d'une théorie. En 2019, nous avons décrit le rapport personnel que pouvait entretenir un élève sur le concept de nombre chez un élève de maternelle en France (Croset et Gardes, 2019, 2020). 13 types de tâches ont été identifiés et catégorisés selon l'usage du nombre : cardinal, ordinal et, enfin, un usage du nombre en dehors de toute référence à une grandeur physique (un usage décontextualisé). Pour chaque usage, nous avons identifié cinq grands types de tâches, à savoir le codage, le décodage, l'association d'un nombre à un autre nombre, la comparaison et l'anticipation du résultat d'une action. À partir de travaux issus de la psychologie cognitive et de la didactique des mathématiques, nous proposons de préciser ci-dessous les techniques principales associées aux différents types de tâches (Annexe 1). Ponctuellement, nous mentionnons aussi des éléments technologiques justifiant certaines techniques.

Coder une quantité ou une position. Ce type de tâches consiste à déterminer le cardinal (le nombre d'éléments) d'une collection ou la position d'un élément dans une liste ordonnée d'objets. Par exemple, il peut être demandé à un enfant « combien y a-t-il de jetons devant toi ? » ou « à quelle position se situe la perle verte dans ce collier ? ». La réponse peut être donnée par un mot-nombre ou un code arabe. Différentes techniques permettent de coder tels que le *subitizing* (capacité de reconnaître immédiatement et précisément le cardinal de petites quantités (Clements, 1999), le comptage (de un en un ou, plus généralement, de n en n) consistant à mettre en correspondance le mot-nombre de la comptine conventionnelle et un élément de la collection. Le comptage mobiliserait différents éléments technologiques, notamment les cinq principes de Gelman (2009), la notion d'unité et d'itération.

Décoder un nombre par une quantité ou une position. Ce type de tâches consiste à construire une collection d'un cardinal donné (par un mot-nombre ou par une écriture chiffrée) (Wynn, 1992). Les consignes « Peux-tu me donner 5 jetons ? » ou « Peux-tu désigner la 5e perle ? » en sont des exemples. Ce type de tâches est la réciproque de celui de codage : on part d'un code symbolique (mot-nombre ou écriture chiffrée) et on lui associe une quantité. Différentes techniques similaires aux précédentes permettent de décoder : le *subitizing* ou le comptage. Elles impliquent le stockage du nombre cible en mémoire de travail, le processus d'énumération (Briand, 1999) et de contrôle pour s'arrêter lorsque le nombre cible est atteint.

Associer des quantités ou des positions. Ce type de tâches consiste à construire une collection de même cardinal qu'une autre collection témoin, mais aussi à désigner une position équivalente à une position témoin dans un ensemble ordonné (Cariat et Margolinas, 2015). Par exemple, il pourrait être demandé à un enfant « Voici des stylos, peux-tu prendre autant de bouchons que de stylos ? ». Contrairement aux deux types de tâches précédents, le code symbolique (mot-nombre ou écriture chiffrée) n'est pas nécessairement présent dans une tâche d'association. Nous avons identifié trois

techniques pour ce type de tâches : la perception, la correspondance terme à terme et le codage/décodage. La perception permet de conserver la quantité de la collection témoin puis de construire la collection de même quantité. La correspondance terme à terme consiste à associer un élément de la collection à construire à un élément de la collection témoin. Selon le contexte matériel, cela peut se ramener à relier d'un trait chaque élément, les pointer simultanément ou encore déposer un élément face à chaque élément témoin. Enfin, le codage/décodage consiste à coder puis décoder, c'est-à-dire, déterminer le cardinal de la collection témoin ou la position (par une technique de codage : *subitizing*, comptage de un en un, etc.) puis construire la collection de ce cardinal ou la position équivalente (par une des techniques de décodage). Cette technique est la seule technique utilisant le nombre pour ce type de tâches.

Comparer des quantités ou des positions. Ce type de tâches consiste, pour deux collections données (ou pour deux positions dans des listes ordonnées), à désigner la collection (ou la position) qui a le plus ou le moins d'éléments (ou la plus proche ou la plus éloignée de l'origine). Par exemple, une consigne pour ce type de tâches pourrait être « Voici des jetons rouges. Voici des jetons bleus. Peux-tu me dire s'il y a plus de jetons rouges que de jetons bleus ? ». Trois techniques sont mobilisables : l'estimation, la correspondance terme à terme et le codage. L'estimation est une procédure qui serait innée et reposerait sur une représentation de la magnitude des nombres (Dehaene, 2018). Elle est fondamentalement approximative. La correspondance terme à terme consiste à associer un élément d'une collection à un élément de l'autre collection. À la fin de cette correspondance terme à terme, il faut conclure que la quantité la plus grande est celle dans laquelle il reste des éléments non appariés. Le codage consiste à coder la quantité de chaque collection (par une des techniques de codage citées précédemment) et comparer les codes symboliques obtenus. En plus des éléments technologiques du codage, il faut donc ajouter la connaissance de l'ordre des nombres.

Opérer sur des quantités ou des positions. Ce type de tâches consiste à « anticiper » un résultat après une action (ajouter, enlever, partager, etc.) ou une position après une action (avancer, reculer, etc.). Par exemple, une consigne pour ce type de tâches pourrait être « Il y a 3 jetons dans la boîte (opaque). J'en ajoute 2. Combien y a-t-il de jetons dans la boîte ? » Pour obtenir le résultat, plusieurs techniques sont disponibles : le recomptage (compter à partir du début), le calcul, le surcomptage ou le sous-comptage (compter en avant ou en arrière à partir d'un nombre cardinal/position donné) et la connaissance des faits numériques.

À ces 10 types de tâches, s'ajoutent 3 types de tâches dans un usage décontextualisé : associer le code verbal au code arabe et réciproquement (c'est-à-dire transcoder), comparer des nombres (par exemple dans un jeu de batailles où les cartes ne comportent que des écritures chiffrées) et calculer sur des nombres (par exemple, trouver la carte correspondante à la somme de deux cartes).

III. CONCEPTION ET PRÉSENTATION DU TEST

1. Conception du test

Notre objectif était de proposer des tâches aux élèves qui imposent de ne mobiliser qu'une et une seule technique afin de pouvoir diagnostiquer les technologies mobilisées par l'élève. Pour cela, nous avons identifié la portée de chaque technique :

Une technique — une « manière de faire » — ne réussit que sur une partie $P(t)$ des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme portée de la technique : elle tend à échouer sur $T \setminus P(t)$, de sorte qu'on peut dire que « l'on ne sait pas, en général, accomplir les tâches du type T » (Chevallard, 1998, p. 225).

À la manière de T4tel (Chaachoua et Bessot, 2016), nous avons décrit ces portées comme un ensemble de valeurs prises par des variables. Par exemple, pour le type de tâches « Comparer des quantités », six tâches sont proposées : deux pour évaluer la technique comptage, deux pour évaluer la technique de correspondance terme à terme et deux pour évaluer la technique d'estimation. Deux variables didactiques principales sont en jeu dans ce type de tâches : l'écart entre les deux quantités et l'accès simultané des collections. La comparaison de deux quantités par estimation est facilitée lorsque ces quantités sont de cardinaux très différents. La loi de Weber explique cet effet de distance : « l'imprécision de l'estimation, mesurée par son écart type, croît linéairement avec le nombre estimé, selon une constante de proportionnalité appelée fraction de Weber » (Dehaene, 2008, p. 280). La portée de la technique d'estimation est donnée par la fraction de Weber, qui dépend de l'âge (Halberda et Feigenson, 2008 ; Piazza et al., 2010) : pour les enfants de 5 ans, cette fraction varie de 0,23 à 0,34. La portée de la technique de mise en correspondance est que les éléments des deux collections doivent être visibles simultanément ou déplaçables.

Dans ce travail d'identification des tâches mobilisant telle technique, il faut aussi décrire les valeurs de variables qui empêcheront la mobilisation d'une autre technique. Par exemple, pour empêcher l'estimation, il faut que l'écart entre les deux quantités à comparer ne soit pas important. Une disposition rectiligne des objets peut aussi engager à mobiliser la correspondance terme à terme et éviter le comptage. Par ailleurs, comme l'âge des enfants impose de proposer des collections de quantité raisonnable, les objets de la collection doivent être de taille différente afin que la surface occupée par les objets ne puisse pas permettre de répondre. La technique de codage, quant à elle, a une portée plus importante et devient nécessaire dès lors que les deux autres techniques sont empêchées. Les différents items de comparaison de quantités sont détaillés dans le tableau 1 où la tâche consistait à désigner la collection ayant le plus d'étoiles.

Tableau 1 – Exemples de variables pour le type de tâches « Comparer des quantités »

Technique	Portée de la technique				Exemple de tâche
	Variable Taille étoile	Variable Simultanéité	Variable Organisation	Variable Écart	
Coder par comptage	de taille différente ou d'espace différent entre les étoiles	collections séparées, par une feuille blanche, non visibles simultanément	désorganisée	écart faible	
Correspondre terme à terme		collections visibles simultanément	rectiligne	écart faible	
Estimer		collections visibles simultanément	désorganisée	écart important	

2. Présentation du test ENUDIT 2

Le test est structuré en trois parties, selon les trois usages du nombre : cardinal (partie A), ordinal (partie B) et décontextualisé (partie C). Le tableau 2 présente les tâches des parties A et B, le tableau 3 présente celles de la partie C. Chaque partie est découpée selon les cinq types de tâches décrits précédemment. Les parties A et B comportent ainsi les types de tâches suivants : coder (A1, B1), décoder (A2, B2), comparer (A3, B3), associer (A4, B4) et anticiper (A5, B5). La partie C a trois types de tâches : transcoder (C3), comparer (C4) et anticiper (C5). Un type de tâches a été ajouté dans cette partie : réciter la comptine numérique (C0). Pour chaque type de tâches, plusieurs tâches sont proposées afin d'évaluer les différentes techniques identifiées. Pour chaque type de tâches, les éléments sont présentés par ordre décroissant de difficulté, selon la technique mobilisée². Si l'enfant réussit les items les plus difficiles, il n'est pas exposé aux items considérés comme plus faciles : un présupposé du test est qu'il serait capable de les réussir puisqu'il a réussi des tâches similaires plus complexes. Les mêmes valeurs ont été choisies pour les deux parties A et B (par exemple, six étoiles dans la tâche A1 et le sixième étage dans la tâche B2). L'idée est de pouvoir comparer si, pour une même valeur numérique, les enfants réussissent mieux dans les tâches cardinales que dans les tâches ordinales. En ce qui concerne les scores, 1 point est attribué pour les tâches 1, 2, 3, 4 et 2 points pour la tâche 5 dans les parties³ A et B. Cela donne un total de 6 points pour la partie A et un total de 6 points pour la partie B. Dans la partie C, 1 point est attribué pour toutes les tâches, ce qui donne un total de 6 points pour la partie C. Le score total pour le test est de 18 points. Le test n'est pas chronométré.

Tableau 2 – Types de tâches des parties A et B de l'ENUDIT 2

Types de tâches	Partie A (cardinal)	Partie B (ordinal)	Nombre d'items
Coder	A1 - Déterminer le cardinal d'une collection donnée (<i>Combien d'étoiles y a-t-il ?</i>)	B1 - Déterminer la position d'un objet (<i>À quel étage de l'immeuble se trouve le personnage ?</i>)	4 items (6, 11, 3, 4)
Décoder	A2 - Construire une collection d'un cardinal donné (<i>Peux-tu mettre 6 jetons dans un bol ?</i>)	B2 - Désigner la position d'un objet (<i>Peux-tu placer le personnage au 6e étage ?</i>)	4 items (6, 11, 3, 4)
Comparer	A3 - Comparer le cardinal de deux collections (<i>Quelle est la collection qui a le plus d'étoiles ?</i>)	B3 - Comparer deux positions (<i>Quel est le personnage qui est à l'étage le plus élevé ?</i>)	6 items (4 vs 5, 9 vs 12, 5 vs 10, 4 vs 9)
Associer	A4 - Construire une collection équipotente à une collection témoin (<i>Pose autant de jetons rouges que de jetons bleus</i>)	B4 - Reproduire une position équivalente à une position témoin (<i>Pose le personnage au même étage que dans l'immeuble témoin</i>)	4 items (6, 11, 3, 4)

² Une technique est considérée comme plus élaborée lorsque ses éléments technologiques intègrent des éléments technologiques des techniques de niveau inférieur. Par exemple, pour une tâche de comparaison, une technique de codage est considérée comme plus complexe qu'une technique de correspondance terme à terme car elle mobilise comme éléments technologiques le principe de Hume, le nombre comme mémoire d'une quantité, l'ordre des nombres ; le principe de Hume étant l'élément technologique de la correspondance terme à terme.

³ Ce choix de score a été effectué de manière arbitraire afin d'équilibrer le nombre de points par partie, en considérant que ces types de tâches sont plus complexes et plus nombreuses.

Anticiper	A5 - Résoudre des problèmes arithmétiques cardinaux/impliquant des quantités dans le champ additif (<i>Kylian a 5 crayons. Un ami lui donne 3 crayons. Combien de crayons a Kylian ?</i>)	B5 - Résoudre des problèmes arithmétiques impliquant des positions dans le champ additif (<i>Kylian est sur le 5e barreau d'une échelle, il monte de 3 barreaux. Sur quel barreau se trouve-t-il ?</i>)	6 items ($5 + 3 = ?$, $9 - 2 = ?$, $7 - 3 = ?$)

Tableau 3 – Types de tâches de la partie C de l'ENUDIT 2

Types de tâches	Partie C (décontextualisé)	Nombre d'items
Réciter	C0 - Réciter la comptine numérique (<i>Peux-tu compter en partant de 5 ?</i>)	3 items (compter, décompter, compter à partir de)
Associer	C3 - Nommer des codes arabes (<i>Comment s'appelle ce nombre ?</i>)	6 items (18, 25, 37, 4, 7, 13)
Ordonner	C4 - Ordonner des codes arabes (<i>Quel est le plus grand nombre ?</i>)	5 items (7, 8, 9, 10, 11 ; 12 vs 19, 31 vs 13, 3 vs 4, 8 vs 6)
Calculer	C5a - Additionner (<i>Combien font 5 plus 4 ?</i>) C5b - Soustraire (<i>Combien font 8 moins 5 ?</i>) C5c - Décomposer (<i>Donne deux cartes pour faire 6</i>)	4 items ($5 + 4$, $4 + 3$, $3 + 2$, $1 + 3$) 4 items ($8 - 5$, $9 - 3$, $5 - 3$, $4 - 1$) 4 items (8, 6, 5, 4)

IV. VALIDATION PSYCHOMÉTRIQUE DU TEST

Dans les recherches en psychologie cognitive, les outils d'évaluation de connaissances vérifient généralement plusieurs propriétés psychométriques afin de s'assurer notamment que, si l'outil est valide (c'est-à-dire si le test mesure vraiment ce qu'il prétend mesurer) et s'il est fiable (c'est-à-dire si les résultats qu'ils donnent sont stables dans le temps à divers points de mesure). Pour ce qui est de la validité, nous avons choisi d'effectuer une mesure de la validité concomitante, c'est-à-dire une comparaison entre le test et un critère de référence externe (en général un autre test déjà validé) au même moment. Pour ce qui est de la fiabilité, nous avons vérifié que l'outil est en mesure de fournir des résultats comparables entre deux passations à des temps différents (ceci assurant que les résultats obtenus ne sont pas l'effet du hasard).

1. Méthode

Les participants. La validation psychométrique du test s'est effectuée sur deux échantillons. Le premier échantillon est composé de 127 élèves de maternelle recrutés dans des écoles de la région lyonnaise (France) : 100 enfants sont issus d'écoles membres d'un Réseau d'Éducation Prioritaire (REP) (57 filles et 43 garçons avec un âge moyen de 5,6 ans et 0,2 d'écart-type) et 27 enfants sont issus d'une école favorisée (16 filles et 11 garçons avec un âge moyen de 5,8 ans et 0,2 d'écart-type). Cet échantillon a été utilisé pour mesurer la validité concomitante du test. Le second échantillon est un sous-ensemble du premier. Les enfants des écoles REP ont été recrutés à nouveau pour l'évaluation re-test et seuls 91 élèves ont pu participer. Cet échantillon a été utilisé pour mesurer la fiabilité du test.

Mesures. Pour évaluer la validité concomitante du test ENUDIT 2, nous l'avons comparé au sous-test Applied Problems de la batterie de tests Woodcock-Johnson III (WJ-III) (2001). Ce sous-test, qui a été traduit en français, évalue des connaissances mathématiques de l'école primaire et secondaire. Les premiers items font notamment appel à des concepts de base (par exemple, dénombrer, effectuer des additions et des soustractions simples). Le test n'est pas chronométré et se compose de 63 items de difficulté croissante. Après six erreurs consécutives, le test est interrompu. Ce test a été choisi parce qu'il est considéré comme un test établi et valide des connaissances globales en mathématiques, comme le montre sa large utilisation dans les études sur les connaissances mathématiques précoces (Blair et al., 2016 ; Espy et al., 2004 ; Gormley Jr et al., 2008 ; Lillard et al., 2017).

Procédure générale. Les participants ont été évalués avec le sous-test Applied Problems du WJ-III et avec le test ENUDIT 2. L'ordre dans lequel le WJ-III et l'ENUDIT 2 ont été administrés a été randomisé d'un enfant à l'autre. Les enfants ont été testés individuellement dans une pièce calme et isolée de leur école. Aucun feedback n'a été donné aux participants, que ce soit pendant ou après les tests. Chaque session de test a duré en moyenne 25 minutes (comprenant les deux tests et des pauses).

Outils d'analyse statistique. La validité concomitante de l'ENUDIT 2 a été mesurée sur l'échantillon 1, en comparant le score global de l'ENUDIT 2 avec le score obtenu au sous-test du WJ-III, à l'aide de corrélations de Pearson indépendantes. La fiabilité de l'ENUDIT 2 a été mesurée au sein de l'échantillon 2. Nous avons évalué la force de la relation entre les scores totaux obtenus lors des deux administrations du test à deux périodes différentes, à l'aide de corrélations de Pearson.

2. Analyses descriptives et qualitatives

Les données de 5 participants du premier échantillon et de 12 participants du second échantillon ont été retirées des analyses en raison de l'absence de résultats complets. Le premier échantillon comporte donc 122 participants et le second échantillon 79 participants.

Le tableau 3 présente les moyennes et les écarts types, pour chaque tâche du test ENUDIT 2. Le score de chaque tâche a été ramené à 1.

Tableau 4 – Statistiques descriptives pour toutes les tâches du test ENUDIT 2

	Partie A - Cardinal					Partie B - Ordinal					Partie C - Décontextualisé					
Tâches	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5	C0	C3	C4	C5a	C5b	C5c
Moyenne	0.85	0.81	0.85	0.55	0.32	0.77	0.77	0.86	0.49	0.22	0.49	0.58	0.74	0.51	0.17	0.26
Écart-type	0.2	0.27	0.2	0.39	0.32	0.35	0.28	0.21	0.41	0.29	0.37	0.29	0.29	0.42	0.3	0.38

Ces résultats peuvent être analysés sous plusieurs dimensions. Tout d'abord, nous remarquons des patterns de réponses similaires pour les tâches de la partie A et de la partie B : les tâches relevant de coder, décoder et comparer (A1-A2-A3, B1-B2-B3) sont réussies à plus de 75 % ; les tâches d'association (A4 et B4) sont moins bien réussies (environ 50 %) et les tâches d'anticipation (A5 et B5) sont très peu réussies (32 % et 22 % respectivement). Le moindre taux de réussite pour les tâches d'association et d'anticipation peut s'expliquer par leur nature : ce sont des tâches complexes qui nécessitent la mobilisation et l'articulation de plusieurs techniques et technologies. Nous pouvons également constater que les tâches de la partie C sont globalement moins bien réussies que celles des parties A et B, en particulier les tâches de calcul (C5). Ceci est cohérent avec l'enseignement reçu par les élèves, qui se concentre sur les usages cardinal et ordinal du nombre à l'école maternelle. Enfin, nous pouvons remarquer que les tâches d'anticipation d'une quantité (A5) et d'une position (B5) sont moins bien réussies que celles d'addition (C5a). Étant donné que les problèmes sont proposés à l'oral

et sans matériel manipulable, nous faisons l'hypothèse que la compréhension du problème, sa représentation et la recherche d'une démarche de résolution peuvent expliquer cette différence de réussite.

3. *Analyse de la validité concomitante*

La validité concomitante du test ENUDIT 2 a été évaluée en mesurant le degré de corrélation entre les scores totaux de deux tests : ENUDIT 2 et le sous-test Applied Problems du WJ-III. La corrélation de Pearson est significative et forte ($r = 0,73$, $p < 0,001$) (voir figure 1a). Cette mesure indique que les élèves les plus performants à l'ENUDIT 2 sont aussi ceux qui sont les plus performants au sous-test du WJ-III. Ainsi, le test a une excellente validité concomitante et son score composite peut être considéré comme une mesure globale des connaissances d'un élève sur le nombre au moins aussi bonne que le sous-test du WJ-III, qui est largement utilisé dans la littérature internationale.

4. *Analyse de la fiabilité*

La fiabilité du test ENUDIT 2 a été mesurée sur l'échantillon 2, c'est-à-dire les participants pour lesquels nous disposons de deux passations (l'une en février 2023 et l'autre en juin 2023). Nous avons comparé les deux scores totaux pour chaque participant ($N=79$). Le coefficient de corrélation de Pearson est significatif et fort ($r = 0,686$, $p < 0,001$) (voir figure 1b). Il indique ainsi que les élèves les plus performants à l'ENUDIT 2 à la première passation l'étaient également à la seconde passation. Ainsi le test a une bonne fiabilité test-retest.

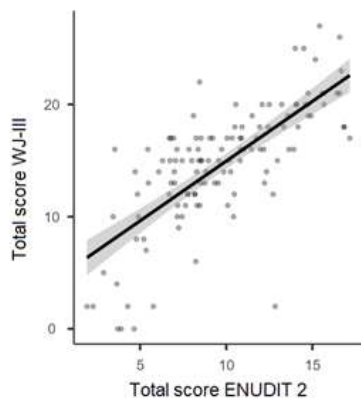


Figure 1a – Corrélation entre les scores totaux de l'ENUDIT 2 et des sous-tests du WJ-III ($N=122$)

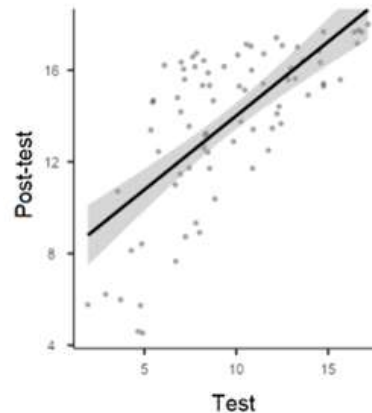


Figure 1b – Corrélation entre les deux scores du test et re-test de l'ENUDIT 2 ($N=79$)

V. CONCLUSION

Nous retenons plusieurs résultats de notre travail conjoint entre chercheurs en statistique, didactique et cognition. Le premier est l'apport des outils didactiques pour concevoir des tâches permettant d'identifier les techniques mobilisées par l'élève. La portée d'une technique permet ainsi de s'assurer, grâce au choix des valeurs de certaines variables, de l'utilisation par l'élève d'une et une seule technique pour réussir la tâche proposée. Ce travail est essentiel dans une optique d'évaluer précisément les connaissances mobilisées par les élèves. Le second résultat de notre collaboration est le recensement et la structuration des différentes techniques pour chaque type de tâches, en se référant à des travaux tant en cognition numérique qu'en didactique des mathématiques. Le troisième résultat est la validation psychométrique de l'ENUDIT 2 : il a une excellente validité concomitante et une

excellente fiabilité dans le temps. Nous obtenons ainsi un test qui répond au besoin des deux communautés : un test avec des données psychométriques, permettant d'effectuer des analyses statistiques et des analyses qualitatives fines des techniques et technologies mobilisées par les élèves. Par rapport au WJ-III qui se concentre sur le dénombrement, le transcodage et la résolution de problèmes sur des quantités, l'ENUDIT 2 permet ainsi de décrire de manière exhaustive et détaillée les connaissances des élèves sur la construction du nombre dans ses trois usages (cardinal, ordinal et décontextualisé) et pour chaque type de tâches (coder, décoder, associer, comparer, anticiper). Nous poursuivons actuellement nos réflexions, d'une part en affinant le modèle de connaissances du nombre en précisant davantage les technologies associées aux techniques, et d'autre part en cherchant à valider ce modèle didactique par des analyses confirmatoires et multidimensionnelles.

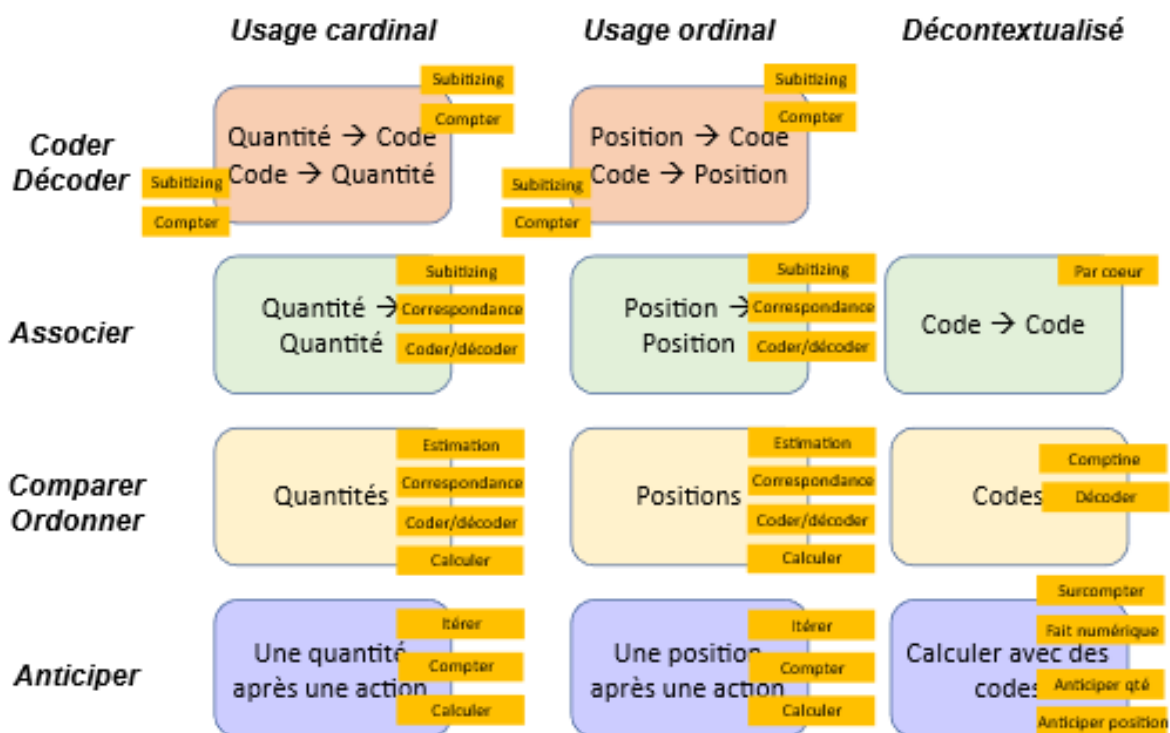
RÉFÉRENCES

- Blair, C., McKinnon, R. D. et Family Life Project Investigators. (2016). Moderating effects of executive functions and the teacher–child relationship on the development of mathematics ability in kindergarten. *Learning and Instruction*, 41, 85-93. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.10.001>
- Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Briand, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 41-76.
- Cariat, A. et Margolinas, C. (2015). Le nombre comme mémoire de la position. Dans A. Bessot, C. Margolinas et L. V. Tien (dir.), *Des mathématiques à l'école maternelle* (p. 63-70). École Normale Supérieure Centrale d'Ho Chi Minh-ville. <https://hal.science/hal-01221895>
- Chaachoua, H. et Bessot, A. (2016). *Introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique* [Communication]. 5^e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique, Castro-Urdiales, Espagne.
- Chevallard, Y. (1989, 26 juin). *Le concept de rapport au savoir: rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel* [Communication]. Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Université Joseph Fourier, Grenoble 1..
- Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (dir.), *Actes de l'université d'été de la Rochelle, 4-11 juillet 1998* (p. 91-118). IREM de Clermont-Ferrand.
- Clements, D. H. (1999). Subitizing : What is it ? Why teach it? *Teaching Children Mathematics*, 5(7), 400-405.
- Croset, M.-C. et Gardes, M.-L. (2019). Une comparaison praxéologique pour interroger l'enseignement du nombre dans l'institution Montessori. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 39(1), 51-96.
- Croset, M.-C. et Gardes, M.-L. (2020). Une carte des connaissances pour la construction du nombre en maternelle. *Revue de Mathématiques pour l'École*, 233, 117-127. <https://doi.org/10.26034/vd.rm.2020.1742>
- Dehaene, S. (2008). Psychologie cognitive expérimentale. *L'annuaire du Collège de France. Cours et travaux*, 108, 277-301.

- Dehaene, S. (2018). *Apprendre ! Les talents du cerveau, le défi des machines*. Odile Jacob.
- Espy, K. A., McDiarmid, M. M., Cwik, M. F., Stalets, M. M., Hamby, A. et Senn, T. E. (2004). The contribution of executive functions to emergent mathematic skills in preschool children. *Developmental Neuropsychology*, 26(1), 465-486.
- Gelman, R., Gallistel, C. R. et Gelman, R. (2009). *The child's understanding of number*. Harvard University Press.
- Gormley, W. T. Jr, Phillips, D. et Gayer, T. (2008). Preschool programs can boost school readiness. *Science*, 320(5884), 1723-1724.
- Halberda, J. et Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the « number sense » : The approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, 44(5), 1457-1465. <https://doi.org/10.1037/a0012682>
- Lillard, A., Heise, M., Richey, E., Tong, X., Hart, A. et Bray, P. (2017). Montessori preschool elevates and equalizes child outcomes: A longitudinal study. *Frontiers in Psychology*, 8, Article 1783. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01783>
- Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S. et Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, 116(1), 33-41. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2010.03.012>
- Woodcock, R. W., McGrew, K. S. et Mather, N. (2001). *Woodcock-Johnson tests of achievement*. Riverside Publishing.
- Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, 358(6389), 749-750. <https://doi.org/10.1038/358749a0>

ANNEXE 1.

UN MODÈLE DE CONNAISSANCES EN JEU LORS DE LA CONSTRUCTION DU CONCEPT DE NOMBRE



INTERROGATIONS DIDACTIQUES À PROPOS DE LA LIGNE NUMÉRIQUE MENTALE

| FANJAT* JULIETTE ET RODITI** ÉRIC

Résumé | Depuis quelques années, la ligne numérique mentale a fait son apparition dans l'institution scolaire française. Cette communication propose d'interroger la transposition d'un objet de la psychologie cognitive en un objet d'enseignement ; notamment, elle montre en quoi la considération d'un point de vue didactique permet de compléter les protocoles issus de la psychologie cognitive afin d'intégrer l'activité mathématique nécessaire à la conceptualisation des nombres entiers naturels.

Mots-clés : ligne numérique mentale, psychologie cognitive, nombres entiers naturels, école maternelle, effet SNARC

Abstract | In recent years, the mental number line has been introduced into the French educational system. This paper examines the transposition of an object from cognitive psychology into a pedagogical object. In particular, it demonstrates how a didactic perspective can be used to supplement protocols derived from cognitive psychology in order to integrate the mathematical activities necessary for the conceptualisation of natural numbers.

Keywords: mental number line, cognitive psychology, natural numbers, preschool, SNARC effect

I. INTRODUCTION

Depuis sa création en tant que champ scientifique, la didactique des mathématiques partage des frontières poreuses avec la psychologie (Dorier, 2022) ; toutefois, ces deux disciplines peinent aujourd'hui à dialoguer. En effet, la didactique produit peu de travaux spécifiques permettant de repenser les questions d'enseignement et d'apprentissage à l'aune des résultats récents de la psychologie cognitive ; inversement, les études de psychologie cognitive ne prennent pas nécessairement en compte la littérature scientifique didactique (Gardes et al., 2021 ; Roditi, 2023).

En nous nous intéressant particulièrement à l'enseignement et à l'apprentissage des nombres entiers, nous présentons une interrogation didactique à propos d'un objet issu de la psychologie cognitive. Plus précisément, nous proposons d'interroger la ligne numérique mentale et, plus spécifiquement, l'orientation de cette représentation spatiale des nombres.

Après avoir montré comment l'institution scolaire française a progressivement pris en compte puis intégré les résultats issus de la psychologie cognitive, nous résumons les principales propriétés de la ligne numérique mentale. Nous introduisons ensuite une réflexion sur les protocoles expérimentaux mobilisés par la psychologie cognitive qui conduisent à ces propriétés pour enfin proposer une méthodologie d'étude de l'orientation de la représentation spatiale des nombres entiers ancrée en didactique.

* Université Paris Cité, EDA, F-75006 Paris – France – juliette.fanjat@u-paris.fr

** Université Paris Cité, EDA, F-75006 Paris – France – eric.roditi@u-paris.fr

II. DES ACTUALITÉS CONVERGENTES ENTRE RECHERCHE EN PSYCHOLOGIE COGNITIVE ET INSTITUTION SCOLAIRE FRANÇAISE

1. *L'acquisition des nombres entiers : de nouveaux travaux en psychologie cognitive*

Dans les années 1980 et 1990, les travaux des neuropsychologues Michael McCloskey et Stanislas Dehaene et l'amélioration des techniques d'imagerie médicale (telle que l'IRM fonctionnelle) renouvellent, dans le champ de la psychologie cognitive, la modélisation de la cognition numérique (LeFevre, 2016 ; Gardes et al., 2021). Aujourd'hui, de nombreuses recherches portent sur la description du développement des compétences numériques des enfants (dont la recherche de compétences précoces ou de variables prédictrices des performances ultérieures) ou sur des interventions auprès d'enfants en difficulté d'apprentissage (pour une recension récente, voir, par exemple, Viarouge, 2020, ou Fayol et Fanjat, 2024).

Ces recherches ont progressivement été prises en compte par l'institution scolaire française et portées à la connaissance des enseignants par différents moyens. Ainsi, en 2018, le Conseil scientifique de l'Éducation nationale (Csen) est créé. Présidé par Stanislas Dehaene, il se donne pour mission de « [faire] la synthèse des recherches et des expérimentations existantes et [de] les diffuse[r] » (2023) : conférences, ressources pédagogiques, etc. Grâce à un groupe de travail dédié, le Csen produit entre autres des ressources liées à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques (voir, par exemple, Lubineau et al., 2022, ou Dehaene et al., 2023).

2. *Un nouvel objet d'évaluation et d'enseignement : la ligne numérique*

En 2018, les élèves de cours préparatoire (CP) sont évalués sur leur capacité à « placer un nombre sur une ligne numérique » (MEN, 2019, p. 2), notion alors absente des programmes scolaires de maternelle (Dgesco, 2015). Des tâches de placement d'un nombre entier (compris entre 1 et 9) apparaissent dans les évaluations nationales de début d'année (MENJ, 2018). En 2022, la tâche d'évaluation change (Figure 1) : la droite est alors graduée d'unité en unité de 0 à 10, permettant ainsi une résolution de la tâche par seul comptage des graduations (MENJ, 2022).

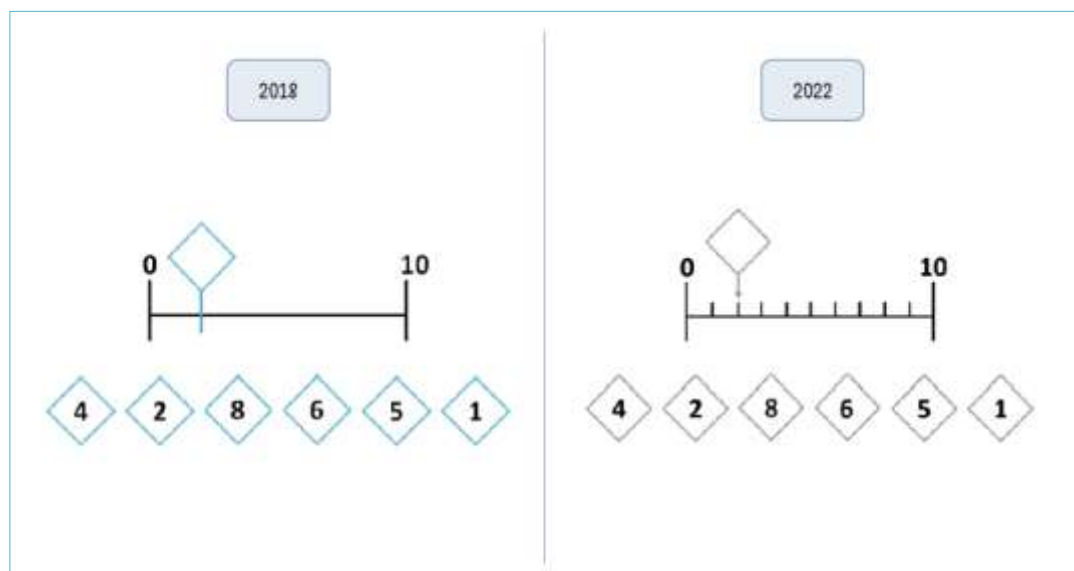


Figure 1 – Items issus des évaluations nationales de début de cours préparatoire. D'après MENJ, 2018 et MENJ, 2022

La même année, le Csen consacre une note à la « ligne numérique ». Ils y mentionnent explicitement la « ligne numérique mentale », objet de la psychologie construit pour étudier la cognition mathématique qui désigne « l'idée selon laquelle les quantités et les grandeurs (ou encore les magnitudes) peuvent être représentées selon une ligne mentale orientée de gauche à droite » (Fayol, 2015, p. 44) avec une compression progressive des nombres. Dans sa note, le Csen indique que la ligne numérique constitue « un outil essentiel pour faciliter et révéler la compréhension de l'arithmétique » (Dehaene et al., 2022, p. 2) et, à ce titre, justifie son recours dans les évaluations nationales de début de CP et en classe.

En 2024, au moment où nous rédigeons ces lignes, le terme « ligne numérique » fait son entrée dans les programmes scolaires de mathématiques (encore à l'état de projet) du cycle 1. Il y est en effet indiqué que « la bande numérique préfigure la ligne numérique. [...] Le fait qu'un nombre soit perçu à la fois comme une quantité et comme une position [...] aide à sa compréhension » (Dgesco, 2024).

Ainsi, les recherches récentes de psychologie cognitive ont apporté de nouveaux savoirs quant aux compétences qu'elles qualifient de numériques des enfants et ont influencé les choix de l'institution scolaire (voir notamment Dgesco, 2023) – en témoigne notamment l'exemple de la ligne numérique mentale.

III. LA LIGNE NUMÉRIQUE MENTALE : PROPRIÉTÉS D'UN OBJET DE LA PSYCHOLOGIE COGNITIVE

Ces développements scientifiques et institutionnels récents interrogent la didactique des mathématiques : la ligne numérique mentale, objet issu de la psychologie cognitive et non des mathématiques, doit-elle être transposée en un objet d'enseignement des mathématiques ? Le cas échéant, comment pourrait-elle l'être ? Afin de questionner cette transposition, il est d'abord nécessaire de revenir sur les connaissances produites par le champ scientifique de la psychologie cognitive à propos de la ligne numérique mentale.

L'idée d'une ligne numérique mentale n'est pas récente en psychologie cognitive ; toutefois, son exploration systématique débute dans les années 2000 – les épreuves consistant alors à placer des nombres sur une droite ou un segment borné (souvent de 0 à 100 ou de 0 à 1 000) (Fayol, 2015). Les expérimentations menées sur cette représentation mentale ont notamment permis d'en définir deux caractéristiques principales, déjà mentionnées ci-dessus : la compression progressive des grands nombres et l'orientation de gauche à droite.

- **Compression progressive des grands nombres** : les travaux de psychologie ont mis en évidence un effet de taille dans la comparaison des nombres entiers. Ce dernier désigne le fait qu'« [à] distance constante, la comparaison de 125 et 126 est plus difficile que celle de 25 et 26 ou encore de 5 et 6 » (Fayol, 2015, p. 3). Afin de rendre compte de cet effet, les chercheurs ont modélisé la ligne numérique mentale avec une compression progressive des grands nombres : ainsi, la distance perçue entre 5 et 6 est supérieure à la distance perçue entre 125 et 126¹.

Cette propriété de la ligne numérique mentale la distingue d'un objet mathématique proche, la droite numérique (accompagnée de sa représentation sémiotique la droite graduée) : sur celle-ci, l'espacement

¹ Cette compression évolue toutefois avec l'âge : les expérimentations ont montré que la représentation mentale des nombres des enfants se linéarise (*écart constant entre deux nombres entiers consécutifs*) progressivement (Siegler et Booth, 2004).

entre deux nombres entiers consécutifs quelconques est constant. Ainsi, nous proposons de distinguer la *ligne numérique mentale*, objet de la psychologie cognitive, la *droite numérique*, objet des mathématiques, et la *droite graduée*, représentation sémiotique engagée dans les activités mathématiques comme dans les processus d'enseignement et d'apprentissage (Duval, 2018)².

- **Orientation de gauche à droite** : au début des années 1990, des neuroscientifiques cherchent à étudier le lien entre parité des nombres et latéralisation : une partie de la population doit donner la réponse « pair » avec la main droite et « impair » avec la main gauche tandis qu'une autre partie doit faire le contraire. Les chercheurs se rendent alors compte que, quelle que soit la parité des nombres en jeu :

Les réponses de la main gauche étaient plus rapides que celles de la main droite pour les petits nombres, et la réciproque était vraie pour les grands nombres [...]. Ce résultat peut être décrit comme une double association ou préférence : **« grand » est associé avec « droite » et « petit » avec « gauche »** (Dehaene et al., 1993, p. 379-380 – c'est nous qui traduisons et qui soulignons).

Cet effet, intitulé SNARC (*Spatial-Numerical Association of Response Code*), conduit les neuroscientifiques à modéliser la ligne numérique mentale en la dotant d'une orientation : les petits nombres positifs se situent sur sa gauche et les grands nombres sur sa droite.

Les recherches menées sur l'effet SNARC interrogent principalement son universalité. La question de son origine reste aujourd'hui en débat (voir par exemple Pitt et al., 2023 pour une discussion sur son innéité). D'autres travaux ont montré que sa manifestation était dépendante du sens de lecture de la langue de l'individu : ainsi, Shaki et al. (2009) montrent que, pour un même protocole, des Canadiens témoignent d'un effet SNARC (lecture de gauche à droite et orientation gauche – droite) tandis que des Palestiniens témoignent d'un effet SNARC dit *inversé* (lecture de droite à gauche et orientation droite – gauche).

IV. L'EFFET SNARC : EXEMPLE D'UNE INTERROGATION DIDACTIQUE À PROPOS D'UN RÉSULTAT ISSU DE LA PSYCHOLOGIE COGNITIVE

Cet effet SNARC a ainsi fait l'objet de nombreux travaux en psychologie cognitive. Si ces derniers ont permis d'en établir plusieurs caractéristiques, les protocoles expérimentaux mis en œuvre témoignent d'un certain éloignement d'une activité mathématique mobilisant le concept de nombre, de l'apprentissage de ce concept et donc de la didactique des mathématiques. Parmi les deux propriétés de la ligne numérique mentale, c'est son orientation (effet SNARC) que nous nous proposons ici d'interroger avec un point de vue didactique.

1. Des protocoles de psychologie cognitive distants de la didactique des mathématiques

Les études portant sur l'effet SNARC s'inscrivent avant tout dans le champ scientifique de la psychologie cognitive. Leurs protocoles expérimentaux convoquent des tâches sans finalité numérique : les nombres n'y sont pas pensés comme outils pour résoudre des problèmes³. Aussi les méthodologies développées au cours de ces recherches ne permettent-elles pas de répondre à la question suivante : l'effet SNARC, qui détermine l'orientation de la ligne numérique mentale,

² Pour les auteurs des programmes scolaires cités ci-dessus, le terme « ligne numérique » semble synonyme de « droite numérique ».

³ Par exemple, dans les expériences de Dehaene et al. (1993) et de Shaki et al. (2009) précédemment citées, les individus doivent appuyer sur des boutons en fonction de la parité des nombres affichés sur un écran.

détermine-t-il en même temps l'orientation de l'objet mathématique qu'est la droite numérique – notamment lorsqu'elle est mobilisée pour résoudre une tâche finalisée par un objectif mathématique ?

La réponse à cette question nous semble d'autant plus importante que la place accordée actuellement par l'institution scolaire à la ligne numérique mentale met cet objet au premier plan des objectifs à atteindre à la fin de l'école maternelle. Poursuivant une réflexion déjà initiée par Barallobres (2018), nous percevons en effet une tension entre deux perspectives : d'une part enseigner la « ligne numérique » à l'école en vue de développer la ligne numérique mentale des élèves, d'autre part enseigner la droite numérique et sa représentation sémiotique (la droite graduée) pour que les élèves conceptualisent le nombre entier, notamment à travers ses propriétés articulant ordinalité et cardinalité. Se pose ainsi plus largement la question du rôle accordé à l'école : s'agit-il pour elle de proposer des tâches sans motivation mathématique pour favoriser le développement de capacités innées mais limitées de cognition numérique de l'enfant, ou plutôt de transmettre des savoirs et pratiques mathématiques socialement partagées – en recourant donc à des tâches finalisées ?

2. *Étude didactique de l'orientation de la représentation spatiale des nombres*

Nous constatons que certaines tâches évaluatives conçues par le Csen, comme celles du placement approximatif des nombres sur un segment de droite non gradué (Figure 1) s'apparentent à des protocoles expérimentaux de la psychologie cognitive, et font intervenir uniquement des nombres en dehors de toute finalité. Mélanie Guenais, qui participe au même projet spécial (voir son texte dans les actes du colloque) effectue le même constat pour plusieurs autres items de cette évaluation nationale. Des enseignements prodigués par des enseignants pour faire progresser les élèves à ces évaluations s'inscrivent dans la première perspective de développement des capacités cérébrales. Or nous considérons que, d'un point de vue didactique, la seconde perspective qui vise à transmettre des savoirs et pratiques socialement partagées ne peut être évacuée.

Revenons à notre expérimentation. Lorsque des objets sont alignés, leur attribuer un numéro est une tâche incluse dans la tâche de comptage visant à effectuer un dénombrement de ces objets. Les élèves numérotent-ils ou comptent-ils des objets préférentiellement de gauche à droite lorsque ces derniers sont alignés, y compris quand le choix du sens du numérotage ou comptage n'est pas neutre quant à son efficacité ? Nous nous proposons ici, avec un point de vue didactique, d'interroger la préférence éventuellement accordée à un sens plutôt qu'à un autre dans une activité de comptage numérotage d'objets alignés, mobilisant la composante ordinale des nombres entiers, et pour laquelle l'efficacité du comptage n'est pas indépendant du sens choisi pour l'effectuer. Il s'agit ainsi de savoir si, dans ces conditions où les élèves comptent avec un objectif et un souci d'efficacité, ils privilégient l'une ou l'autre des orientations. Il s'agit, autrement dit, d'interroger le lien entre l'orientation éventuelle d'une ligne d'objets à compter et l'orientation supposée de la ligne numérique mentale⁴.

Pour ce faire, nous envisageons un protocole subdivisé en trois scénarios (chacun suivant une trame commune, Figure 2) :

- **Étape 1** : l'expérimentateur dispose deux rangées de gobelets parfaitement identiques : la première sur une table en face de lui (rangée 1, où tous les gobelets sauf un ont une graine

⁴ À notre connaissance, aucune étude de psychologie cognitive ne s'est interrogée sur l'existence d'un tel « principe d'efficacité ». Parmi les recherches visant à étudier l'existence d'un sens préférentiel dans le comptage d'objets alignés, certaines parviennent à des conclusions contradictoires : ainsi, étudiant des enfants de moins de 6 ans effectuant une tâche de dénombrement d'une ligne d'objets, Opfer et Thomson (2006) rapportent un sens préférentiel de comptage (de la gauche vers la droite) tandis que Knudsen et al. (2014) n'observent pas de différence significative.

à l'intérieur), la seconde sur une autre table parallèle à la première (rangée 2, où tous les gobelets sont recouverts d'un couvercle, et où tous sauf un sont vides) :

- Variante G : l'objet est caché sous l'un des gobelets les plus à gauche – l'orientation de gauche à droite pour le comptage est alors la plus favorable car il y a moins de gobelets à compter pour identifier la position de l'objet ;
- Variante D : l'objet est caché sous l'un des gobelets les plus à droite – l'orientation de gauche à droite est alors la moins favorable ;
- Variante M : l'objet est caché sous le gobelet central ou d'un gobelet proche de ce dernier (c'est-à-dire à peu près au milieu) – l'orientation de gauche à droite est alors plutôt neutre quant à l'efficacité de la réalisation de la tâche ;
- **Étape 2 :** l'expérimentateur montre à l'élève l'unique gobelet vide de la rangée 1 et lui annonce que la graine « coquaine » est allée se cacher dans la rangée 2, « dans le gobelet qui a la même place que le gobelet vide ».
- **Étape 3 :** l'élève doit alors chercher le gobelet où est allée se cacher la graine « coquaine ».

Nous relevons ensuite le sens de comptage choisi par l'élève pour retrouver la position de la graine « coquaine ». Nous cherchons ainsi à savoir si les enfants témoignent d'un « principe d'efficacité » qui les conduirait à choisir le sens le plus efficace, c'est-à-dire celui où le nombre de gobelets à compter est le plus petit : si l'objet caché est situé plutôt à gauche, indiquer sa position à partir du repère à gauche – et si l'objet caché est situé plutôt à droite, décrire sa position à partir du repère à droite.

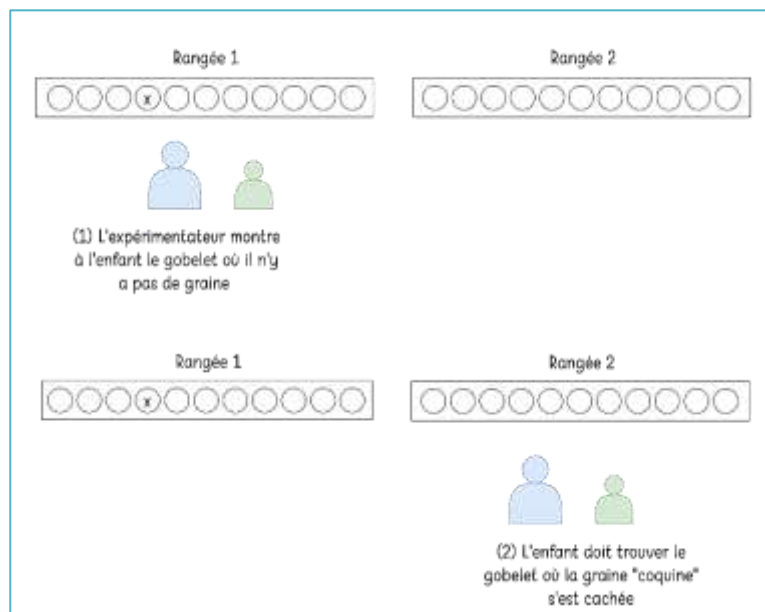


Figure 2 – Modélisation de l'expérimentation.

Nous faisons ainsi l'hypothèse que le sens du comptage mobilisé par les élèves pour résoudre des tâches mathématiques pourrait être déterminé par la finalité de la tâche (existence d'un « principe d'efficacité »).

Pour étudier cette hypothèse, nous prévoyons d'interroger des enfants scolarisés de la petite à la grande section de maternelle (de 3 à 6 ans) à l'école française.

Des traitements statistiques nous permettront ensuite d'analyser la significativité des différences potentiellement observées dans l'orientation choisie par les élèves pour résoudre les tâches proposées ;

le Tableau 1 ci-dessous résume ce que suggérerait chacun des résultats possibles, sachant que 1) pour la variante M, le sens du comptage n'apporte pas d'information sur le principe d'efficacité, et 2) l'absence de sens de comptage privilégié n'est compatible avec aucune hypothèse (sens du comptage issu de l'orientation de la ligne numérique mentale ou existence d'un principe d'efficacité).

Tableau 1 – Résultats possibles de l'expérimentation

Sens du comptage majoritairement observé	Gauche → Droite	Droite → Gauche
Variante G		
Lié à la mise en œuvre d'un « principe d'efficacité »	Oui	Non
Lié à l'orientation de la ligne numérique mentale	Oui	Non
Variante D		
Lié à la mise en œuvre d'un « principe d'efficacité »	Non	Oui
Lié à l'orientation de la ligne numérique mentale	Oui	Non
Variante M		
Lié à l'orientation de la ligne numérique mentale	Oui	Non

Note. Lecture : une orientation « gauche – droite » du comptage (orientation de la droite numérique mobilisée par les élèves) pour la variante D pourrait être lié à l'orientation de la ligne numérique mentale.

Notons que nous prévoyons également dans nos analyses de neutraliser trois variables pouvant influencer l'effet SNARC et le sens de comptage : la latéralisation de l'élève (Patro et al., 2015), son âge et le sens de lecture usuel de sa langue maternelle (Shaki et al., 2012).

V. CONCLUSION

L'expérimentation que nous venons de décrire n'avait pas encore été réalisée avant le colloque. Nous en avons présenté les premiers résultats lors de la conférence : les élèves comptent préférentiellement de gauche à droite, ceux qui argumentent ce choix évoquent une doxa (du type « c'est comme ça qu'on compte ») éventuellement associée à des prescriptions scolaires (du type « la maîtresse dit qu'on doit compter comme ça »). Nous ne pouvons écarter ici un effet « culturel » lié à l'orientation de la lecture de droite à gauche en français, ainsi qu'aux représentations usuelles de la bande numérique ou des frises chronologiques. Nous observons toutefois un comptage de droite à gauche préférentiel (statistiquement significatif) lorsque ce comptage est sensiblement plus efficace. Se repose donc la question : faut-il enseigner à compter de gauche à droite, ou à compter efficacement en tirant parti des propriétés des nombres en vue de les enseigner ?

RÉFÉRENCES

- Barallobres, G. (2018). Réflexions sur les liens entre neurosciences, mathématiques et éducation. *McGill Journal of Education*, 53(1), 169-188. <https://doi.org/10.7202/1056288ar>
- Conseil scientifique de l'Éducation nationale (Csen) (2023). *Le Conseil scientifique de l'Éducation nationale au service de la communauté éducative*. <https://www.education.gouv.fr/le-conseil-scientifique-de-l-education-nationale-au-service-de-la-communaute-educative-309492>
- Dehaene, S., Bossini, S. et Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122(3), 371-396. <https://doi.org/10.1037/0096-3445.122.3.371>

- Dehaene, S., Potier-Watkins, C. et Cauté, M. (2023). *Une inquiétante mécompréhension des nombres et surtout des fractions à l'entrée en sixième*. https://www.reseau-canope.fr/fileadmin/user_upload/Projets/conseil_scientifique_education_nationale/Note_alerte_CSEN_02_V2.pdf
- Dehaene, S., Potier-Watkins, C., He, C. X. et Lubineau, M. (2022). *Évaluer la compréhension des nombres décimaux et des fractions : le test de la ligne numérique*. https://www.reseau-canope.fr/fileadmin/user_upload/Projets/conseil_scientifique_education_nationale/Note_comprehension_nombres_decimaux_fractions_CSEN.pdf
- Direction générale de l'enseignement scolaire [Dgescs]. (2015). *Programmes d'enseignement de l'école maternelle*.
- Direction générale de l'enseignement scolaire [Dgescs]. (2023). *Les guides fondamentaux pour enseigner. La construction du nombre à l'école maternelle*. <https://eduscol.education.fr/document/50924/download?attachment>
- Direction générale de l'enseignement scolaire [Dgescs]. (2024). *Programmes d'enseignement de français et de mathématiques de l'école maternelle (cycle 1) et du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2)*.
- Dorier, J.-L. (2022). L'héritage de Piaget en didactique des mathématiques. *ANAE : Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, (176), 45-52.
- Duval, R. (2018). La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée. Dans J. Baillé (dir.), *Du mot au concept – Conversion* (p. 9-45). Presses universitaires de renoble.
- Fayol, M. (2015). *Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. Un bilan scientifique*. Cnesco. <https://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Bilan-de-la-recherche.pdf>
- Fayol, M. et Fanjat, J. (2024). *L'acquisition des nombres entiers. De la description de son évolution aux interventions*. Confemen et Cnesco-Cnam. https://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2024/07/Confemen-Cnesco_CC-maths-primaire_FAYOL-FANJAT.pdf
- Gardes, M.-L., Croset, M.-C., Courtier, P. et Prado, J. (2021). Comment la didactique des mathématiques peut-elle informer l'étude de la cognition numérique ? L'exemple d'une étude collaborative autour de la pédagogie Montessori en maternelle. *Raisons éducatives*, 25, 237-259. <https://doi.org/10.3917/raised.025.0237>
- Knudsen, B., Fischer, M. H. et Aschersleben, G. (2015). Development of spatial preferences for counting and picture naming. *Psychological Research*, 79(6), 939-949. <https://doi.org/10.1007/s00426-014-0623-z>
- LeFevre, J.-A. (2016). Numerical cognition: Adding it up. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 70(1), 3-11. <https://doi.org/10.1037/cep0000062>
- Lubineau, M., Dehaene, S., Potier-Watkins, C., Gurgand, M., Pawlik, A., Bévalot, C. et Viltard, N. (2022). Distribuer des jeux aux élèves avant l'été améliore-t-il leurs performances en maths ? Une expérimentation randomisée contrôlée. *Note du CSEN*, (7), 1-7. https://www.reseau-canope.fr/fileadmin/user_upload/Projets/conseil_scientifique_education_nationale/Note_CSEN_2022_07.pdf
- Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse [MENJ]. (2018). *Évaluations repères 2018 de début de CP : premiers résultats*. <https://www.education.gouv.fr/evaluations-reperes-2018-de-debut-de-cp-premiers-resultats-7640>
- Ministère de l'Éducation nationale de France [MEN]. (2019). *Évaluations repères CP et CE1 2019*. Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance [DEPP]. <https://www.education.gouv.fr/resultats-des-evaluations-reperes-cp-et-ce1-2019-1025>

- Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse [MENJ]. (2022). *Évaluations 2022 : repère CP, CE1 – premiers résultats*. <https://www.education.gouv.fr/evaluations-2022-reperes-cp-ce1-premiers-resultats-343393>
- Opfer, J. E. et Thompson, C. A. (2006, 29 juillet). *Even early representations of numerical magnitude are spatially organized: Evidence for a directional magnitude bias in pre-reading preschoolers* [Communication]. 28th Annual Meeting of the Cognitive Science Society, Vancouver, Canada.
- Patro, K., Nuerk, H.-C. et Cress, U. (2015). Does your body count? Embodied influences on the preferred counting direction of preschoolers. *Journal of Cognitive Psychology*, 27(4), 413-425. <https://doi.org/10.1080/20445911.2015.1008005>
- Pitt, B., Casasanto, D. et Piantadosi, S. T. (2023). No clear evidence for an innate left-to-right mental number line. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 120(28), Article e2306099120. <https://doi.org/10.1073/pnas.2306099120>
- Roditi, É. (2023). Les neurosciences cognitives et l'enseignement des nombres à l'école – Réflexions didactiques. *Grand N*, (112), 5-24.
- Shaki, S., Fischer, M. H. et Göbel, S. M. (2012). Direction counts: A comparative study of spatially directional counting biases in cultures with different reading directions. *Journal of Experimental Child Psychology*, 112(2), 275-281. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2011.12.005>
- Shaki, S., Fischer, M. H. et Petrusic, W. M. (2009). Reading habits for both words and numbers contribute to the SNARC effect. *Psychonomic Bulletin & Review*, 16(2), 328-331. <https://doi.org/10.3758/PBR.16.2.328>
- Siegler, R. S. et Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75(2), 428-444. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x>
- Viarouge, A. (2020). Le nombre et l'arithmétique. Dans N. Poirel (dir.), *Neurosciences cognitives et développementales* (p. 160-193). De Boeck Supérieur.

COMPTER, C'EST PRENDRE EN COMPTE : LE DÉFI DE L'APPRENTISSAGE DE L'UNITÉ ET DE LA MULTIPLICITÉ POUR LES SCIENCES COGNITIVES

| SILVA* DAVID

Résumé | L'influence des neurosciences cognitives des mathématiques sur les pratiques et les politiques éducatives nécessite une analyse critique de la manière dont elles comprennent en général les nombres et la numération. Sur la base d'un examen de certaines critiques formulées à propos de ce domaine de recherche, nous soutenons qu'il existe une confusion conceptuelle entre la quantité et le nombre qui conduit à ce que toutes les connaissances relatives à la magnitude et à la pluralité soient comprises comme étant déjà médiatisées par les concepts d'unité numérique et de multiplicité des uns impliqués par la numération. Cela implique de présupposer comme déjà acquise une capacité numérique qui doit être constituée dans le processus d'enseignement.

Mots-clés : cognition mathématique, quantité et nombre, unité, enseignement du nombre

Abstract | The influence of cognitive neuroscience of mathematics on educational practices and policies requires a critical analysis of the way in which they generally understand numbers and numeration. Based on an examination of some of the criticisms levelled at this field of research, we argue that there is a conceptual confusion between quantity and number which leads to all knowledge relating to magnitude and plurality being understood as already mediated by the concepts of numerical unit and multiplicity of the ones involved in numeration. This implies presupposing as already acquired a numerical capacity that must be built up in the teaching process.

Keywords: Mathematical cognition, quantity and number, unit, teaching number

I. INTRODUCTION

Les résultats des neurosciences cognitives au sujet des mathématiques ont progressivement eu un impact sur la politique et la pratique de l'enseignement des mathématiques. Des concepts tels que la subitisation, le triple code et maintenant la ligne numérique mentale sont entrés dans le débat sur la manière d'enseigner les nombres et la numération, et ceci pas nécessairement en concordance avec les résultats antérieurs des sciences cognitives, et surtout de la didactique des mathématiques (Roditi, 2023).

Traditionnellement, l'apprentissage d'une conception du nombre indépendante des différents contextes numériques spécifiques était considéré comme une réalisation relativement tardive dans le développement mental des enfants. Piaget, par exemple, est allé jusqu'à affirmer que cette conception du nombre — qu'il appelle abstraite — n'apparaissait dans la plupart des cas, pas avant l'âge de 6 ou 7 ans (Piaget et Szeminska, 1997). Cette position a commencé à être remise en question par une série de recherches en psychologie du développement, en psychologie cognitive et en neurosciences qui ont commencé à postuler, dans un premier temps, l'existence de capacités numériques abstraites à un âge très précoce, et même, dans un second temps, leur caractère inné.

Parmi ces capacités, il y aurait un sens inné du nombre, précis pour les très petites quantités numériques et imprécis pour les quantités numériques plus importantes, qui serait le produit du développement phylogénétique de l'espèce humaine, voire partagé avec d'autres espèces animales, et qui serait indépendant du langage et de tout autre type de signe numérique. Cette capacité serait ancrée dans notre cerveau et générerait un système approximatif de représentation non symbolique des

* École des hautes études en sciences sociales – France – drsilval@uc.cl

nombres. Ce système serait disponible, par un processus de mappage, pour se relier à d'autres zones du cerveau (traitant du langage et d'autres modes de représentation), permettant ainsi : aux symboles numériques (mots, nombres) d'acquiescer leur signification, l'apprentissage du système de nombres et le développement de la pensée arithmétique.

Les résultats de ce type de recherches sur la perception innée des nombres ont un impact croissant sur la modification des pratiques d'enseignement des nombres. Une analyse correcte de ces pratiques ne semble pas prendre en compte un certain nombre de critiques qui ont été formulées à l'encontre de la perspective standard sur la cognition des nombres.

II. CRITIQUES DE LA MANIÈRE DONT LES NEUROSCIENCES COGNITIVES ABORDENT LE NOMBRE

Ces critiques proviennent des neurosciences elles-mêmes, des autres disciplines qui composent le vaste domaine des sciences cognitives, d'autres sciences et disciplines de la connaissance (histoire, philosophie), et parfois des mathématiques elles-mêmes.

1. *Critiques du domaine des neurosciences cognitives*

Leibovich et Ansari (2016), en analysant les preuves disponibles de l'hypothèse selon laquelle les symboles numériques acquiescent leur signification en étant mis en correspondance ou associés à un système antérieur de représentation non symbolique des nombres, concluent que ces preuves ne résolvent pas le problème de l'ancrage symbolique de la cognition numérique. Cela pour deux raisons principales :

1° Tout examen expérimental du système de représentation non symbolique du nombre implique le traitement cognitif à la fois de la numérosité d'une collection donnée et des variables contiguës ou adjacentes à cette numérosité. Si dans une expérimentation on présente, par exemple, des collections des ronds, ceux-ci ont nécessairement une taille moyenne, occupent une surface totale de la surface de représentation, ont une enveloppe convexe, une certaine densité, etc. Ces variables font partie de la grandeur de la collection, de sa magnitude, et parce qu'elles sont liées à la numérosité de la collection, elles ont été appelées « magnitude associée »¹ (Leibovich et al., 2017). Dans le monde réel, les variables de magnitude adjacentes à la numérosité sont souvent corrélées positivement ou négativement avec celle-ci². (Leibovich et Ansari, 2016).

Le point essentiel est qu'il est impossible de manipuler la numérosité d'une collection sans faire varier certaines des variables contiguës, et donc irréalisable de contrôler l'effet de toutes ces variables en même temps. Ainsi, face à une collection d'objets, il s'avère impossible de savoir si les résultats obtenus par les participants aux tâches de comparaison et d'estimation sont uniquement dus à la numérosité ou à d'autres variables adjacentes (Leibovich et Ansari, 2016).

2° Les variables de magnitude associées jouent un rôle important dans l'estimation du nombre d'éléments d'une collection. Lorsque ces variables contiguës sont congruentes avec la numérosité, la performance s'améliore ; sinon la performance est plus faible, affectant ainsi l'acuité du sens supposé non symbolique du nombre, acuité censée dépendre uniquement de la numérosité (Leibovich et Ansari,

¹ Traduction personnelle de « *continuous magnitudes* ».

² Ainsi, en principe, un plus grand nombre d'objets occupera une plus grande quantité d'espace et aura une densité plus élevée, de sorte que si l'on veut qu'ils occupent la même quantité d'espace total ou qu'ils aient la même densité, la taille moyenne de chaque rondelle doit être réduite.

2016). Cet impact des variables contiguës sur la capacité à identifier la numérosité d'une collection est également observé lors de l'apprentissage des symboles numériques.

Par conséquent, si nous prenons en compte les deux raisons mentionnées ci-dessus, le problème de l'ancrage symbolique dans la cognition numérique ne peut alors pas être résolu en supposant que les symboles numériques sont mis en correspondance avec un système non symbolique préexistant spécifique aux nombres. Au contraire, Leibovich, Ansaris et d'autres de ses collègues, soutiennent que :

In other words, to understand the meaning of a number and to understand that the same numerosity is preserved even if continuous variables change, it is necessary to have the ability to inhibit nonnumerical magnitudes when they do not correlate with numerosity (i.e., cognitive control) and to use continuous magnitudes as a cue of numerosity when numerical and continuous variables do correlate. We suggest that similar set of abilities might also be required when a child first learns to connect approximate nonsymbolic numerosities with exact symbolic representations. To understand that 6 apples and 6 watermelons correspond to the same symbolic representation, it is necessary to inhibit other properties of these items that usually correlate with numerosity, such as their size. (Leibovich et Ansari, p. 20)

2. Cognition sur les quantités, cognition sur les nombres

Rafael Núñez (2017) estime nécessaire de distinguer entre cognition de la quantité et cognition numérique. Il accepte que les humains et les autres espèces aient des capacités biologiquement acquises pour discriminer les quantités, mais il remet en question la vision largement acceptée de considérer ces aptitudes comme une capacité évolutive particulière pour le nombre et l'arithmétique. Il propose ainsi de réinterpréter les données de la recherche sur la subitisation, la discrimination des grandes quantités et d'autres capacités similaires comme « *quantical capacities* » biologiquement fondées (Núñez, 2021).

Ces capacités peuvent être développées par référence symbolique à travers de langage, mais cela ne conduit pas nécessairement au nombre — à une quantification symbolique exacte, relationnelle et utilisable avec précision — ni à la numération. Pour les « *numerical capacities* », des pratiques culturelles spécifiques (par exemple la comptabilité des marchandises) — soutenues par le langage, la référence symbolique, les artefacts matériels et, finalement, la technologie de l'écriture — sont nécessaires. Selon le modèle de Núñez (2017), des entités numériques de plus en plus élaborées menant à l'arithmétique et à des mathématiques de plus en plus sophistiquées nécessitent une instruction explicite et une enculturation de plus en plus longue et complexe.

La distinction entre cognition quantitative et cognition numérique nous semble particulièrement pertinente. Contrairement à certaines critiques sur la prétendue imprécision de ce que Núñez appelle « *quantical cognition* »³, nous considérons cette distinction tout à fait claire, elle est d'ailleurs largement documentée dans des disciplines telles que la linguistique, l'anthropologie, l'histoire des mathématiques et même dans les mathématiques elles-mêmes.

3. Le langage de la quantification

En linguistique, l'utilisation de termes numériques n'est considérée que comme un cas parmi d'autres de quantification, laquelle peut se produire aussi par le biais de mécanismes linguistiques non numériques qui permettent de tenir compte de la pluralité et de l'ampleur.

Dans le contexte francophone, Patrick Charaudeau a été l'un des premiers linguistes à étudier la quantification comme une question de grammaire à part entière (Rochel, 2000). Charaudeau (2006) propose un modèle d'analyse de l'opération de quantification en considérant la nature et la classe

³ Pour une explication détaillée de la signification et du pourquoi du terme *quantical* dans l'expression *quantical cognition*, voir le texte de Rafael Núñez : « *Chapter 1 - From quantical to numerical cognition: A crucial passage for understanding the nature of mathematics and its origins* » (2021), en particulier la page 13.

d'appartenance sémantiques des mots auxquels s'applique le degré de quantification ainsi que les modes de détermination de la quantité. Le tableau 1 illustre son modèle à travers quelques exemples ; il montre une partie des options possibles, mais ne constitue pas une synthèse complète des différentes possibilités descriptives et analytiques du modèle proposé.

Tableau 1 – *Types d'opérations de quantification*

		Intensité		Quantité	
		Processus	Propriétés	Êtres non dénombrables	Êtres dénombrables
Indéterminée				Je bois du lait	J'ai mangé des pommes
Nulle		Je ne mange pas/rien	Je bois le café pas sucré	Je ne bois pas de lait	Je n'ai pas mangé de pommes
Relative	Insuffisance	Je mange trop peu/peu/modérément	Je bois le café trop peu/pas assez/peu fort	Je bois très peu/peu de lait	J'ai mangé pas assez de/quelques pommes
	Adéquation	Je mange assez/suffisamment	Je bois le café assez fort	Je bois assez de lait	J'ai mangé suffisamment de pommes
	Excès	Je mange beaucoup/trop/en excès	Je bois le café bien/très/trop fort.	Je bois beaucoup/trop de lait	J'ai mangé beaucoup/trop de pommes
Totalisante			Je bois le café tout froid	Je bois tout le lait	J'ai mangé toutes les pommes
Déterminée					J'ai mangé une/deux/trois pomme(s)

Nous pouvons observer que la quantification est un vaste processus linguistique et que l'utilisation de termes numériques n'est qu'un cas parmi d'autres. Selon Charaudeau (2006), la quantité, par opposition à l'intensité, peut s'appliquer aux mots qui représentent un être :

- s'il s'agit d'un être dénombrable, il appartient à la classe du discontinu et peut être compté en multipliant l'unité de référence ;
- s'il s'agit d'un être non dénombrable, il appartient à la classe du continu et ne peut être compté, de sorte que l'opération de quantification consiste à amplifier la notion de référence.

Nous soulignons que c'est la prise en compte d'une unité de référence qui permet aux êtres dénombrables d'être précisément appréhendables par le nombre. Dans le cas des êtres continus, cela n'est en principe pas possible, à moins qu'ils ne soient dans des contenants qui, étant discrets, sont dénombrables et dont le nombre rend compte de la quantité continue (on peut penser par exemple à exprimer un volume d'eau en nombre de bouteilles : 3 bouteilles d'eau).

Quoi qu'il en soit, la quantité n'est pas nécessairement exacte, et les nombres permettent de la préciser. Cependant, les termes numériques, qui sont en principe précis et exacts en matière de quantification, peuvent également être utilisés de manière approximative, notamment en ce qui concerne la notion d'unité. Prenons l'exemple du terme « un.e » dans des expressions telles que « un

peu » ou « quelques-unes », ou celui des nombres collectifs tels que « trentaine »⁴, qui, dans l'usage linguistique, peuvent ne pas exprimer un nombre exact.

4. *La variation culturelle et historique de l'un, du multiple et du contrôle de la multiplicité*

Dans l'histoire des mathématiques, on sait que les notions et les pratiques numériques n'agissent pas comme un universel anthropologique et historique, et que même des notions fondamentales telles que l'unité numérique ont été soumises à des processus longs et complexes de signification et de re-signification.

La plupart des peuples ne disposaient de termes numériques que pour de très petites quantités, et seul un petit groupe a développé un lexique numérique pour des quantités plus importantes. En nous basant sur le travail d'analyse et de synthèse d'Olivier Keller (2016), on peut souligner que :

- ce type de lexique numérique étendu est l'une des techniques possibles de contrôle quantitatif que différents peuples ont développé et est lié à la constitution de techniques de bijection entre la collection à contrôler et une collection contrôle ;
- la collection contrôle peut être une collection préexistante (autres objets, parties du corps) ou une collection créée ad hoc pour le contrôle quantitatif (marques sur un objet, nœuds, jetons, marques sur une surface de représentation). Ces collections d'objets à compter font appel à des degrés de verbalisation relatifs, ce qui n'est qu'un aspect de la thématization du contrôle de la numération ;
- lorsqu'une collection contrôle commence à être utilisée pour contrôler différentes collections d'objets, elle devient ce que Keller appelle une collection-type spécialement conçue pour le contrôle quantitatif de différentes collections d'objets. Nous préférons parler de collection-témoin, dans la mesure où il s'agit d'une collection qui témoigne de la numerosité d'une autre collection ;
- mais ces collections témoins, ou collection-type selon Keller, ne constituent pas encore des systèmes de numération, car elles sont fortement limitées au nombre d'objets appartenant à la collection témoin, ou au nombre d'objets manipulables à l'échelle humaine. Ce qui est considéré comme l'étape successive vers la numération est la génération de niveaux intermédiaires d'organisation de la quantité qui permettent la génération d'un système récursif avec une multiplicité de degrés d'unités (ce qui dans notre système indo-arabe correspond à la base « dix » conduisant à distinguer les unités simples, les dizaines, les centaines et ainsi de suite).

D'un point de vue historique, les premiers systèmes de numération attestés dépendent fortement de la nature des objets soumis au contrôle quantitatif. C'est le cas en Mésopotamie où il y avait plusieurs systèmes numériques selon le type de denrées soumis à une quantification numérique. Dans ces systèmes : i. le signe écrit de l'unité est différent selon le type de produits ou d'entités quantifiés, ii. le même signe graphique peut avoir des valeurs numériques différentes dans un autre système, et iii. la base de numération n'est pas non plus uniforme d'un système à l'autre (Chambon, 2003).

⁴ Pensez par exemple à l'expression « une trentaine de personnes », qui ne correspond pas nécessairement à trente personnes. En linguistique, les « nombres collectifs » sont les termes qui expriment des quantités numériques qui agissent comme un tout, c'est-à-dire comme une unité plus grande. C'est pourquoi on les retrouve dans les noms des différentes bases numériques : dizaine, douzaine, quinzaine, vingtaine, soixantaine, etc. ; cas où, évidemment, ils permettent d'exprimer une valeur quantitative exacte.

L'émergence d'un système de numération unifié pour tous les aspects de la numération est historiquement le fruit d'un processus à long terme impliquant de multiples aspects du nombre et ses différentes formes d'apparition. À cet égard, il est significatif que la notion d'unité, sa relation avec le nombre un et le reste de la numération, ait fait l'objet de nombreux débats et que, même au début de la modernité on discutait encore de l'affirmation euclidienne selon laquelle les nombres commencent à partir de deux, un étant considéré comme l'unité de la numération et l'élément formant les nombres⁵.

III. L'APPRENTISSAGE DE LA NUMÉRATION ET LE PROBLÈME DE LA MULTIPLICITÉ DE L'UNITÉ

Sur la base des critiques et des considérations exposées ci-dessus, nous pouvons analyser l'impact que la recherche sur la capacité innée à percevoir les nombres. Nous avons identifié l'émergence d'une série de pratiques éducatives dans lesquelles les jeunes enfants doivent identifier le plus rapidement possible (idéalement sans l'aide des doigts ou de tout autre support de comptage) la quantité numérique présente dans une collection présentée de manière fugace. L'idée est que l'enfant réponde à la question de savoir combien d'objets il y a, simplement en les regardant, ce qui faciliterait l'établissement d'une correspondance entre la série de mots numériques et la perception innée de la quantité numérique des objets présentés. Le jeune enfant percevrait déjà ces quantités numériques, et il lui suffirait d'associer le nom du nombre au nombre perçu. On attend également de l'enfant qu'il soit capable de comparer de manière estimative des collections d'objets plus grands, qui sont simplement présentés à sa perception, rapidement et sans utiliser aucune stratégie symbolique, de comptage ou de mesure.

Des exemples de ces activités peuvent être trouvés dans un certain nombre de jeux informatiques tels que « La course aux nombres » (2004) et « L'Attrape-Nombres » (2011). Ces jeux sont spécialement conçus pour consolider les liens entre les trois représentations des nombres (iconique, verbale, indo-arabe) et améliorer la compréhension spatiale des nombres (Dehaene, 2010). Actuellement, cette perspective se retrouve dans certains des mini-jeux de la plateforme « Teach Your Monster Number Skills: Math Games » (2023), ou dans les activités plus ou moins ludiques qu'un certain nombre d'éducateurs ont générées autour de l'idée de subitisation.

On a même remarqué l'apparition d'activités didactiques explicitement liées à l'idée de subitisation⁶. Celles-ci consistent généralement à présenter successivement une série d'images contenant des ensembles d'éléments (généralement des points), devant lesquelles les enfants doivent rapidement verbaliser le nombre correspondant ou l'écrire en chiffres indo-arabes. Dans certaines de ces activités⁷, nous avons constaté que la réception pédagogique de la notion de subitisation est mal interprétée, voire confondue avec la capacité de décompte elle-même : dans plusieurs des images présentées, le nombre d'éléments dépasse la « tranche de subitisation ». Dans la plupart des cas, ces éléments sont présentés sous forme de constellations (points ou traits), c'est-à-dire une structure sous-jacente à l'organisation visuelle des éléments, facilement reconnaissable et partagée culturellement (comme les faces d'un dé), qui nécessite un apprentissage préalable, aussi simple soit-il. Ces procédures graphiques d'organisation

⁵ Euclide, au chapitre 7 des *Éléments*, indique, dans la première définition, que l'unité est ce à partir de quoi on dit que chaque chose est un et que, dans la deuxième définition, que le nombre est une multiplicité de unités (Euclide d'Alexandrie, 1994). Pour une discussion et une analyse de la permanence de cette distinction entre unité et nombre au début de la modernité, par exemple dans l'ouvrage de Tartaglia, voir « *"New" early modern evidence for Jacob Klein's theses* » de Giovanna Cifoletti (2019).

⁶ En tant que phénomène pédagogique émergent, se retrouvent dans les nouvelles technologies de l'information et de la communication, comme les sites web et les plateformes de distribution de contenus en ligne.

⁷ Voir, par exemple, « *Summer Subitizing: Math Brain Breaks* » (Move and Groove Math, 2022), « PARLONS NUMÉROS - Subitiser avec fluidité » (Madame Mindset, 2021) et « Subitising » (TeachEzy, 2016).

des quantités dépassent la simple capacité de subitisation, c'est-à-dire la perception directe et exacte des petites quantités.

En outre, les activités qui utilisent correctement cette idée de subitisation posent également des difficultés. En général, les stratégies d'enseignement qui se concentrent sur l'association entre le nom des nombres, leur écriture en chiffres indo-arabes et la quantité d'objets déjà présélectionnés comme faisant partie d'une collection soumise à dénombrement comportent certains risques. Dans de telles collections, la détermination de l'unité et de la multiplicité est toujours très simple. En agissant ainsi, on délaisse le développement des compétences d'identification, de discrimination et de sélection de l'unité pertinente pour le décompte d'une multiplicité possible, ce qui peut affecter la capacité d'utilisation abstraite des nombres, c'est-à-dire que ce que les nombres permettent de spécifier, c'est la cardinalité d'une collection indépendamment de la nature et du type d'éléments, ou des arrangements des éléments.

Traditionnellement, dans l'enseignement des nombres et de la numération, un effort important a été fait pour séparer le concept de nombre des caractéristiques perceptives spécifiques de la collection à dénombrer. Pour ce faire, les collections d'objets sont variées selon différents types de caractéristiques. Une activité typique consistait à montrer aux jeunes enfants une série d'objets ou de figures qui partageaient des caractéristiques communes et divergeaient sur certains aspects (par exemple, leur forme générale, certains détails morphologiques spécifiques, leur taille, leur couleur, leur densité entre autres). Parfois, l'enfant était sollicité sur un aspect, parfois sur d'autres. L'objectif est de construire une notion de nombre indépendante de toute caractéristique particulière des objets considérés. Dans un premier temps, l'enfant est invité à marquer ou à signaler les objets ou les images qui répondent au critère de sélection. Une fois que l'enfant est capable d'identifier une collection sur la base d'une caractéristique marquée, on lui demande de compter le nombre d'objets présentant ces caractéristiques. Pour ce faire, l'enfant pouvait d'abord réciter, avec ou sans l'aide des doigts de la main, les premiers éléments de la comptine numérique.

Cette comptine numérique lui avait été enseigné dès le plus jeune âge, à travers un processus long et répétitif de récitation, et d'exigence de récitation devant un large éventail de pluralités. Il faut noter un double usage de la main lors des premières phases de ce processus : d'une part, les éléments de la pluralité sont pointés un à un avec un doigt, et d'autre part, les doigts sont utilisés comme registres des pluralités prises en compte. On peut ainsi réciter les mots « un », « deux » et « trois », désigner trois objets différents et lever trois doigts de la main. Il s'agissait ainsi d'établir une relation étroite entre les très petites quantités d'objets, la séquence des doigts, et la séquence des noms des premiers nombres. Il faut noter que les doigts des mains remplissent un rôle de collection-témoin vis-à-vis de la petite collection d'objets sous contrôle quantitatif : une collection d'objets auxiliaires (les doigts) est utilisée pour servir de registre de la numérosité. Cette collection-témoin sert également de médiateur pour l'association entre la cardinalité et le nom des nombres qui lui correspond.

Outre l'utilisation de cette comptine numérique pour le dénombrement d'objets, les enfants ont été invités et entraînés à comparer les cardinaux de deux collections. Cette comparaison pouvait être effectuée par simple estimation, sans recours à des termes numériques mais par le biais de termes quantitatifs indéterminés (moins, plus, même) ou par des stratégies précises mais non numériques telles que la correspondance terme à terme entre les membres des deux collections. Si la mise en correspondance terme à terme échoue (ce qui correspond mathématiquement à une injection), alors les deux collections sont différentes quant à leur cardinalité. Si elle réussit (ce qui correspond mathématiquement à une bijection), alors les deux collections sont égales en nombre, et cela est établi sans qu'il soit nécessaire de recourir à un nombre particulier pour assurer cette égalité.

Nous identifions ainsi dans ce type d'activités traditionnelles d'enseignement des nombres et du dénombrement un effort considérable pour séparer la numérosité d'une collection non seulement des caractéristiques accessoires de la collection (par exemple, la couleur des objets) mais aussi des caractéristiques associées à la numérosité (par exemple, la taille ou la densité). Nous émettons l'hypothèse que ces activités contribuent à développer les compétences de contrôle cognitif nécessaires pour inhiber les variables quantitatives non numériques lorsqu'elles ne sont pas corrélées à la numérotation, et pour les utiliser comme indices lorsque ces variables contiguës sont corrélées. Ceci est également associé à un effort explicite pour constituer la quantité et le nombre comme deux domaines liés mais distincts.

IV. CONCLUSION

Nous considérons les activités traditionnelles d'enseignement du calcul que nous avons décrites et analysées comme des activités qui cherchent à désinstancier progressivement le nombre non seulement des caractéristiques particulières et spécifiques de la collection d'objets, mais aussi de leurs caractéristiques quantitatives non numériques. De plus, un travail sur la numérosité d'une collection peut être abordé en termes non numériques, mais précis, comme le montrent les techniques de correspondance terme à terme entre les membres de deux collections.

Ces activités traditionnelles nous semblent correspondre à certaines des critiques formulées à l'encontre des neurosciences cognitives des mathématiques, une discipline qui a un impact croissant sur l'enseignement des nombres et qui a impliqué une modification de l'intérêt des activités pédagogiques : partant du principe que l'unité et la multiplicité des uns qu'implique la numération sont données d'avance, les pratiques éducatives se concentrent sur la génération d'une correspondance entre le mot ou le signe numérique indo-arabe qui désigne le cardinal d'un ensemble donné d'objets discrets préalablement sélectionnés en tant que membres d'une collection.

Ce déplacement du centre d'intérêt des activités didactiques sur le nombre présente le risque de ne pas développer les compétences de contrôle cognitif liées aux activités sur le nombre. Et il nous semble que c'est précisément l'un des défis que la neuroscience cognitive du nombre doit expliquer : non seulement on peut compter numériquement des choses manifestement discrètes et qui sont manifestement membres d'une même catégorie d'objets, dont l'unité correspond sans problème à la discrétisation des membres d'une collection, mais le contraire est aussi vrai. Un, deux ou trois ne sont pas des concepts qui, dans leur valeur numérique fondamentale, s'appliquent à un, deux ou trois aspects discrets donnés simplement dans l'expérience du monde. Au contraire, un, deux ou trois sont des concepts qui peuvent être appliqués à un, deux ou trois aspects profondément différents de l'expérience du monde, apparaissant comme des membres, malgré leurs dissemblances, abordables comme similaires. C'est le vieux problème de l'impossibilité d'additionner des pommes et des oranges, ce qui n'est pas tout à fait vrai puisqu'elles font toutes les deux parties de la catégorie plus générale des fruits, ce qui signifie qu'elles peuvent être comptées comme faisant partie de la même grande unité avec les unités qui la composent.

C'est cette récurrence du concept de nombre qui en fait un objet d'étude en soi. En effet, savoir compter n'est pas savoir identifier le nombre précis d'éléments de la même catégorie qui apparaissent dans l'expérience ; savoir compter c'est savoir appliquer à un ensemble d'éléments, toujours différenciables, la même considération selon l'activité pertinente dans laquelle une telle activité de dénombrement apparaît. Savoir compter, c'est savoir prendre en compte.

RÉFÉRENCES

- Chambon, G. (2003). Archaic metrological systems from Ur. *Cuneiform Digital Library Journal*, 5.
https://cdli.ucla.edu/pubs/cdlj/2003/cdlj2003_005.html
- Charaudeau, P. (2006). *Grammaire du sens et de l'expression*. Hachette.
- Cifoletti, G. C. (2019). New early modern evidence for Jacob Klein's theses. Dans B. Hopkins et J. Drummond (dir.), *The new yearbook for phenomenology and phenomenological philosophy. Volume 18, Special Issue: Gian-Carlo Rota and the end of objectivity* (p. 488-533). Routledge.
- Dehaene, S. (2010). The calculating brain. Dans D. A. Sousa (dir.), *Mind, brain, and education: Neuroscience implications for the classroom* (1^{re} éd, chap. 9). Solution Tree.
- Euclide d'Alexandrie. (1994). *Les éléments* (B. Vitrac, trad. et comment.) [Traduits du texte de Heiberg. Volume II. Livres V-VI : Proportions et similitude. Livres VII-IX : Arithmétique]. Presses universitaires de France
- Keller, O. (2016). *L'Invention du nombre. Des mythes de création aux Éléments d'Euclide*. Classiques Garnier. <https://classiques-garnier.com/l-invention-du-nombre-des-mythes-de-creation-aux-elementes-d-euclide.html>
- Wilson, A. et Dehaene, S. (2004). *La course aux nombres* [Logiciel].
<https://www.lacourseauxnombres.com/nr/home.php>
- Unité INSERM-CEA de NeuroImagerie cognitive. (2011). *L'Attrape-Nombres* [Logiciel].
<https://www.attrape-nombres.com/an/home.php>.
- Leibovich, T. et Daniel A. (2016). The symbol-grounding problem in numerical cognition: A review of theory, evidence, and outstanding questions. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 70(1), 12-23. <https://doi.org/10.1037/cep0000070>
- Leibovich, T., Naama K., Maayan H. et Avishai H. (2017). From “sense of number” to “sense of magnitude”: The role of continuous magnitudes in numerical cognition. *Behavioral and Brain Sciences*, 40, Article e164. <https://doi.org/10.1017/S0140525X16000960>
- Madame Mindset. (2021). *Parlons numéros. Subitiser avec fluidité, niveau 1 (Let's talk numbers - Subitizing in French) (DPA/APQ)* [Vidéo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=cKj_Gg5b7dM
- MoveMove and GrooveGroove Math. (2022). *Summer subitizing: Math brain breaks* [Vidéo]. Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=zqi4GEyuulQ>
- Núñez, R. E. (2017). Is there really an evolved capacity for number? *Trends in Cognitive Sciences*, 21(6), 409-424. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2017.03.005>
- Núñez, R. E. (2021). From quantical to numerical cognition: A crucial passage for understanding the nature of mathematics and its origins. Dans W. Fias et A. Henik (dir.), *Heterogeneous contributions to numerical cognition* (p. 1-23). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-817414-2.00004-X>
- Piaget, J. et Szeminska, A. (1997). *La genèse du nombre chez l'enfant* (7^e éd.). Delachaux et Niestlé.
- Rochel, G. (2000). La quantification nominale dans les grammaires françaises des dix dernières années. Dans M. S. Mañes, L. A. Anguita et M. del Carmen Molina Romero (dir.), *La philologie française à la croisée de l'an 2000 : panorama linguistique et littéraire* (Vol. 2, p. 123-132). Universidad de Granada. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1390515>

Roditi, E. (2023). Les neurosciences cognitives et l'enseignement des nombres à l'école - réflexions didactiques. *Grand N*, (112), 5-24.

The Usborne Foundation (2023). *Teach your monster number skills: Math games* [Site internet ludique].
<https://www.teachyourmonster.org/numberskills>

TeachEzy. (2016). *Subitising* [Vidéo]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=JzuO6CfNwNE>

TROUBLES DE LA COORDINATION ET VISUALISATION EN GÉOMÉTRIE : LE CAS D'UNE COLLABORATION ENTRE SCIENCES COGNITIVES ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

| GOMEZ* ALICE, MITHALAL** JORIS ET HANSSEN*** LUDIVINE

Résumé | Ce texte présente un projet de recherche pluridisciplinaire visant à comprendre les difficultés spécifiques d'élèves dyspraxiques confrontés à des tâches géométriques, et explorer l'efficacité d'aménagements spécifiques. Il s'appuie sur un double ancrage en didactique des mathématiques et en sciences cognitives, combinant analyse épistémologique des tâches et étude cognitive. Nous montrons que cette collaboration interdisciplinaire est impérative pour ce cas spécifique d'apprentissage de la géométrie avec un TDC.

Mots-clés : didactique des mathématiques, géométrie, visualisation, dyspraxie, sciences cognitives

Abstract | This study investigates the specific challenges faced by students with dyspraxia in geometry and evaluates the impact of targeted accommodations. Grounded in both mathematics education and cognitive science, it combines epistemological task analysis with cognitive approaches. The research highlights the critical role of interdisciplinary collaboration in addressing the needs of learners with Developmental Coordination Disorder (DCD).

Keywords: Mathematics education, geometry, visualization, dyspraxia, cognitive sciences

I. INTRODUCTION

L'enseignement apprentissage de la géométrie, et plus largement la pratique de la géométrie, soulève des questions liées au traitement de l'espace. On les retrouve sous différents termes : habiletés spatiale, compétences spatiales, connaissances spatiales, représentation de l'espace, visualisation... Ce dernier terme est au cœur de nombreux travaux récents en didactique de la géométrie, mais fait intervenir des acceptions diverses selon qu'on se place d'un point de vue cognitif ou didactique. Il est aussi, sous d'autres terminologies, un enjeu pour les sciences cognitives qui tentent d'identifier les processus d'analyse des objets géométriques.

Les travaux que nous décrivons ici sont tirés d'une collaboration entre sciences cognitives et didactique des mathématiques, destinée à éclairer les difficultés d'élèves dyspraxiques lors de la résolution de problèmes de géométrie, et à proposer des pistes leur permettant d'accéder aux apprentissages. Nous nous concentrerons sur la question de la visualisation en lien avec les actions des élèves pour souligner la nécessité de croiser ces deux points de vue, ainsi que les défis théoriques et méthodologiques rencontrés.

* Centre de Recherche en Neurosciences de Lyon (CRNL), INSERM U1028 — CNRS UMR5292, Université de Lyon – France – alice.gomez@univ-lyon1.fr

** Univ Lyon, Université Lyon 1, Laboratoire Sciences, Société, Historicité, Éducation et Pratiques (S2HEP), UR4148, Lyon – France – joris.mithalal@univ-lyon1.fr

*** Univ Lyon, Université Lyon 1, Laboratoire Sciences, Société, Historicité, Éducation et Pratiques (S2HEP), UR4148, Lyon – France – ludivine.hanssen@univ-lyon1.fr

II. VISUALISATION EN GÉOMÉTRIE : DEUX REGARDS SUR LA QUESTION

1. *Visualisation en géométrie*

La géométrie soulève la question du traitement de l'espace, généralement désignés par « habiletés spatiales » ou « *spatial abilities* ». Il s'agit de prendre en compte la manière dont se produit l'acquisition et le traitement (essentiellement interne dans ce cas) d'informations relatives à l'espace, pertinentes pour résoudre des problèmes de géométrie. La reconnaissance de dessins à partir de leurs traits semble être une caractéristique universelle de l'être humain (Biederman et Ju, 1988 ; Kennedy et Ross, 1975), démontrée même dans des tribus isolées de Nouvelle-Guinée. Cette capacité n'est en revanche pas évidente chez les primates non humains (Close et Call, 2015), qui produisent uniquement des tracés courbés élémentaires lorsqu'on leur demande de dessiner (Tanaka et al., 2003). Dans les travaux directement appuyés sur la psychologie cognitive (Battista et al., 2018 ; Ramful et al., 2017), essentiellement dans la littérature anglo-saxonne, la « visualisation spatiale » est une composante des habiletés spatiales. Il s'agit d'un processus mental consistant en la création et la manipulation interne d'images mentales. Les travaux en éducation mathématique tendent à utiliser ce terme de visualisation (Duval, 2005) — plutôt que celui de *vision* — pour désigner les processus spécifiques à la géométrie visant à traiter les informations visuelles d'une manière adaptée aux problèmes rencontrés (Ceretkova et al., 2015). Ce que la didactique désigne par « visualisation » consiste en des stratégies de recherche et de traitement de l'information obéissant à plusieurs logiques, et combinant généralement plusieurs d'entre elles : coordination avec le langage verbal (Duval, 2005), processus de construction à l'aide d'instruments (Duval, 2005 ; Mithalal, 2010 ; Mithalal et Balacheff, 2019), identification de sous configurations permettant d'orienter la structure d'une preuve (Duval, 1994, 2005), réalisation des fonctions identifiées par Chaachoua (1997) nécessaires à la résolution de problèmes en géométrie, etc. S'il s'appuie sur les travaux de psychologie cognitive (la *Gestalttheorie*), Duval (2005) procède avant tout d'une analyse des savoirs et pratiques de la discipline. Il identifie une modalité de visualisation spécifique, qu'il qualifie de « visualisation non iconique », qui peut mettre en jeu trois processus distinct : la division méréologique, pour identifier des sous figures pertinentes pour la résolution d'un problème ; la déconstruction instrumentale, pour décrire comment un objet géométrique peut être construit à l'aide d'instruments donnés ; et la déconstruction dimensionnelle, qu'il qualifie de processus discursif, consistant à identifier des sous constituants de dimensions inférieures (les unités figurales) ainsi que les relations géométriques les liant. L'analyse mathématique conduit à souligner la nécessité d'ajouter — en actes ou mentalement — des tracés initialement absents sur la figure, sans fonction graphique, mais qui la *réorganisent* en faisant apparaître de nouvelles relations (par exemple un alignement). Le point de vue cognitif n'est convoqué que pour identifier le « processus normal de la visualisation », qualifié de « visualisation iconique », et montrer en quoi il agit comme un obstacle à l'apprentissage de la géométrie.

En sciences cognitives, Sablé-Meyer et al. (2022) suggèrent que les primates non humains possèdent des précurseurs du nombre et des concepts spatiaux, mais que seuls les humains attribuent une dimension symbolique à ces représentations proto-mathématiques. Ils perçoivent les formes géométriques différemment des autres primates, avec une reconstruction mentale nécessaire pour générer ces formes dans le langage de la pensée. Dehaene et al. (2022) avancent que la spécificité humaine réside dans la capacité de recombinaison des connaissances primaires de manière compositionnelle. La communication linguistique et l'éducation facilitent cette recombinaison, qui peut varier selon les besoins spécifiques des apprenants au sein d'une culture. Les travaux de Dehaene et al. (2008) ainsi que d'Izard et al. (2011) ont permis de mettre en évidence la compréhension des primitives

géométriques en l'absence d'éducation formelle chez les populations Mundurucu, grâce à la tâche de détection d'intrus. De manière spontanée, les Indiens d'Amazonie, en l'absence d'enseignement formel, sont capables de détecter les intrus au-dessus du hasard pour la perception de propriétés euclidiennes, les figures géométriques ou des propriétés métriques.

Les deux disciplines portent ainsi des regards complémentaires sur la manière dont doivent être réalisés l'acquisition et le traitement des informations visuelles en géométrie plane.

2. *Quand la dyspraxie sème le trouble*

Le trouble de la coordination motrice (TDC), ou dyspraxie, est un trouble neuro-développemental qui affecte environ 5 % de la population d'une classe d'âge (Albaret et al., 2019 ; American Psychiatric Association, 2015 ; Lingam et al., 2009). Sa manifestation la plus visible concerne les fonctions motrices : exécution ou reproduction de mouvements, coordination œil-main, proprioception... (Gauduel et al., 2023 ; Hyde et Wilson, 2011 ; Li et al., 2015 ; Plumb et al., 2008) Les élèves porteurs de ce trouble sont particulièrement empêchés en géométrie, du fait de leur faible capacité à utiliser des instruments pour réaliser des tracés. Pourtant, ces enfants sont capables d'acquérir des concepts mathématiques de nature visuospatiale (la ligne numérique, Gomez et al. 2017), aussi on peut faire l'hypothèse que les difficultés d'apprentissage de la géométrie sont liées à ces difficultés praxiques et visuospatiales (Bellocchi et al., 2021 ; Gaymard et al., 2017 ; Sumner et al., 2016 ; Pisella et al. 2020a, 2021) plutôt que des aspects conceptuels.

Ce trouble comporte en effet de manière moins visible, des difficultés de perception et de traitement des informations visuelles, de mémoire visuo-spatiale et de difficultés de planification. Ces élèves peuvent éprouver des difficultés à contrôler les mouvements oculaires (Bellocchi et al., 2021 ; Gaymard et al., 2017 ; Sumner et al., 2016), ou à repérer les positions relatives. (Pisella et al. 2020a, 2021, Gauduel et al., en préparation) Notre recherche a également permis d'identifier des difficultés pour identifier des relations telles que l'orthogonalité ou le parallélisme, ou reconnaître des formes géométriques qui ne partagent pas les mêmes propriétés (ex. : une ellipse parmi des cercles). Ils peuvent présenter un déficit plus ou moins marqué de planification motrice. Enfin, l'utilisation de la mémoire de travail — en particulier visuospatiale — est-elle aussi moins performante pour ces élèves (Alloway et Temple, 2007). L'ensemble de ces difficultés peut se traduire par une incapacité à réaliser les tâches, mais aussi par une fatigue excessive pour des élèves tentant de les compenser.

S'intéresser aux élèves TDC conduit nécessairement à réinterroger le paradigme proposé par Duval, et à inclure une dimension cognitive pour identifier — au-delà de la visualisation iconique — ce qui est en jeu dans la visualisation géométrique et ce qui pourrait y faire obstacle. La perception des unités figurales, et de leurs relations potentielles sera au cœur d'un travail d'analyse pour la reproduction d'un dessin ou pour une heuristique lors d'une recherche de preuves, elle semble ici empêchée. La planification des actions, en revanche, n'est pas identifiée par l'analyse épistémologique ; pourtant on peut émettre l'hypothèse que, même en disposant des bonnes informations, des élèves TDC soient limités dans la mise en fonctionnement d'une déconstruction instrumentale. La mémoire visuospatiale enfin, n'est pas non plus identifiée comme une limite à l'analyse des dessins par les élèves. Pourtant, même lorsque des objets ou des relations sont identifiées, leur faible disponibilité peut s'avérer un frein aux trois processus attachés à la visualisation non iconique.

Cet effet de focale lié au contexte du trouble interroge plus largement cette notion de « visualisation ». Il conduit à adjoindre aux propositions de Duval, qui identifie des nécessités épistémologiques et la conduite nécessaire de certaines opérations de décomposition, la prise en compte précise — d'un point de vue cognitif — des processus nécessaires à la satisfaction de cette

nécessité et des obstacles multiples que peuvent rencontrer des élèves. Pour adopter un « regard géométrique » sur les objets graphiques, il est nécessaire de rencontrer des situations qui le rendent pertinent, mais aussi de disposer des ressources permettant sa mise en fonctionnement. C'est ainsi que nous pouvons interroger la visualisation des élèves au travers des processus de résolution, qui témoignent de son caractère mobilisable et opérationnel.

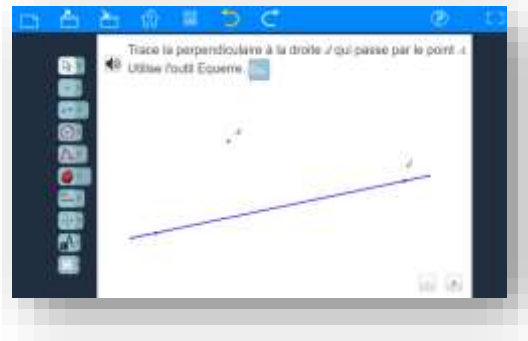
De nouvelles questions de recherche, à l'interface des deux disciplines, sont ainsi soulevées. Quelles difficultés des élèves dyspraxiques peuvent-ils rencontrer pour percevoir des informations pertinentes sur un dessin géométrique ? Quelles peuvent être les difficultés de traitement de cette information ? Quelles difficultés peuvent apparaître en lien avec la planification de cette exploration visuelle ? Elles ouvrent des questions plus larges concernant l'ensemble des élèves, en particulier relatives au mécanisme de prise d'informations et de traitement spécifiquement en jeu dans des tâches de géométrie.

III. DES DÉFIS THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES

1. *Un projet de recherche interdisciplinaire*

Nous nous appuyons ici sur les objectifs et les données du projet DYSDYN, déposé conjointement par les deux disciplines et par la société Cabrilog. Constatant les obstacles générés par le trouble, mais la possibilité pour ses élèves d'accéder conceptuellement à cet apprentissage, il vise à identifier spécifiquement les acquisitions nécessaires à l'entrée en cycle trois, et à développer un dispositif les rendant accessibles. L'appui sur un logiciel de géométrie dynamique (CabriExpress) vise en première intention à limiter les difficultés de manipulation d'instruments lors des constructions géométriques : l'usage exclusif de la souris permet de simplifier les gestes et est jugé généralement accessible aux élèves dyspraxiques (Hanssen, 2020). La collaboration avec l'éditeur permet en outre d'envisager des adaptations de l'ergonomie du logiciel lorsque cela s'avère nécessaire. La seule possibilité de manipulation des instruments étant insuffisante pour résoudre des tâches de géométrie, un enjeu majeur du projet consiste à identifier les difficultés de perception et d'analyse de l'environnement graphique : repérage des outils, perception des formes, des relations géométriques, des sous-constituants, des sous-configurations, etc. L'adaptation de l'interface du logiciel, et la construction de tâches adéquates, permet en outre d'étudier la possibilité de parcours d'apprentissage adaptés à ces élèves, leur permettant de traiter des tâches similaires et de réaliser les mêmes apprentissages que des élèves travaillant sur papier.

Nous proposons ici de considérer un exemple minimal proposé en laboratoire à des élèves travaillant sur Cabri Express. Ces élèves ont réalisé une première séance en laboratoire au cours de laquelle ils ont été testés sur des tâches de reconnaissance, puis ont suivi un tutoriel leur permettant d'apprendre les premières fonctionnalités du logiciel. Au cours de la seconde séance, ils doivent réaliser des constructions dans Cabri Express en utilisant un certain nombre d'outils. Les trois premières pages consistent en des tracés de segments de longueur donnée avec différents outils, la quatrième vise une perpendiculaire à l'aide de l'outil perpendiculaire, et la cinquième à l'aide de l'outil équerre.



D'un point de vue didactique, sans faire une analyse a priori fine, cette tâche engage plusieurs aspects notables :

- la notion convoquée est celle de perpendiculaire, c'est-à-dire une relation entre deux droites respectant une condition (la deuxième droite passe par le point A) ;
- l'outil mobilisé, l'équerre, désigne l'angle droit comme secteur angulaire (l'angle est une surface, comme le coin d'un objet) ou de ligne brisée (un changement de direction lorsqu'on suit le bord de l'équerre), mais ne matérialise pas deux droites comme le pourraient d'autres instruments (tels la réquerre) ;
- les élèves doivent mettre en relation deux conceptions de l'angle droit, celle que porte l'équerre et la perpendiculaire que mentionne l'énoncé, et pour cela coordonner deux modalités de visualisation telles que décrites par Duval ;
- ils doivent aussi s'approprier la structure logique de l'énoncé, la mettre en fonctionnement pour réaliser des constructions ;
- du point de vue de la géométrie dynamique, il leur faut sélectionner les arguments de la primitive de construction : cliquer sur la droite, cliquer sur le point. Pour que leur construction résiste au déplacement, ils ne doivent pas cliquer sur un autre point qui ferait passer visuellement la droite par ce point.

D'un point de vue cognitif, il faut pour les élèves être capable de repérer visuellement la position de l'outil, la position de la droite et du point, de les garder en mémoire, de les viser et de déplacer le pointeur sur ces positions, et de cliquer sur la souris sans la déplacer.

Cet exemple permet de souligner combien les contraintes — et donc les obstacles — sont à la fois de natures très différentes et complémentaires, du point de vue des deux disciplines.

2. *Les données disponibles : construction d'observables et défis méthodologiques*

Pour analyser l'activité de l'élève lors de la réalisation de cette tâche, nous avons recueilli plusieurs données. L'écran de l'ordinateur sur lequel travaille l'élève est enregistré en vidéo, ce qui donne accès à ses réalisations finales et au processus de résolution. Le regard de l'élève est suivi à l'aide d'un oculomètre, permettant d'identifier les déplacements et fixations du regard de l'élève à une fréquence d'échantillonnage de 120 Hz. L'usage de la souris est enfin enregistré chaque milliseconde : position du pointeur, pression sur l'un des deux boutons.

L'enjeu de ces données consiste à être capable d'analyser la tâche de l'élève du point de vue cognitif et du point de vue didactique. En appui sur une analyse a priori, l'enregistrement vidéo permet d'analyser les stratégies et des connaissances mobilisées par les élèves. Le suivi du regard et des

mouvements de la souris peut apporter des renseignements complémentaires, par exemple pour identifier les stratégies avortées faute de pouvoir les réaliser concrètement. Les données de l'oculomètre et de position de la souris renseignent quant à eux sur les points d'attention des élèves, leur capacité ou non à percevoir certains objets, à viser du regard, à déplacer la souris vers l'endroit visé, cliquer sans bouger la souris... Les stratégies des élèves peuvent ainsi être conditionnées par deux facteurs, les connaissances géométriques (dont les connaissances instrumentales) mise en jeu, et leur capacité à prévoir et exécuter certaines actions. Le niveau de description étant de granularité très différente, tout l'enjeu consiste à pouvoir les mettre en relation de manière efficace.

3. *Construction d'une méthodologie pour combiner résultats didactiques et cognitifs : un essai en cours*

Pour répondre à ces besoins méthodologiques, nous développons une méthodologie d'analyse appuyée sur le modèle cKc (Balacheff, 1995), déjà utilisé pour modéliser les connaissances en géométrie (Mithalal, 2010 ; Mithalal et Balacheff, 2019). Une conception désigne ici une forme locale de la connaissance de l'élève, modélisée par un quadruplet :

- P : ensemble de problèmes sur lesquels la conception est opératoire, perturbations du système [sujet <> milieu] ;
- R : ensemble d'opérateurs. Ils associent à des buts des actions, de la forme $P \Rightarrow A$;
- L : systèmes de représentation permettant l'expression des problèmes et des opérateurs ;
- Σ : structure de contrôle, assurant la non-contradiction. Les contrôles sont des règles offrant un jugement sur l'utilisation (pertinence, fonctionnement, résultat notamment) des opérateurs et sur le traitement des problèmes.

En considérant P et L localement stables, il est possible de décrire des stratégies *a priori* ainsi que les procédures effectivement employées par les élèves à l'aide de R et Σ . Dans l'exemple qui nous intéresse, on pourra par exemple identifier *a priori* :

- des opérateurs, par exemple
 - **[r₁]** (construire une perpendiculaire à (d) passant par A) $\Rightarrow$ (utiliser l'outil "droite", cliquer sur (d), déplacer la souris pour que la nouvelle droite semble perpendiculaire, cliquer)
 - **[r₂]** (construire une perpendiculaire à (d) passant par A) $\Rightarrow$ (utiliser l'outil équerre, cliquer sur (d), déplacer la souris pour que la droite perpendiculaire passe par A, cliquer)
 - **[r₃]** (construire une perpendiculaire à (d) passant par A) $\Rightarrow$ (utiliser l'outil équerre, cliquer sur A, cliquer sur (d))
- des contrôles, par exemple
 - **[σ_1]** (deux droites semblent visuellement former un angle droit) $\Rightarrow$ (elles sont perpendiculaires)
 - **[σ_2]** (deux droites restent visuellement perpendiculaires quand je déplace l'une d'entre elles) $\Rightarrow$ (elles sont perpendiculaires)
 - **[σ_3]** (j'ai créé une droite en sélectionnant A et une droite (d) avec l'outil "perpendiculaire") $\Rightarrow$ (j'ai créé la perpendiculaire à (d) passant par A)

Nous pouvons alors décrire une procédure employée par un élève à l'aide de ces opérateurs et contrôles : un problème initial p_0 est transformé successivement en $p_1, p_2, \dots, p_f$ par une succession d'opérateurs et contrôles, un dernier contrôle garantissant sa validité. La description de la procédure

repose sur l'identification des opérateurs et des contrôles, ces derniers étant moins manifestes et souvent inférés grâce à l'analyse a priori. Cette description en opérateurs et contrôle vise à permettre le lien entre deux niveaux d'analyse.

D'une part, nous pouvons mettre en lien certains opérateurs, contrôles, ou ensembles de tels objets, avec les connaissances des élèves : notionnelles (conception de l'angle droit, de la perpendicularité), en termes de paradigmes géométriques (Houdement et Kuzniak, 2006), relativement à la distinction dessin/figure (Laborde et Capponi, 1994), en termes de robustesse des constructions dans un environnement de géométrie dynamique (Baccaglini-Frank, 2012), etc. Cela permet de qualifier leurs apprentissages géométriques, et ainsi de répondre à notre question initiale concernant les possibilités d'apprentissage dans de tels environnements par des élèves dyspraxiques.

D'autre part, nous sommes conduits à nous appuyer sur les travaux en sciences cognitives pour analyser les conditions d'emploi de ces opérateurs et contrôles qui ne seraient pas de nature mathématique. Ainsi, $[r_1]$ est mathématiquement moins complexe que $[r_3]$, et on pourrait s'attendre en cycle trois à ce que son usage privilégié. En revanche, l'analyse cognitive nous apprend que pour ces deux opérateurs il faut trouver un outil dans l'interface du logiciel, cliquer sur son icône, et cliquer sur deux objets. Sous réserve d'un contrôle mathématique suffisant, $[r_3]$ ne nécessite pas de contrôle perceptif ; $[r_1]$ en revanche suppose que l'élève soit capable de repérer visuellement un angle droit, et de se servir des informations visuelles pour en temps réel ajuster ses mouvements et parvenir à placer la droite au bon endroit. On peut s'attendre alors à ce que cette manipulation soit plus difficile, et que $[r_1]$ — pour des raisons cognitives, et toujours sous réserve de la disponibilité des connaissances mathématiques nécessaires — soit moins employé. On retrouve ici l'intérêt d'un contrôle théorique fort lorsque le contrôle perceptif n'est plus disponible, que nous avons déjà mis en évidence par ailleurs (Mithalal, 2010).

Ce développement méthodologique vise ainsi à tirer parti des deux disciplines pour analyser l'activité géométrique des élèves dans une situation de construction, même minimale telle que nous la présentons. Elle permet a priori d'identifier les conditions nécessaires, d'un double point de vue didactique et cognitif, à la mise en œuvre de procédures de résolution. Nous sommes ainsi en mesure d'anticiper que certaines stratégies, que l'analyse didactique aurait a priori attendues, ne sont pas accessibles à des élèves en raison du trouble — mais aussi, dans un cadre plus large, en raison de contraintes ergonomiques. A posteriori, l'usage ou l'évitement répété de certains opérateurs (les contrôles étant généralement inférés des procédures des élèves), peut nous renseigner sur certaines difficultés elles aussi d'ordre didactique ou d'ordre cognitif. Cette méthodologie est en cours de développement.

IV. CONCLUSION

Le projet de recherche dont nous rendons compte ici a été pensé dès sa construction comme un projet pluridisciplinaire, la combinaison des deux disciplines en était un enjeu identifié. Nous avons souhaité montrer à la fois la difficulté à combiner deux approches théoriques qui répondent à des questions très différentes, avec des régimes de preuve eux aussi très différents, et la fécondité d'une telle combinaison. La compréhension des difficultés liées aux troubles ne peut faire l'économie d'aucune des deux approches, et à l'inverse il nous semble que ceci informe sur l'activité géométrique des élèves quels qu'ils soient. Nous avons souhaité montrer en outre que le rapprochement ne peut se contenter d'une mise en dialogue des deux disciplines, et doit s'accompagner d'une innovation méthodologique. Ce travail est bien entendu exploratoire et à poursuivre.

FINANCEMENT

Cette contribution s'appuie sur le projet « Pack Ambition Recherche » DYSDYN, financé par la Région AURA.

RÉFÉRENCES

- Baccaglini-Frank, A. E. (2012). Dragging and making sense of invariants in dynamic geometry. *The Mathematics Teacher*, 105(8), 616-620. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.105.8.0616>
- Balacheff, N. (1995). Conception, propriété du système sujet/milieu. Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (dir.), *Actes de la VIII^e École d'été de didactique des mathématiques* (p. 215-229). IREM de Clermont-Ferrand.
- Balacheff, N. et Margolinas, C. (2003). cKc Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. Dans A. Mercier et C. Margolinas (dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques. Cours de la XII^e École d'été de didactique des mathématiques, 20-29 août 2023, Corps*. La pensée sauvage. <https://hal.science/hal-01139408v1/document>
- Battista, M. T., Frazee, L. M. et Winer, M. L. (2018). Analyzing the relation between spatial and geometric reasoning for elementary and middle school students. Dans K. S. Mix et M. T. Battista (dir.), *Visualizing mathematics: The role of spatial reasoning in mathematical thought* (p. 195-228). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98767-5_10
- Campbell, D., Kumar, S., Giallanza, T., Griffiths, T. L. et Cohen, J. D. (2024). *Human-like geometric abstraction in large pre-trained neural networks* (n° arXiv:2402.04203). arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.04203>
- Ceretkova, S., Chesnais, A., Maschietto, M., Mithalal, J., Richard, P. R. et Swoboda, E. (2015). Introduction to the papers of TWG04: Geometrical thinking. Dans K. Krainer et N. Vondrová (dir.), *CERME 9—Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Charles University, Prague* (p. 511-513). <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01286992>
- Chaachoua, H. (1997). *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Étude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes* [Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier].
- Dehaene, S. (2023). *Modèles de la perception de la géométrie* | Collège de France. <https://www.college-de-france.fr/fr/agenda/cours/la-perception-des-objets-mathematiques-elementaires-formes-geometriques-motifs-et-graphes/modeles-de-la-perception-de-la-geometrie>
- Dehaene, S., Izard, V., Pica, P. et Spelke, E. (2006). Core knowledge of geometry in an Amazonian indigene group. *Science (New York, N.Y.)*, 311(5759), 381-384. <https://doi.org/10.1126/science.1121739>
- Dehaene, S., Roumi, F. A., Lakretz, Y., Planton, S. et Sablé-Meyer, M. (2022). Symbols and mental programs: A hypothesis about human singularity. *Trends in Cognitive Sciences*, 26(9), 751-766. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2022.06.010>
- Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM*, (17), 121-138.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

- Hanssen, L. (2020). *Potentialités didactiques offertes par un environnement de géométrie dynamique pour l'apprentissage des élèves porteurs d'un trouble développemental de la coordination* [Mémoire de Master 2 inédit].
- Heinke, D., Wachman, P., van Zoest, W. et Leek, E. C. (2021). A failure to learn object shape geometry: Implications for convolutional neural networks as plausible models of biological vision. *Vision Research*, 189, 81-92. <https://doi.org/10.1016/j.visres.2021.09.004>
- Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.
- Laborde, C. et Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1), 165-210.
- Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle* [Thèse de doctorat, Université de Grenoble]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-00590941v1>
- Mithalal, J. et Balacheff, N. (2019). The instrumental deconstruction as a link between drawing and geometrical figure. *Educational Studies in Mathematics*, 100(2), 161-176. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9862-z>
- Petitfour, É. (2015). *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : Étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot – Paris 7]. HAL science ouverte. <https://hal.science/tel-01228248v1>
- Petitfour, É. (2017). Enseignement de la géométrie à des élèves dyspraxiques en cycle 3 : Étude des conditions favorables à des apprentissages. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, 78(2), 47-66.
- Petitfour, É. (2022). Outils théoriques d'analyse de l'action instrumentée, au service de l'étude de difficultés d'élèves dyspraxiques en géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 38(1), 1-15.
- Ramful, A., Lowrie, T. et Logan, T. (2017). Measurement of spatial ability: Construction and validation of the spatial reasoning instrument for middle school students. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 35(7), 709-727. <https://doi.org/10.1177/0734282916659207>
- Sablé-Meyer, M., Ellis, K., Tenenbaum, J. et Dehaene, S. (2022). A language of thought for the mental representation of geometric shapes. *Cognitive Psychology*, 139, Article 101527. <https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2022.101527>
- Sablé-Meyer, M., Fagot, J., Caparos, S., van Kerkoerle, T., Amalric, M. et Dehaene, S. (2021). Sensitivity to geometric shape regularity in humans and baboons: A putative signature of human singularity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 118(16), Article e2023123118. <https://doi.org/10.1073/pnas.2023123118>
- Satlow, E. et Newcombe, N. (1998). When is a triangle not a triangle? Young children's developing concepts of geometric shape. *Cognitive Development*, 13(4), 547-559. [https://doi.org/10.1016/S0885-2014\(98\)90006-5](https://doi.org/10.1016/S0885-2014(98)90006-5)

LA NOTION DE CONCEPTION SOUS L'ANGLE DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET DE LA PSYCHOLOGIE DU DÉVELOPPEMENT. UN EXEMPLE SUR LE CONCEPT DE FRACTION

| LEMRICH* CHLOÉ, GARDES** MARIE-LINE ET SANDER*** EMMANUEL

Résumé | Le modèle de conception est utilisé, en didactique des mathématiques et en psychologie du développement, dans le but de comprendre et prédire les comportements des individus dans des situations d'apprentissage. Ces deux approches présentent aussi des différences, telles que la prise en compte de la nature intuitive de certaines connaissances ou de la complexité d'une situation d'enseignement-apprentissage. Dans le cadre d'une étude portant sur les conceptions sur les fractions, nous explorons la complémentarité des approches et l'apport de regards croisés pour enrichir les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Mots-clés : modèle de conception, complémentarité des approches, didactique, sciences cognitives, fraction

Abstract | The conception model is used in both mathematics education and developmental psychology to understand and predict individuals' behaviors in learning situations. These two approaches also show differences, such as the consideration of the intuitive nature of certain knowledge and the complexity of a teaching-learning situation. As part of a study on conceptions of fractions, we explore the complementarity of these approaches and the added value of cross-perspectives to enrich research on mathematics teaching and learning

Keywords: Conception, complementary approaches, didactic, cognitive sciences, fraction

I. INTRODUCTION

Notre réflexion sur la notion de conception sous l'angle de la didactique des mathématiques et de la psychologie du développement a émergé d'une recherche que nous menons sur l'enseignement et l'apprentissage des fractions. Dans ces deux domaines de recherche, et depuis plusieurs années, de nombreuses études se sont intéressées aux difficultés d'apprentissage des élèves sur les fractions (e.g. Lortie-Forgues et al., 2015). Différents facteurs explicatifs de ces difficultés ont été relevés, notamment les ruptures entre les propriétés des nombres entiers et celles des nombres rationnels (appelé biais du nombre entier par Ni et Zhou, 2005), la multiplicité des registres de représentation d'un nombre rationnel (Marmur et al., 2020) et les sens variés que peuvent prendre les fractions dans diverses situations, comme des situations de partage, de mesurage ou d'agrandissement-réduction (Behr et al., 1983 ; Brousseau, 1989). Plusieurs auteurs révèlent par exemple que l'adoption du seul sens « partie d'un tout » constitue un obstacle à la compréhension du concept de fraction, d'une part en empêchant la compréhension d'une fraction en tant que nombre (elle est davantage vue comme deux entiers séparés par une barre, c'est-à-dire une structure bi-partite) et d'autre part, en limitant le répertoire de procédures disponibles pour résoudre des problèmes (Adjage et Pluvinage, 2000).

D'un point de vue didactique, cet obstacle est lié à l'enseignement. Charalambous et Pitta-Pantazi (2007) montrent par exemple la prégnance des fractions comme partie d'un tout dans les manuels

* Haute Ecole pédagogique du canton de Vaud et Université de Genève – Suisse – chloe.lemrich@hepl.ch

** Haute Ecole pédagogique du canton de Vaud – Suisse – marie-line.gardes@hepl.ch

*** Université de Genève – Suisse – emmanuel.sander@unige.ch

scolaires à Chypre. Ces constats ont mené les chercheur·es en didactique à élaborer et analyser l'effet de séquences d'enseignement introduisant les fractions dans des situations de mesurage. Cette approche permet de travailler directement les fractions supérieures à 1 et de faciliter la transition vers le statut de nombre, notamment par l'utilisation de la droite graduée (Anselmo et Zucchetta, 2018).

D'un point de vue développemental, le sens de la fraction comme partie d'un tout est considéré comme un obstacle de nature cognitive. La notion de fraction se construirait en premier lieu par analogie avec des connaissances familières, issues des expériences de la vie quotidienne (comme le partage équitable d'un gâteau entre plusieurs personnes). Ces connaissances permettent de donner du sens au concept de fraction, mais avec un domaine de validité restreint dans la mesure où certaines situations sont difficiles, voire impossibles à appréhender avec une telle conception. Selon plusieurs auteurs (Fischbein, 1989 ; Gvozdic et al., 2022), ces connaissances, qualifiées d'intuitives, sont particulièrement résistantes à de nouveaux apprentissages.

Ces deux approches, l'une mettant l'emphasis sur les situations d'enseignement et l'autre sur les processus cognitifs en jeu, nous ont semblé intéressantes à croiser du fait de leur complémentarité. En effet, étant donné que le sens d'une fraction comme partie d'un tout est observé dans de nombreux pays, avec des contextes d'enseignement différents, elle pourrait être une connaissance de nature intuitive, que les élèves sont prédisposés à adopter et qui est renforcée ensuite par l'enseignement des fractions à l'école. Nous avons donc cherché à mieux comprendre le rôle du sens « partie d'un tout » dans le processus de conceptualisation des fractions. Pour cela, le modèle de conception nous est apparu pertinent, car il est mobilisé tant en didactique des mathématiques qu'en psychologie du développement, pour décrire les connaissances d'un individu.

L'objectif de ce texte est de mettre en évidence comment nous avons utilisé ce modèle de conception en croisant nos regards cognitifs et didactiques et l'apport que cela a eu dans notre étude sur le rôle du sens « partie d'un tout » dans le processus de conceptualisation des fractions. Dans une première partie, nous mettons en évidence des points de convergence et des différences dans l'utilisation du modèle de conception dans les recherches en didactique des mathématiques et en sciences cognitives. Dans une seconde partie, nous détaillons le croisement des regards dans notre étude sur les fractions.

II. LE MODÈLE DE CONCEPTION

1. *En didactique des mathématiques*

En didactique des mathématiques, la notion de conception a émergé à partir de travaux empiriques qui ont mis en évidence la stabilité de certaines erreurs d'élèves. La récurrence de ces erreurs a conduit les chercheur·es à mettre en cause leur caractère fortuit. Ils ont cherché à construire des modèles explicatifs, désignés par le terme de conception. Comme le mentionne Artigue (1989), la notion de conception a été utilisée de nombreuses années sans définition formelle. La première définition semble être celle donnée par Duroux (1983, p. 54) :

Dans le déroulement du processus d'acquisition, pour diverses causes [...], certaines de ces situations sont privilégiées au détriment d'autres, ce qui provoque l'apparition de connaissances locales, opérantes sur des sous-clans du champ conceptuel, et pour certaines valeurs des variables des situations concernées, c'est ce savoir local que nous appelons conception.

Dans la théorie des situations (Brousseau, 1989), le modèle de conception permet de caractériser l'état des connaissances des élèves en situation d'enseignement-apprentissage.

« Une conception permet de traiter (reconnaître et résoudre) une sous-classe de situations considérées comme comparables (identifiées) à l'aide des mêmes schèmes, des mêmes termes et avec des procédures voisines, justifiées par des “raisonnements semblables” ou traitées à l'aide de propriétés et de reconnaissances logiquement et fortement liées ». (Brousseau, 1987, p. 7)

Ainsi, le modèle de conception permet de traiter de la même façon l'ensemble des productions des élèves, qu'elles soient correctes ou non, en considérant qu'elles sont la manifestation de la construction d'une connaissance (Soury-Lavergne et al., 2020). Différentes recherches (pour une synthèse, voir Artigue, 1989) ont mis en évidence qu'un individu peut utiliser différentes conceptions de manière indépendante, sans tenir compte de leurs relations, ou au contraire, les lier pour former une conception plus générale, et ce de manière correcte ou incorrecte.

Dans la théorie des champs conceptuels, Vergnaud (1990) définit le concept à l'aide d'un triplet (S, I, J), qui regroupe l'ensemble des situations S qui donnent du sens au concept, l'ensemble des invariants opératoires I associés à ce concept et l'ensemble des signifiants J permettant de représenter le concept, ses propriétés et les situations qu'il permet d'appréhender. Pour lui, une conception est l'analogue du concept, défini à l'aide de ce même triplet, mais cette fois du côté de l'individu (Artigue, 1989). Parmi les invariants opératoires, Vergnaud (1990) identifie les théorèmes-en-acte. Un théorème-en-acte conduit, dans une situation donnée, à une règle d'action valide. Il n'engage pas forcément le concept mathématique considéré dans cette situation et son utilisation dans d'autres situations, en dehors de son domaine de validité, peut mener à des règles d'actions erronées.

D'un point de vue méthodologique, il s'agit, pour les chercheur·es, d'identifier une ou plusieurs conceptions relatives à un concept scientifique donné, à une population d'individus, à un type de problèmes donné. Pour cela, une double analyse est menée, d'une part une analyse épistémologique du concept (au sens de Artigue, 1989), et d'autre part, une étude des connaissances des individus sur le concept, à partir de données expérimentales obtenues en situation (par exemple les stratégies de résolution, les représentations utilisées, etc.). La validation d'une conception en tant que modèle didactique se fait alors par sa confrontation avec les faits observés et par l'étude de sa cohérence avec les théories dans lesquelles elle est développée.

En synthèse, en didactique des mathématiques, une conception est « un objet local, étroitement associé au savoir en jeu et aux différents problèmes dans la résolution desquels il intervient » (Artigue, 1989). Le modèle de conception est utilisé pour élaborer des situations didactiques et analyser le comportement de l'élève dans une situation d'enseignement-apprentissage.

2. *En psychologie des apprentissages*

En psychologie des apprentissages, la notion de conception s'est développée au sein de travaux portant sur la construction des concepts chez un individu. Fischbein (1989) l'a tout d'abord expliqué en termes de modèle tacite pour ensuite mentionner une dimension intuitive. Lakoff et Núñez (2000) les assimilent à des métaphores conceptuelles. Ces travaux évoquent un mécanisme par lequel tout concept mathématique, étant intrinsèquement abstrait, est saisi en se fondant sur des expériences concrètes, de manière non consciente.

Dans la théorie de Fischbein (1989), les modèles tacites font référence aux représentations mentales qui se forment chez les apprenant·es dès le début du processus d'apprentissage des mathématiques. Ces représentations influencent de manière implicite les interprétations et les choix de résolution des problèmes mathématiques. L'individu n'est souvent pas conscient de l'influence de ces modèles sur ses stratégies. Selon Lakoff et Núñez (2000), les métaphores conceptuelles font référence aux processus cognitifs qui permettent de comprendre des notions abstraites, souvent complexes et

difficiles à appréhender directement, en les interprétant dans les termes de concepts préexistants et plus concrets : par exemple « soustraire » est pensé comme « enlever ». Ces métaphores s'ancrent dans des expériences concrètes préalables et ne dépendent pas nécessairement de l'instruction scolaire. Ainsi, dans ce processus, un domaine cible est perçu à travers le prisme d'un domaine source, en utilisant des concepts plus concrets (Lakoff et Núñez, 2000). Ces métaphores conceptuelles permettraient alors aux individus de conceptualiser des notions abstraites en s'appuyant sur des expériences concrètes, en élaborant des idées et des modes de raisonnement déjà éprouvés dans d'autres contextes ; elles peuvent également introduire de nouveaux éléments dans le domaine cible.

Selon Fischbein et ses collègues (1985), les modèles liés aux opérations arithmétiques sont des modèles tacites, intuitifs et comportementaux. Ils montrent que de nombreux élèves rencontrent des difficultés lorsqu'ils abordent les concepts arithmétiques et leur mise en œuvre. Ces difficultés peuvent s'expliquer par le conflit entre les connaissances liées aux procédures algorithmiques enseignées et les modèles tacites, primitifs et non contrôlés, qui s'y rapportent (Fischbein et al., 1985). Ces connaissances intuitives sont acceptées directement comme évidentes, peuvent être valables mais parfois mènent à des raisonnements erronés.

D'un point de vue méthodologique, l'identification des conceptions intuitives s'effectue par le recueil de données expérimentales, via un questionnaire. Deux types de questions peuvent être posées : inventer un problème pour identifier la conception mobilisée en premier lieu et résoudre des problèmes où la conception supposée intuitive est, soit facilitante (car dans son domaine de validité), soit limitante (car en dehors du domaine de validité). Par exemple, Tirosh et Graeber (1991 ; voir aussi Gvozdic, Naud et Sander, 2022 pour des résultats convergents auprès d'autres populations adultes) ont demandé à des enseignants en formation d'inventer des problèmes de division. Dans les productions, les problèmes de type *partition* sont privilégiés, ce qui suggère que la partition est une conception intuitive de la division, contrairement à la quotition. De plus, de meilleurs résultats sont obtenus lorsque les problèmes à résoudre sont des problèmes de partition, en accord avec leur conception intuitive.

En synthèse, en psychologie des apprentissages, les conceptions intuitives font référence à des structures profondes de la pensée, elles ne sont pas toujours explicites, mais façonnent la compréhension, ce qui les rend résistantes à l'enseignement.

3. *Convergences et différences*

En didactique des mathématiques, comme en psychologie des apprentissages, le modèle de conception a émergé au sein d'études cherchant à comprendre et prédire les comportements des individus dans des situations d'apprentissage. Il relève d'une théorie relativement partagée de l'apprentissage, comme un processus dynamique où l'apprenant est acteur et où les connaissances se construisent par interaction du sujet avec un milieu. La conception est alors vue comme une connaissance de l'individu qui se manifeste dans la résolution de tâches mathématiques. Elle a un domaine de validité restreint et est résistante aux apprentissages. La confrontation avec les limites d'une conception, lors de la résolution de problèmes participe au processus de conceptualisation en fournissant des contextes propices à l'évolution des conceptions des élèves. Il s'agit donc d'identifier et élaborer des situations d'apprentissage qui permettent une telle évolution.

Face à ces points de convergence sur la notion de conception, il existe également plusieurs différences. La première est la nature des situations d'apprentissage étudiées. En didactique des mathématiques, les situations sont des situations d'enseignement-apprentissage : c'est le système élève – enseignant – savoir qui est étudié. Dans une situation didactique, l'élève est ainsi amené à interagir avec un milieu constitué de l'ensemble des objets (physiques, culturels, sociaux, humains). Dans la

plupart des études en psychologie des apprentissages, les situations d'apprentissage étudiées ne sont pas des situations d'enseignement. Le milieu étudié est donc de nature différente. Le plus souvent, il ne comporte, par exemple, pas les interactions entre les élèves et l'enseignant·e, entre les élèves entre eux, ou les interactions sociales qui se passent au sein d'une classe.

La seconde différence est le caractère local versus global d'une conception. En didactique des mathématiques, la conception est une connaissance locale, liée aux situations et au savoir en jeu. En psychologie des apprentissages, la conception est davantage un objet global, liée au sujet et qui permet de modéliser des processus mentaux stables et transversaux, c'est-à-dire mobilisés dans différentes situations d'apprentissage, tels que les processus d'analogie, qui ne sont pas propre à un domaine de savoir mais peuvent s'y appliquer (Hofstadter et Sander, 2013).

La troisième différence est l'origine des conceptions et de leur résistance aux apprentissages. En didactique des mathématiques, la conception est liée au savoir en jeu et aux situations, et la résistance provient d'obstacles de nature épistémologique ou didactique. En psychologie, la conception est liée aux processus cognitifs du sujet, et la résistance provient des caractéristiques du comportement mental humain qui sont précoces, irrépressibles et fondamentales.

La quatrième différence est de nature méthodologique. Si les méthodes en didactique des mathématiques et en psychologie s'appuient sur des données empiriques, elles ne le font pas de la même manière. En effet, en didactique des mathématiques, les conceptions sont inférées de l'analyse mathématique et épistémologique du savoir en jeu puis identifiées, dans les comportements des élèves, par confrontation entre les données expérimentales et le modèle conçu a priori. En psychologie, les conceptions sont davantage supposées à partir de modèles théoriques de la cognition humaine non spécifiques au domaine de savoir concerné puis inférées de l'observation directe de comportements d'élèves dans des situations de résolution de tâches mathématiques.

Les points de convergence et les différences nous amènent à identifier deux intérêts principaux afin de croiser les regards cognitifs et didactiques. Le premier est la possibilité de mieux prendre en compte les dimensions cognitives et didactiques et leur dialectique (par exemple local-global, contextuel-stable) dans l'étude du processus de conceptualisation. Le point de vue cognitif conduit à relativiser le poids de l'enseignement et le point de vue didactique permet de ne pas le mettre de côté, en s'intéressant au système élève-enseignant-savoir. Le second est de croiser les méthodes et de proposer des outils complémentaires pour identifier et caractériser les conceptions des élèves sur un savoir donné et étudier leur rôle dans le processus de conceptualisation, en situation d'enseignement-apprentissage. Dans la partie suivante, nous montrons l'apport du croisement de ces deux regards dans le cas particulier d'une étude portant sur les conceptions des fractions.

III. CROISEMENT DES REGARDS DANS UNE ÉTUDE DES CONCEPTIONS DES FRACTIONS

À notre connaissance, aucune étude ne s'est spécifiquement intéressée à identifier le caractère intuitif d'une conception sur les fractions parmi les différents sens identifiés, ni à étudier l'évolution des conceptions au cours de l'enseignement et à son issue. Dans cette étude, nous avons cherché à identifier l'existence d'une conception intuitive des fractions et à la caractériser. L'hypothèse que nous cherchons à vérifier est que le sens « partie d'un tout » est une conception intuitive, renforcée par l'enseignement. Pour cela, nous avons croisé les méthodes utilisées en didactique des mathématiques et en psychologie : nous avons mené une analyse mathématique et épistémologique du concept de fraction, en le modélisant sous la forme du triplet de Vergnaud (1990), afin de caractériser les conceptions, et ensuite, nous avons recueilli des données expérimentales, pour identifier la conception

dominante (identifiée a priori comme partie d'un tout) ainsi que le caractère intuitif de cette conception.

1. Description du concept de fraction

Pour décrire ce concept, nous avons utilisé la modélisation de Vergnaud (1990), sous la forme du triplet (Situations, Invariants opératoires et Registres de représentation). L'ensemble des situations qui donnent du sens au concept de fraction sont les suivantes : des situations de mesurage, de partage (d'une ou plusieurs quantités), de proportion, de ratio, d'agrandissement-réduction ou de proportionnalité. L'ensemble des invariants opératoires associés au concept de fractions sont des définitions, propriétés, règles de comparaison, de calcul sur les fractions. Nous détaillons ci-dessous quelques invariants opératoires que nous avons identifiés, en étudiant les fractions selon leurs différents sens (Behr et al., 1983 ; Charalambous et Pitta-Pantazi, 2007 ; Kieren, 1980) : partage en parts égales, a/b représente a parts d'un tout découpé en b parts égales (sens partie d'un tout) ; définition de $1/b$ comme la part qui reportée b fois donne l'unité de référence ou comme le nombre qui, multiplié par b donne 1 (sens mesure) ; a/b représente le rapport entre deux quantités, propriété des rapports égaux $a/b = ka/kb$ (sens rapport) ; a/b est un coefficient multiplicatif, notion de fonction (sens opérateur) ; a/b est le nombre qui multiplié par b donne a , a/b est le quotient de a par b (sens quotient). L'ensemble des registres de représentations utilisés pour représenter un concept permet d'appréhender ses propriétés et les situations qui sont liées. Pour les fractions, il existe différents registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993) : le registre symbolique comprend l'ensemble des représentations réalisées à l'aide de signes mathématiques et d'écritures chiffrées ; le registre verbal comprend l'ensemble des représentations décrites à l'aide de mots ; le registre iconique comprend les représentations reposant sur des dessins ou des représentations iconiques comme une surface circulaire ou rectangulaire ; le registre de la droite graduée se trouve à la frontière entre le registre visuel, car il s'appuie sur « un dessin » d'une droite graduée, et le registre symbolique avec des nombres, (en écriture chiffrée,) pour indiquer les graduations.

2. Présentation des deux questionnaires pour recueillir les conceptions des élèves sur les fractions

Nous avons créé deux questionnaires, d'une part pour identifier et caractériser les conceptions mobilisées sur les fractions, et d'autre part, pour identifier le caractère intuitif de la conception partie d'un tout d'une fraction. Nous avons proposé ces questionnaires à des enseignants en formation (noté dorénavant adultes), à des élèves de grade 4 (6H en Suisse) n'ayant pas reçu d'enseignement sur les fractions et à des élèves de grade 6 (8H en Suisse) ayant reçu deux années d'enseignement sur les fractions. En questionnant des adultes et des élèves, nous souhaitons étudier l'évolution des conceptions, en lien avec l'enseignement reçu.

Le premier questionnaire est composé de huit questions ouvertes (voir Tableau 1 en annexe). Son objectif est d'identifier, dans un contexte ouvert, les connaissances mobilisées par les élèves. Des questions utilisées pour identifier une conception intuitive ont été proposées, à savoir « pour vous, qu'est-ce qu'une fraction ? » et « inventer un problème dont le résultat est $3/8$ ». Ainsi, si la conception partie d'un tout est intuitive alors les réponses à la première question devraient mobiliser des invariants opératoires tels que le partage en parts égales où a/b représente a parts d'un tout découpé en b parts égales et évoquer une situation de partage d'une quantité pour la seconde question, par exemple j'ai un gâteau coupé en 8 parts égales, 5 ont été mangées, quelle fraction du gâteau reste-t-il ?

Le second questionnaire est composé de six problèmes (voir Tableau 2 en annexe) que nous les avons choisis, en référence aux travaux de Charalambous et Pitta-Pantazi (2007), en raison de la

mobilisation d'un sens différent des fractions selon l'énoncé : problème de partage d'une quantité – sens partie d'un tout ; problème de mesure – sens mesure ; problème de réduction – sens opérateur ; problèmes de partage de plusieurs quantités – sens quotient et problème de ratio – sens ratio. Pour chaque problème, plusieurs méthodes de résolution sont possibles. Nous les avons identifiées dans une analyse a priori et catégorisées à l'aide des invariants opératoires. Si la conception partie d'un tout est intuitive alors elle devrait être majoritairement utilisée lors des résolutions de problèmes, être facilitante pour les problèmes dans son domaine de validité (partage d'une quantité, mesure, réduction) et limitante pour les problèmes qui sont en dehors ou à la limite de son domaine de validité (partage de plusieurs quantités, ratio).

IV. RÉSULTATS

Nous présentons ici nos résultats préliminaires, qui résultent d'une analyse globale des réponses des adultes aux questionnaires. Les analyses des réponses des élèves et des analyses qualitatives et quantitatives plus fines, portant sur chaque participant·e, sont en cours et seront présentées lors du colloque.

Pour le premier questionnaire, nous avons analysé les réponses aux questions 1 et 4/5 (voir Tableau 1) en termes d'invariants opératoires. Lorsqu'il s'agit de définir ce qu'est une fraction (question 1), la majorité des adultes ont recours à des invariants opératoires qui relèvent de la fraction quotient. Leur définition est proche de la définition mathématique d'un nombre rationnel et mobilise des connaissances issues de l'école secondaire. En revanche, lorsqu'il s'agit de créer un problème avec une fraction (questions 4 et 5), les participants ont tendance à mobiliser des invariants opératoires relevant de partie d'un tout, dans un contexte de partage, où un tout (un objet ou un ensemble d'objets) doit être partagé en un nombre de parties ou de sous-ensembles identiques.

Tableau 1 – Pourcentage des adultes qui mentionnent ces interprétations au moins une fois dans leur réponse

Nature des invariants opératoires	Partie d'un tout	Mesure	Opérateur	Quotient	Rapport	Notation formelle	Non interprétable
Question 1	36 %	0 %	2 %	57 %	11 %	2 %	7 %
Question 4/5	49 %	1 %	2 %	11 %	4 %	16 %	16 %

L'identification des représentations mobilisées révèle que les représentations symboliques et iconiques sont largement les plus présentes dans les réponses des adultes (voir Tableau 2). Ces deux registres semblent coexister, l'un provenant de l'apprentissage scolaire (représentation symbolique utilisant des signes mathématiques) et l'autre provenant de connaissances familières (représentation iconique). Parmi les représentations iconiques mobilisées, beaucoup évoquent une surface circulaire. Ce type de représentation a un domaine de validité restreint lorsqu'il s'agit de sortir de la conception partie d'un tout et de représenter, par exemple, 4/3.

Tableau 2 – Pourcentage des adultes qui mobilisent au moins une fois ces registres de représentation

Représentations symboliques	Représentations langagières	Représentations iconiques	Représentations liées à l'axe gradué	Non pertinent
89 %	9 %	54 %	3 %	11 %

Pour le second questionnaire, nous avons vérifié, pour chaque participant·e et chaque type de problème, si les réponses aux problèmes étaient mathématiquement correctes (voir Tableau 3). Nous

constatons que les problèmes les moins bien réussis sont ceux de ratio et de partage de plusieurs quantités et les problèmes les mieux réussis sont ceux de partage d'une quantité, de mesurage et de réduction.

Tableau 3 – Pourcentage de réponse correcte par type de problème et groupe de participant·es

Types de problème	Partage d'une quantité	Mesurage	Réduction	Partage de plusieurs quantités (1)	Partage de plusieurs quantités (2)	Ratio
Adultes (206)	91 %	95 %	92 %	75 %	73 %	71 %

Ensuite, pour chaque réponse correcte, nous avons analysé les stratégies de résolution utilisées par les participant·es en termes d'invariants opératoires pour identifier le sens de la fraction mobilisée (voir Tableau 4). Pour l'ensemble des problèmes (hormis le problème de réduction), les adultes ont davantage utilisé une procédure mobilisant des invariants opératoires liés au sens de la fraction invoquée dans le problème (cases grisées dans le tableau 4). Toutefois, pour chaque problème, une partie des adultes mobilise aussi une stratégie de résolution mobilisant la fraction comme partie d'un tout (première colonne du tableau 4).

Tableau 4 – Proportion des stratégies de réponse mobilisée, pour chaque type de problème pour chaque groupe de participant·es, parmi leurs réponses correctes (en gras les adultes)

	Nature des invariants opératoires mobilisés					autres
	partie d'un tout	mesure	opérateur	quotient	rapport	
Partage d'une quantité	73 %	18 %				
Mesure	45 %	55 %				
Réduction	41 %	24 %	30 %	3 %		
Partage de plusieurs quantités (1)	5 %	13 %		83 %		
Partage de plusieurs quantités (2)	9 %			91 %		
Ratio	20 %				68 %	12 %

À l'instar des travaux existants sur les conceptions intuitives (voir paragraphe 2), nous considérons la prégnance d'une approche comme un indicateur d'une conception intuitive. Ainsi, nos résultats soutiennent l'hypothèse que le sens « partie d'un tout » d'une fraction est une conception intuitive. En effet, il est majoritairement évoqué lors de la création d'un problème et mobilisé dans les résolutions. De plus, il semble facilitant pour les problèmes dans son domaine de validité (partage d'une quantité, mesure, réduction) et limitant pour les problèmes en dehors ou à la limite du domaine de validité (partage de plusieurs quantités, ratio), moins bien réussis par les adultes. Ces résultats seront à confirmer, d'une part avec l'analyse de profils de réponses, et d'autre part avec l'analyse des réponses des élèves pour étudier l'évolution des conceptions.

V. CONCLUSION

Dans cette étude, l'apport du regard didactique a permis de proposer une grille d'identification, de caractérisation et d'analyse des conceptions, grâce à la description du concept de fraction avec le triplet (situations, représentations et invariants opératoires). Il a aussi permis de choisir les différentes situations de résolution de problèmes et mettre en évidence la cohabitation de différentes conceptions, avec la prégnance de la conception partie d'un tout. L'apport du regard cognitif est la caractérisation

de cette conception qui semble plus indépendante des situations et donc moins contextuelle que les autres. La compréhension de ce phénomène pourrait permettre de mieux comprendre les résistances très fortes de cette conception aux situations d'enseignement-apprentissage. En particulier, il semble que les enseignant·es en formation en soient encore très empreints, ce qui pourrait expliquer certains choix d'enseignement, sans doute inconscients et un renforcement de cette conception chez les élèves.

RÉFÉRENCES

- Adjage, R. et Pluvinage, F. (2000). Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(1), 41-88.
- Anselmo, B. et Zucchetta, H. (2018). *Construire les nouveaux nombres au cycle 3 : fractions et décimaux*. Réseau Canopé ; IREM de Lyon.
- Artigue, M. (1989). *Épistémologie et didactique*. IREM de Paris. <https://hal.science/hal-02138030>
- Behr, M., Lesh, R., Post, T. R. et Silver, E. (1983). Rational number concepts. Dans R. Lesh et M. Landau (dir.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (p. 91-125). Academic Press Inc.
- Brousseau, G. (1987). Représentations et didactique du sens de la division. Dans G. Vergnaud, G. Brousseau et M. Hulin (dir.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Actes du colloque du Sèvres* (p. 47-64). La pensée sauvage.
- Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Dans N. Bednarz (dir.), *Construction des savoirs, obstacles et conflits* (p. 41-63). CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc. <https://hal.science/hal-00516581>
- Charalambous, C. Y. et Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293-316. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2>
- Duroux, A. (1983). La valeur absolue : Difficultés majeures pour une notion mineure.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(1), 37-65.
- Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 9-14.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. et Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17.
- Gvozdic, K., Naud, S. et Sander, E. (2022). How robust and persistent are intuitive conceptions? Insights from production tasks. Dans J. Culbertson, A. Perfors, H. Rabagliati et V. Ramenzoni (dir.), *Proceedings for the 44th Annual conference of the Cognitive Science Society*. <https://escholarship.org/uc/item/1903669c>
- Hofstadter, D. R. et Sander, E. (2013). *Surfaces and essences: Analogy as the fuel and fire of thinking*. Basic books.
- Kieren, T. E. (1980). *Recent research on number learning*. Information Reference Center (ERIC/IRC), The Ohio State University. <https://eric.ed.gov/?id=ED212463>

- Lakoff, G. et Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. Basic Books.
- Lortie-Forgues, H., Tian, J. et Siegler, R. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201-221. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008>
- Marmur, O., Yan, X. et Zazkis, R. (2020). Fraction images: The case of six and a half. *Research in Mathematics Education*, 22(1), 22-47. <https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1627239>
- Ni, Y. et Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3
- Soury-Lavergne, S., Croquelois, S., Martinez, J.-L. et Rabatel, J.-P. (2020). Conceptions des élèves de primaire sur la numération décimale de position. *Revue de Mathématiques pour l'École*, 233, 128-143.
- Tirosh, D. et Graeber, A. O. (1991). The effect of problem type and common misconceptions on preservice elementary teachers' thinking about division. *School Science and Mathematics*, 91(4), 157-163.
- Vergnaud, G. (1990). Théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10, 133-170.

ANNEXES

Tableau 1 – Questions du questionnaire 1

1. Pour vous, qu'est-ce qu'une fraction ?
2. Donnez 4 exemples de fraction.
3. Représentez de quatre manières différentes la fraction $1/2$.
- 4/5. Donnez le premier problème qui vous vient à l'esprit dont la solution est $3/8$. Proposez un corrigé pour ce problème.
- 6/7. Donnez le deuxième problème qui vous vient à l'esprit dont la solution est $3/8$. Proposez un corrigé pour ce problème.
8. Si vous deviez expliquer à une autre personne ce qu'est $6/5$, que lui diriez-vous ?

Tableau 2 – Problèmes du questionnaire 2

- Partage d'une quantité** – Andréa fête son anniversaire, son gâteau est découpé en 12 parts, Andréa en mange 5. Quelle fraction de gâteau a été mangée ?
- Mesure** – Je participe à une course de vélo. Chaque étape représente $\frac{1}{4}$ de la course. Combien d'étapes dois-je faire, pour atteindre les $\frac{3}{4}$ de la course ?
- Réduction** – Dans la cour de récréation, il y a 120 enfants, $\frac{3}{4}$ des enfants jouent au ballon. Combien d'enfants jouent au ballon ?
- Partage de plusieurs quantités (1)** – Il y a 5 personnes et 6 plaques de chocolat. Chaque personne reçoit la même quantité de chocolat. Combien chacun en aura-t-il ?
- Partage de plusieurs quantités (2)** – Il y a 8 personnes et 3 plaques de chocolat. Chaque personne reçoit la même quantité de chocolat. Combien chacun en aura-t-il ?
- Ratio** – On prépare une boisson chocolatée en mélangeant du chocolat et du lait. La boisson d'Alix a 2 parts de chocolat pour 3 parts de lait. La boisson de Charlie a 1 part de chocolat pour 2 parts de lait. Qui a la boisson la plus chocolatée ?

ÉVALUATIONS NATIONALES AU CP EN MATHÉMATIQUES EN FRANCE : BIAIS ET IMPACTS SUR LE TRAITEMENT DES DONNÉES ISSUES DU DISPOSITIF ÉVALAIDE

| GUENAI* MÉLANIE

Résumé | Des résultats récents issus des évaluations nationales de CP et CE1 en France font état de différences de réussite genrées en mathématiques dès la mi-CP (Martinot *et al.*, 2021), semblant montrer des ancrages précoces des stéréotypes, jamais encore observés en France. Nous montrons, à partir d'observations en classe de CP, que ces différences pourraient être dues à des biais liés aux conditions de passation des tests cadrés par le dispositif ÉvalAide, dont les buts mal définis interrogent la pertinence des données produites et de leur exploitation.

Mots-clés : évaluations standardisées, biais de mesures, performance, pilotage éducatif, compétences mathématiques, inégalités de genre

Abstract | Recent results from national assessments of CP and CE1 in France report gender differences in achievement in mathematics from the middle of CP (Martinot *et al.*, 2021), appearing to show early anchoring of stereotypes, never observed before. We show, based on observations in CP classes, that these differences could be due to biases linked to the conditions of administration of the tests framed by the ÉvalAide system, whose poorly defined goals call into question the relevance of the data produced and their use.

Keywords: Standard assessments, measurement bias, performance, educational management, mathematical skills, gender inequalities

I. INTRODUCTION

Cette communication a pour but d'analyser l'adéquation des mesures réalisées lors des évaluations nationales de CP-CE1 cadrées par le dispositif ÉvalAide au regard des compétences mathématiques des élèves qu'elles prétendent décrire. En prenant appui sur l'analyse du dispositif, on s'intéresse à l'ensemble du processus ayant abouti à ces résultats, depuis la conception de l'outil de mesure jusqu'aux publications. À partir d'observations réalisées en CP au cours du premier semestre 2024-2025, on examine notamment les conditions dans lesquelles se réalisent effectivement ces évaluations pendant la classe.

Nous mettons au jour des décalages entre les observations et les préconisations du dispositif ÉvalAide, tant du point de vue de la pratique de classe que de l'analyse des données et du traitement qui en est fait. En particulier, l'analyse didactique *a priori* et des productions des élèves observés montre que certaines des mesures sont sans rapport avec les compétences annoncées ou qu'elles les dévalorisent en raison de biais externes aux mathématiques. Les observations des ressentis des élèves fournissent également des pistes explicatives des différences de performances genrées récemment médiatisées (Martinot *et al.*, 2021), trop hâtivement assimilées à des performances mathématiques. Elles ouvrent des perspectives d'études complémentaires relevant de la sociologie de l'éducation et de la psychologie de l'enfant, dont les enjeux sont essentiels : il s'agit d'évaluer la balance coûts bénéfices

* Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Saclay – France – melanie.guenais@universite-paris-saclay.fr

d'un dispositif imposé à tous les élèves dans le cadre scolaire et aux effets potentiellement discriminatoires dans la construction de leur rapport aux savoirs, notamment en mathématiques.

II. DESCRIPTION DU DISPOSITIF ÉVALAIDE

La France a mis en place, depuis 2018, des évaluations nationales pour tous les élèves à l'entrée au CP, à la mi-CP et à l'entrée en CE1¹. Le cadre est fixé par le dispositif ÉvalAide élaboré par un groupe de travail du Conseil scientifique de l'Éducation nationale (CSEN) dirigé par le neuroscientifique S. Dehaene. Nous en décrivons la démarche et les objectifs à partir de l'analyse du document d'accompagnement (Sprenger-Charolles *et al.*, 2019).

1. *Un objectif principal concernant à mesurer des compétences cognitives*

Le dispositif vise à évaluer

« les compétences cognitives de tous les élèves français en début et en milieu de CP ainsi qu'en début de CE1 [pour] identifier les besoins spécifiques de chaque élève [...]. Le nouveau dispositif utilise des épreuves issues de la recherche qui permettent de bien repérer la nature des difficultés (qui peuvent concerner les traitements visuels, phonologiques ou sémantiques, par exemple) » (p. 3).

Pour les mathématiques, les items sont regroupés selon 5 thèmes définis par les auteurs : (1) la connaissance des symboles des nombres ; (2) le passage rapide des symboles à leur sens et vice-versa (dénombrement, comparaison des quantités) ; (3) la compréhension de la position des nombres sur une ligne numérique ; (4) la résolution de petits problèmes arithmétiques adaptés au niveau de l'élève ; (5) la maîtrise de certains concepts de base dans le domaine de la géométrie

2. *Un objectif secondaire de dépistage précoce de difficultés par des tests « prédictifs »*

Les choix des tests sont développés dans la partie B.2 du document. Les tests portant sur les points 1, 2, 3 et 5 constituent des prédictifs de réussite ou difficulté supposés² pour les compétences ultérieures en mathématiques, bien que la causalité ne soit pas prouvée³. Seul le test du point 4 est déterminé pour rendre compte de la capacité à résoudre des problèmes arithmétiques, faiblesse des élèves français selon l'enquête internationale TIMSS.

3. *Des modalités d'organisation des passations éloignées des sources citées.*

Les auteurs déclarent s'appuyer sur des dispositifs étrangers portant pour la plupart sur le dépistage précoce de troubles des apprentissages (surtout le langage). Bien que le protocole de test de performance de lecture en Angleterre soit présenté en modèle, ils s'en démarquent cependant délibérément (multiplication des items, aspect longitudinal des tests, dates de passations), insistant sur l'objectif d'une mise en place de tests prédictifs, pour permettre un traitement précoce des élèves en

¹ Élèves ayant entre 6 ans (en CP) et 7 ans (en CE1) dans l'année.

² « Pour chaque test, nous indiquons ses fondements scientifiques et son intérêt pour détecter ou anticiper d'éventuelles difficultés scolaires ». p. 26 : « indicateurs de capacités ultérieures », p. 27 : « L'épreuve Symp de comparaison numérique [...] corrélée à la réussite scolaire en mathématiques, a été intégrée au dispositif ÉvalAide [et] permet de détecter les élèves en difficulté. »

³ p. 24, les auteurs précisent : « Les méta-analyses récentes signalent des relations modestes, mais significatives, entre la capacité précoce de discrimination approximative des nombres et la réussite ultérieure en mathématiques. Cependant, la direction de la causalité que reflète cette corrélation reste débattue ».

difficulté potentielle⁴. Ils généralisent les items en temps court et contraint, pour « faciliter les comparaisons entre élèves », « limiter la fatigue », ou rendre compte de l'automatisation. Ils introduisent des distracteurs destinés à « mieux cerner les compétences acquises par un élève, ainsi que l'origine des erreurs qu'il commet ».

4. *Exploitation des données : un outil multitâche, à destination d'abord pédagogique ?*

Alors qu'il s'agit, page 35, de « fournir aux équipes pédagogiques des repères sur les compétences de chaque élève », les tests sont aussi destinés aux statistiques nationales, comme « indicateurs précieux sur les progrès et les difficultés des élèves [...] même si ce n'est pas l'objectif primaire du dispositif », ou bien pour « mesurer si les gestes pédagogiques sont efficaces pour réduire les inégalités et faire progresser tous les élèves ». Côté recherche, ces données devraient permettre de confirmer la nature prédictive de ces tests, car les preuves scientifiques manquent dans le domaine des nombres et surtout de la géométrie.

Les mesures des résultats sont fondées sur un comptage des items réussis, qui fournit un score global sur une passation⁵. Deux types d'exploitations sont ensuite diffusées : des valeurs seuils définissant 3 groupes : « à besoin », « fragile » ou « satisfaisant », et des scores de performance, analogues aux évaluations bilans internationales.

III. PROBLÉMATIQUE

Le dispositif ÉvalAide est présenté comme une aide pédagogique au service de la progression des élèves. Il est constitué de séries de tests « prédicteurs » des difficultés futures, sur la base de corrélations supposées avec des compétences générales dont la valeur reste faible, ne fait pas consensus et doit être contrôlée. Alors qu'il n'est pas fondé sur des compétences mathématiques visées par des programmes scolaires, les tests sont présentés comme « acquis fondamentaux » dans le guide du professeur⁶ dont les parents reçoivent un graphique étoilé des scores obtenus. De même, l'exploitation publique des données produites assimile ces tests à des mesures de performances en mathématiques, interrogeant la pertinence de cette exploitation :

1. Ces tests permettent-ils effectivement de mesurer et comparer des compétences en mathématiques ? Comment prendre en compte des entraînements ciblés sur les tests ?
2. Quels sont les facteurs impactant les scores calculés ? En particulier, comment analyser les différences filles-garçons apparaissant au cours du CP ?
3. En place depuis 6 ans, quels bénéfices pour les enfants en difficulté met-on en évidence ?
4. Quels sont les coûts d'un tel dispositif ? En particulier, que peut-on objectiver sur l'impact de tels dispositifs pour la vie de l'élève et son rapport aux savoirs, aux mathématiques ?

À partir d'observations en classe de CP, nous apportons ici de premières pistes d'analyse pour éclairer ces questions. En confrontant la présentation théorique des résultats diffusés nationalement à la réalité de leur production, nous mettons en évidence des biais qui les rendent finalement peu représentatifs des compétences en mathématiques des élèves.

⁴ p. 27 « Il ne s'agit donc pas de vérifier les acquis à la fin de l'année, mais d'alerter et d'accompagner les enseignants sur les difficultés potentielles afin de pouvoir aider l'élève bien avant qu'il se trouve en échec ».

⁵ Guide de scores, notice technique pour enseignants

⁶ Guide pour le professeur - Repère 2024, MEN, [en ligne](#)

IV. CONFRONTATIONS AUX OBSERVATIONS EN CLASSES EN CP

Les passations nationales de début CP comprennent 5 séquences (3 de français et 2 de mathématiques, séquences 2 et 4) qui se déroulent chaque jour de la semaine pendant la 2^e ou la 3^e semaine suivant l'entrée en primaire début septembre. Une seconde série de la même nature se déroule vers la mi-janvier. Nous restituons une synthèse des observations réalisées au cours du premier semestre 2024-2025 dans 2 classes de CP (CP1 : classe de 14 élèves en Réseau d'Éducation Prioritaire, IPS⁷ 86 ; CP2 : 22 élèves, milieu social mixte IPS 110). Ces observations se sont déroulées en 9 séances au total, incluant les évaluations nationales de début de CP et de mi-CP, ainsi que des observations en pratique ordinaire, dont l'une en évaluation de classe (commune à l'école en CP1 ou individuelle à la classe en CP2).

1. *Modalités : divergences entre consignes d'ÉvalAide et l'organisation habituelle*

Observations des organisations des tests nationaux en septembre (T1) et janvier (T2) :

Les enseignantes suivent les consignes dictées par le guide du professeur. Les enfants sont séparés ou déplacés pour leur interdire de copier, ne doivent ni parler ni se déplacer pendant la durée de la passation. La durée totale des passations en T1 est d'environ 40 minutes pour un temps de travail affiché de l'ordre de 10 minutes. Elle est d'environ 20 minutes en T2⁸. Le support est un livret blanc de taille A4 d'une soixantaine de pages numérotées. La plupart des items sont segmentés et contraints par un temps limité, parfois très court, que les enseignantes font respecter. Leur aide éventuelle doit se limiter à la compréhension des modalités de report du résultat. En pratique, l'un des tests est explicite. La contrainte de temps permet peu de venir en aide aux élèves qui en ont besoin, pour des raisons variées (crayon cassé, page mal tournée, dictée de nombres non entendue, enfant démobilité, etc.). Les réactions notées en T1 montrent de l'inquiétude et de la fatigue chez les élèves, du stress chez les enseignantes dans les deux classes, conduisant à des paroles ou comportements parfois brusques. Lors de la passation à T2, malgré l'assouplissement des modalités, l'anxiété est globalement perceptible en CP2 à l'annonce de l'utilisation du livret. En CP1 après l'évaluation, sont exprimés : du stress pour la majorité des garçons, du désintérêt pour deux ou trois filles et un garçon, de l'intérêt pour trois filles. La contradiction entre le discours préconisé pour présenter la passation de manière rassurante et le climat de classe résultant des prescriptions est perçue par les élèves⁹.

Observation des évaluations ordinaires de classe observées en décembre :

En CP1, les élèves se déplacent à une place dédiée aux évaluations individuelles pour éviter les copies, ils sont autonomes, contrairement au début d'année. En CP2, il n'y a pas de séparation ni de déplacement. La durée des évaluations est d'environ 15 à 20 minutes dans les 2 classes. L'évaluation se déroule sur une (CP2) ou plusieurs séances (CP1). L'enseignante présente aux enfants un ensemble d'activités à compléter sur une page A4 recto-verso pliée en deux qu'ils gèrent en autonomie dans une durée adaptée aux besoins des élèves les plus lents, les plus rapides pouvant choisir une activité libre lorsqu'ils ont fini. Les activités proposées à l'intérieur de chaque domaine évalué sont progressives. Dans une séance, elles peuvent être réalisées dans l'ordre souhaité au rythme de l'élève. L'enseignante circule et remobilise les élèves qui semblent perdus, réexplique la consigne individuellement, encourage, vérifie que le matériel est bien disponible (crayon cassé, couleurs, etc.), réajuste les

⁷ Indice de Position Sociale des établissements scolaires, accessibles [en open data](https://data.education.gouv.fr/) sur le site data.education.gouv.fr.

⁸ En T1, la séquence 2 observée en CP1, séquence 4 observée en CP2 ; en T2, seule la séquence 2 est observée.

⁹ Une élève restitue oralement en présentation en début de CP qu'« on a le droit de se tromper... un peu ».

consignes au besoin. Il n'a pas été noté lors de ces évaluations des réactions d'élèves permettant d'identifier des changements des habitudes de classe ni pour les élèves, ni pour l'enseignante.

2. *Analyse didactique des tâches mathématiques et des productions d'élèves*

Parmi les élèves en grande difficulté on identifie des enfants allophones (en T1) ou à besoins particuliers déjà identifiés, certains sont dispensés des tests en T2, contrairement aux consignes. Nous décrivons les résultats et la nature des difficultés observées lors des tests d'ÉvalAide¹⁰.

Numération

Ce domaine comporte un test de lecture et un test d'écriture en chiffres de 10 nombres dits à l'oral entre 0 et 10 en T1. En T2, seul un test d'écriture de 10 nombres dits entre 0 et 31 est proposé. Environ 20 % des élèves sont identifiés comme « fragiles » en T1. Les erreurs résultent surtout de problèmes externes aux mathématiques¹¹. Une élève signalée comme « à besoin » se révèle très performante aux évaluations de fin de trimestre. Une autre, non repérée en T1, est en grande difficulté. Elle présente des inversions dans l'écriture des nombres à 2 chiffres. Si les contenus mathématiques proposés sont adaptés pour des élèves de CP, leur mise en œuvre provoque des difficultés. Les modalités de passation tendent à déstabiliser les élèves et à sous-évaluer leurs compétences dans ce domaine.

Dénombrement – Comparaison

Ce domaine comporte un test de dénombrement et un test de comparaison en T1. Seule la comparaison est reproduite en T2. Le dénombrement contient 8 items qui ne posent globalement aucun problème de réalisation. Seuls quelques élèves en difficulté dans l'ensemble des tests sont aussi en difficulté pour dénombrer les collections désorganisées au-dessus de 5. La longueur des items impacte la durée de la séquence de tests, augmentant la fatigue des élèves. Le test de comparaison comporte en effet 40 paires de nombres à 1 puis 2 chiffres dont il faut barrer le plus grand. La consigne donnée aux élèves précise : « C'est un exercice de vitesse. Il dure seulement 1 minute. Ce qui compte, c'est d'en faire le plus possible. »¹². En T1, on relève des réactions d'anxiété chez les élèves dès la découverte de la page. Le chronométrage conduit à des situations de stress chez les élèves comme chez les enseignantes. La frustration et le sentiment d'échec sont perceptibles aussi bien en T1 qu'en T2¹³. Très peu d'erreurs de comparaison ont été observées malgré un taux de remplissage inférieur en moyenne à la moitié. Le sens de lecture de haut en bas nuit à la réalisation de la tâche pour de nombreux élèves, dont ceux identifiés comme « fragiles ». La consigne « barrer la bonne réponse » est source d'échec : les réponses des élèves qui utilisent à bon escient les signes < ou > ou qui entourent le plus grand sont comptées fausses ce qui conduit à des productions « fragiles ». Au contraire, une production « satisfaisante » comporte un taux d'erreur important dû à des inversions dans le sens de la lecture des nombres à 2 chiffres. Les modalités d'évaluation mettent la plupart des élèves en difficulté alors que la compétence semble acquise. Les mesures réalisées ne rendent donc pas compte des acquis en mathématiques et signalent à tort des élèves en difficulté.

¹⁰ Livret élève et Guide pour le professeur - Repère 2024, MEN, [en ligne](#).

¹¹ Nombre non entendu, report dans la mauvaise case, rythme trop rigide, manque de temps, élève en détresse liée aux conditions de passation.

¹² L'objectif de ce test issu de l'expérimentation « SYMP » est le dépistage précoce d'élèves présentant des déficiences en mathématiques (Brankaer *et al.*, 2017). L'article montre une corrélation positive qui tend à diminuer durant la scolarité avec les compétences mathématiques, en précisant l'absence de causalité.

¹³ Agitation, souffle bruyant, commentaires entre élèves, protestation, gestes d'énervement chez plusieurs garçons.

Ligne numérique

Il s'agit d'un test de repérage d'étiquette sur un segment gradué présenté sous forme de QCM présentant 6 nombres dans le désordre. 6 items sont proposés en T1 avec des graduations unitaires entre 0 et 10, puis 12 items en T2, avec des graduations unitaires sur des segments de longueur 4 ou 10, avec des bornes variant jusqu'à 35. En T1, l'annonce de devoir tourner les pages seul provoque des réactions d'inquiétudes et du découragement chez les élèves. Les erreurs proviennent souvent d'un manque de compréhension de la consigne. Le format QCM accentue l'échec¹⁴. Ce test ne relève pas de la comparaison en T1, tous les nombres proposés étant inclus dans le segment représenté. En T2, les productions n'ont pas été observées. Les résultats relevés montrent que les élèves en difficulté sur ce test ont des difficultés généralisées.

Opérations arithmétiques

Il s'agit de deux tests proposés en T2 sous forme de QCM comportant, dans les réponses proposées, des nombres dans le désordre et des distracteurs. L'un porte sur les additions, l'autre sur les soustractions, ils comportent chacun 10 items à réaliser en 3 minutes. Le problème de contrainte de temps est signalé dans le bilan de l'inspection générale lors du déploiement national du dispositif (Bruschini *et al.*, 2019¹⁵). Les additions portent sur deux nombres dont le premier est inférieur à 20 et le deuxième est compris entre 2 et 10. On note 3 passages de dizaine (avec des additions de 5 ou 6) et 2 de vingtaine. La progressivité est irrégulière. Les 2/3 des élèves sont en difficulté en CP2 alors qu'ils sont très peu à l'être en CP1. Les CP2 n'avaient pas été évalués à l'écrit sur les opérations symboliques en décembre, au contraire des CP1. Les attendus relèvent d'un niveau de CP très avancé à cette date de l'année. Les modalités augmentent l'échec des élèves. Les tests ne rendent pas compte des compétences visant les décompositions décimales et les compléments des petits nombres à la dizaine. Ils encouragent à modifier la progression habituelle en privilégiant le travail symbolique sur les opérations au détriment de la notion de dizaine, indispensable pour comprendre l'écriture décimale.

Résolution de problèmes additifs :

En T1, les 2 tests comportent chacun 3 problèmes de comparaison de collections sous forme de QCM. Certains énoncés ambigus peuvent avoir plusieurs réponses. Le premier test est figuratif et bien réussi par les élèves de CP1 qui ont été entraînés au protocole à suivre pour comparer des collections dessinées. La réussite d'un élève allophone suggère que le protocole est appliqué indépendamment de l'énoncé oral. Le second test, seulement oral, fait échouer les 2/3 des élèves dans les 2 classes. La présentation sous forme de QCM engendre des réponses comptées fausses qui ne sont pas forcément des erreurs : un certain nombre d'élèves entoure les données qui figurent dans les réponses proposées et écrit la réponse dans le cadre réservé au brouillon. En T2, 2 tests sont proposés comportant 2 puis 3 problèmes, le premier additif, les autres soustractifs¹⁶. L'échec est massif en CP2 contrairement au CP1 qui a été entraîné. Le format QCM est encore une fois source d'échec ou d'ambiguïté sur l'interprétation des réussites en raison du choix des variables numériques (les bonnes réponses peuvent être trouvées avec une démarche erronée). L'hétérogénéité des structures de problèmes présentés en T2 dénote de la répétition des comparaisons des problèmes en T1. Les attendus demandés du point de vue de la modélisation semblent très ambitieux en T2 et prématurés en T1. Le format et

¹⁴ Un élève choisit l'étiquette placée au même endroit que la graduation, plusieurs écrivent directement sur l'emplacement du label.

¹⁵ p. 12 « il reste difficilement acceptable pour les équipes de voir proposer une série de calculs que les élèves ne pourront pas tous traiter pendant le temps accordé afin de mesurer leur dextérité en calcul. Un travail d'explicitation sur ce point est encore nécessaire pour les enseignants, mais aussi pour les inspecteurs et les formateurs. »

¹⁶ Transformation ou composition, puis 2 transformations avec recherche de l'état final, puis de la transformation, et une comparaison

l'hétérogénéité des énoncés nuisent à la réussite des élèves, surtout les moins confiants. Cette analyse est cohérente avec la très faible réussite nationale à ces items (Le Breton, 2024).

Domaine de la géométrie

Le test de géométrie, présenté en début de CP et en début de CE1, consiste à entourer parmi plusieurs formes proposées celle qui correspond au « collage » de deux formes symétriques disposées de manière variée. Nous restituons 3 exemples parmi les 9 items proposés :

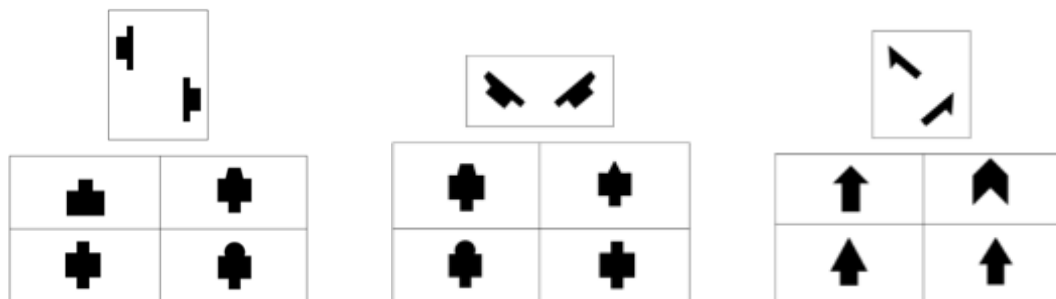


Figure 1 – 3 items de « géométrie » de l'exercice 8, séquence 2, CP (T1), reconduits en CE1 (T3). Consigne : « entoure la forme qu'on obtient en assemblant les 2 formes »

D'abord, la consigne est mathématiquement incorrecte : l'assemblage n'étant pas unique, les formes possibles sont nombreuses. Les compétences mathématiques relèvent de la comparaison des longueurs ou angles proches dans des configurations complexes. Cet exercice ne correspond à aucun attendu mathématique à ce niveau de classe et ne repose que sur la capacité visuelle à discriminer des petites différences. Il met en difficulté des élèves pour des raisons externes aux mathématiques (troubles de la vision, troubles dys, attention, compréhension de la consigne, etc.). Dans la classe observée, aucun élève ne réussit la totalité des items, deux élèves sont signalés en difficulté uniquement pour ce test. Ce test est sans rapport avec des compétences en géométrie en CP ou en CE1, il déroute les enseignantes qui trouvent sa présentation étonnante et croient dépister ainsi des élèves en difficulté qu'elles n'avaient pas identifiés.

V. ANALYSE

La littérature scientifique a étudié les protocoles des tests standardisés (e.g. Heulot *et al.*, 2012 ; Trosseilles et Rocher, 2015). Dans les rapports issus des analyses des tests antérieurs à 2015 en France, le Haut Conseil à l'Éducation identifie le manque de clarté sur la finalité, diagnostique ou bilan, comme une entrave à la valeur informative des données recueillies, susceptible de transmettre des informations non pertinentes (e.g. Haut Conseil de l'Éducation, 2011). Le Haut Conseil à l'Éducation (Salines et Vrignaud, 2001, annexe 6) recommande des protocoles distincts pour chacun de ces objectifs, les estimant non compatibles. En particulier, la passation d'un test bilan doit être uniforme avec des items non publics balayant un socle d'attendus et proposer un codage binaire des réussites laissant en retrait l'analyse d'erreur. Au contraire, une évaluation diagnostique peut ne porter que sur quelques items et doit pouvoir s'adapter aux besoins individuels. Si le modèle suédois cité dans Martinot (2021) s'inscrit bien dans ce cadre diagnostique¹⁷, les modalités présentées par le dispositif ÉvalAide s'y opposent.

¹⁷ Pas de visée comparative entre les élèves, de notes standardisées ni de remontée nationale, liberté aux enseignants de concevoir leur dispositif d'évaluation sur la base de propositions, évaluations individualisées, attention au bien être et à valoriser les compétences de l'enfant. Extraits : « Selon [...] l'Agence nationale suédoise pour l'éducation [...] il n'est pas approprié d'utiliser l'échelle nationale de notation dans le plan de développement. Les formulaires

3. *Peut-on parler de tests de compétences en mathématiques ?*

Des contenus non représentatifs des compétences en mathématiques en CP

L'analyse des contenus des tests d'ÉvalAide montre de nombreuses faiblesses qui diminuent leur validité. Certains tests sont sans lien clair avec des compétences mathématiques de CP (géométrie, ligne numérique), ou mal adaptés au niveau de classe. Des thèmes sont absents (système décimal) tandis que d'autres sont surreprésentés (comparaison), donnant à l'ensemble une répartition déséquilibrée et peu diversifiée. La progressivité est irrégulière, rendant peu fiable la mesure de la compétence visée (résolution de problèmes). Même par domaine, les contenus semblent mal adaptés pour rendre compte des compétences mathématiques de CP.

Des conditions de recueil des productions d'élèves inadaptées au cadre scolaire ordinaire

La présentation des contenus se démarque des évaluations usuelles conçues par les équipes éducatives : le support, la longueur, la répétitivité, le format ou le manque de progressivité sont autant de décalages de nature à perturber les conditions de travail des élèves. Les modalités de passation créent un environnement qui inquiète les élèves. En début d'année, il déstabilise les élèves qui ne connaissent encore ni les lieux ni les personnes et met l'enseignante face à des injonctions contradictoires. Ce cadre imposé nuit à la mise en confiance des élèves, favorise la mise en place d'un climat de compétition, et le découragement. Nos observations permettent d'identifier des biais dus aux items ou au contexte qui nuisent à la réalisation des tâches.

Des critères de mesure des productions qui sous-estiment les compétences mathématiques

Du point de vue strict des compétences mathématiques, le respect des modalités de calculs de score entraîne la non prise en compte des productions montrant des compétences acquises, mais non conformes au cadre attendu : entourer plutôt que barrer, écriture libre plutôt qu'entourer, absence d'erreur mais manque de temps pour réaliser les tâches dans un cadre chronométré. Ces biais d'items, dévalorisant les réussites, favorisent le traitement non uniforme des passations et des remontées des résultats par les enseignants.

Un pilotage national avec des items libres : quid des effets d'un entraînement au test ?

Enfin, l'exploitation des données pour des comparaisons nationales de scores présente un risque de surentraînement aux tests dont les contenus sont ouverts, sans contrôle sur les bénéfices réels apportés pour les apprentissages d'un tel entraînement. L'enjeu diagnostic des élèves en difficulté est donc en contradiction avec l'enjeu de classement, national ou entre élèves.

Finalement, ces tests présentent des déséquilibres des contenus, entre et à l'intérieur des domaines considérés. Le dispositif introduit des biais induits par la présentation, les conditions de réalisation et les critères de mesures de réussite qui déforment ou sous-estiment les compétences acquises. Il occulte ou déforme la réalité de la pratique des mathématiques, qui nécessite temps de réflexion et coopération pour travailler le raisonnement, indispensable à la progression des élèves et leur autonomie, point faible signalé régulièrement dans les études internationales. La conception des contenus comme les modalités d'évaluation nécessiteraient donc d'être reprises de manière critique pour donner une mesure fidèle des compétences en mathématiques, si telle est leur destination. Par conséquent, assimiler ces scores de performances à des compétences en mathématiques est scientifiquement peu fondé.

d'évaluation [de] l'Agence nationale suédoise pour l'éducation ne sont que des exemples de la manière dont de tels formulaires peuvent être conçus. »

4. *Facteurs impactant les calculs de score et analyses possibles des résultats*

Nos observations permettent de montrer que le dispositif introduit de nombreux biais relevant d'aptitudes sociales ou psychologiques impactant les performances : mise en compétition individuelle, rythme contraint et vitesse, items inhabituels, QCM, tâches monotones et qui font peu de sens. Des différences de scores filles/garçons dans les évaluations nationales en France apparaissent dans toutes les classes à partir de 2018, date de la mise en place des tests d'ÉvalAide (Eteve *et al.*, 2025). Elles sont faibles, persistantes et nouvelles¹⁸. Ces observations montrent la présence d'un avantage masculin cohérent avec les impacts de ces biais identifiés par la littérature (e.g. Stoevenbelt *et al.*, 2023 ; Montolio *et al.*, 2021). Interpréter des petites différences de score comme des compétences mathématiques qui seraient inégales entre filles et garçons dès quelques mois de scolarisation au CP est donc non pertinent.

5. *Quels apports du dispositif pour les élèves en difficulté et le niveau général ?*

Ce dispositif est administré à l'ensemble des classes de CP et CE1 depuis 6 ans, aucun bilan n'est publié sur son intérêt pour les élèves. Une légère augmentation des résultats de la mi-CP peut être liée à un entraînement spécifique ou un changement dans les contenus présentés, sans rapport établi avec de meilleures compétences. Les résultats des tests mettent en évidence des inégalités filles-garçons nouvelles dès le milieu de CP qui s'accroissent entre 2018 et 2021 puis se stabilisent (Eteve *et al.*, 2025). Il n'y a pas de progression significative aux résultats de TIMSS 2023 en CM1, avec des scores pour la France parmi les plus faibles des pays participants. Ce bilan ne permet donc pas d'établir l'existence d'un bénéfice apporté par ce dispositif, ni global pour l'ensemble des élèves, ni pour ceux en difficulté.

6. *Les risques d'un dispositif intrusif et d'informations biaisées sur les apprentissages*

L'exploitation médiatisée de ces scores à des fins de classement national ne correspond pas à l'intention d'aide au diagnostic de difficultés précoces présentée aux enseignants. Elle risque d'encourager l'entraînement aux tests dans un but de performance, au détriment de son objectif diagnostic. L'omission des biais introduits par le dispositif entraîne la transmission d'informations déformées sur les résultats publiés, aussi bien pour les familles qu'au national. D'une part, en focalisant sur de faibles différences de performances genrées, attribuées sans discernement aux compétences en mathématiques, on contribue à renforcer des idées reçues sur des moindres compétences supposées des filles en mathématiques. D'autre part, en imposant des modalités rigides de passation qui créent de l'inquiétude chez les enfants dès leur entrée à l'école et les sous-évaluent, on risque une dégradation de la relation aux savoirs en mathématiques, dont on donne une image dénaturée de la pratique.

VI. CONCLUSION

Les observations de terrain permettent de montrer des décalages importants du vécu des évaluations par les élèves et leurs enseignants avec les intentions affichées du dispositif pour l'intérêt de l'enfant. Ces décalages sont renforcés par une ambiguïté dont les évaluations sont porteuses entre des tests prédictifs de difficulté, d'ordre cognitif, et des tests de mesure de compétences mathématiques, d'ordre didactique. Si cette confusion n'est pas nouvelle, elle introduit des biais qui impactent le milieu scolaire et peuvent fausser les mesures et leurs interprétations. Dans ces conditions, le dispositif pourrait s'avérer inefficace à la fois dans son rôle diagnostic et comme bilan de performances en mathématiques à l'échelle du pays.

¹⁸ Aucune différence significative lors des évaluations de : CP panels entre 1997 et 2011, fin de CE1 en 2014, fin de CE2 et début de 6e jusqu'en 2017 ; fin de 3e en 2015 [MENESR-DEPP, 2015, 2016, 2017, 2018, 8.1].

Les modalités de passation collectives et contraintes, motivées par une exploitation nationale, conduisent à la création d'un climat de classe insécurisant et hors cadre scolaire, contraire à une mise en confiance des élèves et la possibilité d'une passation diagnostique sereine adapté aux besoins. Les contenus des tests sont peu représentatifs des compétences mathématiques visées selon les programmes scolaires. La présentation et les modalités de passation de ces tests dénaturent et tendent à sous-évaluer les compétences acquises, mettant parfois de très bons élèves en difficulté. Par conséquent, les mesures de scores transmettent une information peu pertinente des compétences en mathématiques au niveau national.

Notre analyse permet d'identifier également dans le dispositif des biais qui induisent des conditions psychologiques ou sociales favorisant la réussite des garçons, sans rapport avec les mathématiques. Ils pourraient expliquer les petites différences de scores entre les filles et les garçons. Alors qu'on ne peut établir de bénéfices de ce dispositif pour diminuer les inégalités scolaires, ses effets pervers questionnent. En négligeant les biais introduits par l'administration de ces tests cognitifs, on transmet une interprétation infondée en attribuant à des petites différences de scores des inégalités de compétences en mathématiques, renforçant des stéréotypes négatifs sur les femmes. Plus largement, l'installation répétée de ce dispositif, au-delà de son coût financier et humain pour l'État, pourrait nuire aux apprentissages et à l'image renvoyée de la pratique des mathématiques, effets pervers déjà identifiés par la Corée.

RÉFÉRENCES

- Brankaer, C., Ghesquière, P. et De Smedt, B. (2017). Symbolic magnitude processing in elementary school children: A group administered paper-and-pencil measure (SYMP Test). *Behavior Research Methods*, 49(4), 1361-1373. <https://doi.org/10.3758/s13428-016-0792-3>
- Bruschini, B., Hunault, O., Yebbou, J. (pilotes), Galais, P., Richet, B. et Turin-Bartier, M. (2019). L'organisation et la passation des évaluations nationales dans le premier degré [Rapport de recherche] (n° 2019-096). <https://www.education.gouv.fr/l-organisation-et-la-passation-des-evaluations-nationales-dans-le-premier-degre-41684>
- Eteve, Y., Garnerio, M. et Paillet, V. (2025, février). Évolution des écarts de performances entre filles et garçons en mathématiques, au fil du temps et de la scolarité. *Note d'Information*, (25.04). <https://doi.org/10.48464/ni-25-04>
- Heulot, F., Robert, A., Rousse, S., Vancauwenberghe, E., Roditi, E. et Chesné, J. (2012). Un point de vue didactique sur les questions d'évaluation en éducation. Les compétences et le socle commun. Dans M. Lattuati, J. Penninckx et A. Robert (dir.), *Une caméra au fond de la classe de mathématiques* (p. 279-319). Presses universitaires de Franche-Comté.
- Haut Conseil de l'Éducation. (2011). *Les indicateurs relatifs aux acquis des élèves. Bilan des résultats de l'École*. <https://www.vie-publique.fr/files/rapport/pdf/114000565.pdf>
- Le Breton, S. et Neirac, L. (2024, juillet). Évaluations point d'étape à mi-CP 2023-2024 : amélioration des résultats par rapport à 2023 et réduction des écarts entre secteurs de scolarisation. *Note d'Information*, (24.24).
- Martinot, P., Deheane, S., Bressoux, P., Huguet, P., Potier-Watkins, C., Sprenger-Charolles, L. et Ziegler, Z. (2021). Qu'apprend-on des évaluations de CP-CE1 ? *Note du CSEN*, (03.24). https://www.reseau-canope.fr/fileadmin/user_upload/Projets/conseil_scientifique_education_nationale/Note_CSEN_2021_03.pdf

- MENESR-DEPP. (2015). *Repères et références statistiques. Enseignements, formation, recherche*.
https://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/sites/default/files/content_migration/document/rers_2015_457907.pdf
- Montolio, D. et Taberner, P. (2021). Gender differences under test pressure and their impact on academic performance: A quasi-experimental design, *Journal of Economic Behavior & Organization*, 191, 1065-1090. <https://doi.org/10.1016/j.jebo.2021.09.021>
- Salines, M. et Vrignaud, P. (2001, juin). *Apprécier et certifier les acquis des élèves en fin de collège : brevet et évaluations-bilans* [Rapport]. Haut Conseil de l'évaluation de l'école. <https://www.vie-publique.fr/files/rapport/pdf/024000205.pdf>
- Sprenger-Charolles, L., Dehaene, S. et Ziegler, J. (dir.). (2019). *Évaluer pour mieux aider. ÉvalAide, un dispositif scientifique de prévention des difficultés en lecture et en mathématiques en CP et en CE1*.
<https://eduscol.education.fr/document/7736/download>
- Stoevenbelt, A. H., Wicherts, J. M., Flore, P. C., Phillips, L. A. T., Pietschnig, J., Verschuere, B., Voracek, M. et Schwabe, I. (2023). Are speeded tests unfair? Modeling the impact of time limits on the gender gap in mathematics. *Educational and Psychological Measurement*, 83(4), 684-709.
<https://doi.org/10.1177/00131644221111076>
- Trosseille, B. et Rocher, T. (2015). Les évaluations standardisées des élèves. *Éducation et formations*, (86-87), 15-35. <https://shs.hal.science/halshs-03572761/file/EF-86-87-2015-article-01-evaluations-standardisees-eleves-perspective-historique-pdf.pdf>

**DISCUSSIONS
PROGRAMMÉES**

PLURILINGUISME ET MATHÉMATIQUES EXPÉRIENCES, ENJEUX ET PISTES D’ACTION

| ANDRIANARIVONY* FIDY HERITIANA, BARWELL** RICHARD, CHELLOUGUI*** FAIZA,
DURAND-GUERRIER**** VIVIANE, KILANI***** IMED, ROBO***** ELÉDA, SADJA-
NJOMGANG***** JUDITH ET SALONE***** JEAN-JACQUES

Résumé | Dans ce texte nous présentons un compte rendu des deux séances de la discussion programmée « Plurilinguisme et mathématiques. Expériences, enjeux et pistes d’actions » qui s’est tenue pendant le colloque EMF 2025 à Montréal.

Mots-clés : plurilinguisme, diversité culturelle, apprentissages mathématiques, enjeux didactiques, francophonie

Abstract | In this text, we present a summary of the two sessions of the scheduled discussion ‘Plurilingualism and mathematics. Experiences, challenges and paths for action’, which took place during the EMF 2025 conference in Montreal.

Keywords: plurilingualism, cultural diversity, mathematics learning, educational challenges, Francophonie

I. INTRODUCTION

La discussion programmée dont ce texte rend compte s’est déroulée à Montréal, pendant le colloque EMF 2025 en deux sessions les mardi 27 mai et jeudi 29 mai 2025. Elle faisait suite à celle qui s’est tenue à Cotonou pendant le congrès EMF 2022. Les échanges avec et entre les participants lors des sessions de 2022 avaient confirmé l’intérêt croissant de notre communauté pour prendre en compte la question des langues dans l’enseignement et l’apprentissage des mathématiques, en considérant les spécificités des contextes linguistiques et culturels, les défis auxquels les enseignants doivent faire face et les opportunités offertes par la prise en compte explicite du bi-plurilinguisme dans la classe de mathématiques (Durand-Guerrier et Salone, 2023). Les situations de plurilinguisme sont variées et multiples dans l’espace mathématique francophone. A la suite des présentations de plusieurs contextes qui ont eu lieu à Cotonou en décembre 2022 et des riches discussions qui s’en sont suivies, nous avons choisi de présenter à nouveau deux exemples très différents de situations de plurilinguisme comme point de départ pour les échanges : le cas du Canada par Richard Barwell (section II) et le cas de

* Institut Montpellierain Alexander Grothendieck, UMR 5149 CNRS, Université de Montpellier – France – fidy-heritiana.andrianarivony@etu-umontpellier.fr

** Unité de recherche éducationnelle en mathématiques, Faculté d’éducation, Université d’Ottawa – Canada – richard.barwell@uottawa.ca

*** Faculté des Sciences de Bizerte, Université de Carthage – Tunisie – chellouguifaiza@yahoo.fr

**** Institut Montpellierain Alexander Grothendieck, IMAG, CNRS, UM, Université de Montpellier – France – viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

***** Institut Supérieur de l’Éducation et de la Formation Continue – Tunisie – kilanis2006@yahoo.fr

***** Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Education et Formation (LIRDEF), Université de Montpellier – France – eleda.robo@umontpellier.fr

***** École Normale Supérieure, Université de Yaoundé 1 – Cameroun – judithnjomg@yahoo.fr

***** Recherches et Ressources en Éducation et Formation – ISPE Guadeloupe, Université des Antilles – France – jean-jacques.salone@univ-antilles.fr

Madagascar par Fidy Heritiana Andrianarivony (section III). Imed Kilani, responsable scientifique du GT4, Dimensions historique, culturelle et langagière dans l'enseignement des mathématiques, a de son côté réalisé un inventaire complet des contributions abordant la question des langue(s) et du plurilinguisme dans l'enseignement des mathématiques à travers les colloques EMF de 2000 à 2025 (section IV). Dans la section V, nous faisons un bref compte-rendu des discussions ayant eu lieu lors de la seconde session, avant de présenter nos conclusions et perspectives.

II. DIVERSITÉ SOCIOLINGUISTIQUE EN SALLE DE CLASSE DE MATHÉMATIQUES AU CANADA

Le Canada est un pays riche en diversité linguistique comprenant ses langues originales des Premières Nations, des Peuples inuit et de la Nation métisse, les deux langues principales de colonisation — le français et l'anglais — et de nombreuses langues issues de l'immigration jusqu'à présent. Au total se parlent au-delà de 200 langues dans le territoire canadien.

Pour cet aperçu de la diversité sociolinguistique en salle de classe de mathématiques au Canada, nous adoptons une perspective de sociolinguistique critique, inspiré par la pensée de Bakhtine (1978). Notamment il a proposé le concept de *discours unitaire* qui est une idéologie selon laquelle les langues ont une version standard, parfaite, et qui repose sur l'idée que toute langue est entièrement descriptible, clairement délimitée, et stable. Cette perspective unitaire est liée aux idéaux eurocentriques qui datent des lumières et qui conçoivent un lien étroit entre une langue, un peuple uni et un état-nation. De tels idéaux ont animé le colonialisme dans les efforts des Européens d'imposer des frontières selon ce que Makoni et Pennycook (2007) nomme « l'invention » des langues en Afrique et dans les Amériques quand un paysage de fluidité linguistique fut remplacé par des territoires fixes liés à des variétés de langue spécifiques. Par extension, l'idée d'un langage mathématique est également un artefact idéologique qui reflète une perspective de discours unitaire au sein des mathématiques.

La charte fondatrice du Canada moderne reconnaît trois peuples fondateurs : les peuples autochtones, le peuple français et le peuple anglais. Toutefois, il n'y a que deux langues officielles : le français et l'anglais. L'éducation dans les deux langues officielles est un droit constitutionnel. L'éducation dans toutes ses formes est une responsabilité provinciale, sauf dans le cas de certaines communautés autochtones. Au-delà des provinces, les systèmes scolaires francophones et anglophones sont généralement organisés de façon distincte. Dans la province du Québec, l'éducation francophone est protégée et promue par la loi. Dans les autres provinces, l'éducation francophone se fait en milieu linguistique minoritaire. Des programmes scolaires d'immersion en français visent à former des élèves bilingues anglais-français. Les élèves issus de l'immigration récente bénéficient d'un soutien pour apprendre le français ou l'anglais. Les langues autochtones sont insuffisamment soutenues et plusieurs sont à risque de disparition (malgré les appels à l'action émis par la commission sur la vérité et la réconciliation du Canada (CVR, 2015).

Parmi les multiples cas de figure envisageables, voici quatre exemples des salles de classe de mathématiques tirés de nos recherches ethnographiques (voir Barwell, 2020a, 2020b) :

Une classe de la 6^e année dans une école anglophone au Québec (donc minoritaire), avec des élèves autochtones, des élèves issus de l'immigration, des élèves nés dans la région dont les parents ont fréquenté une école anglophone au Canada. Dans cette classe, nous avons observé que les langues maternelles des cinq élèves allophones n'étaient presque jamais entendues et n'étaient jamais utilisées dans le contexte des mathématiques. L'usage quasi exclusif de l'anglais, langue d'instruction, semblait contribuer à la marginalisation des élèves allophones et autochtones. Nous avons observé en particulier une faible participation des quelques élèves issus de la nation crie (eeyou).

Une classe des 5^e-6^e années dans la même école anglophone au Québec composée uniquement de quelques élèves de la Nation crie du nord du Québec. Un jour, nous avons observé deux élèves qui ne parvenaient pas à comprendre le texte d'une situation problème auquel ils devaient répondre qui parlait longuement de l'histoire du festival des tulipes à Ottawa et de son impact économique. Il n'y a pas de tulipes dans leurs territoires ! De plus, ce texte n'aidait aucunement à résoudre le problème sur la page suivante, dans lequel on devait compléter une série de figures faites en tulipes dans des platebandes. Le texte du problème était plus qu'un obstacle à la compréhension du problème ; il semblait aliéner les élèves qui ne se voyaient pas du tout dans la version du Canada ou du peuple canadien y était avancée (Barwell, 2020a).

Une classe d'accueil des 5^e-6^e années dans une école francophone au Québec (donc majoritaire) avec comme objectif l'insertion des élèves issus de l'immigration récente dont le niveau de français n'a pas été jugé suffisant pour les cours réguliers. Moins de temps était alloué aux mathématiques par rapport aux classes ordinaires, car l'enseignement du français prévalait. Même pendant les cours de mathématiques, il y avait une attention particulière à la langue. Par exemple, un élève qui proposait une réponse pertinente à l'oral se voyait souvent corriger pour le vocabulaire, la grammaire ou la prononciation. La présence de plusieurs autres langues auprès des élèves était peu valorisée.

Une classe d'immersion française de la 3^e année dans une école anglophone en Ontario (donc majoritaire) composée d'élèves anglophones et allophones. Même si l'enseignant ne parlait que le français dans la classe, les élèves parlaient un mélange de français et d'anglais souvent dans la même phrase. Nous avons observé des élèves lire les énoncés des problèmes en français et ensuite en discuter entre eux en anglais avant d'écrire leur réponse en français. Contrairement à l'exemple précédent, l'apprentissage des mathématiques avait préséance sur le perfectionnement de la langue française.

En conclusion, voici quelques points de réflexion. La diversité linguistique au Canada est elle-même diverse. Les élèves apportent des répertoires de langues diversifiés, comme le montrent les exemples ci-dessus. Les séquelles de la colonisation demeurent présentes dans la marginalisation de certaines langues et la dominance d'autres langues. Le personnel enseignant doit naviguer entre des forces linguistiques en tension – d'un côté, l'histoire coloniale et la standardisation et, d'un autre côté, le besoin des élèves de s'exprimer et de donner du sens aux mathématiques. Selon les idées de Bakhtine, cette tension est inhérente – il n'y a pas de « solution », seulement des stratégies de médiation et de navigation selon le contexte.

III. L'ENSEIGNEMENT DE L'IMPLICATION À MADAGASCAR PENDANT LA PÉRIODE DE MALGACHISATION

Cette discussion s'inscrit dans une réflexion sur l'histoire de l'enseignement de la logique et du raisonnement dans un contexte bilingue français-malagasy. Elle met en lumière le rôle du concept d'implication dans les programmes scolaires malagasy durant la période de malgachisation (1972-1991) et propose des pistes pour l'enseignement actuel (Andrianarivony et Salone, 2021). À Madagascar, l'enseignement a suivi plusieurs étapes : durant la colonisation (1896–1960), le système est calqué sur le modèle français ; la première République (1960–1972) maintient cette continuité ; la révolution de 1972 inaugure la malgachisation, où le malagasy devient langue d'enseignement et conduit à un programme malgachisé en 1976. Cette réforme provoque un bouleversement majeur mais s'arrête en 1991, avec le retour du français comme langue d'enseignement. Absente des programmes à partir de 1996, la logique est réintroduite dans le programme de 2019.

1. Le traitement de l'implication dans le programme de 1976

Le programme malgachisé de 1976 accorde une place particulière au concept d'implication, en lien avec l'enseignement de la logique. L'étude des manuels de l'époque, notamment *Kajy T.10*, révèle que l'implication est présentée selon trois cadres, tels que décrits par Deloustal-Jorrand (2000) : *le cadre ensembliste*, où l'implication est définie comme une inclusion d'ensembles ; *le cadre de la logique formelle*, où elle apparaît comme une relation entre propositions ; *le cadre du raisonnement déductif*, où l'implication structure la démonstration mathématique. Cette pluralité témoigne d'une volonté pédagogique de faire comprendre la notion sous différents angles.

Un apport notable de cette période réside dans l'élaboration de traductions et d'expressions malagasy pour exprimer l'implication. Quatre formulations principales sont identifiées : *Q raha P* (« Q si P »), utilisée pour introduire des définitions ; *raha P dia Q* (« si P alors Q »), employée pour formuler des théorèmes ; *na izà x na izà, P(x) dia Q(x)* (« quel que soit x, P(x) alors Q(x) »), mobilisée dans les énoncés conditionnels généraux ; *P nobo izany Q* (« P, par conséquent Q »), réservée aux démonstrations et enchaînements de preuves. Chaque expression remplit une fonction spécifique dans la pratique mathématique, depuis la définition jusqu'à l'argumentation. L'usage de *nobo izany* est particulièrement intéressant, car il marque explicitement l'inférence dans le discours de démonstration avec l'utilisation du mot *izany* qui signifie « ceci/cela ». L'étude lexicale révèle cependant des ambiguïtés dans l'usage scolaire de ces expressions. Par exemple, *raha P dia Q* est parfois compris comme « si P est vrai alors Q est vrai », mais aussi comme « si P est faux alors Q est faux », ce qui engendre des confusions. De même, la distinction entre implication logique et causalité n'est pas toujours claire. La négation de l'implication, qui n'est pas une implication, est source de difficultés (Durand-Guerrier et Njomgang-Ngansop, 2009). Enfin, comment peut-on faire la différence entre *Q raha P* et *Q raha P ary amin'izay ihany*, dont le dernier signifie « Q si et seulement si P » ? De même, comment peut-on traduire en malagasy « Q seulement si P » ? Ces difficultés montrent la complexité de l'enseignement de la logique en contexte bilingue. La malgachisation a aussi produit un lexique mathématique original : *fitaribana* pour implication, *ivofo* pour réciproque, *mira-sanda* pour équivalence, *tolo-kevitra* pour proposition, *petra-kevitra* pour hypothèse, *tsoa-kevitra* pour conclusion. Ces choix traduisent un effort de conceptualisation et d'appropriation de la logique à travers la langue malagasy.

2. Perspectives

Depuis la fin de la malgachisation, l'implication n'a plus été enseignée explicitement jusqu'à sa réintroduction en 2019. Or, dans la pratique, de nombreux enseignants continuent d'utiliser le malagasy à l'oral pour expliquer les leçons, malgré le retour du français comme langue officielle d'enseignement. Les travaux d'Andrianarivony et Salone (2021) suggère que les traductions et expressions issues de la période de malgachisation pourraient constituer un appui pédagogique précieux, à condition d'être exploitées de manière consciente et explicite. Deux pistes de recherche sont ainsi ouvertes : *Quelle est aujourd'hui la conception de l'implication chez les élèves, les étudiants et les enseignants s'exprimant en langue malagasy ? Comment tirer parti de l'héritage linguistique de la malgachisation pour enrichir l'enseignement de la logique et du raisonnement mathématique ?*

IV. LANGUE(S) ET PLURILINGUISME DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES À TRAVERS LES COLLOQUES EMF (2000-2025)

L'enseignement des mathématiques soulève des enjeux langagiers majeurs, que ce soit en contexte plurilingue ou monolingue. Bien que perçues comme universelles, les mathématiques s'appuient sur des langues naturelles, elles-mêmes ancrées dans des contextes culturels spécifiques (Barwell, 2009 ;

Radford et Barwell, 2016). Cette dimension linguistique a progressivement gagné en importance dans la recherche en didactique, comme en témoignent les colloques EMF, de Grenoble 2000 à Montréal 2025. Cette synthèse retrace l'évolution des réflexions sur le rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et présente les principaux résultats issus de ces rencontres.

Lors du colloque EM¹ 2000 à Grenoble, les questions linguistiques ont commencé à émerger, notamment à travers un atelier consacré au rôle du langage dans la médiation entre les représentations figurales et théoriques en géométrie. Plusieurs communications ont également abordé les défis des contextes multilingues dans divers pays francophones. Ces premières interventions ont amorcé une réflexion prometteuse sur l'impact du langage en mathématiques. La réflexion s'est prolongée au colloque EMF 2003 à Tozeur, où, malgré l'absence d'un groupe thématique dédié à ces enjeux, plusieurs communications ont mis en évidence l'importance du bilinguisme, les interactions entre culture et langage, ainsi que les difficultés liées à l'usage de la langue courante dans les énoncés mathématiques. Ces travaux ont permis de souligner que le langage influence directement la compréhension, la conceptualisation et la transmission des savoirs. En revanche, au colloque EMF 2006 à Sherbrooke, les questions linguistiques ont été peu représentées. Une exception notable fut une recherche en milieu inuit, qui a révélé les tensions entre langues autochtones et langues officielles. Cette étude a mis en évidence des décalages culturels et linguistiques importants, soulignant la nécessité d'adapter les situations d'enseignement aux contextes linguistiques locaux.

Le colloque EMF 2009 à Dakar a marqué un tournant important avec la création du groupe de travail GT4² consacré aux dimensions linguistique, historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques. Plusieurs communications ont approfondi les tensions entre langues vernaculaires et langues d'enseignement, les confusions entre langage courant et langage mathématique, ainsi que la valorisation des savoirs et des langues locales, en particulier en Afrique subsaharienne francophone. Cette dynamique s'est poursuivie lors d'EMF 2012 à Genève. Malgré le retrait explicite de la dimension linguistique des groupes de travail, elle a trouvé écho dans d'autres espaces du colloque, notamment lors d'une table ronde consacrée au plurilinguisme en Afrique du Nord. Par ailleurs, plusieurs communications ont souligné l'importance d'adapter les ressources didactiques aux contextes locaux et de former les enseignants à ces enjeux. Le projet européen Math-Bridge en est un exemple, avec sa plateforme d'apprentissage multilingue conçue pour les étudiants apprenant les mathématiques dans une langue seconde. Lors du colloque EMF 2015 à Alger, le groupe de travail GT8³, consacré aux aspects culturels, langagiers et idéologiques en mathématiques, a recentré les discussions sur les dimensions culturelles et langagières. Les communications ont mis en lumière le fossé entre les recherches francophones et anglophones, tout en explorant des thématiques centrales : le plurilinguisme, la transition du langage naturel vers le langage formel et le rôle du langage dans la construction du sens mathématique. Certaines recherches ont souligné la nécessité d'une approche à la fois logique et linguistique pour analyser et clarifier le sens des énoncés mathématiques.

Le colloque EMF 2018 à Paris a marqué une nouvelle avancée. Le GT8⁴ a élargi son champ aux dimensions idéologiques, en plus des aspects culturels et langagiers. Quatre communications majeures ont exploré les enjeux du plurilinguisme dans l'enseignement des mathématiques. Le projet LEXICON a étudié le langage professionnel des enseignants dans une perspective interculturelle, tandis que l'approche du translanguaging a été mobilisée pour valoriser les ressources linguistiques des élèves. Ces

¹ Cette première édition, s'intitulait simplement Espace Mathématique (EM).

² <https://emf.unige.ch/colloques-invisible/emf/groupe-de-travail-4>

³ <https://emf.unige.ch/colloques-invisible/actes-emf-2012/groupe-de-travail-8>

⁴ <https://emf.unige.ch/colloques-invisible/emf-2018/groupe-de-travail-8>

travaux ont confirmé que la diversité linguistique peut soutenir la compréhension, réduire les inégalités et favoriser un enseignement plus inclusif. Au colloque EMF 2022 au Bénin, la question linguistique a occupé une place centrale, notamment par le groupe de travail GT4⁵ et par une Discussion Programmée dédiée au bi-plurilinguisme et apprentissage des mathématiques⁶. Les recherches présentées ont mis en avant les effets bénéfiques de l'usage des langues locales, notamment en début de scolarité, sur la compréhension des concepts mathématiques. La diversité des contextes linguistiques, en Afrique, dans les outre-mer ou ailleurs, a été largement abordée. Des projets comme ELAN ainsi que les réseaux GREMA, PluriMaths et RIICLAS ont illustré l'intérêt croissant pour les dimensions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Enfin, lors d'EMF 2025 à Montréal, cette dynamique s'est consolidée. Le groupe de travail GT4⁷, dans la continuité d'EMF 2022, a fortement investi les questions linguistiques, avec cinq communications sur sept consacrées au plurilinguisme dans des contextes variés (Québec, Tunisie, Madagascar, France). La Discussion Programmée⁸ dont rend compte ce texte s'inscrit dans le prolongement de celle de EMF 2022. Elle a réuni divers chercheurs autour de politiques et d'expériences linguistiques, et des échanges en groupes ont permis de faire émerger des défis partagés ainsi que des pistes d'action concrètes.

Cette brève synthèse rend compte de l'évolution de la prise en compte des enjeux langagiers dans les colloques EMF. Depuis 2000, ces rencontres ont progressivement reconnu l'importance du plurilinguisme, envisagé tour à tour comme un obstacle ou comme une ressource pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Adler, 2001 ; Barwell, 2009). Malgré des avancées notables, les recherches sur ces questions restent encore limitées en contexte francophone (Radford et Barwell, 2016), ce qui appelle à un renforcement des travaux scientifiques et des politiques éducatives intégrant pleinement la diversité linguistique dans l'enseignement des mathématiques au sein de l'espace francophone.

V. COMPTE RENDU DES DISCUSSIONS DE LA SECONDE SESSION

La deuxième session de la discussion programmée a été consacrée à des échanges sur les différents contextes linguistiques dans les systèmes éducatifs des participants, qui ont été invités à discuter par petits groupes de deux ou trois personnes linguistiquement hétérogènes, sur un ou plusieurs thèmes, au choix, de situations de plurilinguisme. Nous rendons compte ci-dessous d'une partie de ces échanges.

1. *La situation au Maghreb aujourd'hui – des choix politiques qui prennent peu en compte l'impact du plurilinguisme sur les apprentissages mathématiques*

En Algérie, depuis 2016, il y a deux langues officielles : l'arabe et le tamazight (parlé en Kabylie). Les mathématiques peuvent être étudiées dans l'une des deux langues, au choix des parents. Dans le moyen et le secondaire⁹, l'enseignement des mathématiques se fait essentiellement en arabe. Dans le supérieur, jusqu'à présent, l'enseignement des mathématiques se faisait en français. A partir de la rentrée 2025, cet enseignement se fera en anglais, langue qui n'est pas dans l'environnement

⁵ <https://emf.unige.ch/colloques-invisible/emf2022/actes-bis/gt4-dimensions-historique-culturelle-et-langagiere-dans-lenseignement-des-mathematiques>

⁶ https://emf.unige.ch/application/files/8017/4196/2449/0000_LES_ACTES_DU_COLLOQUE_EMF_2022.pdf

⁷ <https://sites.google.com/view/emf2025/groupe-de-travail/gt4?authuser=0>

⁸ <https://sites.google.com/view/emf2025/autres-activite%C3%A9s/discussions-programme%C3%A9es?authuser=0>

⁹ Le moyen, enseigné dans les collèges, dure quatre ans ; le secondaire, enseigné dans les lycées, dure trois ans.

linguistique quotidien des étudiants. En Tunisie, la langue arabe officielle, littéraire, est la langue de l'école de base (jusqu'à 15 ans) qui est différente de la langue familiale, de la rue, de la société. Au lycée et à l'université, l'enseignement des mathématiques se fait en français. Il y a également une demande pour un enseignement des mathématiques en anglais qui s'inscrit dans une tendance plus large visant à substituer l'anglais au français, ce qui soulève des interrogations quant à l'avenir de la francophonie. Au Maroc, l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire 1 et 2 se fait en arabe ; à l'université, il se fait en français. Cependant depuis 2018, un bac international a été mis en place dans le secondaire 2, puis le secondaire 1 ; les mathématiques y sont enseignées presque partout en français, mais parfois aussi en anglais, en espagnol ou en allemand. Actuellement, une transition linguistique se met en place en 5^e année du primaire avec l'introduction d'une terminologie en français. Ces changements semblent avoir été faits sans une réflexion approfondie sur le rôle de la langue dans les apprentissages mathématiques. En outre, en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques en arabe, se pose la question de la bilatéralité lorsque les textes mathématiques écrits en arabe, lus de droite à gauche, contiennent des formules ou des équations écrites dans le langage mathématique symbolique utilisé par les mathématiciens, et lus de gauche à droite (Abdeljaouad, 2004 ; Kilani, 2024).

2. *La situation pour les élèves inuits du Canada*

La seconde thématique qui a émergé lors de la deuxième session de la discussion programmée est celle de la situation d'apprentissage des mathématiques par des élèves inuits du Canada. Comme le soulignait déjà Louise Poirier en 2005, les élèves inuits sont confrontés à des défis de nature langagière et mathématique. Chez les Inuits, le système de numération a pour base 20 et les nombres 1, 2, 3 et 4 sont désignés en inuktitut par des mots simples, Atausiq, Maqruuk, Pingasut, Sitamat ; et le 5, lui, se réfère à la désignation anthropomorphique du « bras ». Cependant à partir de 6, le processus de numération change : avec le 6 (Pingasu-ujur-tut, qui se traduit « Ils sont comme plusieurs trois »), on est déjà dans la multiplication. Le 7 (Sitama-uju-nngi-gar-tut : « Ils ne sont pas tout à fait comme plusieurs quatre ») est, en plus porteur d'une négation (Poirier, 2005, p. 239). Le nombre 20 se dit « Avatik », c'est « l'homme est complet » ; 400 c'est « le grand 20 » ; la numération orale s'arrête à 400. Cette manière de dire les nombres, propre à l'Inuktitut est bien éloignée des désignations anglaise ou française, langues de scolarisation au Canada¹⁰. Par ailleurs, au début de la scolarité, l'enseignement se fait en inuktitut par des enseignants inuits puis en anglais ou en français. Ce sont donc les enfants qui sont tenus de changer de langue et c'est une difficulté en mathématiques. En outre, alors que les mots nombres s'expriment en base 20, c'est la numération décimale de position qui est enseignée à l'écrit, les numérations orales et écrites ne correspondent donc pas.

3. *La situation pour les élèves de communautés amérindiennes de Guyane française*

En Guyane française où la langue de scolarisation est le français, plusieurs communautés amérindiennes sont présentes avec des langues spécifiques et des modes de pensée qui ne sont pas sans conséquence dans la classe de mathématiques. Selon Appolinaire (2024), en kali'na, plusieurs mots existent pour parler de « division » et de « soustraction » en fonction du contexte d'utilisation. On utilise des vocables différents pour couper ou partager du bois, du papier, de la viande ou du pain. De même, pour la soustraction, on dispose de trois termes en kali'na : « isoka » pour l'idée d'enlever les vêtements ; « ikako » pour enlever des objets ou des aliments ; « ipina » pour enlever des aliments. Dans la langue de la communauté amérindienne palikur, vingt-et-un mots sont utilisés pour désigner les nombres 1, 2 et 3 selon qu'il s'agisse d'objets cylindriques, de durée, de graines, d'êtres animés, d'outils, d'arbres, de

¹⁰ D'autres exemples sont donnés en annexe.

tissus etc. (Michel et al., 2024). Par ailleurs, comme dans le cas des inuits, le système de numération n'est pas celui utilisé en français : il utilise la base 10 avec une sous base 7. Le nombre cardinal 8, par exemple, se traduit littéralement par « 7 et 1 je rajoute ». L'exemple du kali'na et du palikur posent la question de la maîtrise des concepts dans des langues amérindiennes pour une transposition au sein de l'école de la république. En effet, alors que la connaissance du nombre cardinal 3 doit être maîtrisée dès 4 ans dans le système éducatif français, cette maîtrise semble bien difficile à cet âge-là dans la mesure où elle ne peut se faire en palikur. C'est une question soulevée en substance par Appolinaire (2024), enseignante et formatrice autochtone de culture kali'na.

Ces exemples nous montrent toute la complexité de l'utilisation des langues autochtones en classe de mathématiques mais laissent aussi entrevoir des potentialités pédagogiques.

VI. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

La discussion programmée « Plurilinguisme et mathématiques : expériences, enjeux et pistes d'action » a mis en lumière la diversité des situations linguistiques dans la classe de mathématiques, avec ses forces et ses faiblesses en matière d'enseignement et d'apprentissage, sur des territoires qui ont en commun la langue française, que ce soit parce qu'il s'agit d'anciennes colonies, le Canada, Madagascar, l'Algérie, la Tunisie et le Maroc, ou qu'il soit question d'une collectivité territoriale de l'Outre-mer français, la Guyane française. Les exemples de profils de classes au Canada nous apprennent que la « diversité sociolinguistique en salle de classe de mathématiques » n'est pas neutre dans la mesure où on peut y repérer « la marginalisation de certaines langues et la dominance d'autres ». Cette tension entre les langues est aussi en jeu dans les pays du Maghreb aujourd'hui, dans les choix politiques d'une langue d'enseignement. Sur ce point, le cas de Madagascar nous apprend que le va-et-vient entre des choix politiques qui ont à un moment donné privilégié la langue malagasy à la langue de la colonisation a conduit à la production d'un lexique mathématique original qui pourrait constituer un appui pédagogique. Dans le cas de communautés autochtones du Canada et de Guyane française, un lexique mathématique, en langues autochtones, existe et est par nature ancré dans le contexte spécifique des peuples. Cependant, dans quelle mesure ces répertoires sont-ils mobilisables dans le cadre des mathématiques « occidentales » ? Comment faire de ces répertoires linguistiques des leviers en termes d'enseignement et d'apprentissage ? Quels choix des langues pour l'enseignement et les apprentissages mathématiques ? Dans quelle mesure l'enseignement des mathématiques peut-il contribuer à la vitalité des langues minorisées ? Malgré une prise en compte croissante de l'importance du plurilinguisme dans la classe de mathématiques, comme en témoignent les colloques EMF depuis 2000, ces questions restent toujours vives.

Ces discussions soulignent, comme s'il était encore nécessaire de le faire, combien le langage mathématique que l'on pensait unique et universel ne l'est sans doute pas autant qu'on pourrait le croire. Le contexte d'apprentissage des mathématiques, la culture et la langue des apprenants ne sont pas neutres dans le processus de conceptualisation des mathématiques « occidentales ».

RÉFÉRENCES

- Abdeljaouad, M. (2004). La bilatéralité dans le discours mathématique : une contrainte institutionnelle en Tunisie. *Petit x*, (64), 36-59.
- Adler, J. (2001). *Enseigner les mathématiques dans les classes multilingues*. Kluwer Academic Publishers.
- Andrianarivony, F. et Salone, J.-J. (2021). Approche bilingue dans l'enseignement des mathématiques à Madagascar. *Petit x*, (115), 93-114.
- Appolinaire, L. (2024). Témoignage : intégrer les savoirs autochtones en classe. *Contextes et Didactiques*, (24). <https://doi.org/10.4000/1396z>
- Bakhtine, M. M. (1978). *Esthétique et théorie du roman*. Gallimard.
- Barwell, R. (dir.). (2009). *Multilingualism in mathematics classrooms: Global perspectives*. Multilingual Matters.
- Barwell, R. (2020a). Les textes mathématiques, l'altérité et l'appropriation du discours mathématique dans les classes de mathématiques en langue seconde. Dans G. Maheux, G. Pellerin, S. E. Quintriego Millán et L. Bacon (dir.), *La décolonisation de la scolarisation des jeunes Inuit et des Premières Nations : sens et défis* (p. 173–198). Presses de l'Université du Québec.
- Barwell, R. (2020b). Learning mathematics in a second language: Language positive and language neutral classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(2) 150-178.
- Commission de vérité et réconciliation du Canada [CVR]. (2015). *Honorer la vérité, réconcilier pour l'avenir : sommaire du rapport final de la Commission de vérité et réconciliation du Canada*. CVR.
- Deloustal-Jorrand, V. (2000). L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs. *Petit x*, (55), 35-70.
- Durand-Guerrier, V. et Njomgang-Ngansop, J. (2009). Questions de logique et de langage à la transition secondaire-supérieur. L'exemple de la négation. Dans *Actes de l'Espace Mathématique Francophone 2009 (EMF 2009), avril 2009, Dakar, Sénégal* (p. 1033-1047).
- Durand-Guerrier, V. et Salone, J. J. (2023). Discussion programmée 2 – Bi-plurilinguisme et apprentissages mathématiques. Dans *Actes du 8^e colloque de l'espace mathématique francophone (EMF 2022)* (p. 1246-1250). Les éditions de l'Université de Sherbrooke.
- Kilani, I. (2024). La complexité scripto-lecturale du texte mathématique au collège en Tunisie. *RMEMST-MJMSTE*, 2(1), 43-62. ATDM.
- Makoni, S. B. et Pennycook, A. (dir.). (2007). *Disinventing and reconstituting languages*. Multilingual Matters.
- Michel, M., Norino, A. et Batista, M. (2024, juin 4). *Le nombre en parikwaki*. Région académique Guyane. <https://langues-de-guyane.ins.ac-guyane.fr/Le-nombre-en-parikwaki.html>
- Poirier, L. (2005, 23-29 juillet). *Mathématiques, langage et culture chez les Inuits* [Atelier]. CIEAEM 57, Piazza Armerina, Italie. https://sites.unipa.it/grim/cieam/cieam57_poirier_hafezian.pdf
- Radford, L. et Barwell, R. (2016). Le langage dans la recherche en didactique des mathématiques. Dans A. Gutiérrez, G. Leder et P. Boero (dir.), *Deuxième manuel de recherche sur la psychologie de l'enseignement des mathématiques* (p. 275-313). Sense.

ANNEXE

Louise Poirier qui a travaillé avec les inuits a rappelé lors de la deuxième session certaines spécificités de cette langue.

L'inuktitut est une langue agglutinante. C'est-à-dire qu'à partir d'un morphème, on ajoute un préfixe ou un suffixe suivant le contexte. En voici trois exemples. Le mot choisi par les Inuits pour « triangle » veut dire « deux grands côtés et un petit », le « cube », c'est « plusieurs petits carrés » et la « ligne droite », c'est « la ligne adoptée ». Dans le milieu naturel des Inuits, il n'y a pas de ligne droite. En effet, traditionnellement les habitations inuites étaient des igloos, donc ronds, l'horizon est courbe, les amoncellements de neige sont arrondis, il n'y a pas d'arbres. Ce sont les « Blancs » qui ont introduit « la ligne droite », d'où le nom de « ligne adoptée ». Ceci questionne sur l'impact de ces appellations sur la compréhension des concepts mathématiques, au vu par exemple qu'un triangle n'a pas toujours « deux grands côtés et un petit côté ».

LE RÉSEAU DES IREM, UNE OPPORTUNITÉ POUR LA FORMATION DES PROFESSEURS ET POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LES PAYS FRANCOPHONES ?

| BAHEUX* CAROLE, FRETIGNE** PATRICK, MEGHERBI*** DJAMILA ET
VANDEBROUCK**** FABRICE

Résumé | Après un bref rappel de ce qu'est un IREM ou une structure équivalente dans certains pays, nous présentons trois dispositifs qui utilisent les technologies numériques dans un rôle de facilitateur pour la diffusion d'informations et d'expérimentations dans différents pays : la commission internationale inter IREM, le télé-séminaire international et le groupe GREMA. Nous discutons comment ces trois dispositifs avec des échanges, des « exposés thématiques » et les recherches associées dans différents pays peuvent apporter un soutien aux pratiques, du point de vue des collègues, dans les pays francophones.

Mots-clés : Technologies numériques, international, séminaire, groupe de recherche action

Abstract | After a brief overview of what an IREM or equivalent structure is in certain countries, we present three mechanisms that use digital technologies to facilitate the dissemination of information and experiments in different countries: the international inter-IREM commission, the international teleseminar, and the GREMA group. We discuss how these three mechanisms, with exchanges, “thematic presentations,” and associated research in different countries, can support practices, from the perspective of colleagues in French-speaking countries.

Keywords: Digital technologies, international, seminar, action research group

I. INTRODUCTION

Après un bref rappel de ce qu'est un IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) ou une structure équivalente dans certains pays, nous allons présenter trois dispositifs qui utilisent les technologies numériques dans un rôle de facilitateur pour la diffusion d'informations et d'expérimentations dans différents pays.

La Commission Internationale Inter-IREM est constituée de membres de différents IREM mais également de membres de différents pays francophones. Elle permet de développer de manière collaborative des contacts et des projets internationaux concernant l'enseignement des mathématiques et la formation des enseignants. Lors des réunions, nous étudions et analysons des thèmes comme les réformes curriculaires et la formation, le plurilinguisme ou l'approche par compétences, avec des intervenants de différents pays.

Le Télé-séminaire International des IREM est une téléconférence tournante, généralement une fois par mois. Une priorité est donnée aux enseignants et enseignants-chercheurs hors métropole. Les thèmes sont divers et variés.

* Laboratoire de Mathématiques de Lens, Université d'Artois – France – carole.baheux@univ-artois.fr

** Retraité, Université de Rouen – France – patrick.fretigne@gmail.com

*** Doctorante au Laboratoire Apprentissage, Didactique, Evaluation, Formation, Université d'Aix-Marseille – Professeure de Mathématiques au Lycée International Alexandre Dumas d'Alger – Algérie – djamila.megherbi@liad-alger.fr

**** LDAR, Université Paris Cité, F-75013 Paris – France – vandebro@u-paris.fr

GREMA, Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques en Afrique, a appuyé la création et la mise en place de structures sur le modèle des IREM ainsi que des structures internationales de recherche sur l'enseignement des mathématiques. Notre groupe IREM propose, depuis cette année, la mise en place d'un dispositif mettant en relation des travaux de recherche en didactique, avec des projets pédagogiques menés dans différents pays par les enseignants et formateurs intéressés. Ces travaux, en lien avec des réflexions amorcées à EMF 2022 à Cotonou, font suite à un télé-séminaire international des IREM sur le thème des probabilités.

Ces trois dispositifs avec des échanges, des « exposés thématiques » et les recherches associées dans différents pays apportent-ils un réel soutien, du point de vue des collègues, dans les pays francophones ?

II. LE RÉSEAU DES IREM

1. *De la naissance à aujourd'hui*

L'histoire des IREM débute en octobre 1968 pour répondre à la massification scolaire et à la refonte des programmes mathématiques. Trois IREM naissent simultanément ou presque à Paris, Lyon et Strasbourg. Le réseau s'étend rapidement sur le territoire métropolitain. Ce développement métropolitain s'accompagne rapidement d'une dimension internationale avec la création d'IREM à Madagascar (1969), au Sénégal (1972) et au Niger (1972) ou de structures comparables aux IREM. Malheureusement, certaines structures ont fermé pour être recrées ou non par la suite.

Ce réseau regroupe aujourd'hui une trentaine d'instituts répartis sur tout le territoire métropolitain et ultramarin, chacun étant rattaché à une université. Cette implantation universitaire accorde aux IREM une assise académique durable et favorise les passerelles entre recherche fondamentale, recherche appliquée, formation initiale et formation continue.

Beaucoup d'IREM se sont transformés en IREMI (intégrant les technologies de l'information), en IRES (sciences expérimentales) ou en IREMS (mathématiques et sciences), illustrant leur capacité à élargir leur champ d'action et à répondre aux défis éducatifs actuels.

2. *Une organisation collaborative et multidisciplinaire*

Les IREM se distinguent par leur mode de fonctionnement basé sur la collaboration pluri catégorielle entre enseignants de terrain, chercheurs disciplinaire et en didactique, formateurs et autres acteurs du monde éducatif. Cette diversité constitue le socle d'une culture de coopération et d'expérimentation, fondée sur la conviction que l'amélioration de l'enseignement passe par des interactions permanentes entre recherche et terrain. Au sein de chaque institut, des groupes de travail thématiques sont constitués pour aborder des problématiques spécifiques : didactique de l'algèbre, intégration du numérique, interdisciplinarité, etc. Cette organisation favorise la circulation des idées, la mutualisation des expériences et la co-construction de ressources pédagogiques adaptées aux besoins réels des enseignants et des élèves.

Au-delà des frontières académiques, des commissions inter-IREM fédèrent des groupes thématiques (informatique, didactique et histoire des mathématiques, etc.) et assurent la coordination de projets communs, le partage de ressources et l'organisation d'événements scientifiques. Certaines commissions inter-IREM peuvent être transversales comme la commission internationale inter-IREM. La durée de vie des commissions inter-IREM ont une durée de vie variable.

Ce maillage dense contribue à la vitalité du réseau et à la diffusion des innovations pédagogiques à l'échelle nationale et internationale.

3. *Des ressources numériques au service de la communauté éducative*

L'un des piliers du réseau concernant les ressources numériques est le serveur Publimath¹, existant depuis 2014. C'est une infrastructure gratuite en ligne qui héberge et diffuse des milliers de publications dédiée à l'enseignement des mathématiques en langue française, gérée par une commission inter-IREM/APMEP². La plateforme, enrichie en permanence, permet aux enseignants, formateurs et chercheurs d'accéder facilement à des articles pédagogiques, didactiques et scientifiques, ouvrages, logiciels et vidéos, chacun accompagné de résumés et de mots-clés pour une recherche efficace. Elle facilite ainsi, par l'intermédiaire de la consultation, du téléchargement et de la diffusion, la veille scientifique et l'auto-formation des professionnels de l'éducation.

Publimath soutient la diffusion ouverte des recherches françaises en didactique, dans une logique de science ouverte.

4. *Des revues scientifiques et pédagogiques de référence*

Le réseau des IREM édite plusieurs revues spécialisées, chacune répondant à des objectifs et à des publics distincts. Parmi les plus notables, on trouve : Repères IREM, Petit x, Grand N, Radix, Annales de didactique et de sciences cognitives. (Voir annexe).

Ces publications sont des vecteurs essentiels pour la diffusion des résultats de la recherche-action, l'innovation pédagogique et la formation continue.

Cette diversification éditoriale témoigne de la volonté du réseau de toucher toute la communauté éducative, du praticien de terrain au chercheur universitaire.

III. L'OUVERTURE INTERNATIONALE ET LA COOPÉRATION FRANCOPHONIQUE QUESTION DE RECHERCHE ET HYPOTHÈSE

1. *La Commission Internationale Inter-IREM*

La commission internationale inter IREM (CIntII³), relancée en 2019, après sa création dans les années 1990, regroupe 250 membres via une liste de diffusion. Cette commission vise à renforcer les liens entre collègues à l'international, soutient des structures similaires à l'étranger, promeut la culture scientifique et accompagne la création de réseaux locaux dans d'autres pays francophones. Cette commission organise régulièrement des rencontres, en présentiel et/ou à distance, rassemblant des acteurs de France, des DROM-COM⁴, d'Afrique, de l'Océan Indien et d'Amérique latine. L'utilisation du numérique permet d'impliquer des acteurs issus de contextes variés et de diffuser rapidement des innovations pédagogiques à l'international. Les thèmes abordés sont variés : multilinguisme, approche par compétences, évaluation, réformes curriculaires, analyse statistique implicative, contextualisation et décolonisation des savoirs, ethnomathématiques.

¹ <https://www.univ-irem.fr/-cii-apmep-publimath->

² Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

³ <https://www.univ-irem.fr/-cii-international->

⁴ Départements et Régions d'Outre-Mer et Collectivités d'Outre-Mer.

Cette diversité thématique reflète la prise en compte de la pluralité des contextes culturels et linguistiques dans lesquels s'inscrivent les pratiques pédagogiques.

2. *Le GREMA : un laboratoire d'idées pour l'Afrique*

Le Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques en Afrique (GREMA⁵), créé en 2003 au sein de l'IREM de Paris-Cité, illustre parfaitement l'engagement du réseau envers la coopération Sud-Nord. Réunissant actuellement 44 membres originaires de plusieurs pays africains et de France, le GREMA regroupe enseignants et chercheurs autour des défis spécifiques rencontrés en Afrique francophone. Ce groupe favorise la co-construction de ressources pédagogiques adaptées, l'expérimentation de dispositifs innovants et l'accompagnement à la création de structures locales inspirées du modèle IREM.

Parmi ses réalisations notables, le projet international Didactique des Mathématiques pour l'Afrique et TICE (DIMATICE⁶) a permis d'analyser l'impact des ressources numériques dans la formation des enseignants en Afrique subsaharienne et d'encourager la production de supports adaptés aux réalités locales. Porté par six équipes de recherche franco-africaines, il a étudié les ressources numériques produites par les élèves des Écoles Normales Supérieures de Yaoundé et Brazzaville, tout en analysant leur efficacité et leur articulation avec les ressources existantes.

Actuellement, le GREMA conduit un projet expérimental avec le Bénin, centré sur l'enseignement des probabilités, associant chercheurs, inspecteurs et enseignants volontaires dans une dynamique de recherche-action et de formation continue.

Les projets menés, comme DIMATICE ou les expérimentations au Bénin, illustrent la capacité du groupe GREMA à répondre à des besoins spécifiques des systèmes éducatifs africains, en tenant compte des enjeux linguistiques, culturels et curriculaire.

3. *Les télé-séminaires internationaux des IREM : un espace d'échange et de formation*

Depuis 2020, les télé-séminaires internationaux⁷ organisés par le GREMA et la Commission Internationale Inter-IREM offrent un espace de dialogue et de formation accessible à tous les acteurs de l'enseignement des mathématiques, quel que soit leur pays de résidence. Ces rencontres mensuelles, tenues en ligne et enregistrées, abordent des thématiques variées : multilinguisme, évaluation, intégration du numérique, innovations pédagogiques, hommage aux figures marquantes de la didactique, etc. Plus de quarante heures de télé-séminaires sont en libre accès sur internet.

Les télé-séminaires favorisent la création de réseaux de collaboration, la diffusion des bonnes pratiques et l'échange d'expériences entre enseignants et chercheurs du monde entier.

IV. L'IMPACT DES IREM SUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Le réseau des IREM joue un rôle important dans la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques, notamment dans les pays francophones. Plusieurs leviers expliquent cette influence :

- Recherche-action et ateliers thématiques : Les IREM proposent des dispositifs de formation active, où les enseignants sont impliqués dans la conception, l'expérimentation

⁵ <https://irems.u-paris.fr/grema>

⁶ <https://irems.u-paris.fr/dimatice>

⁷ <https://www.univ-irem.fr/SemIREMI>

et l'évaluation de ressources pédagogiques. Cette démarche favorise l'appropriation des outils et l'adaptation aux contextes locaux. Les IREM sont également impliqués dans les expérimentations de nouveaux formats de formation continue inspirés des leçons japonaises ou des Lieux d'Éducation Associés. Ces dispositifs privilégient la collaboration entre pairs et l'analyse réflexive des pratiques professionnelles.

- Partage d'expériences et mutualisation : Les groupes de travail et les commissions inter-IREM facilitent le partage de pratiques et de résultats de recherche, enrichissant ainsi la formation des enseignants par l'accès à des méthodes éprouvées dans divers contextes.
- Adaptation aux réalités locales : Sensibles à la diversité des contextes éducatifs, les IREM adaptent leurs formations et ressources aux spécificités culturelles et linguistiques, notamment en Afrique, où la prise en compte des langues maternelles et la contextualisation des savoirs sont essentielles.
- Soutien aux Laboratoires de Mathématiques : Inspirés du rapport Villani-Torossian, les laboratoires de Mathématiques, installés dans les lycées et collèges, deviennent des pôles d'expérimentation didactique où les enseignants testent, analysent puis disséminent des séquences innovantes. Ils conduisent à des pratiques collaboratives, contribuant à la réussite des élèves et à la satisfaction professionnelle des enseignants. Ces espaces sont soutenus par les IREM, les universités et les rectorats.
 - Le réseau des IREM soutient spécifiquement les laboratoires de mathématiques dans les lycées français à l'étranger comme le laboratoire Maurice Audin au lycée international Alexandre Dumas à Alger.

V. DES INNOVATIONS PÉDAGOGIQUES

Les IREM ont développé de nombreuses innovations pédagogiques profitant à l'enseignement des mathématiques et, plus largement, des sciences. Parmi les dispositifs marquants :

- Groupes de recherche-action : Ces groupes conçoivent et testent de nouveaux dispositifs pédagogiques, comme l'individualisation des apprentissages, l'intégration de l'histoire des sciences, ou l'utilisation de technologies numériques.
- Production de ressources variées : Les IREM éditent des brochures, manuels, logiciels et vidéos, régulièrement actualisés, pour accompagner les enseignants dans leur pratique quotidienne.
- Interdisciplinarité : Certains groupes travaillent à l'interface entre mathématiques, physique, SVT, informatique et arts, permettant la contextualisation de certaines notions (statistiques appliquées à la biologie, géométrie et perspective artistique...) et favorisant le développement de compétences transversales chez les élèves.
- L'élargissement des IREM vers les sciences expérimentales et la création de la commission inter-IREM Physique-Chimie depuis 2021 favorisent des approches intégrées et enrichissent la culture scientifique des élèves. Elle s'attaque notamment aux difficultés liées au formalisme et aux implicites disciplinaires, sources majeures d'obstacles pour les élèves.
- Expérimentations contrôlées : Les innovations sont testées en conditions réelles, évaluées et diffusées auprès de la communauté éducative, permettant une amélioration continue des pratiques.

- **Numérique éducatif** : Les IREM ont été pionniers dans l'usage pédagogique des technologies numériques avec des outils variés. De WIMS⁸ à Scratch⁹, en passant par GeoGebra¹⁰ ou la robotique pédagogique, les IREM expérimentent et évaluent régulièrement l'impact de ces outils sur l'engagement et la réussite des élèves. WIMS permet une progression individualisée mesurable, Scratch un développement de la pensée logique et GeoGebra une visualisation interactive en géométrie. La Commission Inter-IREM Informatique (C3I) s'intéresse aux questions liées à l'informatique comme discipline dans l'enseignement, que ce soit au niveau de l'introduction de concepts informatiques (comme les algorithmes, la programmation, la logique), de l'utilisation d'outils numériques, ou de la réflexion épistémologique et didactique sur l'informatique comme discipline.

VI. CONCLUSION : L'APPORT DU NUMÉRIQUE À UN MODÈLE OUVERT ET ADAPTATIF AU SERVICE DE L'ÉDUCATION

L'intégration des technologies numériques dans les projets des IREM a profondément transformé la formation, la diffusion des ressources et la collaboration internationale. Les plateformes en ligne, visioconférences, exercices interactifs et logiciels éducatifs permettent de dépasser les barrières géographiques, d'offrir des formations à distance, de mutualiser les ressources et d'expérimenter de nouvelles approches pédagogiques. Les enseignants comme les élèves développent ainsi des compétences numériques essentielles, et l'autonomie des apprenants est renforcée grâce à des outils d'auto-évaluation et de suivi personnalisé.

Le réseau des IREM, par sa structure collaborative, son ouverture internationale, son ancrage dans la recherche-action et son usage innovant du numérique, constitue un modèle exemplaire pour la formation des enseignants et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques dans l'espace francophone. En favorisant l'échange, la mutualisation, l'expérimentation et l'adaptation aux contextes locaux, il contribue activement à la diffusion de la culture scientifique et à l'enrichissement des pratiques pédagogiques, au bénéfice de l'ensemble de la communauté éducative.

SITOGRAPHIE

Site du Portail des IREM

<https://www.univ-irem.fr>

<https://www.univ-irem.fr/-commissions-inter-irem->

<https://www.univ-irem.fr/-cii-apmep-publimath->

<https://www.univ-irem.fr/-revues->

<https://www.univ-irem.fr/-cii-international>

<https://www.univ-irem.fr/SemIREMI>

<https://www.univ-irem.fr/espace-mathematique-francophone>

⁸ Wims (acronyme de Web Interactive Multipurpose Server) est un serveur éducatif et une plateforme d'apprentissage en ligne.

⁹ Scratch est un langage de programmation graphique à but éducatif, manipulable et exécutable par le logiciel du même nom.

¹⁰ GeoGebra est un logiciel d'apprentissage et d'enseignement de toutes les branches des mathématiques. Le principal atout de ce logiciel est qu'il allie dessins géométriques, données et calculs analytiques. Il peut être utilisé comme outil d'apprentissage, de présentation ou bien d'édition.

https://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/rapport-activites_adirem_2016-17.pdf?241%2F0c137cdcba3619c4958beb0bf4bd2ca13070e8d408972d8d910eaf918dc85ff9

<https://www.univ-irem.fr/missions-et-moyens-des-irem>

<https://www.univ-irem.fr/travaux-en-informatique-dans-le-reseau-irem>

Site de l'IREMS de Paris

<https://irems.u-paris.fr/groupe-irems/>

<https://irems.u-paris.fr/grema/>

<https://irems.u-paris.fr/dimatic/>

Site de l'APMEP

<https://www.apmep.fr/PUBLIMATH>

<https://www.apmep.fr/Presentation-de-la-base-Publimath>

Divers sites

<https://www.insmi.cnrs.fr/fr/cnrsinfo/les-irem-ont-50-ans>

<https://www.uam.edu.ne/irem.html>

<https://primabord.eduscol.education.fr/un-site-de-ressources-pedagogiques-numeriques-et-mathematiques-propose-par-l>

https://www.academia.edu/35515968/L_enseignement_des_mathematiques_un_point_de_vue_international_centre_sur_les_ressources_des_professeurs

ANNEXE : LES PRINCIPALES REVUES DU RÉSEAU DES IREM

Revue	Public cible / Objectif	Particularités et contenu
<i>Repères IREM</i> ¹¹	Enseignants, formateurs, chercheurs	Revue de la Commission inter-IREM éponyme, publiée environ 4 numéros par an. Articles de recherche-action, réflexions didactiques, analyses de pratiques, propositions d'activités pour la classe. Revendique une approche d'interface entre recherche et terrain.
<i>Petit x</i> ¹²	Enseignants du secondaire, formateurs, chercheurs	Revue de didactique des mathématiques, créée en 1983 par l'IREM de Grenoble. Publie environ 2 numéros par an. Diffuse recherches, analyses de pratiques, comptes rendus d'activités menées dans les classes du secondaire. S'intéresse aussi aux transitions entre niveaux scolaires.
<i>Grand N</i> ¹³	Enseignants du primaire, formateurs, chercheurs	Revue de mathématiques, sciences et technologie pour l'école primaire, créée en 1973 (IREM de Grenoble). Publie environ 2 numéros par an. Comptes rendus de recherches didactiques, activités expérimentées, analyses et débats sur l'enseignement des mathématiques et sciences au primaire.

¹¹ <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/reperes-irem/reperes-irem-449145.kjsp>

¹² <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/petit-x-365064.kjsp>

¹³ <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/grand-n-365078.kjsp>

Revue	Public cible / Objectif	Particularités et contenu
<i>Radix</i> ¹⁴	Enseignants, formateurs, chercheurs	Revue plus récente, lancée en 2023, également portée par l'IREM de Grenoble. Vise un classement « interface » à l'avenir. Démarche scientifique, ouverte à la communauté éducative.
<i>Annales de Didactique et de Sciences Cognitives</i> ¹⁵	Chercheurs, formateurs d'enseignants, communauté scientifique	Revue annuelle de l'IREM de Strasbourg, fondée en 1988. Publie des recherches en didactique des mathématiques et sciences cognitives, articles théoriques, expérimentations, synthèses, notes de lecture. Accès libre en ligne, classée « recherche » par le HCERES.

¹⁴ <https://imag.umontpellier.fr/~modeste/radix.html>

¹⁵ <https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/Annales-de-didactique-et-de-sciences-cognitives/>

L'ETHNOMATHÉMATIQUE ET SES LIENS AVEC L'HISTOIRE ET LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, DES PARCOURS DE RECHERCHE AUX QUESTIONNEMENTS ÉTHIQUES

| SALONE* JEAN-JACQUES, VANDENDRIESSCHE** ERIC, TOURNES*** DOMINIQUE ET
DA SILVA**** ALBAN

Résumé | Cette discussion programmée se propose d'aborder des questions théoriques, méthodologiques et éthiques à partir des parcours personnels de trois chercheurs issus de trois domaines connexes : l'ethnomathématique, l'histoire des mathématiques et la didactique des mathématiques.

Mots-clés : ethnomathématiques, histoire, didactique, méthodes, enjeux

Abstract | This scheduled discussion aims to address theoretical, methodological and ethical questions based on the personal journeys of three researchers from three related fields: ethnomathematics, the history of mathematics and mathematics education.

Keywords: ethnomathematics, history, didactics, methods, issues

I. INTRODUCTION

Après une brève présentation des trois intervenants, la discussion démarre par un aperçu de quelques éléments historiographiques sur l'ethnomathématique par Éric Vandendriessche (EV).

EV : Si les textes considérés comme fondateurs de l'ethnomathématique ont été publiés dans les années 1970 et 1980 (Zaslavsky, 1973 ; Gerdes, 1981 ; D'Ambrosio, 1985 ; Ascher et Ascher, 1986...) l'ethnologue Céline Petit et moi-même avons montré que les prémices d'une anthropologie des mathématiques sont perceptibles à partir du 19^e siècle (Vandendriessche et Petit, 2017) ; différents travaux développés principalement dans le champ de l'anthropologie suggérant des préoccupations scientifiques et pédagogiques qui seront constitutives de l'ethnomathématique (Tylor, 1871 ; Deacon et Wedgwood, 1934 ; Raum, 1938...).

À un autre niveau, et bien que cela apparaisse marginal, on peut déceler aussi dans quelques travaux de mathématiciens du 19^e et du début du 20^e, les prémices d'une reconnaissance du caractère mathématique de diverses activités étudiées ou rapportées par des ethnologues (Peacock, 1826 ; Conant, 1896 ; Ball, 1911 ; Fettweis, 1927...).

Néanmoins, la prégnance des théories évolutionnistes, d'une part, et, d'autre part, de théories philosophiques sur la mentalité « primitive » (Lévy-Bruhl, 1910...) semblent avoir durablement fait obstacle à la reconnaissance de pratiques mathématiques dans des sociétés non occidentales.

* Université des Antilles – Contextes, Recherches et de Ressources en Éducation et Formation (CRREF) – France.
jean-jacques.salone@univ-antilles.fr

** Université Aix-Marseille et CNRS – Centre de recherche et de documentation sur l'Océanie – France –
eric.vandendriessche@cnrs.fr

*** Université de La Réunion, Laboratoire d'informatique et de mathématiques (LIM) – France –
dominique.tournes@univ-reunion.fr

**** Université Laval – Canada – alban.da-silva@fmed.ulaval.ca

L'entrée dans la seconde moitié du 20^e siècle a marqué à cet égard un tournant épistémologique — à la faveur des travaux de Claude Lévi-Strauss (1962), notamment — favorisant par la suite le développement d'études reconnues comme à l'origine de l'institution de l'ethnomathématique.

Si plusieurs définitions de l'ethnomathématique ont été proposées depuis les années 1980 (cf. Ascher, D'Ambrosio, Gerdes), l'ethnomathématique désigne aujourd'hui l'étude des variations culturelles des pratiques et savoirs mathématiques, et tout particulièrement de ceux élaborés en dehors des domaines savants et institutionnels. Enfin, ce jeune champ interdisciplinaire se concentre essentiellement sur quatre grands ensembles thématiques : (1) Théorie de l'ethnomathématique (questions philosophiques — relatives à la possibilité de plusieurs formes de rationalité mathématique notamment —, modélisation, méthodes...); (2) Ethnomathématique et anthropologie/sociologie (pratiques mathématiques dans divers groupes culturels, variation culturelle des idées mathématiques); (3) Ethnomathématique et éducation (usage de mathématiques autochtones pour un enseignement plus proche du contexte culturel; aspects sociaux de l'enseignement des mathématiques; éducation multiculturelle; programme de mathématiques culturellement situé; formation des enseignants...); (4) Ethnomathématique et politique (revendications autochtones pour la reconnaissance de savoirs traditionnels, justice sociale et mathématiques...) (cf. Vandendriessche et Petit, 2017).

Cette présentation montrant que l'ethnomathématique s'est construite sur des fondements épistémologiques à la croisée de la didactique des mathématiques, de l'histoire des mathématiques, et de l'anthropologie, la discussion démarre donc par la question suivante.

II. CHEMINEMENTS PERSONNELS

Jean-Jacques Salone (JJS) : en ce qui me concerne, j'ai d'abord été ingénieur avant de devenir enseignant, puis chercheur en didactique des mathématiques. C'est lors de mon premier poste en 2016 en tant que MCF au Centre Universitaire de Formation et de Recherche de Mayotte que le choc culturel que j'ai vécu a déclenché mon penchant pour l'ethnomathématique. En effet, avant Mayotte, les questions relatives à l'inclusion culturelle étaient déjà présentes dans mes axes de recherche, mais elles étaient mêlées à des questions plus larges, comme l'impact des pédagogies actives sur la motivation et la réussite des élèves ou comme la nature des références praxéologiques à visée argumentative dans les différentes disciplines scolaires. En arrivant à Mayotte j'ai rapidement été plongé dans un contexte social culturellement très fort, avec par exemple des étudiants qui s'exprimaient constamment, sauf pour échanger avec moi, dans des langues que je ne connaissais pas, avec une société autour de moi riche d'un syncrétisme bantou, arabe, austronésien et européen à la fois religieux et culturel. C'est là que j'ai pris conscience à quel point toute cette richesse patrimoniale, dont linguistique, avait été éradiquée de ma Provence natale, folklorisée. Mais je n'ai vraiment mis le mot « ethnomathématique » sur mes activités de recherche que lorsque, en 2020, les organisateurs du colloque EMF 2022 de Cotonou, au Bénin, m'ont proposé de participer à l'activité « grand témoin » sous cette étiquette.

EV : De formation initiale en mathématiques, j'ai obtenu l'Agrégation (1992) et enseigné ensuite les mathématiques à des lycéens pendant une vingtaine d'années. Au fil de mes études à l'université, puis de mes années d'enseignement, si de fait j'étais devenu un technicien des mathématiques, je ne cessais de m'interroger sur la nature épistémologique de cette discipline. J'ai très vite pensé qu'une meilleure connaissance de l'histoire des mathématiques me permettrait d'avancer sur cette question. Je me suis ainsi plongé dans des lectures sur l'histoire des mathématiques, tout en me rapprochant du groupe de recherche « Mathématiques : approches par des textes historiques » (MATH, IREM). Cette ouverture je l'ai partagée avec mes élèves au travers de ma pratique pédagogique. Dans les années 2000, j'ai souhaité parfaire ma formation en histoire et philosophie des mathématiques, et, plus largement

des « sciences », ce qui me mena à la préparation d'une thèse de doctorat en épistémologie et histoire des sciences. Le point de départ de ma réflexion a été une interrogation sur les liens entre les mathématiques et l'oralité ; et, plus précisément, la question était de savoir si les mathématiques pouvaient être pratiquées/développées sans recours à l'écriture, au sein de sociétés de tradition orale en particulier. Cette question me conduisit à l'ethnomathématique, et, en premier lieu, aux travaux de la mathématicienne américaine Marcia Ascher (1935-2013) (l'une des membres fondateurs de ce champ) qui m'ont beaucoup inspiré par la suite. La méthodologie élaborée par Ascher (1991, 2002) pour analyser ces « idées mathématiques » développées dans d'autres cultures consiste le plus souvent en une « réécriture » formelle, dans un langage de type mathématique, des activités ou artefacts étudiés, sur la base de documents provenant de l'anthropologie. L'objectif est de révéler par là des « régularités », et plus loin des « structures », fournissant des indices sur les modes opératoires mis en œuvre par les acteurs pour la réalisation de ces diverses activités impliquant des « idées mathématiques ». Les premières études ethnomathématiques ont été menées principalement par des chercheurs de formation mathématique, et souvent engagées sur la base de publications secondaires, et non d'études directes. Ces sources secondaires, même lorsque les relevés ont été réalisés avec une grande précision, sont le résultat d'enquêtes menées par des anthropologues dont les questions de recherche étaient généralement assez éloignées de celles que se pose l'ethnomathématicien.ne. Je suis arrivé à l'idée que pour étudier plus loin les pratiques (ethno-)mathématiques des sociétés autochtones, les ethnomathématicien.ne.s devaient mener des recherches de terrain à la manière des ethnologues, selon la méthode de l'« observation participante », dans la perspective de mieux identifier les procès et savoirs impliqués dans des pratiques qui présentent une « ressemblance de famille » avec les mathématiques (cf. tressage, dessin sur le sable, jeux de ficelle...). C'est en suivant cette idée, que je me rendis en Mélanésie (Papouasie-Nouvelle-Guinée et Vanuatu, Pacifique sud) où je mène mes recherches de terrain depuis une vingtaine d'années. Devenu anthropologue au CNRS, je travaille à la réalisation du projet « Aspects culturels et cognitifs de pratiques à caractère mathématique », en croisant différentes lignes de recherche complémentaires (ethnographie, modélisation, épistémologie...) avec pour objectif principal d'élargir notre point de vue sur les mathématiques.

Dominique Tournès (DT) : Lorsque j'ai commencé à m'intéresser à l'histoire des mathématiques dans les années 1980, il s'agissait, pour l'essentiel, d'une histoire internaliste non contextualisée, qui se focalisait sur les grands mathématiciens et les grands théorèmes. On passait alors, sans transition ou presque, du « miracle grec » à la Renaissance européenne, en faisant l'impasse sur les mathématiques arabes, indiennes et chinoises. C'est seulement pendant la première université d'été européenne d'histoire des mathématiques, en 1993 à Montpellier, que j'ai découvert l'ethnomathématique en écoutant une conférence d'Ubiratan D'Ambrosio. Ce dernier dénonçait la vision européocentrique de l'histoire des mathématiques conceptualisée aux 18^e et 19^e siècles, et mettait en avant les pays du Sud comme des périphéries porteuses de richesses potentielles. Il montrait notamment comment la prise en compte des savoirs et pratiques autochtones faisait naître des réflexions nouvelles sur la nature de l'activité mathématique, de différents points de vue cognitifs, historiques, sociaux et pédagogiques. Inspiré par cet exposé stimulant, j'ai commencé à travailler avec des enseignants de la Réunion sur les lambrequins et autres éléments décoratifs à caractère géométrique de l'architecture créole. Quelques années plus tard, je suis devenu chercheur associé au laboratoire REHSEIS (actuellement SPHERE) du CNRS et de l'université Paris Cité. À partir des années 2000, sous l'impulsion de Karine Chemla, notre équipe d'historiens s'est ouverte à l'ethnomathématique. Dans ce nouveau domaine, j'ai eu le plaisir de participer au premier séminaire en 2001, puis d'être rapporteur de la première thèse en 2010. Dans la période suivante, des débats assez vifs ont eu lieu au sein de notre communauté sur la place à accorder à l'ethnomathématique. La situation a heureusement évolué, à tel point que notre école de

recherche de 2023 a pris pour thème : « Expressions de l'activité mathématique : traces et histoires ». L'objectif était de réfléchir à la diversité des expressions de l'activité mathématique qui se déploient sous forme de traces matérielles ou immatérielles. J'ai été chargé d'y piloter un bloc de conférences et d'ateliers intitulé « Gestes, modèles, instruments », où l'accent a été mis sur des ressources autres que les sources textuelles traditionnellement privilégiées par l'historiographie. D'une certaine façon, cette école de recherche a reconnu l'ethnomathématique comme une composante nécessaire de l'histoire des mathématiques. En cohérence avec ce cheminement de mes réflexions d'historien, j'ai introduit progressivement de plus en plus de contextualisation culturelle dans les formations d'enseignants que j'assure à la Réunion et à Mayotte. Pour finir, je ne suis pas ethnomathématicien, je ne fais pas directement de recherche en ethnomathématique, mais l'ethnomathématique m'a accompagné depuis une quarantaine d'années et m'a amené, d'une part, à modifier en profondeur mes représentations sur l'histoire des mathématiques et, d'autre part, à transformer mes pratiques d'enseignement. Je reviendrai sur ces deux points dans la suite de nos échanges.

Ces trois présentations montrent que plusieurs approches des ethnomathématiques sont possibles. Le débat se poursuit donc autour de deux nouvelles questions.

III. CONVERGENCES ET DIVERGENCES DES APPROCHES DE RECHERCHE ET CROISEMENTS DES PERSPECTIVES DISCIPLINAIRES

JJS : Il y a-t-il dans les savoirs et les pratiques locales des mathématiques que l'on pourrait enseigner dans les classes ordinaires ? C'est la première question que je me suis posée à mon arrivée à Mayotte. Et la réponse a été immédiate : bien évidemment que oui. Les mathématiques à Mayotte sont présentes non seulement dans la langue, avec entre autres un lexique numérique sur système décimal, un lexique des grandeurs et mesures ou un lexique géométrique (ce dernier étant incomplet, voir Salone et Dureysseix, 2022), mais aussi dans de très nombreuses pratiques allant de l'artisanat, comme la vannerie, très pratiquée dans le monde et en particulier à Mayotte, à l'architecture, les arts et les traditions. Par exemple le muzungu, c'est à dire l'européen de passage, remarquera très vite que les visages des femmes sont recouverts d'un mdsinzano, un onguent coloré, qui présente parfois des formes géométriques, et qu'elles portent généralement un salouva, une robe traditionnelle aux motifs géométriques. Il s'apercevra aussi qu'il y a de nombreuses maisons coloniales aux ornements remarquables et beaucoup de minarets élancés et colorés. Avec un peu de chance il sera également invité à un manzaraka, une cérémonie de mariage très chorégraphiée. Autre élément patrimonial remarquable pour un mathématicien, le jeu de semailles appelé mraha wa tso, un mankala de la famille des solo (Deledicq, A. et Popova, A., 1977). La liste des éléments patrimoniaux mahorais dans lesquels peuvent être décelées des mathématiques est longue et je suis actuellement en cours de finalisation d'un inventaire didactisé.

Très vite il m'est donc apparu évident que la culture mahoraise était riche de contenus mathématiques et dès 2017, en bon didacticien, j'ai immédiatement souhaité les transposer en savoirs à enseigner dans les cours destinés aux professeurs des écoles stagiaires (master MEEF). C'est ainsi qu'un dispositif de formation novateur a été mis en place, les « œuvres coopératives » (Salone, 2019), dans lequel les étudiants étaient invités à enquêter dans la société mahoraise pour produire des ressources pédagogiques qui étaient ensuite expérimentées dans les classes. Ce dispositif, toujours en œuvre, a créé une dynamique incroyable dans la société locale grâce aux collaborations qu'il a suscitées avec tous les acteurs locaux, qu'ils soient des particuliers, des professionnels, des associatifs ou des institutionnels. In fine le dispositif contribue à la préservation des patrimoines culturels locaux grâce à

la masse de données d'enquête et de ressources qu'il génère et aussi grâce à la diffusion des connaissances qu'il induit dans le milieu scolaire.

Pour répondre aux deux questions posées, il me semble donc très clair qu'en tant que didacticien des mathématiques mes pratiques et mes cadres théoriques sont ancrés dans ce champ avec un regard nécessairement tourné vers la transposition des savoirs locaux afin de les amener dans les classes. C'est peut-être là une différence avec un ethnomathématicien « pur » comme Éric mais certainement une convergence avec un historien comme Dominique. En outre je pense que ces praxéologies locales, pour reprendre ici un concept majeur adopté par la Théorie Anthropologique du Didactique, ont une valeur didactique per se qui ne nécessite parfois ni transposition ni verbalisation. C'est le cas en particulier lorsqu'on joue au mraha wa tso : c'est clairement, comme l'est par exemple le jeu d'échec, un jeu de calcul dans lequel il faut anticiper a minima des déplacements dans le plan et élaborer des stratégies pour gagner. À mes étudiants des masters second degré en mathématiques je donne aussi parfois l'exemple de la construction des bangas, les huttes traditionnelles des adolescents mahorais. Pour les construire, les fundis, experts reconnus, tracent d'abord au sol un rectangle. Mais pour cela ils ne se servent pas du tout des notions d'angles droits et encore moins du théorème de Pythagore ou d'un triplet homonyme, ils coupent puis agencent sur le sol quatre bambous de longueurs deux à deux égales afin d'obtenir un parallélogramme, puis ils égalisent par tâtonnements les longueurs des diagonales à l'aide d'une ficelle. Cette technique est donc tout aussi intéressante qu'une autre, et démontrer l'équivalence entre la définition du rectangle qu'elle sous-entend avec la définition euclidienne est une tâche mathématique que je propose à mes étudiants.

EV : Je le mentionnais plus haut, l'objectif général de mon projet de recherche est d'élargir notre point de vue sur les mathématiques en y incluant l'ensemble des activités à caractère « arithmétique », « géométrique », ou encore « algorithmique » (tressage, divination, navigation, jeux, musique, construction d'habitats, arpentage, etc.), pratiquées dans le passé et/ou de nos jours dans diverses sociétés ou communautés. Étudier la dimension mathématique d'activités qui peuvent ne pas être appréhendées comme telles par celles et ceux qui les pratiquent (voire par le monde académique), renvoie de fait à des questions épistémologiques difficiles en lien avec la nature du « mathématique ». Pour avancer sur ce point, il m'a semblé pertinent de croiser les méthodes de l'ethnomathématique avec celle de l'anthropologie/ethnographie dans la perspective de collecter des corpus originaux sur ces pratiques (ethno-)mathématiques — comme les jeux de ficelle, les dessins sur le sable, et les techniques textiles — en les étudiant in situ dans leur-s lien-s avec des contextes linguistiques et symboliques spécifiques. Enfin, je suis devenu moi-même praticien de ces activités, condition essentielle selon moi pour être en mesure de les décrire finement par le menu et de les analyser.

Mes travaux s'ancrent ainsi dans une recherche de terrain à long terme au Vanuatu (Pacifique sud), principalement au nord de l'île d'Ambrym (Vandendriessche et Etul, 2024), où j'ai fait de séjours de longue durée, accueilli par ma famille adoptive, et dont j'apprends la langue vernaculaire. Ces travaux impliquent une collaboration étroite avec le « Centre culturel de Vanuatu », institution locale chargée de la préservation des cultures locales ou kastom. Enfin, mes recherches ethnomathématiques sur les jeux de ficelle, les dessins sur le sable, et, plus récemment, le tressage de nattes, sont menées au travers d'une relation d'« expert à expert » ou (de ce que j'appelle) des « expérimentations collaboratives » permettant un échange de point de vue avec les praticien.ne.s de ces activités.

En parallèle, il m'a paru essentiel de compléter cette approche anthropologique en abordant l'étude de la dimension mathématique de ces pratiques culturelles à caractère géométrique et algorithmique sous l'angle de l'histoire des mathématiques. En effet, les premières tentatives de mathématiciens (voir par exemple celles du mathématicien de Cambridge Rouse Ball, au début du 20^e s, concernant les jeux de ficelle, cf. Vandendriessche, 2014), pour démontrer le lien entre ces activités procédurales et les

mathématiques académiques sont d'une importance capitale pour mener plus loin la réflexion sur cette épineuse question.

Concernant la didactisation des savoirs (ethno-)mathématiques, et leur usage pour un enseignement culturellement situé, ma position est — comme le savent Jean-Jacques et Dominique — extrêmement réservée (cf. Salone et Vandendriessche, 2024). Il me semble que le geste de « transposition didactique » consistant à transformer ces savoirs pratiques autochtones de façon à les rendre compatibles avec un enseignement scolaire pose des questions compliquées, loin d'être tranchées ; geste comportant un risque réel de décontextualisation, qui au final pourrait devenir une simple motivation pour introduire un concept du curriculum hérité des périodes coloniales. De l'avis de certain.e.s enseignant.e.s du Vanuatu, la prudence sur ce point pourrait être d'introduire ces pratiques dans la classe, simplement pour elles-mêmes, dans toute leur complexité culturelle et cognitive, sans chercher systématiquement à faire des liens entre ces pratiques et les mathématiques. Il s'agirait alors de laisser les élèves faire eux-mêmes des analogies. Depuis une dizaine d'années, et sur la demande d'institutions vanuataises, je participe néanmoins à une réflexion collective et internationale dans la perspective de comparer et mieux saisir comment ces curriculums culturellement situés sont mis en œuvre dans la plupart des sociétés autochtones. Toutefois, dans ces recherches, je souhaite garder autant que possible une position d'observateur. Je partage bien volontiers les résultats de mes recherches avec des acteurs de l'éducation vanuataise, lorsque je suis sollicité pour cela, dans le cadre de workshop notamment. Mais pour le reste, j'estime que ma position de chercheur doit rester au niveau de l'observation, en intervenant le moins possible en milieux scolaires.

DT : Mes recherches portent sur l'histoire des méthodes et des instruments de calcul dans la période 1750-1950. À première vue, il peut sembler difficile d'y trouver un rapport avec l'ethnomathématique. Je voudrais pourtant me référer à une citation de D'Ambrosio qui permet de donner un sens élargi à cette discipline : « We will call ethnomathematics the mathematics which is practised among identifiable cultural groups, such as national-tribal societies, labor groups, children of a certain age bracket, professional classes, and so on. [...] We may go even further in this concept of ethnomathematics to include much of the mathematics which is currently practised by engineers, mainly calculus, which does not respond to the concept of rigor and formalism developed in academic courses of calculus. » (D'Ambrosio, *Ethnomathematics and Its Place in the History and Pedagogy of Mathematics*, 1985). Cela m'a permis de faire un lien avec mes travaux personnels autour des instruments mathématiques et des mathématiques des ingénieurs. Les ingénieurs que j'étudie sont ceux que Grattan-Guinness avait appelés les « ingénieurs-savants ». Ce sont des ingénieurs qui, ayant reçu une formation solide, sont capables de créer par eux-mêmes les outils mathématiques dont ils ont besoin dans leurs pratiques lorsqu'ils ne les trouvent pas dans les mathématiques académiques. C'est ainsi que j'ai pu étudier les méthodes graphiques d'intégration des équations différentielles, les instruments traditionnels, les abaques et nomogrammes, tous ces instruments de calcul créés par des ingénieurs et abondamment utilisés jusque dans les années 1970, avant la diffusion des calculatrices électroniques et des ordinateurs. Pour comprendre le développement de ces méthodes et instruments de calcul, il faut se replacer dans un milieu socioprofessionnel particulier, celui des ingénieurs, techniciens et conducteurs de travaux, ainsi que dans le contexte socioéconomique des Révolutions industrielles et des énormes besoins de calcul qu'elles ont engendrés. Voilà un exemple qui illustre, selon moi, qu'une approche de nature ethnomathématique peut être utile dans de nombreuses recherches historiques, bien au-delà de l'étude des mathématiques des peuples sans écriture. L'ethnomathématique permet ainsi d'éclairer les multiples facettes de l'activité mathématique elle-même, tout en l'articulant à diverses préoccupations et représentations des milieux au sein desquels on l'observe. Cela nous conduit, en tant qu'historiens, à une approche nettement plus sociale, économique,

politique et institutionnelle qu'auparavant, et à la prise en compte d'un plus grand nombre d'activités pouvant être considérées comme relevant des mathématiques. L'autre facette de mon travail d'enseignant-chercheur, la formation des futurs enseignants, induit, quant à elle, un croisement entre l'ethnomathématique et la didactique. Les sociétés complexes dans lesquelles j'interviens à la Réunion et à Mayotte m'ont conduit à envisager une double contextualisation de mes enseignements, à la fois dans le temps avec l'histoire et dans l'espace avec l'environnement patrimonial. C'est là qu'on s'aperçoit que, si le socioconstructivisme et la théorie des situations didactiques modélisent correctement les interactions sociales entre élèves, ou entre élèves et enseignants, elles ne prennent que faiblement en compte la dimension culturelle. Élaborées pour étudier des situations scolaires occidentales dans un milieu culturel homogène, elles ne suffisent plus face aux publics multiculturels et multilingues que l'on rencontre dans d'autres parties du monde, voire de plus en plus dans les sociétés occidentales elles-mêmes du fait des migrations. Il me semble donc utile de faire appel à d'autres théories didactiques qui intègrent mieux le contexte historique et culturel, comme la théorie anthropologique du didactique de Chevallard, la théorie de l'objectivation de Radford et les travaux récents de Salone (2022) sur la contextualisation didactique. Cela permet de repenser l'apprentissage des mathématiques et la motivation des élèves dans une interaction entre savoirs traditionnels et savoirs scolaires.

La discussion interroge ensuite l'inclusion des savoirs et des pratiques autochtones dans l'enseignement des mathématiques, et est l'occasion d'échanger autour d'exemples de mises en œuvre dans les classes ou dans la formation des enseignants. En particulier, un dispositif de formation initiale des enseignants des premier et second degrés, expérimenté à Mayotte depuis 2017 (Salone, 2019), est présenté.

IV. INCLUSION DES SAVOIRS ET DES PRATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

DT : En 2017, Jean-Jacques Salone a créé le dispositif des œuvres coopératives pour la formation des professeurs des écoles à Mayotte. Ce dispositif reposait sur l'idée que la culture et la langue locales ne sont pas des obstacles, mais des leviers d'action pour changer le rapport au savoir dans la classe. Un autre de ses objectifs était de contribuer à la préservation du patrimoine. Depuis 2023, avec mon collègue Jean-Berky Nguala, nous avons adapté ce dispositif aux futurs professeurs de mathématiques du second degré et nous en avons fait une unité d'enseignement intitulée « Pédagogie de projet ». Des groupes stables de trois ou quatre étudiants sont constitués pour les quatre semestres du master. Chaque groupe choisit un thème en lien avec le patrimoine local. Parmi les sujets retenus par les deux premières promotions, on peut citer, par exemple, le cocotier, le jeu de mraha wa tso (un jeu de semailles mahorais), la mosquée de Tsingoni (plus vieille mosquée de France en activité), le tressage des cheveux ou le m'vougué (une plante locale ayant des utilisations alimentaires, médicinales et cosmétiques). Au premier semestre, chaque groupe mène une enquête ethnographique, rencontre des acteurs de terrain et des chercheurs, et réunit une documentation. Au deuxième semestre, les étudiants conçoivent des activités pédagogiques en lien avec leur sujet et mènent des pré-expérimentations pendant leurs stages. Au troisième semestre, ils construisent un projet pédagogique global adapté aux classes qu'ils ont en responsabilité (progression, séances, analyses didactiques à priori et à postériori). Enfin au quatrième semestre, ils poursuivent l'expérimentation en classe et rédigent un dossier final de synthèse. Chaque semestre, les groupes doivent présenter publiquement leurs travaux, soit par l'intermédiaire d'un poster, soit par une communication orale, à l'occasion de la fête de la science, de la semaine des mathématiques ou d'un colloque. Ces échéances permettent de motiver les étudiants, de valoriser les travaux réalisés, et de leur donner une forme aboutie et transférable. Tout au long du processus, les formateurs apportent des éléments théoriques d'ordre méthodologique,

ethnomathématique et didactique, mais n'interviennent pas dans les travaux des étudiants, ni dans les enquêtes de terrain, ni dans la conception des scénarios pédagogiques. Ce sont les étudiants eux-mêmes qui choisissent les éléments du patrimoine culturel mahorais pouvant servir de support à des activités mathématiques et qui mettent en œuvre ces activités en classe. Par exemple, dans le cas du mraha wa tso, les étudiants n'ont pas exploité directement la règle du jeu avec les élèves, mais se sont servis du plateau pour des exercices sur les symétries axiale et centrale, l'ont transformé en abaque à jetons, et ont revisité dans le contexte mahorais la légende de l'échiquier et des grains de blé, devenus des grains de riz pour l'occasion. De même, les étudiantes ayant choisi les tresses n'ont pas cherché à faire travailler leurs élèves sur les pratiques locales de tressage, mais ont imaginé plutôt des exercices géométriques sur les rosaces, frises et pavages, et ont trouvé une analogie entre l'opération élémentaire de tressage à trois brins et un certain patron de cube. Ainsi, les étudiants mahorais font fréquemment surgir de l'artéfact lui-même des connaissances et compétences mathématiques qui peuvent être éloignées de son usage traditionnel. Ils instrumentalisent cet artéfact de plusieurs façons nouvelles et le recontextualisent au sein des mathématiques. Cette mise en résonance entre les objets autochtones et les savoirs scolaires est porteuse de motivation et de sens. Lors de l'évaluation de la formation, les futurs enseignants ont été nombreux à souligner l'évolution de leurs représentations et de leur pratique professionnelle : « tous les éléments que nous avons observés à l'occasion de cette UE, aussi connus qu'ils soient, ont pu être redécouverts sous des aspects autres, ce qui a changé notre perception de ces éléments », « cette intégration de la contextualisation sous diverses formes et différents degrés a nécessité une véritable révision et révolution de ma pratique professionnelle qui a ainsi connu de véritables secousses ».

Les échanges s'orientent ensuite autour de questions vives à propos des principaux défis et leviers pour une recherche inclusive, éthique, fidèle et représentative de la diversité des traditions mathématiques à l'échelle mondiale.

Enfin la partie conclusive de la discussion envisage des perspectives de collaborations scientifiques. Ainsi une mise en réseau (groupe de travail de la commission Internationale des IREM <https://www.univ-irem.fr/-cii-international->) et des co-publications (dont un numéro thématique de la revue Contextes et Didactiques pour lequel vous trouverez l'appel ici : <https://journals.openedition.org/ced/7226>) sont proposés aux chercheurs et chercheuses qui le souhaiteront.

V. SYNTHÈSE DES ÉCHANGES AVEC LES PARTICIPANTS ET PERSPECTIVES

Intervention de Jean-Jacques Salone : quels seraient les arguments visant à démontrer la pertinence et les effets de l'introduction d'éléments ethnomathématiques dans les situations d'enseignement des mathématiques. L'argumentaire pourrait reposer sur une chaîne d'implications largement démontrée dans une approche socioconstructiviste en sciences de l'éducation : la réussite des élèves repose sur leur engagement dans les activités qui leur sont proposées et la dévolution en est le moyen. Cet engagement repose à son tour sur la motivation des élèves, et plus particulièrement sur leur motivation intrinsèque. Les travaux en neurosciences et en psychologie cognitive ont largement confirmé cette hypothèse. La question se ramène donc à l'identification de sources de motivations intrinsèques. Les travaux en didactique des mathématiques montrent qu'elles sont nombreuses : au-delà des sources d'origines sociales (travaux de groupe, monitorat/tutorat, débats...) ou d'origines personnelles (curiosité, créativité...), d'autres sont identifiées comme l'usage des outils numériques, les activités manipulatoires ou expérimentales, les jeux sérieux... Les recherches actuelles tendent à montrer que l'introduction de l'histoire des mathématiques et plus récemment d'éléments

ethnomathématiques locaux sont aussi des sources de motivation intrinsèque. Avec nos étudiants nous tentons d'analyser la pertinence du recours dans les classes à des artefacts ou des technologies locales en mesurant leurs effets sur l'estime de soi et les sentiments d'appartenance. Mais ces mesures demeurent largement biaisées par le fait même de la multifactorialité des phénomènes en jeu dans les expérimentations conduites.

Éric Vandendriessche et Alban Da Silva réaffirment que les anthropologues perçoivent dans la transposition didactique des savoirs autochtones un risque de les voir « folklorisés », voire réifiés. Il y a donc une question d'ordre éthique.

Intervention d'Eleda Robo : cette approche peut soulever une tension méthodologique avec celle des didacticiens, « y a un chemin à trouver » selon elle. Elle soutient que, les savoirs autochtones ne seront pas « folklorisés » si leur intérêt didactique est reconnu et mis en avant : « l'entrée ce sont les mathématiques et pas la culture ». Sinon, les « lambrequins » de la Réunion ou les figures « d'art tembe » de la Guyane, entreront dans la classe uniquement à l'occasion d'événements particuliers, une fois par an, comme « la fête de la science » ou « la semaine des mathématiques ». La « folklorisation » est alors donnée par la médiatisation de tels événements et la mise en lumière de ces savoirs autochtones qui ensuite retrouvent un statut secondaire en milieu scolaire. C'est pourquoi, Eléda Robo soutient qu'il est essentiel de montrer les effets sur les apprentissages de l'intégration des savoirs autochtones, effets qui dépasseraient des aspects motivationnels. Cependant, cette intégration dans la classe serait plutôt à penser dans la chronologie mathématique puis culturelle. Il est là « le chemin à trouver ».

Intervention de Jean-Luc Dorier : il est illusoire de vouloir mesurer l'effet de l'histoire ou de l'ethnomathématique sur les apprentissages et les performances des élèves car d'un point de vue méthodologique ce genre d'approche est voué à l'échec. Les psychologues veulent imposer en éducation la suprématie des évaluations quantitatives, mais en didactique des mathématiques, on privilégie souvent des évaluations qualitatives. Dans cette approche, l'important c'est de conduire une analyse épistémologique montrant en quoi ces approches donnent du sens aux contenus enseignés. L'évaluation des effets porte alors sur l'analyse de quelques cas cliniques à la lumière d'une analyse a priori.

VI. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Alban Da Silva souligne qu'il a eu plaisir à animer cette discussion programmée qui a mis en évidence la richesse des approches croisées entre ethnomathématique, histoire et didactique des mathématiques. Les échanges ont montré un intérêt commun pour une compréhension plus inclusive de l'activité mathématique humaine, dans la classe ou en contexte. Les principaux enseignements en sont :

- Les pratiques mathématiques situées culturellement et socialement, présentées dans cette discussion, élargissent les perspectives pour la recherche en histoire et en didactique des mathématiques. Ceci a été bien illustré par le dispositif innovant des « œuvres coopératives » mis en place à Mayotte ou les projets de recherche à dimensions ethnomathématiques menés en Master MEEF à la Réunion.
- Un défi majeur émerge : concilier la nécessité de préserver l'authenticité des savoirs autochtones avec leur intégration pédagogique, tout en évitant le piège de la folklorisation. La tension méthodologique entre approches anthropologiques et didactiques appelle à « trouver un chemin » entre aspects mathématiques et culturels.

Cette table ronde ouvre plusieurs perspectives prometteuses :

- Collaboration interdisciplinaire renforcée : la mise en réseau envisagée via un groupe de travail de la commission Internationale des IREM favorisera les échanges entre chercheurs de différents horizons.
- Production scientifique collective : les projets de numéros thématiques de la revue Contextes et Didactiques permettront de structurer et diffuser les recherches émergentes.
- Innovation pédagogique : l'expérimentation de dispositifs comme celui de Mayotte inspire de nouvelles approches de formation des enseignants, adaptées aux contextes multiculturels.

L'ethnomathématique se révèle ainsi non pas comme une discipline périphérique, mais comme un catalyseur essentiel pour repenser l'enseignement des mathématiques dans un monde pluriculturel, où la diversité des expressions mathématiques devient une ressource pour l'apprentissage et la recherche.

RÉFÉRENCES

- Ascher, M. (1991). *Ethnomathematics: A multicultural view of mathematical ideas*. Brooks and Cole Publishing Company.
- Ascher, M. et Ascher, R. (1986). Ethnomathematics. *History of Science*, 24(2), 125-144.
<https://doi.org/10.1177/007327538602400202>
- Ascher, M. (2002). *Mathematics elsewhere: An exploration of ideas across cultures*. Princeton University Press.
- Rouse Ball, W. W. (1911). *Mathematical recreations and essays*. Macmillan & Co.
- Conant, L. (1896). *The number concept*. MacMillan & Co.
- D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44-48.
- Da Silva, A. (2023, 27 novembre). Les dessins sur le sable du Vanuatu et « l'algorithme de la tortue ». *Images des Mathématiques*. <https://doi.org/10.60868/ra32-jx25>
- Deacon, A. B. et Wedgwood, C. (1934). Geometrical drawings from Malekula and other islands of New Hebrides. *Journal of the Royal Anthropological Institute*, 64, 129-175. <https://doi.org/10.2307/2843952>
- Deledicq, A. et Popova, A. (1977). Wari et Solo : le jeu de calculs africain. *Journal des africanistes*, 47(2), 207-209.
- Fettweis, E. (1927). *Das rechnen der naturvölker*. B G. Teubner.
- Gerdes, P. (1981). Changing mathematics education in Mozambique. *Educational Studies in Mathematics*, 12(4), 455-477.
- Lévi-Strauss, C. (1962). *La pensée sauvage*. Plon.
- Lévy-Bruhl, L. (1910). *Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures*. F. Alcan.
- Peacock, G. (1826). Arithmetic. Dans *Encyclopaedia Metropolitana*. Vol. I: Pure sciences (p. 369-523). Smedley & Rose.
- Raum, O. (1938). *Arithmetic in Africa*. Evans Brothers.

- Salone, J.-J. (2019). La contextualisation, une compétence professionnelle au centre du master MEEF 1^{er} degré de Mayotte. *La nouvelle revue – Éducation et société inclusives*, 85(1), 221-243. <https://shs.cairn.info/revue-la-nouvelle-revue-education-et-societe-inclusives-2019-1-page-221?lang=fr>
- Salone, J.-J. et Dureysseix, F. (2022). Linguistiques et mathématiques du patrimoine de Mayotte. Dans C. Hache et C. Mendonça Dias (coord.), *Plurimaths. Plurilinguisme et mathématiques* (p. 167-184). Lambert-Lucas. <https://www.lambert-lucas.com/livre/plurilinguisme-et-enseignement-des-mathematiques/>
- Salone, J.-J. et Vandendriessche, E. (2024). Dialogue entre un didacticien des mathématiques et un ethnomathématicien : théories, méthodes et questions éthiques. Dans I. Léglise et V. M. Toke (dir.), *Inégalités éducatives : langue et accès aux savoirs dans les Outre-mer* [Numéro spécial]. *Contextes et Didactiques*, (24). <https://doi.org/10.4000/1396v>
- Salone, J.-J. (2022). Contexte et contextualisation à Mayotte, une approche systémique. *Contextes et Didactiques*, (20). <https://journals.openedition.org/ced/3848>
- Tylor, E. B. (1871). The art of counting. Dans *Primitive culture: Researches into the development of mythology, philosophy, religion, languages, art and customs. Volume 1* (p. 239–272). John Murray, Albemarle Street, W.
- Vandendriessche, E. (réalisateur et référent scientifique) et Etul, C. (réalisateur). (2024). *Tuan ta pesao. Écritures de sable et de ficelle à l'île d'Ambrym* [Documentaire scientifique]. Production CNRS. <https://images.cnrs.fr/video/7850>
- Vandendriessche, E. et Petit, C. (2017). Des prémices d'une anthropologie des pratiques mathématiques à la constitution d'un nouveau champ disciplinaire : l'ethnomathématique. *Revue d'histoire des sciences humaines*, (31), 189-219. <https://doi.org/10.4000/rhsh.458>
- Vandendriessche, E. (2014). W. W. Rouse Ball and the mathematics of string figures. *Historia Mathematica*, 41(4), 438-462. <https://doi.org/10.1016/j.hm.2014.06.003>
- Vandendriessche, E. et Da Silva, A. (2022). Les dessins sur le sable du nord de l'île d'Ambrym (Vanuatu) : une étude ethnomathématique. *ethnographiques.org : revue en ligne de sciences humaines et sociales*, (43). https://www.ethnographiques.org/2022/Vandendriessche_DaSilva
- Zaslavsky, C. (1973). *Africa counts. Number and pattern in African cultures*. Prindle, Werber and Schmidt.

espace mathématique francophone

COLLOQUE EMF 2025

Montréal
Québec
Canada

Design graphique : Eva Knoll

26-30 mai 2025



L'éducation
face à un monde
en accélération

enjeux, défis et opportunités

UQAM Département d'éducation
et formation spécialisées
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION
Université du Québec à Montréal

CERME
CENTRE
DE RECHERCHES
MATHÉMATIQUES
Université du Québec
à Rimouski

UQAR
Université du Québec
à Rimouski

Atlantic Association
for Research in the
Mathematical Sciences

ADEESE

UQAM Faculté des sciences
Université du Québec à Montréal

Canadian Mathematical Society
Société mathématique du Canada

VECSM

UQAM
unesco
UNESCO
BUREAU REGIONAL
DE MONTRÉAL

UQAT
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC
À TERREbonne

UQAM Département de mathématiques
FACULTÉ DES SCIENCES
Université du Québec à Montréal

CC
Calcul Québec

CRIFPE
CRIFPE-QU

ISM
International Mathematical
Society

UQO
UNIVERSITÉ
DU QUÉBEC
À OUTAOUA

ICMI

UQAM Faculté des sciences
de l'éducation
Université du Québec à Montréal



Centre de recherche en éducation et
formation du Québec

Canada

International Commission on
Mathematical Instruction

