



TITRE: L'ÉVOLUTION DANS LA CONSTRUCTION DU CONCEPT DE FONCTION DES ÉLÈVES DANS DES ACTIVITÉS DE RÉOLUTION DE PROBLÈMES : UNE ÉTUDE DE CAS

AUTEURS: DE SIMONE MARINA ET BURGERMEISTER PIERRE-FRANÇOIS

PUBLICATION: ACTES DU HUITIÈME COLLOQUE DE L'ESPACE MATHÉMATIQUE FRANCOPHONE – EMF 2022

DIRECTEUR: ADOLPHE COSSI ADIHOUE, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE (CANADA/BÉNIN) AVEC L'APPUI DES MEMBRES DU COMITÉ SCIENTIFIQUE ET DES RESPONSABLES DES GROUPES DE TRAVAIL ET PROJETS SPÉCIAUX

ÉDITEUR: LES ÉDITIONS DE L'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

ANNÉE: 2023

PAGES: 1204 - 1218

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

L'évolution dans la construction du concept de fonction des élèves dans des activités de résolution de problèmes : une étude de cas

DE SIMONE¹ Marina – BURGERMEISTER² Pierre-François

Résumé – Dans cet article nous analyserons les interactions d'un groupe de trois élèves en 1e année du Collège de Genève (élèves de 15-16 ans) qui a travaillé sur une situation de résolution de problèmes proposée par l'enseignant en introduction du travail sur le concept de fonction. Nous documenterons en particulier l'évolution des conceptualisations de la notion de fonction d'une élève de ce groupe, Mélanie, grâce aux interactions entre pairs pendant des activités de résolution de problèmes.

Mots-clefs : résolution de problèmes, fonctions, travail de groupe, registres de représentation sémiotique, perspectives

Abstract – In this article we will analyse the interactions of a group of three students in the first year of secondary school in Geneva (students aged 15-16) who worked on a problem-solving situation proposed by the teacher as an introduction to work on the concept of function. In particular, we will document the evolution of the conceptualizations of the notion of function of one student in this group, Mélanie, thanks to the interactions between peers during problem-solving activities.

Keywords: problem solving, fonctions, registers of semiotic representation, perspectives

1. Université de Genève, Suisse, marina.desimone@unige.ch

2. Université de Genève, Suisse, pierre.burgermeister@edu.ge.ch

Introduction

Cette contribution s'encadre au sein d'un travail plus large de l'équipe DiMaGe de didactique des mathématiques de la section des sciences de l'éducation de l'Université de Genève, qui a travaillé pendant plus de quatre ans à un projet intitulé : « La résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques » piloté par Sylvie Coppé et Jean- Luc Dorier et financé par le Fonds National Suisse pour la recherche (FNS - Subside n°100019_173105/1 - Période du 31.08.2017 au 31.01.2022). La recherche présentée dans cet article porte sur la résolution de problèmes comme outil pour l'enseignement des fonctions en 1^{ère} année du Collège de Genève (élèves de 15-16 ans). En particulier, nous analyserons le travail des élèves lors d'une situation de résolution de problèmes tirée d'une séquence sur l'enseignement des fonctions que nous avons conçue et mise en œuvre dans différentes classes genevoises. Cette séquence est caractérisée par une place importante accordée, d'une part, à la résolution de problèmes et, d'autre part, aux tâches nécessitant une ou plusieurs conversions de registres de représentation sémiotique (Duval, 1993, 2006). Le focus sur les conversions de registres est justifié par le fait que, d'un point de vue épistémologique, le concept de fonction est étroitement lié à l'articulation de différents registres de représentation sémiotique. D'un point de vue didactique, afin d'opérationnaliser ce travail sur les registres, nous émettons l'hypothèse qu'il est nécessaire de passer par une démarche de résolution de problèmes dont l'objectif vise à rendre les élèves « opérationnels » par rapport à ces conversions de registres. Plus particulièrement, nous pensons que, sur le long terme, la résolution de problèmes permet aux élèves de rendre les conversions de registres des connaissances 'disponibles' au sens de (Robert, 1998), c'est-à-dire que les élèves sont capables de les mobiliser d'eux-mêmes sans qu'elles soient explicitement indiquées dans l'énoncé du problème. La séquence d'enseignement a été conçue en se référant aux programmes institutionnels du canton de Genève. La résolution de problèmes et la conversion de registres qui caractérisent notre séquence se retrouvent très clairement dans ce qui est préconisé institutionnellement.

Dans cet article, nous nous focalisons sur la situation « Les vases », intervenant dans la première partie de la séquence qui vise, à travers une série de problèmes basés sur des situations pseudo-concrètes, à renforcer la perception de la co-dépendance de deux grandeurs variables. La situation « Les vases » est une activité de résolution de problèmes prévue pour être travaillée par groupes de quatre élèves visant à créer des interactions épistémologiquement riches, c'est-à-dire qui contribuent à étoffer la conceptualisation de la notion de fonction, encore embryonnaire à ce stade de l'apprentissage. Notre analyse s'appuiera donc sur deux outils théoriques : les registres de représentation sémiotique (Duval, 1993) et les perspectives ponctuelles, locales et globales (Rogalski, 2008). C'est le croisement de ces deux outils qui nous permettra de repérer et décrire certaines évolutions dans les conceptualisations. Nous présentons ces deux outils d'analyse au point II et notre méthodologie de recherche au point III. Le point IV montre quelques éléments d'analyses a priori de la situation « Les vases » et d'une autre situation de notre dispositif, « Le circuit », ce qui nous permet d'explicitier comment nous investirons par la suite nos deux outils d'analyse. Les points V et VI constituent le corps de cet

article. Ils sont consacrés à l'analyse des interactions d'un trio d'élèves pendant leur résolution du problème des vases. Nous concluons au point VII en donnant des éléments de réponses concernant l'évolution dans les conceptualisations d'une élève en particulier, Mélanie, et en évaluant l'efficacité et les limites de notre dispositif de recherche.

Cadrage théorique

Nous présentons ici les deux outils théoriques que nous avons mobilisés pour effectuer des analyses a priori et a posteriori de nos situations de RP : les registres de représentation sémiotiques (Duval, 1993, 2006) et les perspectives de Rogalski (2008).

Les registres de représentation sémiotiques

La notion de fonction, comme tout objet mathématique, est un concept abstrait, qui n'est « pas directement accessible[s] dans la perception, ou dans une expérience intuitive immédiate, comme le sont les objets communément dits “réels” ou “physiques” ! Il faut donc pouvoir en donner des représentants. » (Duval, 1993, p. 38). Ses représentants les plus courants dans l'enseignement des mathématiques sont l'expression analytique, la courbe représentative et le tableau des valeurs. Chacun de ces représentants se matérialise dans un registre de représentation sémiotique propre : les registres de l'écriture algébrique, de la représentation graphique et de l'écriture numérique. Or, une construction consistante de la notion de fonction requiert de maîtriser plusieurs de ses représentations, le « recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations » (Ibid., p. 40). De plus, il ne s'agit pas seulement de maîtriser la notion de manière cloisonnée dans plusieurs registres de représentation distincts, mais aussi de pouvoir convertir dans l'un les informations récoltées dans l'autre, et vice-versa, c'est-à-dire d'être capable de coordonner ces différents registres de représentation. Duval pose le postulat suivant : « La compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion » (Ibid., p. 51). C'est bien ce que nous visons dans la situation « Les vases », où l'élève doit pouvoir coordonner deux registres de représentation : le registre des dessins géométriques (formes des vases) et le registre des représentations graphiques (les graphiques de remplissage associés à ces vases). Or, il a besoin pour cela de se créer une représentation mentale du processus de remplissage de chaque vase en tenant compte du fait que le débit ne varie pas. Par exemple, il doit pouvoir se représenter que le niveau de remplissage du vase cylindrique monte à vitesse constante. Duval affirme que « les représentations mentales recouvrent l'ensemble des images et, plus globalement, des conceptions qu'un individu peut avoir sur un objet, sur une situation, et sur ce qui leur est associé » (Ibid., p. 38-39). Dans notre cas, nous dirons que l'élève doit pouvoir s'appuyer sur une représentation mentale dynamique de la situation de remplissage pour pouvoir coordonner adéquatement les deux registres de représentation présents

dans l'énoncé de la situation. Notre premier outil d'analyse consiste donc à étudier les conversions entre registres de représentation sémiotiques avec les représentations mentales dynamiques de la situation. Cependant, il nous est apparu qu'une analyse se basant uniquement sur ce premier outil ne suffisait pas à décrire l'élaboration des constructions du concept de fonction durant les situations analysées. En effet, différents élèves peuvent mobiliser un même registre de représentation, par exemple graphique, en y lisant des éléments différents qui dépendent du regard porté sur cette représentation. Pour combler cette lacune, nous avons utilisé un deuxième outil d'analyse tiré de (Rogalski, 2008), visant à distinguer les différents points de vue portés sur une même représentation (sémiotique ou mentale).

Les perspectives ponctuelle, locale et globale

À la suite de Rogalski (2008), nous estimons qu'« un enjeu important de l'enseignement des fonctions est certainement de développer chez les étudiants une prise de conscience de l'existence de points de vue spécifiques sur les fonctions, associés à ces trois perspectives, ainsi qu'une mise en fonctionnement de toutes ces perspectives d'une fonction » (Vandebrouck, 2011, p. 5). Plus précisément, chacune de ces perspectives correspond au regard porté sur les différentes propriétés (ponctuelle, locale, globale) de la fonction considérée (Rogalski, 2008, p. 66) :

1. Propriété ponctuelle : c'est une propriété d'une fonction f relativement à un point x_0 qui ne dépend que de la valeur de f au point x_0 . Par exemple, énoncer que $f(x_0) = 3$ est une propriété ponctuelle.
2. Propriété locale : c'est une propriété d'une fonction f en un point x_0 qui ne dépend que des valeurs de f sur un voisinage de x_0 , aussi petit soit-il. Par exemple, la propriété « f est croissante en x_0 » est une propriété locale.
3. Propriété globale : c'est une propriété d'une fonction f sur un intervalle donné I faisant intervenir toutes les valeurs de f sur l'intervalle. Par exemple, la propriété « $f(x) > 0$ pour tout x de I » est une propriété globale de même que la propriété « f admet exactement trois minima locaux sur I ».

Méthodologie de recherche

Dans cette recherche, nous nous focalisons sur le travail d'un groupe d'élèves d'une classe de 1^{er} année (« Math niveau normal ») du collège de Genève ayant travaillé sur l'activité « Les vases » et « Le circuit ». Le problème « Le circuit » avait été proposé aux élèves dans un « prétest » conçu afin d'obtenir une évaluation diagnostique des connaissances « déjà-là » relatives au concept de fonction. La phase de travail de groupe analysée ici fait suite à une phase de travail individuel des élèves et précède la phase de la mise en commun. Nous avons filmé le travail du trio dans son intégralité, et nous avons transcrit leurs échanges, que nous avons analysé en termes de coordination de différents registres de représentation sémiotique et de mobilisation de différents points de vue sur chacune de

ces représentations. Nous avons cherché ainsi à mettre en lumière les moments caractérisés par ces éléments afin de documenter l'évolution des élèves dans leur conceptualisation du phénomène en jeu : la variation de la hauteur de remplissage atteinte en fonction du temps écoulé, telle qu'elle se déduit des caractéristiques géométriques du vase et telle qu'elle se représente graphiquement. Dans cet article, nous nous focalisons en particulier sur les évolutions d'une élève du trio, Mélanie. Afin de documenter l'évolution de sa construction de la notion de fonction, nous allons nous intéresser au traitement qu'elle fait à deux problèmes « Le circuit » et « Les vases ». Nous allons tout d'abord présenter quelques éléments d'analyse a priori de ces deux problèmes.

Analyses a priori

« Le circuit »

En Annexe 1 nous présentons l'énoncé du problème « Le circuit » (Figure 4). Dans le Tableau 1 nous mettons en correspondance, pour chacun des points de vue (global, local, ponctuel) portés sur l'évolution de la vitesse de la voiture pendant une boucle du circuit, les aspects qui relèvent du registre graphique (représentation graphique de la vitesse en fonction de la distance parcourue) avec ceux qui relèvent du registre dessin (dessin stylisé du circuit), ceci en explicitant l'expérience mentale dynamique (EMD) qui permet de faire le lien entre les deux. Notons que les éléments d'une ligne du tableau peuvent se lire aussi bien de droite à gauche (conversion du registre dessin au registre graphique) que de gauche à droite (conversion du registre graphique au registre dessin).

« Les vases »

Comme pour « Le circuit », nous présentons l'énoncé du problème « Les vases » (Figure 5) et dans le Tableau 2 nous mettons en correspondance, pour chacun des points de vue (global, local, ponctuel) portés sur la vitesse d'élévation du niveau d'eau dans certains vases (nous avons choisi de ne présenter que les éléments les plus saillants), les aspects qui relèvent du registre graphique avec ceux qui relèvent du registre dessin, ceci en explicitant l'expérience mentale dynamique qui permet de faire le lien entre les deux. Noter que les éléments d'une ligne du tableau peuvent se lire aussi bien de droite à gauche (conversion du registre dessin au registre graphique) que de gauche à droite (conversion du registre graphique au registre dessin).

Analyse a posteriori de la situation « Les vases »

Nous présentons ci-dessous quelques extraits des échanges entre trois élèves (Luca, Mélanie et Sara) au cours de leur résolution de la situation « Les vases » (partie 1 et 2, cf. Annexe 2). Dans ce qui suit, nous nous focalisons plus particulièrement sur les interactions entre Luca et Mélanie qui ont

mené l'essentiel des échanges. Cela nous permettra de documenter de manière détaillée l'évolution notamment dans la construction de la notion de fonction de Mélanie.

Les tableaux montrent les échanges entre les élèves du groupe. Dans les transcriptions, nous avons utilisé différentes couleurs pour distinguer les différents registres convoqués par les élèves et pour souligner le recours à l'expérience mentale dynamique du processus de remplissage des vases. **En violet : convocation de la part des élèves du registre dessin ; en rouge : recours à l'expérience mentale dynamique, en vert : convocation du registre graphique.**

1	Luca (L) à Mélanie (M) : « mais pourquoi t'as mis ça toi ? » (en pointant le graphique a et à propos du vase 3)
2	M : « bah lui (en pointant le vase 1) il se remplit genre lentement parce qu'il a beaucoup de (...) surface enfin beaucoup de volume par rapport à lui (en pointant le vase 3) »
4	[...] M : « je sais mais là (pointe le vase 1) ça va se remplir plus lentement que si le truc il était comme ça (resserre les deux mains), du coup, là (en pointant le graphique b) ça va prendre plus de temps tandis que là (en pointant la base du graphique a) ça prend genre très peu de temps. Mais ce que je veux dire c'est que là (en pointant le vase 3) ça va se remplir plus vite au début mais à la fin ça va se (...) « désaccélérer ». Du coup, là (en pointant la base du graphique a) ça va aller hyper vite, et puis après progressivement plus lentement »
9	[...] L à M : « parce qu'en fait tu vois ici (en pointant le vase 1) le bas il est plus fin (en pointant le bas), le milieu (en pointant le milieu) c'est plus large, d'accord ? oui ou non ? et en haut (en pointant le haut) ça redevient fin. Et du coup, là on voit la même chose (il pointe le graphique a), au début c'est fin, il se remplit plus vite, il arrive vers le milieu (pointant le milieu du graphique a) c'est lent c'est lent et là (pointant le haut du graphique a) il ré-accélère (...), tu vois ? »
24	[...] Luca explique à Sara pourquoi l'association 1-b n'est pas correcte : L : « mais regarde parce qu'ici (en pointant le haut du graphique b) il accélère pas du tout, il reste tout le temps ... tout le temps lent (pointant le graphique b)) ... du genre à la fin ... à la fin d'accord ce sera plus rapide (pointant le haut du vase 1) ... pas là (pointant le haut du graphique b)), là tu vois c'est lent alors qu'à la fin (pointant le haut du vase 1) il est fin, ça devrait être trop rapide, tu vois ce que je veux dire ? »
25	M : « ouais ... ouais »
26	Sara (S) : « ouais c'est vrai ça t'as raison »
27	M parcourt lentement la courbe b avec son index (Fig. 4) puis : « oui puis en plus ici (en pointant le milieu de la courbe b) c'est rapide alors que (en pointant le milieu du vase 1) c'est (...) »
28	M : « oui, c'est juste »
29	Mélanie corrige sa production : elle avait mis 1-b et 3-a et maintenant elle associe correctement 1-a et 3-d.

Ci-dessous les productions individuelles de la deuxième partie réalisées par les élèves avant le travail de groupe (Figure 1, Figure 2, Figure 3)

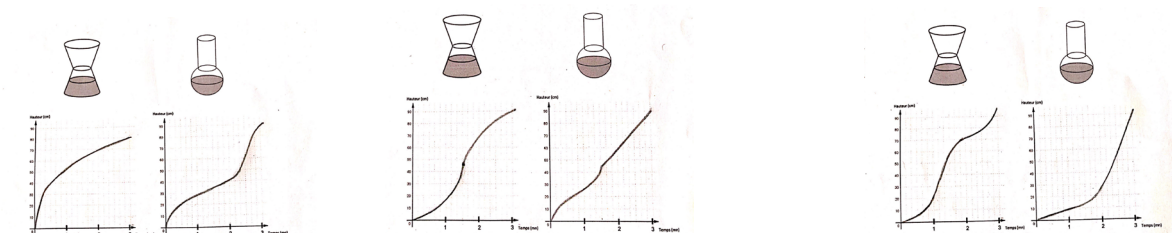


Figure 1. Production de Sara **Figure 2.** Production de Luca. **Figure 3.** Production de Mélanie

54	M : « bah moi j'ai mis genre court (en pointant la première partie de son graphique a), après j'ai mis deux fois comme ça, j'ai mis deux fois parce qu'il est serré (en pointant le milieu du vase 1). C'est vrai que c'est au milieu que c'est vraiment serré, puis après j'ai mis ça (M montre le haut de son graphique) »
55	L : « pourquoi tu as mis deux fois serré ? »
56	M : « parce que genre là (en dessinant un disque dans la partie supérieure du vase 1) je pensais que ça allait être comme ça, tu vois ? et du coup je me suis dit que là (en pointant le haut de la partie inférieure du vase 1) c'était serré comme là (en pointant le bas de la partie supérieure du vase 1) c'était serré. »
57	M : « genre j'ai mis la même, la même ... le même temps »
58	L : « genre la partie en bas c'est la même chose que la partie en haut (en pointant le graphique a de M). »
59	L : « Non parce qu'à la fin (en pointant le haut du graphique de M) tu mets que ça va plus vite »
60	M : « ouais »
61	<i>M. efface d'abord le haut de son graphique et puis elle décide de tout effacer pour intégrer le point de vue ponctuel de L. M hésite puis déclare :</i>
62	M : « Je pense que ça n'a pas grande importance de le mettre au milieu, non ? de mettre 45 »
63	L : « bah si c'est important parce que c'est au milieu que ... enfin si tu veux être précis c'est important »
64	M : « ah, c'est au milieu du temps »
65	<i>(moment d'hésitation)</i>
66	M : « Ça peut prendre un certain temps et après ça peut aller plus vite. »
67	L : « Non le débit il est toujours le même »
68	M : « Ouais mais au début ça se remplit plus lentement (en pointant le graphique) puis après d'un coup ça va aller plus vite et puis après ça va se (...) boucher »
69	L : « oui c'est pour ça, regarde, au milieu ça se resserre (en pointant son graphique a) parce que tu vois c'est rapide »
70	M : « ouais, mais le temps je sais pas si je suis d'accord mais ça (pointant l'axe vertical) 45 je suis d'accord »
71	L : « pourquoi le temps ? »
72	M : « mais parce que là ça va prendre peut-être ... »
73	L : « ça va prendre trois minutes, peu importe la forme, ça prend trois minutes »
74	M : « bon, enfin c'est pas grave »
75	L : « mais faut qu'on se mette d'accord, le but c'est qu'on se mette d'accord pour proposer quelque chose »
76	<i>Mélanie place le point de coordonnées (1,5 ; 45) sur son graphique qui est resté vierge (depuis la ligne 62).</i>
77	M : « mais je sais pas si je suis d'accord, là ça va prendre par exemple 45 secondes (en pointant la partie grisée du vase 1) puis là ça va en prendre peut-être 10 (en pointant le milieu du vase 1) mais même si ça va prendre trois minutes à la fin, et bah peut-être 45 secondes il va arriver là (en pointant l'axe horizontal) puis après ça va aller genre ... »
78	L : « une minute trente »
79	M : « ouais mais là ça va prendre 45 secondes (elle montre simultanément la partie grisée du vase 1 et le début de l'axe horizontal du graphique a) puis là ça va peut-être en prendre genre ... deux petites là (en pointant le milieu du vase et l'axe horizontal à peu près à une minute) et puis (inaudible) »
80	L : « non, parce que ça va prendre trois minutes. Tu vois ça (pointant le vase 1), la partie d'en bas et la partie d'en haut elles ont le même volume. Puis si ça a le même volume ils vont prendre le même temps pour se remplir »
81	M : « ah ouais, du coup genre ... ouais »
82	S : « mais peut-être c'est le même truc, hein ? »
83	M : « bah on fait comme ça (elle trace sa nouvelle courbe correcte pour le vase 1) »

Discussion

Dans leurs travaux individuels (avant le travail en groupe) sur la situation « Les vases », Mélanie et Sara semblent être restées au niveau global sans tenir compte de variations locales et sans prendre en compte les éléments ponctuels pertinents, alors que Luca coordonne les trois perspectives. Luca convoque de manière pertinente l'EMD pour justifier ses réponses ; il semble que le passage par l'EMD pour coordonner les registres dessin et graphique soit naturalisé chez Luca. Durant les échanges, Mélanie fait évoluer ses points de vue ; c'est aussi le cas pour Luca mais dans une moindre mesure. Dans le problème « Le circuit », Mélanie choisit le circuit numéro 5, très vraisemblablement parce qu'elle y retrouve globalement le dessin de la courbe, et elle place le point de départ (D) en bas à gauche du circuit pour parfaire la correspondance globale avec le graphique. Il semble donc que Mélanie ait utilisé un point de vue global sur le graphique : la correspondance des profils entre le graphique et le cinquième circuit est tellement frappante que cela ne l'a certainement pas amené à recourir à l'expérience mentale dynamique. Un point de vue uniquement global pourrait néanmoins amener à une analyse plus pertinente, à condition toutefois d'être accompagné de l'expérience mentale dynamique. Dans ce cas, Mélanie aurait pu discerner par exemple la présence de trois minima locaux et y associer la présence de trois virages sur le circuit, réflexion qui aurait pu lui permettre d'éliminer les circuits 1 et 5. Dans la première partie de la situation « Les vases », Mélanie convoque de manière adéquate l'expérience mentale dynamique pour coordonner les registres dessin et graphique. Cette compétence s'observe également très clairement dans son discours lors du travail sur la deuxième partie de la situation, en particulier, lorsqu'elle coordonne explicitement ces deux registres avec une gestuelle des deux mains et un discours reflétant une expérience mentale dynamique : « ouais mais là ça va prendre 45 secondes (elle montre simultanément la partie grisée du vase 1 et le début de l'axe horizontal du graphique a, Fig. 17, ligne 76) puis là ça va peut-être en prendre genre ... deux petites là (en pointant le milieu du vase et l'axe horizontal à peu près à une minute, Fig. 18, ligne 76) ». Pour en revenir à la première partie de la situation, les erreurs qu'elle commet pour les vases 1 et 3 semblent dues à des interprétations erronées des dessins, alors que son interprétation dynamique des graphiques, elle, est pertinente comme on peut le constater dès le début de l'échange à propos du vase 1 : « Du coup, là (en pointant la base du graphique a) ça va aller hyper vite, et puis après progressivement plus lentement » (ligne 4). Néanmoins, son interprétation des pentes des différentes parties d'un graphique en tant que vitesses d'élévation du niveau d'eau n'est pas encore naturalisée comme on le voit dans son hésitation sur les termes employés ci-après : « parce que là c'est court (pointant la base du graphique d), parce que là (pointant la base du graphique d) ... ça prend ... c'est rapide et ensuite (pointant le haut du graphique d) c'est plus lent » (ligne 23). On peut d'autre part remarquer qu'au début de l'échange concernant la première partie de la situation, Mélanie porte spontanément un regard local sur les graphiques alors que son regard sur les dessins est essentiellement global (« il se remplit genre lentement parce qu'il (vase 1) a beaucoup de (...) surface enfin beaucoup de volume par rapport à lui (vase 3) » ; « je sais mais là (pointe le vase 1) ça va se remplir plus lentement que si le truc il était comme ça (*resserre les deux mains pour mimer un vase étroit*, Fig. 3) » (ligne 2)). Ses points

de vue s'enrichissent au cours de cet échange et lui permettent finalement de coordonner adéquatement un regard à la fois global et local sur le dessin et le graphique correspondant. On retrouve cette vision iconique de Mélanie sur les dessins dans son discours explicatif concernant le vase 1 de la deuxième partie, vase 1 qu'elle considère en trois secteurs, deux « larges » et un « serré », sans distinguer dans chacun de ces secteurs les variations au niveau local et sans accorder d'attention particulière au point de jonction des deux parties de ce vase (point de vue ponctuel) : « Ouais mais au début ça se remplit plus lentement (en pointant le graphique) puis après d'un coup ça va aller plus vite (...) » (ligne 66). Ajoutons que cette dernière intervention manifeste de la part de Mélanie un point de vue local sur le graphique puisqu'elle mobilise la notion de vitesse d'élévation du niveau d'eau. La confrontation avec Luca à propos de la réalisation du graphique correspondant à ce vase 1 de la deuxième partie fait évoluer Mélanie vers une première prise en compte du point de vue ponctuel sur le graphique ainsi que vers une meilleure prise en compte du point de vue local sur le graphique. Nous l'observons, d'une part, dans sa remarque « c'est vrai que c'est au milieu que c'est vraiment serré » (ligne 54) où elle montre un point de vue ponctuel susceptible d'amener de plus un regard local sur le secteur « serré » puisque le resserrement y est maintenant perçu comme variable. Nous le voyons d'autre part dans sa réflexion sur l'emplacement du point du graphique correspondant au point de jonction des deux parties du vase. En effet, Mélanie prend le temps de réfléchir à l'affirmation de Luca concernant l'appartenance nécessaire du point (1,5 ; 45) à la courbe en tant que point central et de chercher à expliciter son propre point de vue à ce propos : elle déclare d'abord « Je pense que ça n'a pas grande importance de le mettre au milieu, non ? de mettre 45 » (ligne 61), puis dans un deuxième temps « ouais, mais le temps je sais pas si je suis d'accord mais ça (pointant l'axe vertical) 45 je suis d'accord » (ligne 68) et elle expose que la première partie du vase peut se remplir plus lentement que la deuxième, vraisemblablement parce qu'elle n'a pas intégré dans sa réflexion la notion de débit constant. Finalement, à la fin de l'échange, Mélanie finit par adhérer entièrement au point de vue ponctuel de Luca (M : « ah ouais, du coup genre ... ouais », lignes 78-80).

Conclusions

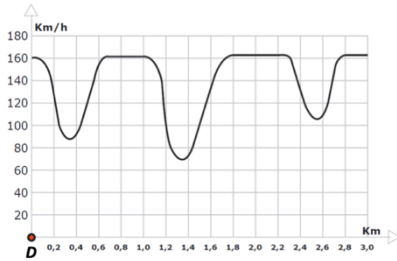
Rappelons que notre questionnement initial consiste à documenter l'évolution des constructions de la notion de fonction d'élèves qui interagissent entre eux pendant des activités de résolution de problèmes. L'analyse des échanges au sein du trio d'élèves présentée dans cet article montre que cette situation a amené des interactions épistémologiquement riches entre Luca et Mélanie : elles ont en effet contribué à faire évoluer la construction de Mélanie du concept de fonction par des points de vue plus riches sur les représentations graphiques et sur les dessins correspondants en renforçant leurs liens, à travers l'EMD, avec le phénomène décrit ; elles ont aussi amené Luca à expliciter ses points de vue et, ce faisant, à parfaire sa conceptualisation des représentations graphiques en jeu dans cette situation. Le croisement de nos deux outils d'analyse s'est révélé fécond en nous permettant de récolter des informations précises sur l'évolution des conceptions des élèves au cours de leur travail. Nos deux outils d'analyse nous ont donc permis de repérer des évolutions dans les

conceptualisations des élèves dans le contexte d'une situation de RP. Mais les mêmes évolutions auraient-elles pu s'opérer tout aussi bien à travers un dispositif d'enseignement plus frontal, dans lequel la RP ne jouerait, au plus, qu'un rôle secondaire ? Nous pensons avoir montré que le contexte d'une activité de recherche en groupe a amené Mélanie et Luca à s'impliquer fortement dans la réflexion en y investissant leurs points de vue initiaux, puis en parvenant à les enrichir par confrontation avec ceux de leurs pairs.

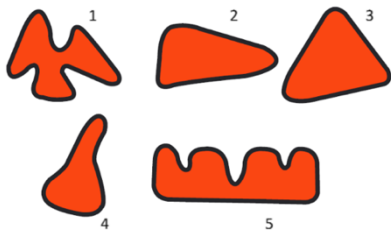
Annexe 1

Question 4

Ce graphique représente les variations de la vitesse d'une voiture de course lors de son 2^e tour sur un circuit plat de 3 km de longueur.



Voici les tracés de cinq circuits :



a) A partir du graphique ci-dessus, identifier sur lequel de ces cinq circuits la voiture roulait. Entourer votre réponse.

b) Indiquer sur le circuit que vous avez identifié :

- à quel endroit se situe le point de départ **D**.
- dans quel sens tourne la voiture.

Figure 4. Enoncé de l'activité « Le circuit »

	GRAPHIQUE	EXPÉRIENCE MENTALE DYNAMIQUE (EMD)	DESSIN
GLOBAL	Il y a trois minima locaux	La voiture ralentit trois fois	Il y a trois virages
PONCTUEL	Le minimum global est le deuxième des trois minima locaux	Le plus fort ralentissement est le deuxième	Le virage le plus serré est le deuxième
LOCAL	Le point de départ est situé immédiatement avant un intervalle de décroissance (à la fin du plus court intervalle de vitesse constante) Le plus grand intervalle de vitesse constante arrive après la plus petite valeur de minimum local	La voiture ralentit immédiatement après avoir franchi la ligne de départ La voiture maintient le plus longtemps une vitesse constante après le plus fort ralentissement	Le point de départ est situé peu avant un virage La plus longue ligne droite est parcourue après le virage le plus serré

Tableau 1 Registres et points de vue croisés pour le problème « Le circuit »

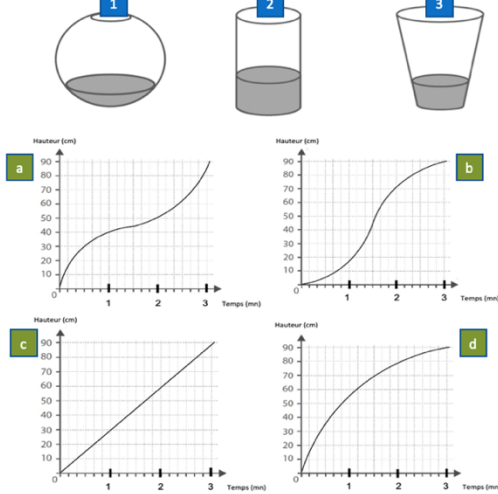
Annexe 2

Les vases

Première partie :

Ces trois récipients ont la même hauteur de 90 cm et le même volume. On les remplit en 3 minutes, l'un après l'autre, à un robinet dont le débit ne varie pas. Les graphiques indiquent la hauteur de remplissage des récipients en fonction du temps.

Associer, si possible, chaque récipient à sa courbe de remplissage.



Deuxième partie :

Ces deux récipients ont la même hauteur de 90 cm et le même volume. Ils sont remplis en 3 minutes.

Tracer les graphiques indiquant la hauteur de remplissage de ces récipients en fonction du temps.

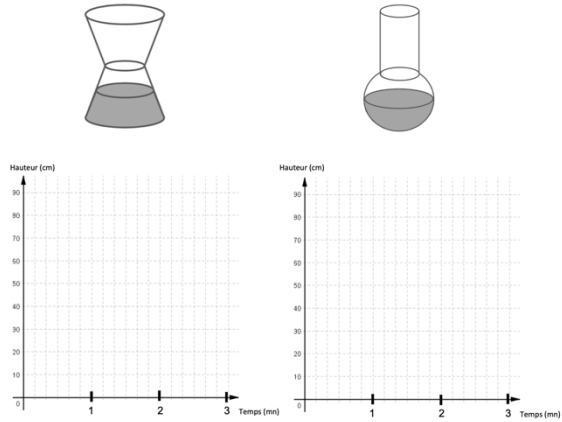


Figure 5 Énoncé de la situation «Les vases» (première et deuxième parties)

	Graphique	Expérience mentale dynamique (EMD)	Dessin
Les Vases			
Première partie			
Global	La troisième représentation graphique est linéaire	La vitesse d'élévation du niveau d'eau est constante	Les sections horizontales du vase cylindrique sont toutes identiques
Ponctuel	La courbe passe par le point milieu (1,5 ; 45)	Les deux hémisphères ayant même volume leurs durées de remplissage respectives sont identiques	Le vase sphérique possède le même volume en haut et en bas (les deux hémisphères sont identiques).
Local	1. Sur le graphique d, la croissance est d'abord rapide et puis de plus en plus lente 2. Sur le graphique a, la croissance est d'abord rapide, puis de plus de plus lente, et puis elle devient de plus en plus rapide	1. La vitesse d'élévation du niveau d'eau est d'abord rapide et puis de plus en plus lente 2. La vitesse d'élévation est d'abord rapide puis de plus de plus lente et puis à nouveau de plus en plus rapide	1. L'aire des sections horizontales du vase conique croissent du bas vers le haut 2. Les sections horizontales du vase sphérique sont d'abord étroites, puis large, puis à nouveau étroites lorsque l'on se déplace du point le plus bas au point le plus haut

Les vases Deuxième partie			
Global 1^{er} vase	La courbe est constituée par deux parties identiques symétriques par rapport au point milieu.	La variation de la vitesse d'élévation dans la première partie du vase (lent puis rapide) est l'inverse de celle de la deuxième partie (rapide puis lent).	Le vase est constitué de deux parties identiques, symétriques l'une de l'autre.
Ponctuel 1^{er} vase	Le milieu de la courbe est « lisse »	La vitesse d'élévation varie continument lorsque l'eau atteint le milieu du vase	Le diamètre d'ouverture du sommet de la partie basse du vase correspond à celui du socle de la partie haute
Local 1^{er} vase	1. La croissance est d'abord lente puis de plus en plus rapide puis à nouveau de plus en plus lente. La pente au point milieu est faible.	1. La vitesse d'élévation du niveau d'eau est d'abord lente et puis de plus en plus rapide et à nouveau de plus en plus lente. 2. Lorsque le niveau d'eau atteint le milieu du vase la vitesse d'élévation reste relativement modeste.	1. Les sections horizontales vont en décroissant jusqu'au milieu puis en croissant à nouveau. 2. D'autre part ce diamètre commun reste relativement important.

Tableau 2 Registres et points de vue croisés pour l'activité des vases

Références

- Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5(1), 37-65.
- Duval R. (2006) Transformations de représentation sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXII^e Colloque COPIRELEM* (pp. 67-89). Strasbourg : IREM.
- Rogalski M. (2008) Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. *Didactique, épistémologie et histoire des sciences : Penser l'enseignement*.
- Vandebrouck F. (2011) Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 149-185.