Titre: Fonder son enseignement sur des problèmes de recherche en mathématiques : quels impacts sur les élèves ?

Auteurs: ALDON Gilles, DI FRANCIA Miriam et GUISE Antoine

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1184 - 1203

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Fonder son enseignement sur des problèmes de recherche en mathématiques : quels impacts sur les élèves ?

ALDON[1] Gilles – DI FRANCIA[2] Miriam – GUISE[3] Antoine

Résumé – La présente communication porte sur la mise en œuvre d'une démarche d'investigation en mathématiques à différents niveaux scolaires. Nous étudions les effets d'une démarche d'enseignement fondée sur la recherche de problèmes, dans les classes participant au lieu d'éducation associé (LéA), sur les apprentissages des élèves et leurs conceptions vis-à-vis des mathématiques tant du point de vue scientifique que comme discipline scolaire à travers un questionnaire de début et de fin d'année et des tests.

Mots-clefs : recherche de problème, situations didactiques, apprentissage des mathématiques, valeurs, conception.

Abstract – This paper focuses on the implementation of an inquiry-based approach in mathematics at different school levels. We study the effects of a teaching approach based on problem solving, in the classes participating in the Associated educational Places (LéA in French), on the students' learning and their conceptions of mathematics both from a scientific point of view and as a school discipline through a questionnaire at the beginning and end of the year and tests.

Keywords: problem solving, didactical situations, mathematics learning, values, design

1. ENS de Lyon, France, gilles.aldon@ens-lyon.fr

2. IREM de Lyon, France, miriam.di-francia@ac-lyon.fr

3. IREM de Lyon, France, antoine.guise@ac-lyon.fr

Introduction

Cette proposition se situe dans le premier axe de l'appel à communication du projet spécial « La démarche d'investigation et la résolution de problèmes dans la classe de mathématiques ». Elle s'appuie sur le travail de l'équipe DREAM de l'IREM de Lyon (Aldon *et al.*, 2018, Aldon, 2021, Front, 2015, Gardes & Yvain, 2014) et en particulier s'intéresse à l'opérationnalisation en classe de la démarche d'investigation en posant la question des apprentissages, quand des élèves sont confrontés à des Situations Didactiques de Recherche de Problème (SDRP dans la suite) (Gardes, 2013). L'hypothèse que nous mettons à l'épreuve consiste à affirmer qu'un enseignement fondé sur les SDRP permet aux élèves de développer des compétences et des connaissances mathématiques et dans le même temps de donner une image positive de la discipline. Dans cette proposition de communication, nous nous intéressons à un des aspects du travail mené dans l'équipe de recherche et qui consiste à mettre à l'épreuve cette hypothèse. Après une présentation de l'épistémologie sous-jacente à ce travail et une description de la méthode utilisée, nous discuterons de la pertinence de l'approche à travers les premières analyses des données recueillies durant l'année universitaire 2021-2022, qui seront complétées en amont du colloque EMF 2022.

Contexte de l'étude et questions de recherche

Contexte de la recherche et cadres théoriques

L'équipe DREAM travaille depuis son origine dans une perspective de recherche collaborative regroupant des enseignants de différents niveaux (primaire, collège, lycée, université) et des chercheurs en mathématiques et en didactique des mathématiques. Ce sont les points de vue croisés des enseignants et des chercheurs qui ont déterminé les questions de recherche et permis la conception et la mise en œuvre de la méthodologie. Les cadres théoriques qui fondent nos recherches sur les problèmes dans la classe de mathématiques s'appuient sur la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998) et sur des fondements épistémologiques mettant en évidence les problèmes de mathématiques comme constituant le cœur de l'activité mathématique (Pólya & Szego, 1925/1972, Schoenfeld, 1988, 2016, XX) et le lieu de mises à l'épreuve de connaissances dans une perspective de création de savoirs nouveaux. Dans le processus de mathématisation verticale sur lequel se concentre notre travail, un problème est une question qui implique, dans sa résolution, à la fois l'utilisation d'un raisonnement reconnu comme valide et la manipulation de concepts et d'objets mathématiques. Les élèves sont ainsi confrontés, à partir de leurs connaissances informelles fondées sur leur appréhension de l'espace et du temps, et des connaissances déclaratives issues de leur apprentissage des mathématiques, à la construction de procédures logiques de déduction à travers des règles, de calculs, de raisonnement, plus généralement de manipulation d'objets mathématiques (Schoenfeld, 1988). C'est dans ce cadre épistémologique que l'équipe DREAM a conçu une approche de l'enseignement des mathématiques s'appuyant sur la recherche de problèmes. Les Situations Didactiques de Recherche de Problème (SDRP[4]) sont définies comme étant des situations didactiques, au sens de Brousseau (1998), c'est-à-dire des situations dans lesquelles s'effectue un transfert de responsabilité entre le professeur qui propose cette situation et l'élève qui accepte de jouer ce jeu dont le gain est le savoir. Mais ce sont aussi des situations dans lesquelles il ne s'agit pas de viser un savoir précis, mais plutôt de laisser l'élève explorer une situation et tisser les liens de ses connaissances pour découvrir une petite partie des mathématiques ; en s'appuyant sur des expériences qu'il peut mener dans le milieu proposé par l'enseignant, l'objectif de telles situations est de conforter les connaissances des élèves et d'en explorer de nouvelles à travers le processus de recherche et de résolution d'un problème. Le rôle de l'enseignant est alors dans un premier temps de proposer un problème et un milieu (Brousseau, 1998, Margolinas, 2004) suffisamment riche pour que ses rétroactions permettent la construction de connaissances. C'est dans ce contexte que les expérimentations menées dans les classes nous ont conduits à considérer les SDRP comme des jalons de l'enseignement des mathématiques (Aldon et al., 2018) en proposant de fonder l'enseignement des mathématiques sur les problèmes (Gardes, 2018, Aldon et al. 2014). Nous nous situons cependant dans le respect des programmes officiels de l'Éducation Nationale en France et les références aux connaissances et aux compétences présentes dans l'article renvoient aux textes institutionnels.

Questions de recherche

La pertinence de ce travail pour les apprentissages des élèves dans une classe ordinaire est ainsi un enjeu majeur de la diffusion des travaux de l'équipe de recherche. L'évaluation de ce dispositif est essentielle, d'une part, pour s'assurer que les élèves des classes dans lesquelles les expérimentations ont lieu reçoivent un enseignement qui leur permet de s'inscrire dans le cours normal des études et donc d'engranger les compétences et les connaissances prévues dans le curriculum, et d'autre part pour diffuser à l'extérieur du groupe de recherche les méthodes et les principes de cette construction didactique (Aldon *et al.*, 2017). Ainsi, depuis la participation de l'équipe au réseau des Lieux d'Éducation Associés (LéA) de l'Institut Français de l'Éducation, nous avons mis en place une méthodologie spécifique pour répondre aux enjeux majeurs que posent ces questions de transfert. C'est ainsi que nous sommes amenés à traiter les questions : le déploiement d'une organisation annuelle de l'enseignement fondée sur la recherche de problèmes permet-il aux élèves concernés, en s'appuyant sur leur travail et leurs réflexions dans l'activité mathématique, de mobiliser les savoirs présents dans les programmes et de progresser dans leurs compétences et connaissances mathématiques? Les conceptions des mathématiques en tant que science et en tant que discipline scolaire évoluent-elles chez ces élèves?

4. https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/icap_website/1324/34784

Cadre théorique et Méthode

De façon à répondre à ces questions, nous avons collectivement construit une méthode fondée sur des prises de données qualitatives, l'observation en classe et l'analyse des séances, mais aussi sur un suivi plus spécifique de certains élèves tout au long de l'année (observation des moments de recherche, recueil des cahiers, entretiens particuliers). Ainsi, le recueil de données a été réalisé, en tenant compte du grand nombre d'élèves impliqués, dans une perspective quantitative avec deux questionnaires (en début et en fin d'année) et des pré et post tests entourant des séquences fondées sur des SDRP.

Questionnaires

Le recueil de données a été effectué sur 14 classes, soit 330 élèves répartis de la manière suivante : 8 classes de cycle 3 (178 élèves) ; 4 classes de cycle 4 (84 élèves) et 2 classes de lycée (68 élèves). Le deuxième recueil s'est déroulé en juin en utilisant le même questionnaire avec les effectifs suivants : 171 élèves de cycle 3, 89 élèves de cycle 4, 63 élèves de lycée pour un effectif total de 323 élèves.

Les questions ont été regroupées en deux grandes parties, la première interroge les élèves sur l'image qu'ils ont des mathématiques et des mathématiciennes et mathématiciens, la seconde s'intéresse à leur position d'élèves face à la discipline « mathématiques » enseignée à l'école, au collège ou au lycée (Voir annexe 3).

Pour fonder la méthode de recueil de données, nous nous sommes appuyés sur les idées de Bishop (1988, 2008) pour lequel le savoir est considéré comme le résultat d'une genèse sociale prenant en compte les dimensions historiques, culturelles, mais aussi plus localement les dimensions liées à l'environnement, la classe, l'enseignant, et la culture personnelle ; les valeurs dans l'enseignement des mathématiques sont les qualités affectives profondes que l'éducation favorise à travers l'enseignement. Elles nourrissent profondément les conceptions des élèves vis-à-vis de la discipline elle-même et sont des résultats effectifs de l'enseignement *"more than procedural or conceptual knowledge"* (Bishop, 2008, p. 232). Les valeurs peuvent ainsi être conceptualisées en valeurs idéologiques, individuelles et sociales. Dans chaque niveau, les valeurs sont proposées comme des paires modélisant une tension entre deux extrêmes :

> "I have described them as complementary pairs, where rationalism and objectivism are the twin ideologies of Mathematics, those of control and progress are the attitudinal values which drive Mathematical development, and, sociologically, the values of openness and mystery are those related to potential ownership of, or distance from Mathematical knowledge and the relationship between the people who generate that knowledge and others." (Bishop, 1988, p.82)

À un niveau idéologique, le Rationalisme met l'accent sur l'argumentation, le raisonnement, l'analyse logique et les explications. L'Objectivisme, désigné aussi par le mot "empirisme" (Bishop et al., 2005) met l'accent sur un enseignement transmettant les valeurs d'objectivation, de concrétisation, de symbolisation, de lien au concret et à l'application des mathématiques.

Au niveau individuel, le Contrôle met l'accent sur la puissance et la maîtrise des règles, des procédures, des raisonnements et des vérifications dans la connaissance mathématique et se réfère plutôt au mode de raisonnement déductif quand le Progrès insiste sur la construction des idées en maths, le développement de nouvelles méthodes, la multiplicité des solutions et l'exemplification se référant plutôt à un mode de raisonnement inductif.

Enfin, au niveau social, l'Ouverture insiste sur des valeurs de démocratisation du savoir en reliant les démonstrations à la conviction et aux explications personnelles et en encourageant la créativité, tandis que le Mystère renvoie à des valeurs mettant en avant la fascination, le merveilleux de la construction mathématique et en encourageant l'exploration d'un monde des idées.

Pour chacune des questions du questionnaire, nous nous sommes mis collectivement d'accord pour attribuer un coefficient aux valeurs, après que chacun individuellement a déterminé le degré de tension exprimé par la question entre les deux extrêmes dans les paires des composantes idéologiques, individuelles et sociales. Ainsi, pour chacune des questions, les réponses fournies par les élèves attribuaient un poids entre 0 et 5 aux valeurs exprimées dans chacune des composantes. Par manque de place, nous ne donnerons pas dans ce texte les résultats auxquels nous sommes arrivés qui seront, en revanche, présentés lors de la communication.

Pré-tests et post-tests

Pour nos classes, nous avons choisi de proposer un pré-test et un post-test entourant une séquence fondée autour d'une SDRP. Nous appelons séquence un ensemble de séances (durée 55min.), et dont le contenu est cohérent autour d'objets de savoirs mathématiques présents dans les programmes de la classe. Les tests ont été créés en analysant les contenus mathématiques visés de la séquence ainsi que les prérequis théoriques des élèves issus des programmes des années antérieures. Le pré-test et le post-test d'une même séquence sont identiques et sont proposés avant et après la séquence dans les mêmes conditions de réalisation. Nous analyserons dans ce document deux pré-test-post-test, un en collège et un en lycée. Nous avons utilisé un t-test apparié en posant l'hypothèse nulle : la moyenne des deux tests est la même et en considérant l'hypothèse alternative comme "la moyenne a augmenté" en choisissant le risque de première espèce, alpha=5%.

Discussion

Les réponses au questionnaire

Nous nous appuyons ici sur les réponses en début et fin d'année du questionnaire de façon à pouvoir mettre en évidence les évolutions.

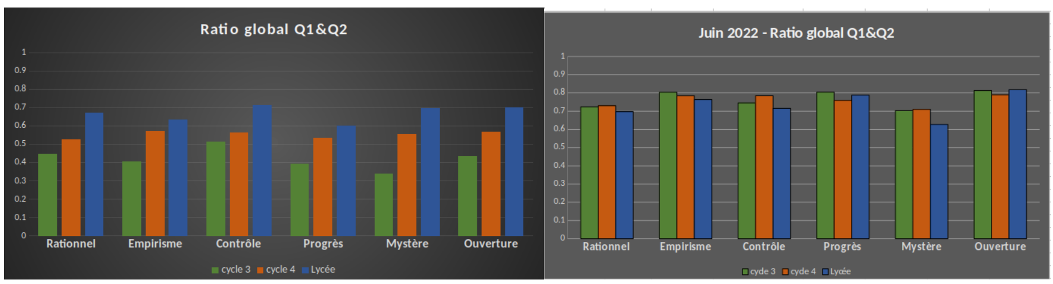


Figure 1a et b - Résultats des questions relatives aux mathématiques comme science

En nous appuyant sur le cadre théorique présenté ci-dessus, nous avons analysé les réponses des élèves, d'une part dans leur globalité et d'autre part par niveaux (cycle 3 : *grade* 4 - 6, cycle 4 : *grade* 7 - 9, lycée : *grade* 10 - 12). Les représentations graphiques données dans ce paragraphe montrent ce positionnement tel qu'ils l'ont exprimé en début d'année scolaire. L'axe des ordonnées représente la moyenne des réponses pondérées par les coefficients attribués à chaque question.

La figure 1 donne les positionnements suivant les cycles d'enseignement par rapport aux questions portant sur la conception des élèves vis-à-vis des mathématiques comme science (1ère grande partie du questionnaire évoquée dans la section III-1) et l'évolution des réponses entre septembre et juin. En septembre, il apparaît clairement que les élèves de primaire ont des idées très vagues sur ce que peuvent être les mathématiques et ce que font les mathématiciens et mathématiciennes. Au fur et à mesure de l'avancée dans les études, une conscience plus grande apparaît. Les valeurs moyennes obtenues peuvent être considérées comme des coefficients barycentriques entre les valeurs extrêmes. Le positionnement des valeurs idéologiques se situe ainsi pour les trois niveaux à peu près au milieu (un peu plus vers le Rationalisme pour les élèves de lycée et de primaire, un peu plus vers l'Empirisme pour les élèves de collège). En ce qui concerne les valeurs attitudinales, la position moyenne est plus dans le Contrôle. Du point de vue des mathématiques dans la société, elles apparaissent plus dans l'Ouverture pour les élèves de primaire et la différence diminue jusqu'au lycée pour atteindre à ce niveau une position médiane, entre Mystère et Ouverture. En juin, la figure 1-b montre à la fois un tassement des réponses entre les cycles et une affirmation des avis ; en ce qui concerne les valeurs idéologiques, le positionnement des trois niveaux se situe cette fois plus vers l'Empirisme avec une plus grande cohérence entre les cycles. L'évolution des positionnements concernant les valeurs attitudinales montre un équilibre pour les trois cycles avec cependant pour l'école et le lycée une tendance à favoriser les valeurs de Progrès (0,75-0,80 pour le cycle 3 et 0,72-0,79 pour le lycée et une stabilité, 0,78-0,76 pour le cycle 4). Enfin, le positionnement est clairement en faveur de l'Ouverture pour les trois cycles, ce qui montre une évolution de l'image des mathématicien.nes et des mathématiques en tant que science pour les élèves interrogés.

Le positionnement des élèves sur les mathématiques d'un point de vue individuel (2ème grande partie du questionnaire évoquée dans la section III-1) montre nettement, et quels que soient les niveaux de classe, un positionnement mettant en avant la valeur de Progrès lorsque la discipline scolaire mathématique est évoquée (Fig. 2). Les réponses de juin ne font qu'affirmer cette tendance à tous les niveaux de classe. En revanche, dans la situation de recherche de problèmes (situation évoquée dans la question Q4), il y a un mouvement inverse suivant les niveaux de classe, Progrès du côté de l'école primaire et dans une moindre mesure au collège où les poids s'équilibrent presque et au contraire Contrôle au lycée, ce qui se confirme en analysant plus précisément les réponses à la quatrième question (Fig. 3).

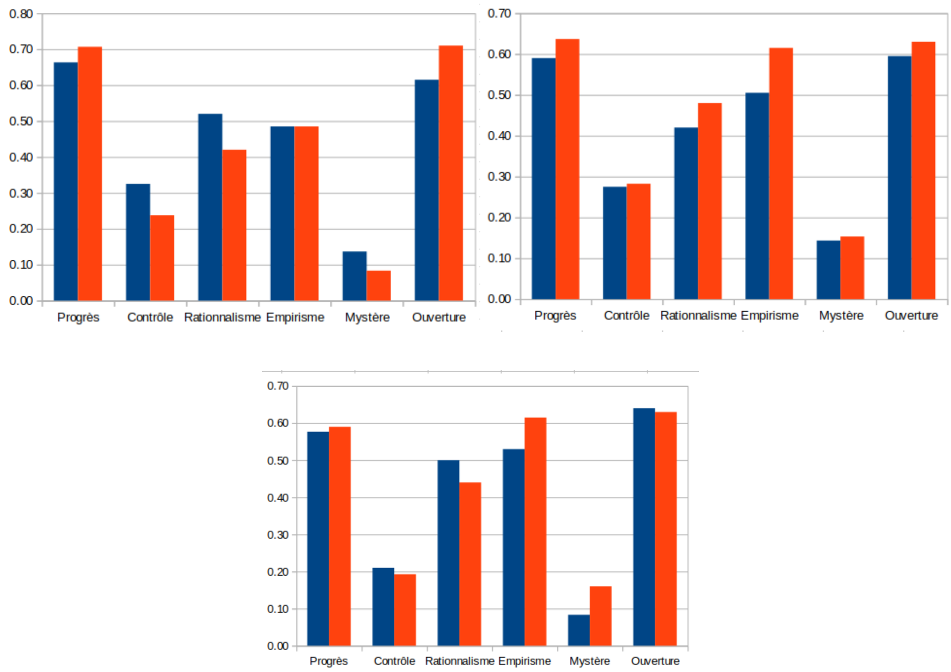


Figure 2 - Résultats relatifs aux mathématiques comme discipline scolaire (question Q3). Dans l'ordre de gauche à droite : cycle 3, cycle 4, lycée

Par ailleurs, la vision Empirique, Objective des mathématiques est plus présente que celle de Rationalisme et, là encore, à la fois dans tous les niveaux scolaires et en nette augmentation, ce qui tend à montrer que l'enseignement actuel des mathématiques fait un effort pour exemplifier, représenter et montrer les applications des mathématiques et que l'enseignement fondé sur les problèmes renforce cette tendance.

Enfin, la figure 3 montre que les élèves de primaire sont motivés par la recherche de problèmes (plus de 60% des réponses en septembre et en juin et en légère augmentation). Ils sont aussi captivés et attirés par les moments de recherche de problèmes dans la classe même si ces sentiments semblent décroître dans l'année, et si l'indifférence et l'angoisse ne sont pas absentes de leurs sentiments. Cette indifférence croît au long des études, parallèlement à l'angoisse et dans une moindre mesure à l'ennui qui apparaît décroître au fil de l'année pour les élèves de lycée et de collège. Si les élèves de lycée restent motivés et attirés (en forte augmentation dans l'année), il n'en est pas de même pour les élèves de cycle 4 qui paraissent perdre cette attirance même si plus d'un tiers des élèves cite cette qualité.

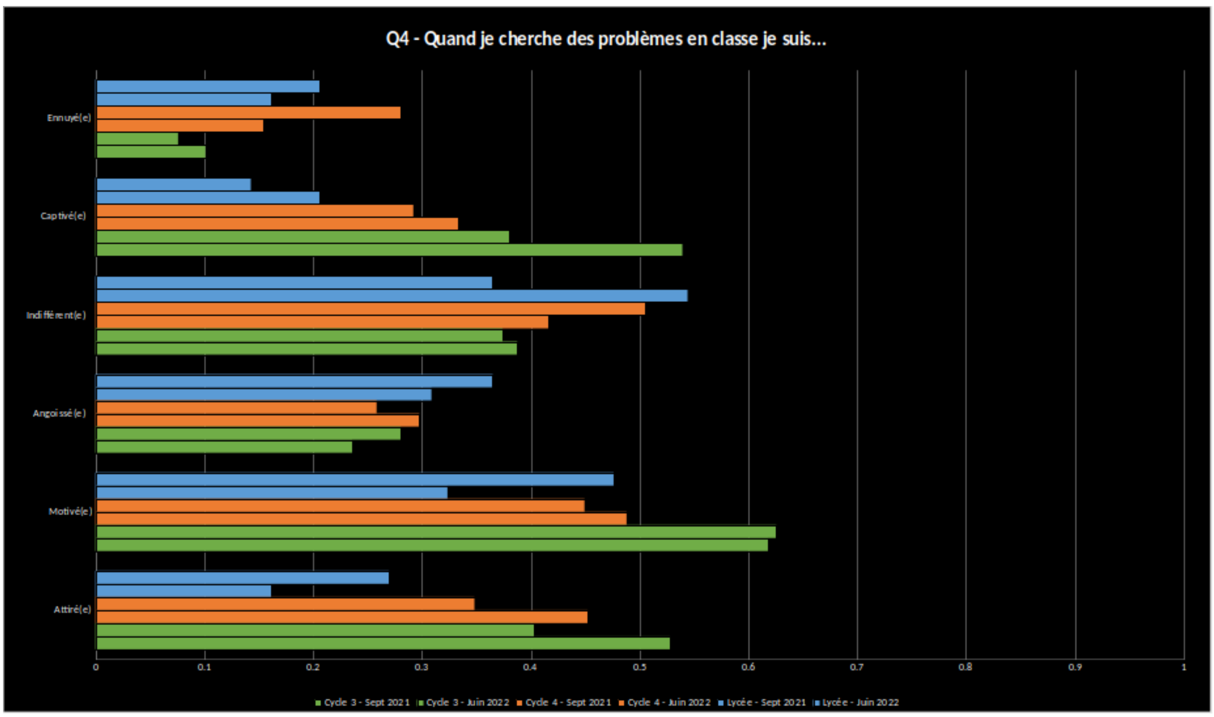


Figure 3 - Attitudes des élèves devant la recherche de problèmes

Analyse des tests

En ce qui concerne le lycée, nous nous appuyons sur les tests entourant la situation des nombres trapézoïdaux. Il s'agit de déterminer les nombres entiers naturels qui sont la somme de deux ou plus nombres consécutifs[5]. Pour chercher ce problème, les élèves disposent d'un temps relativement long pour travailler seuls, en groupes et confronter leurs résultats. Ce travail est résumé dans un "bilan de recherche". Ce bilan contient de nombreuses conjectures arithmétiques formulées par les élèves comme, par exemple, "tous les nombres impairs sont des nombres trapézoïdaux, ils sont la somme de deux entiers consécutifs" ou "la somme de 5 entiers consécutifs est un multiple de 5" ou encore

5. https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/clarolinepdfplayerbundle/pdf/2655427

“toutes les puissances de 2 et 0 ne sont pas des nombres trapézoïdaux”, pour en citer quelques-unes… et c’est alors que le calcul littéral apparaît comme un outil redoutable de démonstration. La recherche de ce problème prend tout son sens dans la classe de seconde, car il met en relation deux thèmes centraux : l’arithmétique et le calcul littéral. Notamment, il permet de caractériser les nombres (pairs, impairs, multiples de …, consécutifs) de manière littérale et donc indépendamment de la base de numération dans laquelle ils sont écrits. Pour mettre en avant ce lien fondamental, la suite de la séquence s’organise autour de plusieurs prolongements qui permettent d’une part de démontrer les conjectures formulées et d’approfondir la recherche de ce problème et d’autre part de renforcer le lien entre arithmétique et calcul littéral au travers d’exercices plus conventionnels[6].

Le pré/post-test utilisé pour mesurer la progression des élèves sur ces deux thèmes (arithmétique et calcul littéral) est composé de trois parties (voir le test en annexe 1). La première partie comporte trois exercices d’arithmétique dans un registre numérique, pré-requis théorique, mais nécessaire chez les élèves. Une deuxième partie comporte quatre exercices plus algébriques contenant également de l’arithmétique (mais abordée du point de vue littéral) ainsi que des questionnements d’égalités littérales. La dernière partie comporte deux questions ouvertes portant sur des démonstrations arithmétiques et plus spécifiques aux attentes du programme de seconde.

	t	p-valeur	Réponse
Question 1	-1.0561	0.1497	On ne peut pas rejeter l’hypothèse nulle
Question 2	-4.9576	1.427e-05	Il y a une augmentation significative de la moyenne
Question 3	-1.1707	0.1264	On ne peut pas rejeter l’hypothèse nulle
Question 4	-3.088	0.002257	Il y a une augmentation significative de la moyenne
Question 5	-1.2477	0.1111	On ne peut pas rejeter l’hypothèse nulle
Question 6	-1.1661	0.1264	On ne peut pas rejeter l’hypothèse nulle
Question 7	-3.6184	0.0005384	Il y a une augmentation significative de la moyenne
Question 8	-6.5527	2.463e-06	Il y a une augmentation significative de la moyenne
Question 9	-2.3591	0.01669	Il y a une augmentation significative de la moyenne

On voit que pour 5 questions sur 9, il y a une augmentation significative de la moyenne.

Il est intéressant de creuser un peu les questions pour lesquelles le test ne permet pas de montrer une progression, à savoir les questions 1, 3, 5 et 6. En ce qui concerne la première question : 13 élèves sur 34 ont progressé (3 n’avaient pas répondu dans le pré-test) et seulement 2 élèves ont régressé, les autres conservant la même note. Les moyennes aussi bien du pré-test que du post-test sont élevées : 4,86/7 et 5,13/7. En ce qui concerne la question 3 : 13 élèves sur 34 ont progressé, 1 élève n’a pas répondu à cette question dans les deux tests, 5 élèves ont régressé, les autres conservant la même note. Les moyennes à cette question sont assez basses : 1,71/4 et 2,11/4. Pour la question 5 : 11 élèves sur 34 ont progressé, 6 élèves ont régressé. Les moyennes sont respectivement 3,67/6 et 3,96/6. Pour

6. Pour une description plus complète de SDRP voir : https://math.univ-lyon1.fr/dream/?page_id=103

la question 6 : 16 élèves ont progressé, 8 élèves ont régressé. Les moyennes sont respectivement 6,71/10 et 7,26 sur 10.

La figure 4 présente la distribution relative des notes pour ces 4 questions en particulier.

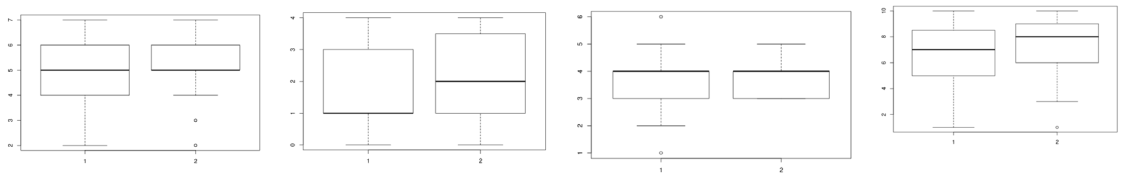


Figure 4 : Répartition des notes dans les questions 1, 3, 5 et 6

Globalement, les élèves ont progressé dans cette séquence et en plus des progrès signalés par l'analyse de ces pré-tests, on constate en classe une réelle implication de la plupart des élèves durant la phase de recherche ce qui facilite la mise en commun et les échanges qui suivent.

Au collège, nous nous appuyons sur les tests entourant la situation de la boîte sans couvercle[7] dans laquelle les élèves ont à chercher le patron d'une boîte parallélépipédique sans couvercle de plus grand volume construite à partir d'une feuille de papier A4.

Une séquence a été articulée autour de cette recherche de problème, ayant comme objectif principal la découverte de la notion de fonction. Au fil de la recherche en groupe, les élèves ont réinvesti et, parfois, découvert des notions autour du volume du parallélépipède rectangle, et de la dépendance des trois dimensions dans le contexte de l'expérience. Le lien entre le cadre bidimensionnel (patron) et tridimensionnel (perspective cavalière, boite en papier effectivement réalisée) a été l'occasion de représentations multiples d'un même objet en travaillant sur le passage entre la manipulation d'un patron papier et sa schématisation, ils ont dû avancer dans leur appréhension du passage de la manipulation à la verbalisation. Lors de la mise en commun de la recherche, la dépendance du volume de la boîte et de la hauteur choisie a été mise en évidence par les conjectures et les réflexions des élèves ; ce travail a débouché sur l'écriture de formules algébriques qui avaient été peu ou prou proposées dans les comptes rendus. Dans l'avancement de la recherche de la solution du problème, la notion de fonction a été explicitée en action, les différentes représentations d'une fonction, numérique, graphique et symbolique ont été utilisées et liées entre elles ; la mise en commun a permis d'introduire les notations et le vocabulaire des fonctions comme l'image dans l'écriture d'une fonction. Le calcul d'antécédent n'a pas été abordé : ni dans la recherche, ni dans la mise en commun ; cette question qui aurait pu déboucher sur la notion d'équation n'a pas émergé des recherches. Cette absence peut se comprendre parce que les élèves n'ont jamais, jusqu'à cette séquence, abordé cette connaissance dans leurs cours de mathématiques de quatrième ou troisième. Il a donc été décidé de ne pas traiter cette notion dans cette séquence pour la travailler plus tard dans l'année.

7. Voir à ce propos les résultats d'une expérimentation : https://math.univ-lyon1.fr/dream/?page_id=69

Les pré et post tests ont là encore été les mêmes et ont été construits autour de dix questions dont sept questions à choix multiples (QCM) et trois questions à réponse ouverte (voir le test en annexe 2). Cinq questions avaient pour but de réactiver les pré-requis liés à la séquence : calcul littéral, modélisation d'une situation géométrique ou un programme de calcul par une expression littérale, résolution d'équation (dont on a vu dans précédemment qu'elle n'est pas apparue, et donc qu'elle n'a pas été traitée dans les prolongements de la situation) ; quatre questions concernaient ensuite des connaissances propres à la séquence, des objets que l'on souhaitait que les élèves découvrent : le lien entre les différentes représentations d'une fonction, la compréhension de notion de fonction comme explicitation du lien entre deux grandeurs, visualisation de l'évolution d'une grandeur en fonction de l'autre. Enfin, une question pour évaluer l'attitude envers la "recherche" : oser aborder la situation de modélisation proposée, utiliser l'espace mis à disposition pour chercher, tester.

Le nombre d'élèves de la classe étant nettement inférieur à 30 (23 élèves), nous n'avons pas fait de test statistique pour comparer les moyennes des pré et post tests en collège. En revanche, nous avons détaillé les réponses des élèves exercice par exercice pour mettre en évidence les progressions. Il s'avère que dans cinq QCM sur sept, les réponses justes proposées ont été plus nombreuses dans le post-test que dans le pré-test. Dans les deux questions QCM restantes en revanche, les réponses correctes n'ont pas progressé. Il est bien sûr important d'analyser plus finement les réponses à ces questions et les raisons qui ont conduit à cette régression.

Si on regarde les réponses individuelles des élèves, 13 élèves sur 21 ont progressé, 3 élèves ont régressé et les autres ont obtenu le même nombre de réponses exactes. D'une façon générale, on peut admettre une progression globale de la classe en termes de connaissances et compétences mathématiques.

Conclusion

L'étude qui sera présentée repose sur la comparaison tentant de mettre en évidence les évolutions des élèves quant à leurs apprentissages et leurs conceptions des mathématiques comme science et comme discipline scolaire. Les premiers résultats concernant les apprentissages des élèves sont probants tels que montrés dans les résultats comparés des pré et post tests, l'analyse des réponses des élèves montre clairement une évolution de leur positionnement à la fois vis-à-vis des mathématiques comme science et comme discipline scolaire.La présentation finale mettra également en avant d'autres outils utilisés pour analyser plus finement les impacts sur les apprentissages et les conceptions des mathématiques chez certains élèves, en alliant les approches quantitatives aux analyses d'observation d'un point de vue qualitatif. Pour prolonger ces analyses, nous montrerons comment un enseignement fondé sur la recherche de problèmes peut à la fois viser des connaissances précises et laisser aux élèves une autonomie suffisante pour exprimer leur créativité permettant de modifier durablement leur rapport aux mathématiques.

Références

Aldon G. (2021) Dans quelle mesure est-il important de résoudre et de faire résoudre les problèmes ?. *Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula, (10)*, 9 – 28.

Aldon G., Front M., & Gardes M.-L. (2018) Analyse des effets d'un enseignement fondé sur la recherche de problèmes, in Aboud, M. (Ed.) *Actes du colloque EMF 2018 : Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines*, Paris, Editions de l'IREM de Paris. pp 1085-1093.

Aldon G., Front M., & Gardes M.-L. (2017) Entre élaboration et usage, comment poser la question de la cohérence des ressources ?, *Education & didactique, (11)* 3, 9-30.

Aldon G., Durand-Guerrier V., et Ray B. (2014) Des problèmes pour favoriser la dévolution du processus de mathématisation : un exemple en théorie des nombres et une fiction réaliste. In Aldon (Ed.), *Mathematics and realities* (p. 146-150).

Bishop A. J. (1988) *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education. Dordrecht*, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bishop A. J. (2008) Mathematics Teaching and Values Education – An Intersection in Need of Research, *ZDM: the international journal on mathematics education 31*(1):231-238.

Brousseau G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage.

Front M. (2015) Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan. *Thèse de doctorat*, Université Claude Bernard Lyon 1.

Gardes M.-L., & Yvain S. (2014) Un dispositif original pour appréhender le réel en mathématiques : la résolution collaborative de problème. In Aldon, G. (Ed.), *Mathematics and realities* (p. 361-366), *Actes de la 66*ᵉ CIEAEM, 21-25 Juillet 2014, Lyon.

Gardes M.-L. (2013) Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres. *Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1*.

Gardes M.-L. (2018) Démarches d'investigation et problèmes de recherche. In G. Aldon, *Le Rallye mathématique, un jeu très sérieux !* (pp.73-96). Canopé Editions.

Margolinas C. (2004) Points de vue de l'élève et du professeur. essai de développement de la théorie des situations didactiques. *HDR* de l'Université de Provence-Aix-Marseille I.

Pólya G., & Szego G. (1925/1972) Aufgaben und Lebrsätze aus der Analysis I. Springer. An English version, Problems and theorems in analysis I (D.Aeppli,Trans.), Springer.

Schoenfeld A. H. (1988) Problem solving in context (s). *The teaching and assessing of mathematical problem solving, 3*, 82-92.

Schoenfeld A. H. (2016) Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of education, 196*(2), 1-38.

Annexe 1 : Pré-post-test Nombres trapézoïdaux

1. Parmi les nombres entiers suivants, cochez ceux qui sont - de manière certaine - des nombres impairs (avec n entier) : 20 ; 401 ; 2^{100} ; 2n ; 5^{20} ; 2n+1 ; 3n.

2. Parmi les nombres entiers suivants, cochez ceux qui sont - de manière certaine - des multiples de 5 (avec n entier) : 20 ; 401 ; 2^{100} ; n+5 ; 5^{20} ; 2n+1 ; 5n.

3. Parmi les expressions suivantes, cocher celle(s) qui est(sont) égale(s) à x(3x-1)+3x (avec x réel) : $3x^2+2x$; x(3x+2) ; $2x^2+3x$; $3x^2 + 3x + 1$

4. Parmi les expressions suivantes, cocher celle(s) qui est(sont) égale(s) à x + (x+1) + (x+2) + (x+3) (avec x réel) : 4x+6 ; 2(2x+3) ; $x^4 + 6$; 10x

5. Parmi les affirmations suivantes, cocher celle(s) qui est(sont) vraie(s) : 15 est un multiple de 5 ; 3 est divisible par 9 ; 3 et 5 sont les seuls diviseurs communs à 30 et 45 ; 27 est un nombre premier; 1 est un multiple commun à 7 et 3 ; 6 est le plus grand diviseur commun à 12 et 24

6. Cocher le(s) nombre(s) qui sont premier(s) : 1 ; 2 ; 5 ; 9; 12 ; 15 ; 21 ; 19 ; 27 ; 30

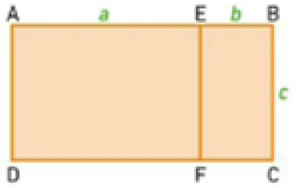
7. Cocher tous les diviseurs de 24 : *choix possibles, tous les entiers de 1 à 24*

8. Question ouverte : la somme de 3 entiers consécutifs est-elle toujours un multiple de 3 ? Prouvez-le.

9. Question ouverte : Prouver que la somme de deux nombres, qui sont tous les deux multiples de 5, est encore un multiple de 5.

Annexe 2 : Pré-post-test Boîte sans couvercle

1. Combien vaut l'expression $B=5\times(x^3-6)$ pour $x=3$?



1. 105
2. 15
3. 129
4. -30

2. Exprime l'aire du rectangle ABCD en fonction de *a*, *b*, *c* :

1. (a+b)c b)
2. ac+bc
3. a+b+c
4. 2(a+b+c)

3. Traduis le programme de calcul « choisis un nombre. Soustraire 7. Doubler le résultat » en expression littérale.

1. (x-7) x 2
2. 2x-7
3. x-7 x 2
4. -12

4. A quoi est égale l'expression $x(3x^2-1)$?

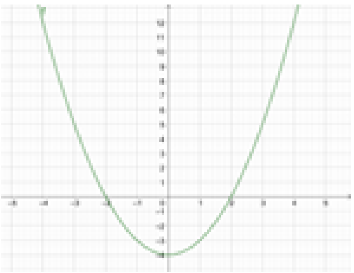
1. $2x^3$
2. $3x^3-1$
3. $3x^3-x$
4. $x+3x^2-1$

5. A quelle expression correspond la représentation graphique ?

1) f(x)=4x-1 2) f(x)=3x+1 3) f(x) = 3x-1 4) f(x)=x/3-1

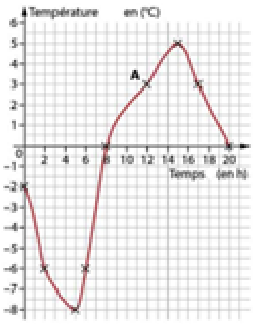
6. Quel tableau de valeurs correspond à la représentation graphique ?

Antécédent	-4	-2	0	2	3
Image	12	0	-4	0	5
Antécédent	12	0	-4	0	5
Image	-4	0-2	0	2	3
Antécédent	-4	-2	0	2	3
Image	12	0	-4	0	-5



7. Entoure une expression algébrique qui corresponde au tableau de valeurs ci-dessous :

x	-2	-1	0	1	2	3	1) f(x)=x2+1	2) f(x)=2x+1
f(x)	5	2	1	2	5	10	3) f(x)=x+1	4) f(x)=x+7



8. Résoudre l'équation suivante : 9*x*-16=29

9. Exprime le nombre de points en fonction de l'étape *n* :

étape 1 ** étape 2 **** étape 3 ******

10. Quelles informations peut-on tirer de ce graphique ?

Annexe 3 : questionnaire

Première partie – La recherche en mathématiques

Q1 – D'après toi, le travail d'un mathématicien consiste essentiellement en : (coche une réponse par ligne) Tout à fait d'accord, Plutôt d'accord, Plutôt pas d'accord, Pas du tout d'accord, Je ne comprends pas

Faire des calculs.

Résoudre de nouveaux problèmes.

Démontrer des théorèmes.

Apprendre des théorèmes existants

Présenter leurs résultats de recherches pour le grand public.

Se poser de nouvelles questions.

Rédiger des démonstrations.

Écrire des articles dans des revues scientifiques à destination des autres mathématiciens.

Faire des essais, tester des hypothèses, expérimenter.

Proposer des notations pour expliquer aux autres des notions mathématiques

Construire ses propres représentations de notions mathématiques pour son expérience personnelle

Avoir une super idée (une illumination) pour résoudre un problème en faisant des liens entre différentes parties des mathématiques

Q2 – Attribuez une note de 0 à 5 à chacune des qualités nécessaires pour être un chercheur en mathématiques de inutiles (0) à essentielles (5) ?

Concentration

Patience

Rigueur

Créativité

Passion

Organisation

Persévérance

Logique

Deuxième partie - La recherche de problèmes en classe de mathématiques

Q3 – Quelles phrases correspondent le mieux à ce que tu penses des mathématiques ? (Tu peux cocher plusieurs réponses).

Tout le monde peut apprendre les maths.

Faire des maths signifie explorer et expérimenter.

Faire des maths signifie résoudre beaucoup d’exercices similaires.

Les maths s’apprennent mieux en faisant des activités pratiques.

Il n’y a pas de place pour réfléchir dans le cours de maths.

Les maths se comprennent mieux en collaborant avec les autres.

Les maths sont réservées aux forts en maths !

Les maths se comprennent mieux seul(e).

Les maths s’apprennent en apprenant son cours par cœur.

Les maths sont utiles pour comprendre d’autres matières (Physique, histoire-géo, techno,...)

Q4 – En classe, quand je cherche des problèmes, je suis : (Tu peux cocher plusieurs réponses)

Ennuyé(e), j’attends que la prof me donne la réponse.

Captivé(e), je ne peux plus m’arrêter de chercher jusqu’à ce que je trouve.

Indifférent(e), c’est un exercice comme un autre, je le fais parce que je suis à l’école.

Angoissé(e), j’ai l’impression que je n’y arriverai pas.

Motivé(e), car j’aime chercher des problèmes, c’est un peu comme une énigme à résoudre.

Attiré(e), il y a un défi à relever !

Autre :

Q5 – Pour terminer, compléter la phrase :

«Pour moi, faire des mathématiques, c'est :