Titre: Évaluer les compétences des élèves en résolution de problèmes : Réflexion sur la nature des apprentissages visés et les modalités d'évaluation

Auteurs: CHANUDET Maud et FAVIER Stéphane

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 960 - 975

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Évaluer les compétences des élèves en résolution de problèmes : Réflexion sur la nature des apprentissages visés et les modalités d'évaluation

CHANUDET[1] Maud – FAVIER[2] Stéphane

Résumé – Nous nous intéressons aux apprentissages possibles des élèves en résolution de problèmes lorsque celle-ci constitue l'objet de l'enseignement. Nous montrons en quoi la prise en compte des démarches et des raisonnements en jeu dans les problèmes conduit à interroger le choix de ceux proposés aux élèves en vue d'une évaluation certificative, en lien avec les modalités d'évaluation mises en avant institutionnellement. Nous prenons pour cela comme contexte d'étude un cours genevois dédié à la résolution de problèmes.

Mots-clefs : résolution de problèmes, raisonnement mathématique, démarche, évaluation, narration de recherche

Abstract – This paper focuses on the possible learnings related to problem solving in mathematics when it is the object of the teaching and learning. We show how taking into account the mathematical approaches and reasoning involved in the problems leads us to question the choice of those proposed to the students with a summative purpose, in connection with the evaluation methods chosen by the scholar institution. For this purpose, we take as a study context a course dedicated to problem solving.

Keywords: problem solving, mathematical reasoning, process, assessment, research narrative

1. Université de Genève, Suisse, maud.chanudet@unige.ch

2. Université de Genève, Suisse, stephane.favier@unige.ch

Introduction

Le travail que nous présentons ici s'inscrit dans le cadre d'un projet de recherche financé par le fonds national suisse pour la recherche scientifique[3], mené par l'équipe DiMaGe (didactique des mathématiques à Genève) entre 2017 et 2022, dirigé par Jean Luc Dorier et Sylvie Coppé et portant sur l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes.

Le plan d'études romand qui régit les 11 années de la scolarité obligatoire fait de la résolution de problèmes le cœur de l'enseignement des mathématiques, à Genève comme dans le reste de la Suisse romande. Par ailleurs, un cours genevois spécifiquement dédié à cette partie de l'activité mathématique (intitulé « démarches mathématiques et scientifiques ») est suivi par une partie des élèves de 10^{e} (grade 8, élèves de 13-14 ans). Dans ce contexte, les enseignant·es doivent amener les élèves à développer leurs compétences en résolution de problèmes. Ce cours conduit de plus à une évaluation certificative indépendante du cours ordinaire de mathématiques et qui vise à se prononcer sur le fait que « Au terme de la résolution d'un problème mathématique, l'élève est capable d'expliquer la démarche entreprise en décrivant ses actions, en structurant son raisonnement et en argumentant ses choix. » (DIP 2021, p. 4). Pour cela, il est demandé aux enseignant·es de s'appuyer sur le dispositif de la narration de recherche. Une grille de critères d'évaluation leur est proposée, s'articulant autour de cinq grandes dimensions : la présentation, la narration, la modélisation, la recherche et la technique.

Notre recherche doctorale (Chanudet, 2019) menée dans le contexte de ce cours a mis en avant des difficultés ressenties par les enseignant·es quant à l'enseignement et à l'évaluation de la résolution de problèmes lorsque celle-ci constitue un objet d'enseignement et d'apprentissage à part entière. L'étude a notamment montré que les enseignant·es peinaient à identifier les objectifs d'apprentissage visés et en conséquence, à choisir les problèmes à proposer dans le cadre d'une évaluation certificative et, pour certains, à déterminer des critères d'évaluation.

Nous nous intéressons ici à la nature des apprentissages qui peuvent être visés via la recherche des problèmes que Georget (2009) regroupe sous l'appellation d' « activités de recherche et de preuve entre pairs » (activités RPP), c'est-à-dire que nous cherchons à déterminer leur potentiel didactique (Georget, 2009), et par la même, à mener une réflexion théorique sur les problèmes qu'il peut être pertinent de proposer aux élèves, sur leur articulation et sur l'évaluation associée.

3. Subside n° 100019_173105 / 1

La résolution de problèmes comme objet d'enseignement et d'apprentissage

L'introduction à l'enquête thématique de l'*International Congress on Mathematical Education* (ICME-13) dédiée au *Problem solving in mathematics education* (Liljedahl *et al.*, 2016) met en avant deux fonctions de la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques. La première est celle d'outil, de moyen de développer et d'évaluer les apprentissages des élèves sur des notions ou des concepts mathématiques spécifiques. Les problèmes sont alors constitutifs de l'apprentissage des mathématiques (Houdement, 2003, p. 8), ce qui conduit à parler d'apprentissage *par* la résolution de problèmes. La deuxième fonction a trait à la résolution de problèmes comme un objet d'apprentissage à part entière. Contrairement au premier cas, il s'agit ici de développer chez les élèves des compétences de résolution de problèmes, indépendamment en quelque sorte des notions mathématiques en jeu. On peut alors parler d'apprentissage *de* la résolution de problèmes. Charnay (1988) mettait déjà en avant cette double fonction en termes d'objectifs de l'activité de résolution de problèmes, entre ceux d'ordre « méthodologique » (apprendre à chercher) et ceux d'ordre « cognitif » (visant une connaissance).

Toutefois, force est de constater que, comme le soulignent plusieurs auteurs (Hersant, 2008; Houdement, 2009; Mercier, 2008) dans les dispositifs visant à faire pratiquer la résolution de problèmes aux élèves ainsi que dans les parties des curricula dédiés, les apprentissages visés ne sont pas toujours clairement exprimés et ne se réfèrent pas à des savoirs mathématiques précis. Houdement (2009) met quant à elle en avant le fait que les problèmes de type « problème pour chercher » à l'école primaire peuvent amener les élèves à développer, notamment, des apprentissages liés à des manières de raisonner et de valider en mathématiques. Nous nous plaçons dans cette perspective et étendons la réflexion au niveau du secondaire I. Cela nous conduit à identifier et à caractériser le potentiel didactique des activités RPP comme relevant de démarches et de raisonnements mathématiques et de différentes manières de prouver.

Les raisonnements et démarches en jeu dans les activités RPP

Postulant qu'en résolvant des problèmes, les élèves peuvent développer des apprentissages liés au raisonnement mathématique, nous nous appuyons sur les travaux de Jeannotte (Jeannotte, 2015; Jeannotte et al., 2020; Jeannotte & Kieran, 2017) qui propose un modèle du raisonnement mathématique pour l'enseignement et l'apprentissage à l'école, afin d'identifier des types de raisonnement qui peuvent être travaillés avec les élèves en classe.

Jeannotte définit le raisonnement mathématique comme « une activité particulière de communication avec soi-même ou les autres qui permet d'inférer des énoncés mathématiques à partir d'autres énoncés mathématiques. » (Jeannotte *et al.*, 2020, p. 9). Elle s'appuie sur deux aspects essentiels pour caractériser le raisonnement mathématique, son aspect structurel et son aspect processuel. Le premier aspect a trait à la structure, à la forme de l'activité discursive, à la manière dont s'articulent et s'enchainent les pas de raisonnement. On retrouve notamment les raisonnements à structure déductive ou inductive qui sont travaillés à l'école, ou encore les raisonnement abductif ou analogique. Le second aspect prend en compte les actions menées par celle ou celui qui raisonne et leur but. Jeannotte identifie ainsi les processus de généralisation, de conjecture, d'identification d'une régularité, de comparaison et de classification qu'elle regroupe sous l'intitulé de processus de recherche de similitudes et de différences, et les processus de justification, preuve et démonstration qu'elle regroupe en processus de recherche de validation, tous étant supportés par le processus d'exemplification.

La prise en compte de ces deux aspects du raisonnement mathématique nous permet d'identifier des types de raisonnement particuliers qui peuvent être mobilisés par les élèves.

Au sein des raisonnements à structure déductive, on distingue notamment les raisonnements hypothético-déductifs des raisonnements d'implication logique, et ce, en fonction de la nature de la règle convoquée. En effet, un pas de raisonnement déductif permet de trouver une affirmation à partir de données et d'une règle. C'est-à-dire qu'à partir de données et d'une règle dont la prémisse correspond aux données et qui implique nécessairement la conclusion, on en déduit une affirmation. Lorsque la règle est liée à des savoirs mathématiques au sens de savoirs savants dans la transposition didactique (Chevallard, 1985), c'est-à-dire des objets d'enseignement identifiés dans les programmes et travaillés explicitement avec les élèves (théorème, propriété, etc.), nous parlons de raisonnement hypothético déductif[4]. Lorsque la règle est de l'ordre de la logique mathématique (la règle du tiers exclus par exemple) et ne fait donc pas l'objet d'un enseignement spécifique (en tout cas en Suisse), nous parlons de raisonnement par implication logique. Le point de vue structurel permet aussi de caractériser certains raisonnements par des articulations particulières de pas déductifs. Parmi ceux-là, nous retenons le raisonnement par exhaustivité des cas qui consiste, de manière générale, à tester l'une après l'autre, après les avoir énumérées, toutes les solutions potentielles d'un problème (Battie, 2003, p. 48) et le raisonnement par disjonction de cas qui consiste à ramener la résolution d'un problème à l'étude d'un nombre fini de cas grâce à une partition des éléments de l'ensemble considéré et à un traitement séparé de chacun d'eux (Battie, 2003). Ajoutons que lorsque l'on met en jeu de tels raisonnements, la preuve tient au fait que si la règle et les données sont vraies alors l'affirmation obtenue l'est aussi. Le raisonnement déductif étant le seul à avoir cette caractéristique, c'est ce qui lui donne une place particulière en mathématiques.

La deuxième structure de raisonnement qui est mis en avant dans les programmes scolaires est le raisonnement inductif. Il est souvent caractérisé comme permettant de passer du particulier au général. Pólya (1958) le caractérise comme une manière de raisonner qui conduit à la découverte de lois générales en partant de l'observation d'exemples particuliers et de leurs combinaisons. On peut le caractériser comme partant de l'observation de données et de certaines régularités (appelées aussi

4. N'ayant pas la place d'illustrer à l'aide de problèmes les différents types de démarches et raisonnements mentionnés, nous renvoyons les lecteurs/trices à l'article rédigé dans la revue RMé (Chanudet & Favier, 2021).

affirmation), et de l'inférence d'une règle qui permet de passer des données à l'affirmation. Pour autant, l'affirmation obtenue n'est pas nécessairement vraie. Il faut le prouver en s'appuyant notamment sur un raisonnement déductif.

Ce type de raisonnement est en particulier mis en œuvre dans des démarches dites expérimentales, mais il ne suffit pas à caractériser l'ensemble des processus impliqués. C'est pourquoi il est intéressant de prendre en compte l'aspect processuel du raisonnement mathématique. Le processus d'exemplification et les processus de recherche de similitudes et de différences permettent de caractériser deux types de démarches importantes en résolution de problèmes, qui n'ont pas de structure propre c'est-à-dire qui ne peuvent pas être caractérisés comme relevant de raisonnements déductifs, inductifs, abductifs ou analogiques. Il s'agit de la démarche expérimentale et de la démarche d'ajustements d'essais successifs.

Gardes définit la démarche expérimentale comme articulant des phases d'expérimentations (faire des expériences, en observer les résultats et en inférer des conclusions), de formulation de conjectures et de tentative de preuve (Gardes, 2013). Du point de vue des processus, il s'agit donc d'exemplifier, d'identifier une régularité, de conjecturer, et de généraliser. Pour prouver le résultat obtenu (ce qui n'est cependant pas toujours à la portée des élèves au vu de leurs connaissances), il faut alors s'appuyer sur un raisonnement déductif.

La démarche dite d'ajustements d'essais successifs qui consiste à rechercher la solution d'un problème en faisant différents essais et en tenant compte chaque fois des résultats des essais précédents met en jeu les processus d'exemplification et de comparaison de l'écart entre le résultat obtenu et celui attendu. Dans ce cas, la validité du résultat n'est pas liée à la validité de la démarche. Pour prouver la validité du résultat, il faut vérifier qu'il satisfait bien les conditions de l'énoncé, ce qu'on appelle aussi prouver par ostension. Nous proposons ci-dessous un schéma synthétisant les différents types de démarches, raisonnements et preuves relevés précédemment.

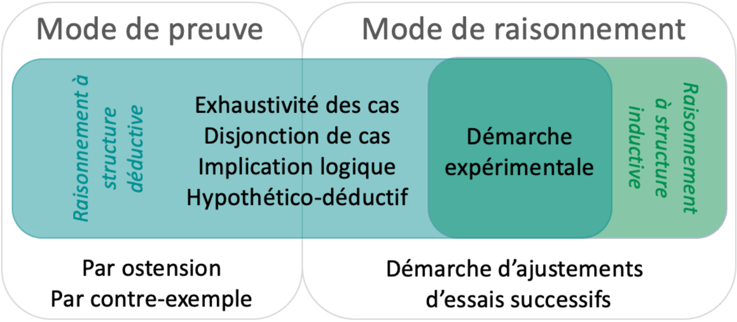


Figure 1. Synthèse de différents types de raisonnements, démarches et preuves qui peuvent être travaillés avec les élèves au secondaire I.

La diversité de ces manières de raisonner en mathématiques conduit à questionner tout d'abord le choix des problèmes proposés aux élèves. En effet, les élèves ne vont pas mobiliser les mêmes démarches, raisonnements et preuves en fonction du problème traité. Cela conduit de plus à questionner l'articulation des problèmes proposés aux élèves sur l'année scolaire et le choix des problèmes à proposer en évaluation. Nous n'analysons pas ici les pratiques effectives d'enseignant·es quant à l'articulation entre les problèmes travaillés en classe et ceux soumis en évaluation du point de vue des démarches et des raisonnements en jeu, ni les critères d'évaluation auxquels elles et ils se réfèrent, ou encore les critères de choix des problèmes d'évaluation mais renvoyons les lecteurs/trices intéressé·es à (Chanudet, 2019).

Une réflexion sur les problèmes à proposer en évaluation et sur les dispositifs d'évaluation associés

Le fait d'identifier les démarches et raisonnements en jeu dans les problèmes peut permettre aux enseignant·es de sélectionner ceux à proposer aux élèves en prenant en compte la perspective d'un apprentissage sur le long terme. Elles et ils peuvent ainsi chercher à faire ressortir les caractéristiques propres de chaque type de démarche ou de raisonnement, en proposant des problèmes mobilisant les mêmes ou, à l'inverse, différents raisonnements et démarches. Nous nous appuyons pour cela sur la notion de schéma de problèmes développée par Julo (1995) et qu'il définit comme les « traces laissées en mémoire par les situations rencontrées précédemment et organisées en objets structurés ayant un certain nombre de propriétés caractéristiques » (p. 90). Nous faisons ainsi l'hypothèse que le fait de multiplier les confrontations à divers problèmes peut permettre aux élèves d'enrichir leur mémoire des problèmes et de développer des schémas de problèmes. Les démarches et raisonnements pourraient ainsi constituer ce que Julo appelle les « propriétés caractéristiques ».

L'identification des démarches et raisonnements impliqués dans les problèmes nous semble de plus une aide pour l'évaluation de la résolution de problèmes. Cela peut permettre à l'enseignant·e de choisir en évaluation un problème mobilisant une démarche ou un raisonnement déjà travaillé sur d'autres problèmes et ainsi articuler sur la base d'un critère mathématique les problèmes travaillés en séance ordinaire avec ceux proposés en évaluation, et de fait limiter le caractère subjectif du choix du problème donné en évaluation. L'objet de l'évaluation est aussi clarifié. Il s'agit d'évaluer les compétences des élèves à résoudre un problème mathématique de même type, du point de vue des raisonnements et des démarches en jeu, que ceux travaillés auparavant.

Dans le contexte du cours de « démarches mathématiques et scientifiques », comme précisé plus haut, l'évaluation des compétences des élèves à résoudre des problèmes passe par le dispositif de la narration de recherche. Notre recherche doctorale (Chanudet, 2019) a montré que d'un moyen d'accès aux procédures de recherche des élèves, il devient pour certains enseignant·es un objet d'évaluation en soi, voire le seul. Nous poursuivons ci-dessous notre analyse pour étudier la pertinence du choix de certains problèmes pour le dispositif de la narration de recherche. Nous nous appuyons pour cela sur nos observations en classe et, en particulier, sur des narrations de recherche rédigées par des élèves et sur les problèmes proposés par les enseignant·es.

Ainsi, il semble que certains problèmes se prêtent mieux à la narration de recherche que d'autres. Les problèmes qui conduisent à mettre en œuvre un raisonnement par implication logique, amène par exemple à effectuer des déductions souvent difficiles et longues à transcrire par écrit pour l'élève, tout autant qu'à suivre ensuite par l'enseignant·e qui lit la production de l'élève. Nous donnons en annexe l'exemple du problème intitulé « En avion » issu du chapitre « Recherche et Stratégie » dédié à la résolution de problèmes dans les moyens d'enseignement romands de 10e[5] (Annexe 1). Les élèves auxquels ce problème a été présenté devaient rédiger une narration de leur recherche et étaient donc évalués sur ce problème, à l'appui de la grille de critères d'évaluation utilisée par l'enseignant pour toutes les narrations de recherche rédigées par ses élèves. Nous avons choisi de présenter en annexe la production qui, selon nous, est la plus claire et la plus complète parmi l'ensemble des textes produits par les élèves de la classe, celle d'un groupe de deux élèves (Annexe 2).

Nous voyons que ces élèves ont verbalisé par écrit, de manière exhaustive et structurée, l'ensemble des déductions qu'elles ont opérées et qui sont synthétisées dans le logigramme qui conclue leur production. De plus, la lecture de leur texte permet certes de reconstituer pas à pas leur cheminement, mais on constate à quel point cela est difficile à suivre pour nous lecteur/trice. On doit en effet vérifier à la fois que les informations extraites de l'énoncé sont correctes, que chaque pas de déduction est valide, et que le logigramme est conforme au raisonnement mené (ce qui nécessite donc de remplir un logigramme en parallèle). Pour les élèves, on peut imaginer la difficulté que représente, l'identification et la mise en mots, a posteriori, de chacun des pas élémentaires de raisonnement opérés, et de chacun des processus menés. Se pose alors la question des apports de telles verbalisations quant aux des apprentissages des élèves, sur ce type de problèmes amenant à un raisonnement par implication logique. En effet, le tableau présenté à la fin de la production (dont les élèves précisent au début de leur narration qu'il a été le support de leur réflexion), nous semble permettre d'attester de la validé du raisonnement qu'elles ont mené (au vu des presque 8 millions de configurations possibles, il semble peu probable que les élèves trouvent la bonne réponse par hasard…). Le fait qu'elles soient parvenues à attribuer correctement les caractéristiques à chaque passager permet d'assurer que le raisonnement et les déductions qu'elles ont menées sont correctes. La narration de recherche apporte peu d'informations supplémentaires à l'enseignant·e quant à la démarche adoptée par l'élève.

Ainsi, même pour les élèves qui n'auraient pas réussi à résoudre le problème, la rédaction a posteriori d'une telle narration de recherche ne nous semble pas présenter de réelle plus-value. En effet, dans le cas où l'élève n'a pas mis en œuvre le bon raisonnement (par exemple, s'il a mobilisé une démarche d'ajustements d'essais successifs en remplissant la grille avec quelques informations issues de l'énoncé, puis en plaçant les autres éléments au hasard avant de vérifier l'absence de

5. A Genève comme dans tous les cantons suisses romands, les enseignant·es disposent, pour les mathématiques, de manuels scolaires officiels, communs et unifiés appelés moyens d'enseignement.

contradictions avec chacune des informations de l'énoncé) même si la narration peut permettre à l'enseignant·e de comprendre le type de raisonnement mené, il serait préférable de le repérer en cours de recherche afin de réguler directement l'activité de l'élève. Dans le cas où l'erreur de l'élève se situe au niveau de la mobilisation d'un pas déductif et qu'il a par ailleurs opéré au fur et à mesure des déductions correctes, l'erreur qui va apparaitre dans la narration est ponctuelle et peu significative. Au final, il nous semble donc très couteux et peu pertinent de demander aux élèves de rédiger des narrations de recherche sur ce type de problèmes dont la résolution à l'aide d'un logigramme parait plus significative.

Les problèmes mobilisant une démarche de type expérimental nous semblent cependant quant à eux plus intéressants pour amener les élèves à rendre compte de la recherche menée. Les élèves peuvent ainsi identifier et expliciter comment leurs essais les ont amenés à repérer une régularité, à conjecturer, et décrire ensuite comment ils ont cherché à les valider leur résultat. Le récit de l'élève apporte alors à l'enseignant·e un complément essentiel à la seule mention du résultat pour comprendre la démarche adoptée. Prenons en ce sens l'exemple du problème intitulé « Les châteaux de cartes » présenté sur le site Sésamath[6] dont l'énoncé est rappelé en annexe (Annexe 3)[7].

Nous présentons aussi en annexe la narration de recherche d'un élève sur ce problème (Annexe 4). La narration rédigée par l'élève permet ici de suivre les pistes suivies (tout d'abord le dénombrement sur le schéma pour 7 étages, puis la recherche d'une formule plus générale pour 30 puis 100 étages) mais aussi abandonnées (la tentative de schématisation pour 30 étages), les conjectures retenues (calculer la somme de la somme des doubles des entiers de 1 à 30 et de la somme des 30 premiers entiers) et celles invalidées (calculer la somme des doubles des entiers de 1 à 30 et de 30) et la manière dont il l'a fait (tester la conjecture pour 3 étages, avec confrontation à la valeur obtenue à partir de la formule). On voit donc ici que la narration permet au lecteur de comprendre comment l'élève articule les phases d'essais et de conjecture, et même s'il ne peut pas prouver son résultat, de voir s'il teste et comment il teste ses conjectures.

Si nous avons ici remis en question la pertinence du choix du dispositif de la narration de recherche par rapport à l'intention affichée par l'institution de permettre aux enseignant·es d'accéder aux processus de résolution des élèves, sans distinction quant aux types de problèmes proposés, nous ne réfutons toutefois pas que ce dispositif ait un intérêt quant au développement de compétences, notamment communicationnelles, des élèves qui sont amenés à le pratiquer.

6. https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/index.php?ouvrage=ms3_2012&page_gauche=162

7. Pour plus de détails concernant l'analyse de ce problème et de procédures d'élèves, voir (Chanudet, 2017)

Conclusion

Il nous semble que, bien que succincts, les deux exemples que nous présentons invitent à questionner le choix fait par l'institution scolaire de mettre en avant un dispositif d'évaluation à visée certificative pour l'ensemble d'un cours, indépendamment des contenus c'est-à-dire de la nature des problèmes proposés aux élèves. Si le dispositif de la narration de recherche permet en effet d'accéder, en tout cas davantage que sans dispositif particulier, aux démarches de recherche des élèves, il ne semble toutefois pas pertinent pour tous les types de problèmes, et en particulier pour les problèmes amenant à la mobilisation d'un raisonnement par implication logique.

Dès lors que l'évaluation porte sur les compétences des élèves à résoudre des problèmes, le dispositif qui supporte cette évaluation nous semble mériter d'être discuté, en lien avec les objets de l'évaluation, les critères d'évaluation et la nature des problèmes proposés.

Évaluer les compétences des élèves en résolution de problèmes en mathématiques pose des questions fondamentales, auxquelles l'institution scolaire comme la recherche ne nous semblent pas avoir répondu de manière opérationnelle pour les enseignant·es, ce qui en fait des questions encore vives pour la profession :

1. Quels compétences, savoirs, savoir-faire cherche-t-on à évaluer chez les élèves en résolution de problèmes ? Quels compétences, savoirs, savoir-faire peut-on effectivement évaluer ? Quels peuvent être les critères d'évaluation associés ?

2. Quels problèmes proposer dans le cadre d'une évaluation à visée certificative ? Quelle articulation envisager avec les problèmes travaillés lors des séances ordinaires ?

3. Sur quel support ou dispositif peut s'appuyer une telle évaluation ?

Nous espérons que de prochaines recherches tacheront d'y apporter des réponses.

Références

Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique* [Thèse de doctorat en Didactique des Mathématiques]. Université Paris 7 Diderot.

Chanudet, M. (2017). Le problème des châteaux de cartes. *Revue de mathématiques pour l'école, 228*, 4-13.

Chanudet, M. (2019). *Etude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques* [Doctorat en didactique des mathématiques]. Université de Genève.

Chanudet, M., & Favier, S. (2021). Les démarches et modes de raisonnement en jeu dans les problèmes de « Recherche & stratégies » en 10H. *Revue de mathématiques pour l'école, 235*, 88-98.

Charnay, R. (1988). Apprendre (par) la résolution de problèmes. *Petit x, 42*(3), 21-29.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.

Département de l'instruction publique, de la culture et du sport, Direction générale de l'enseignement obligatoire, Service enseignement et évaluation. (2021). *Programme cantonal. Complément au Plan d'études romand (PER). Démarches mathématiques et scientifiques (DMS). Année scolaire 2020-2021 (2021 v.6)*.

Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres* [Thèse de doctorat en mathématiques générales]. Université Claude Bernard - Lyon I.

Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques]. Université Paris Diderot.

Hersant, M. (2008). « Problèmes pour chercher ». Des conduites de classe spécifiques. *Grand N, 81*, 57-75.

Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N, 71*, 7-23.

Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 14*, 31-59.

Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : Proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire*. Université du Québec à Montréal.

Jeannotte, D., Dufour, S., & Sampson, S. (2020). Discours autour du raisonnement mathématique : Ajouter la voix d'enseignantes du primaire à la conversation. *Revue québécoise de didactique des mathématiques, 1*, 5-37.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 1-16.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. ICME-13 Topical Surveys. Springer, Cham.

Mercier, A. (2008). Une question curriculaire de l'enseignement élémentaire des mathématiques : La « résolution de problèmes ». *Programme national de pilotage. Actes du séminaire national. L'enseignement des mathématiques à l'école primaire*, 93-116.

Pólya, G. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement plausible* (L. Couffignal & R. Vallée, Trad.). Gauthiers-Villars.

Annexes

Annexe 1. Enoncé du problème «En avion» tiré des moyens d'enseignement romands de 10e

Dans un avion, quatre passagers sont assis côte à côte.
Ils sont tous de nationalité, d'âge et de profession différents.

1. Le professeur est âgé de 41 ans.
2. Le passager qui a 45 ans est ingénieur.
3. Celui qui boit de la bière résout des mots croisés.
4. Le Suédois est assis à côté du passager qui a 45 ans.
5. Le voyageur qui boit du whisky est à la deuxième place, depuis la droite.
6. Le professeur est assis à la droite du voyageur qui a 39 ans.
7. L'homme qui est assis à côté de l'ingénieur écrit une lettre.
8. L'Espagnol est à côté du médecin.
9. Le voyageur qui boit du jus de fruit lit un journal.
10. L'Américain est âgé de 35 ans.
11. L'ingénieur est à l'extrême gauche.
12. Le médecin boit de la bière.

a) Quel est l'âge du Belge ?
b) Quelle est la nationalité du journaliste ?
c) Quel est l'âge du buveur de vin ?
d) Quelle est la profession du voyageur qui lit un livre ?

Annexe 2. Narration de recherche d'un groupe d'élèves sur le problème intitulé « En avion »

Ecriture

La dernière fois, nous avons vu que les tableaux ne nous aidaient pas trop, du coup nous avons fait les places.

Nous avons décidé de faire 4 carrés pour 4 places.
Nous faisons les possibilités et les choses impossibles.

m. = monsieur

- À la place 3 il y a le m. qui boit du wiski (car c'est écrit dans l'énoncé)
- L'ingénieur est à l'extrême gauche (car c'est aussi écrit dans l'énoncer)
- L'ingénierr à 45 ans (énoncé)
- Le suédois est à la place 2, car il est assis à côté du m. qui a 45 ans.

méd. = médecin

- Le suédois écrit une lettre car il est à côté de l'ingénieur.
- Cellui qui boit du wiski ne peut pas être médecin car le méd. boit de la bière.
- Le suédois ne peut pas boire un jus de fruit car, celui qui boit le jus de fruit lit un journal.
- Le numero 3 ne peut pas lire un journal, car il boit du wiski.
- Le suedois ne peut etre proffesseur, car il n'est pas assis à coté du monsieur qui a 35 ans
- Le suedois ne peut pas avoir 35 ans car c'est l'améri
donc : le suédois a sois 41 sois 39 ans.
- On sait que le medcin boit de la bière donc il résoud des mots croisé. Il ne peut pas être à la place n°1 car le n°1 est ingénieur, il ne peut pas être le 2 car le n°2 lit une lettre, et ne peut pas être le 3 car le n°3 boit du wiski donc : il est à la place n°4.

- l'espagnol est le n°3 car il est assis à côté du méd.
- Le 1 boit du jus de fruit et lit un journal car le 2 écris déjà une lettre, le 3 boit du wiski et le 4 bois de la bière et fait des mots croisé
- donc le 2 bois du vin car c'est la seul boison qui reste et il n'a pas encore de boisson
- Le 1 n'est pas Américain car il a 45 ans, donc c'est le numéro 4 qui est Américain car c'est la seule nationalité qui reste donc il a 35 ans
- L'ingénierr est belge car c'est le seul qui n'a pas de nationalité.
- Le 3 est prof car il est assis à droite du mec qui a 39 ans. Donc le suédois a 39 ans car il est à gauche du n°3. Le 2 a 39 ans car il ne reste que 2 et 3 qui n'ont pas d'âge et le prof dois être à droite.
- Le 3 a 41 ans car c'est la seul place et le seul âge qui reste.
- Le 2 est journaliste car c'est le seul métier qui reste et les autes ont déjà un métier
- Le n°3 lit un livre car c'est la seul activité qui reste.

	1	2	3	4
boisson	jus de fruit	vin	whisky	bière
métier	ingénieur	journaliste	professeur	médecin
origine	Belge	suédois	espagnol	américain
activité	journal	lettre	livre	mot croisé
âge	45 ans	39 ans	41 ans	35 ans

Annexe 3. Enoncé du problème « Les châteaux de cartes »,

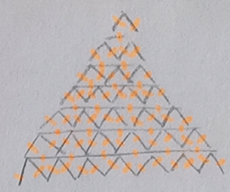
Un château de cartes à un étage est composé de deux cartes.
Un château de cartes à deux étages est composé de sept cartes.
Pour réaliser trois étages, il faut quinze cartes.

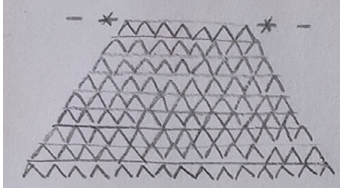
1 étage *2 étages* *3 étages*

Combien faut-il de cartes pour réaliser un château de 7 étages ? De 30 étages ? De 100 étages ?

Pour commencer j'essaie de construire le château à 7 étage pour voir ce que ça donne :
Et sa donne 77 cartes.

Après avoir fait le château à 7 étages, je commence ensuite avec le château à 30 étages qui évidemment un grand nombre d'étages mais qu'il faut comme même essayer par passer au schéma.





Malheureusement on ne peut pas aller plus loin avec le schéma de 30 étage car il est beaucoup trop long à faire et prend beaucoup de place du coup pour trouver le nombre de carte pour le château à 30 étages il faudra trouver une autre solution.
L'autre solution que j'ai trouvé c'est de prendre le nombre d'étage.
Ex : 30 étage chaque on fait (– 1 étage) et je le multiplie par 2.

30·2 = 60	16·2 = 32
29·2 = 58	15·2 = 30
28·2 = 56	14·2 = 28
27·2 = 54	13·2 = 26
26·2 = 52	12·2 = 24
25·2 = 50	11·2 = 22
24·2 = 48	10·2 = 20
23·2 = 46	9·2 = 18
22·2 = 44	8·2 = 16
21·2 = 42	7·2 = 14
20·2 = 40	6·2 = 12
19·2 = 38	5·2 = 10
18·2 = 36	4·2 = 8
17·2 = 34	3·2 = 6
	2·2 = 4
	1·2 = 2

le fois 2 correspond au deux nombres de carte qu'il y dans 1 étage

Ensuite il faut additionner tous ces résultats donnés et ça donne : 980

Après il faut additionner 980 avec le nombre d'étage qu'il y a qui est donc 30

980 + 30 1010 *

Donc pour 30 étages il y a 1010 cartes.

Après avoir trouvé le résultat de 30 étage maintenant j'essaie de cherche pour 100 étages. La solution 2 est peut être aussi longue donc pour 100 étages donc il faudra chercher une régularité au niveau de la 2ème solution pour trouver le résultat plus facilement car 100 est aussi un très grand nombre d'étages. L'enseignante m'a conseillé de trouver une formule afin de chercher et d'essayer pour trouver.

(nombre) · 2 + (nombre d'étage) => x · 2 + 100
1, 2, 3, ...   2x + 100

Exemple : Pour 3 étage la formule sera
1·2 + 3 = 5
2·2 + 3 = 7
3·3 + 3 = 12
= 24

Ça ne fonctionne pas du coup la formule ne sera pas celle-là.
(*) Je me suis rendu compte que la solution pour 30 étages est fausses j'ai réussi en me rendre compte en voulant faire une formule pour 30 étages du coup j'ai posé le calcul pour 7 étages

7·2 = 14
6·2 = 12
5·2 = 10
4·2 = 8
3·2 = 6
2·2 = 4
1·2 = 2

=> 56 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 77

Du coup pour 30 étages ça sera 980 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 = 1415

Pour 100 étages je n'ai pas eu le temps mais je peux considérer la même formule.