LA CONSTITUTION DE LA PENSEE SYMBOLIQUE MATHEMATIQUE. UNE ETUDE EPISTEMOLOGIQUE

MICHEL SERFATI
IREM-Université Paris VII
SERFATI@MATH.JUSSIEU.FR

Résumé. Cette étude résume quelques conclusions de mes travaux épistémologiques sur la pensée symbolique mathématique. On analyse successivement trois aspects fondamentaux, en premier lieu la constitution même de l'écriture symbolique, ensuite l'avènement corrélatif de la faculté de substituer, enfin la vertu créatrice neuve du symbolisme (le 'principe de permanence des formes symboliques').

Mots-clés. Epistémologie, Mathématiques, Pensée symbolique, Ecriture symbolique, Faculté de substituer, Le principe de permanence des formes symboliques

---

Révolution symbolique, révolution scientifique

Le présent exposé est l'esquisse d'une étude épistémologique du symbolisme mathématique, analysant d'abord l'avènement de l'écriture symbolique au dix-septième siècle, montrant ensuite comment elle a constitué une révolution dans les modes de pensée mathématique, comment enfin elle a organisé un puissant outil pour la création d'objets, sans équivalent dans les langues naturelles. Ce fut ainsi un chapitre essentiel de la philosophie du langage, en même temps que de la Révolution scientifique dix-septièmiste[1].

Il fallait d'abord décrire la constitution du symbolisme, les protagonistes essentiels étant Viète, Descartes, et Leibniz. On pourrait être surpris de me voir faire coïncider la fin de la constitution de la symbolique avec la Géométrie de Descartes de 1637, et non pas, par exemple, avec la *Begriffsschrift* de Frege (1879). Ma réponse est pragmatique : une grande partie des éléments constitutifs et décisifs étaient en place dès 1637, même si aucune théorie n'en était faite. Durant deux siècles et demi, les géomètres ont donc largement continué d'inventer, ce qui m'intéressait au premier chef.

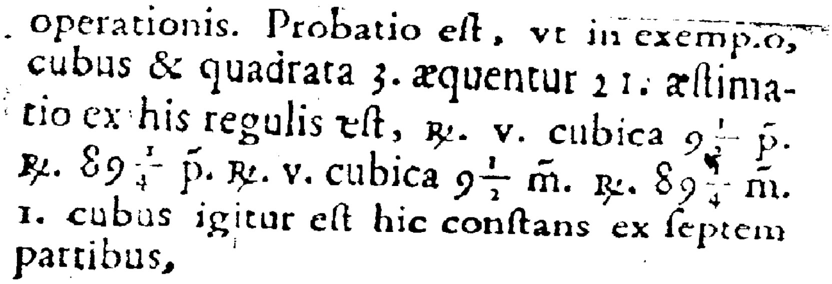
Ainsi l'analyse épistémologique de la constitution et du développement de la symbolique est elle ici un sujet central. Quant aux rapports entre épistémologie et didactique, ils sont, clairement à mon sens, très étroits.

[1] On fera fréquemment référence dans la suite à l'ouvrage *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique* (ci-après denoté RS).

Tant les obstacles épistémologiques à la genèse d'un concept ou d'une représentation que les modalités spécifiques de son développement me semblent devoir être reproduits *mutatis mutandis* au moment de l'acquisition des savoirs (cf. Artigue 1991). Certaines des six figures de la représentation infra ont ainsi motivé la constitution d'exercices scolaires dans le cadre d'une thèse de didactique[2] (C. Bardini) ; on en donnera ici quelques brefs exemples.

De Cardan à Descartes

On introduit naturellement à la problématique par la mise en regard de deux textes. D'une part, un extrait de l'*Ars Magna*[3] de Cardan (1545) archaïque, illisible pour nous, et cependant représentatif du XVIe siècle mathématique :


operationis. Probatio eſt, vt in exemplo, cubus & quadrata 3. æquentur 21. æſtimatio ex his regulis eſt, ℞. v. cubica $9\frac{1}{2}$ p̃. ℞. $89\frac{1}{4}$ p̃. ℞. v. cubica $9\frac{1}{2}$ m̃. ℞. $89\frac{1}{4}$ m̃. 1. cubus igitur eſt hic conſtans ex ſeptem partibus,

et de la Géométrie de Descartes d'autre part ([A.T. VI], 473) de facture quasi-moderne :

[2] Sous la direction de M. Artigue et moi-même.

[3] Extrait de la page 255 de l'Ars Magna, de Jérôme Cardan = [Cardan 1545] dans l'édition des OEuvres de 1663. Le premier paragraphe s'interprète ainsi en termes post-cartésiens : la preuve est comme dans l'exemple $x^3 + 3x^2 = 21$. Selon ces règles, le résultat est $\sqrt[3]{9\frac{1}{2}+\sqrt{89\frac{1}{4}}}+\sqrt[3]{9\frac{1}{2}-\sqrt{89\frac{1}{4}}}-1$. La suite de la page est consacrée au détail de l'élévation au cube du nombre précédent. Elle sera donné *in extenso* et commentée en annexe 1 du V. Les motifs de l'illisibilité du texte ne sont pas conjoncturels, mais de structure (texte non ponctué).

Or si on a $z^3 \propto * -pz+q$, la reigle dont Cardan attribue l'inuention à vn nommé Scipio Ferreus, nous apprent que la racine est,

$$\sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$$

Comme aussy lorsqu'on a $z^3 \propto * +pz+q$, & que le quarré de la moitié du dernier terme est plus grand que le cube du tiers de la quantité connuë du penultiesme, vne pareille reigle nous apprent que la racine est,

$$\sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}$$

On notera que les deux textes traitent pourtant d'un même sujet : les équations du troisième degré. Après 1637, certes le texte se modifie et se perfectionne, mais il a définitivement acquis l'essentiel de sa forme actuelle, autorisant les développements à venir de la symbolique. De là ce *leit-motiv* : la *Géométrie* de 1637 est le premier des textes de l'histoire directement lisible par les mathématiciens d'aujourd'hui.

Comment et pourquoi pareil bouleversement ? On se trouve ici, situation insolite en des temps historiques (le XVIIe siècle européen), au moment de la création d'une langue écrite, la langue mathématique, avec abondance de textes et d'auteurs. Comment ? C'est-à-dire en quoi, dans la matérialité du texte, réside ce que nous reconnaissons aujourd'hui, entre Cardan et Descartes, comme des différences majeures? À cette question, j'ai proposé des réponses épistémologiques, l'analyse de la constitution de la symbolique dépassant en effet la démarche purement historique de décrire et d'inventorier les diverses occurrences des signes.

Elle concerne directement par contre la philosophie : c'est d'abord en effet une tâche proprement philosophique que d'analyser pas à pas la constitution d'une langue écrite nouvelle. Et cette partie de l'analyse a mis au jour une forme, empirique et bien réelle, de «nécessité» du système obtenu. Surtout, l'avènement de la symbolique a constitué, non pas un simple «changement de notations» sur un fond mathématique qui serait demeuré inchangé, mais bien une révolution conceptuelle décisive. Et cet aspect de l'histoire des idées est, davantage encore, proprement philosophique. Pour *démontrer* sur ce point, une seule méthode était évidemment disponible : partout faire appel à ce questionnement : «qu'a-t-on pu faire en mathématiques avec l'écriture symbolique qu'on ne pouvait pas faire auparavant ?». Or, à cette interrogation-clé, les exemples *positifs* en réponse furent, dès le XVIIe siècle, si abondants et si divers qu'il serait bien difficile de se mettre en devoir de les inventorier. En vérité, nous (c'est-à-dire les mathématiciens d'aujourd'hui) sommes désormais si habitués à la symbolique – elle constitue un cadre épistémologique intériorisé et le moyen nécessaire et préalable à toute connaissance scientifique – que nous avons beaucoup de peine à imaginer que certaines méthodes auraient pu ne pas être ou qu'il ait fallu un si long temps pour y parvenir.

Les figures de la représentation symbolique.

L'organisation achevée de la symbolique s'est élaborée autour de six figures :

1°) La représentation du « requis ». Aussi simple qu'il puisse paraître, ce point a révélé des surprises, chez Diophante par exemple (RS, 55-71).

2°) La dialectique de l'indéterminé (la représentation du «donné»). Cf. ci-dessous.

3°) La structuration par assembleurs (la représentation des instructions opératoires élémentaires).

4°) L'ambiguïté de l'ordre (la représentation de la succession et de l'enchevêtrement des instructions) (RS, 85-125). Cette figure fut coextensive à la séparation et à l'agrégation des signes dans le texte symbolique (*via* des parenthèses, par exemple, ou un *vinculum*). Cette ponctuation nouvelle du texte organisa spontanément la première rupture progressive avec la langue naturelle. L'étude conclut d'autre part aussi à une claire possible distinction à l'intérieur du texte entre deux interprétations spontanées des expressions symboliques, soit comme *procédure*, soit comme *objet*. Elle met enfin l'accent sur une *arborescence* sous-jacente à tout texte symbolique. On peut alors distinguer deux modes d'exploration de l'arborescence (depuis la racine ou bien depuis les feuilles) qui sont ensuite identifiés comme deux positions épistémologiques du sujet mathématicien, dites de l'auteur et du lecteur[4].

[4] Dans une série d'exercices qu'elle a constitués, Bardini développe largement divers aspects didactiques de la constitution de l'arborescence et des deux démarches d'exploration d'une écriture symbolique, l'élève

5°) La représentation de la mise en relation. Sur le cas de l'égalité, elle fut le fait de Robert Recorde (dans *The Whetstone of Witte* de 1557), puis de Descartes dans sa Géométrie (1637). Ce fut une représentation tardive, qui acheva de rendre impossible tout maintien dans le texte de la syntaxe de la langue naturelle (RS, 127-144). À la structure prédicative de la rhétorique succéda en effet une symbolique incarnant une idéale interchangeabilité[5].

6°) La représentation des concepts composés, à partir de l'exemple fondateur de la «lignée des puissances (carrés, cubes, sursolides, etc.) (RS, chapitre VIII, 199-217). Les conclusions premières sur ce point font l'inventaire des inconvénients du système *cossique* (il occupa le terrain symbolique préalablement à Descartes) : impossibilité de changer d'inconnue ; nécessité de l'emploi de comptines pour effectuer le moindre calcul. L'examen des représentations du temps conduit à des conclusions qui peuvent nous paraître rétrospectivement, stupéfiantes. Ainsi, si le *cossique* permettait bien la représentation (**z**) du carré de l'inconnue (**x**) il ne permettait pas celle du carré d'expressions simples, par exemple de ce qu'on désigne (en termes rhétoriques) par 'la somme de l'inconnue et du nombre de signe 3' (c'est-à-dire **x** + 3) ! L'analyse de ces insuffisances démontre l'importance capitale (rétrospective !) de la prise en compte de deux prédicats 'naturels', la *substance* et la *relation*. Ainsi, dans le '$2a^3$' des *Regulae*[6] de Descartes, *a* est-il le signe de la substance, 3 celui de la relation). Si un système symbolique avait décidé de les représenter tous deux, la règle d'univocité exigeait alors, non plus un signe, mais deux. Un tel concept aurait alors été regardé comme composé. Pour divers motifs, le cossique avait « choisi » de n'utiliser qu'un seul signe, impliquant ainsi que le concept était pour lui simple. Dans ces conditions, il ne représentait évidemment *aucun* des deux prédicats. Ceci ne

---

étant mis successivement dans les deux positions, d'auteur puis de lecteur du texte symbolique (Bardini 2003, Exercice T1, p. 103, T1 bis, p. 105, T2, p. 109, T3, p. 110, T5, p. 115). Kirshner s'est aussi intéressé à la question de l'arborescence Kirshner 2004, (p.233-234).

[5] Une interchangeabilité certes 'idéale' et théorique, qui peut pourtant ne pas être reçue comme telle au moment de l'apprentissage initial de l'algèbre. Certains aspects didactiques sur ce point sont traités par Bardini 2003 (p. 91-93), à propos de l'interprétation de la réponse négative de certains élèves à la question « Six plus six est-il égal à six plus six » ?

[6] La première exponentielle opératoire (à exponentié indéterminé) de l'histoire apparut dans la règle XVI des *Regulae*, (AT, X, 455).

constituait cependant aucune faute logique. En une démarche naturelle, le cossique fonctionnait dans le registre de l'inventaire : à chaque concept nouveau apparu, il assignait une représentation distincte. Il se trouve qu'en mathématiques tout au moins, cette procédure est sans avenir (rappelons enfin que c'est Descartes qui, par son exposant, mit fin au cossique.

La dialectique de l'indéterminé[7]

A l'époque de Viète et depuis l'Antiquité, les figures géométriques étaient regardées comme « quelconques », c'est-à-dire génériques et «emblématiques» (d'une situation géométrique donnée : la figure avait bien une singularité, mais celle-ci était postulée non signifiante). Mais il n'y avait pas, symétriquement, de représentation des nombres « quelconques ». Rappelons aussi que pour représenter l'inconnu, un symbole non chiffré (et particulièrement une lettre) avait été nécessaire, précisément parce qu'il était inconnu. Dans son *Isagoge* de 1591, Viète introduisit alors des lettres pour représenter aussi le donné. Celles qu'il se proposait d'employer étaient cependant de type alphabétique différent, selon le concept, voyelle pour les inconnues (les moins nombreuses), consonnes pour les données. Voici Viète sur ce point fondateur :

Or afin que ceci soit aidé par l'art, les grandeurs données seront distinguées des requises par un symbole constant perpétuel et apparent, en signifiant les grandeurs requises par l'élément Alphabétique A, ou quelques autres voyelles, E, I, O, U, Y, et les données par les éléments B, C, D, ou quelque autre des consonnes ([Viète 1630], 47).

Dans sa déclaration liminaire, Viète prend certes bien soin de réclamer un « symbole perpétuel et apparent » pour « distinguer les grandeurs données des requises ». Cette définition cependant, comprise par les géomètres de son temps selon les règles alors en vigueur, ne manquait pas de receler une contradiction, due à ce fait simple : dans tout calcul à cette époque, le schéma prescrivait que le « donné » était cela seulement qui se trouvait susceptible d'une représentation explicite par chiffres. Dire, comme Viète, que la consonne B par exemple représentait une grandeur donnée, signifiait donc que, par ce signe était représenté un nombre fixe, à la valeur connue de l'auteur du texte. Dans ces conditions cependant, le lecteur n'en avait certes

[7] Cf RS, Chapitre VII, Viète et la dialectique de l'indéterminé, 145-193.

pas la connaissance ! Comment Viète pouvait-il affirmer que B était le signe d'une donnée ? Les objections du temps à une telle conception de la connaissance et de la représentation ne peuvent être négligées et rejoignent celles qu'ultérieurement les protagonistes de la querelle de l'axiome du choix s'adressèrent dans leurs célèbres correspondances de 1905 (cf. notre étude dans [Serfati 1995]). Comment l'auteur est-il certain de « penser » toujours au même élément ? Il ne s'agit pas ici, comme l'écrivait Lebesgue à propos de Zermelo, d'un contradicteur possible, mais d'être cohérent avec soi-même : comment Zermelo peut-il être sûr que Zermelo « pense » toujours au même élément, puisqu'il ne le caractérise en rien pour lui-même ? Ces objections furent donc autant d'obstacles épistémologiques considérables, qui auront demandé des siècles à pouvoir être pensés, puis dépassés. On comprend bien ainsi pourquoi, alors qu'il est aujourd'hui éclatant que la représentation du donné par lettres a été un élément décisif dans le développement des mathématiques, cette découverte capitale n'ait vu le jour que treize siècles après Diophante.

Dans ces conditions cependant, cette disparition des chiffres comme symbolisation explicite du donné entraina mécaniquement, au moment de l'interprétation, cette faculté et cette obligation nouvelles : devoir considérer ce donné comme arbitraire. En d'autres termes encore, le B de Viète était bien le signe d'une quantité donnée, mais d'une donnée quelconque. Comment cependant une grandeur peut-elle être à la fois arbitraire et fixée, fixe et mouvante, singulière et générale ? De tels énoncés apparaissent comme des contradictions dans la langue naturelle. De sorte que ce que Viète demandait en fait à son lecteur était l'adhésion à cette convention : d'une part il existe de l'«arbitraire mais fixé», d'autre part cette existence est gagée par l'écriture symbolique (et non pas naturelle). Ainsi s'agit-il d'ici une "dialectique", Cette question du statut de la lettre demeura en l'état (ou presque...) jusqu'au début du XXe siècle où il rebondit par contre en de très importantes discussions entre mathématiciens, logiciens, et philosophes, tels Frege, Russell, Hilbert et Gödel. Elle continue néanmoins évidemment d'être une difficulté prégnante dans l'enseignement – par exemple dans certains aspects de ce qu'on appelle usuellement une 'généralisation'[8] – et ainsi un centre d'intérêt de recherches didactiques[9].

Ces six représentations se trouvèrent réunies dans la *Géométrie* de 1637. À cet égard, placée sur le devant de la scène par la richesse de son contenu mathématique autant que par l'autorité de Descartes philosophe, la *Géométrie*, en dépit de l'absence complète d'indications symboliques de la part de son auteur, servit néanmoins de modèle tout au long du XVIIe siècle pour le déchiffrage par comparaison des textes symboliques nouveaux, selon le «principe de la pierre de Rosette» (RS, 382).

Pensée symbolique et avènement de la substituabilité[10]

L'examen de certains textes médiévaux ou renaissants, chez Stiefel par exemple, nous fait constater qu'une substitution aussi simple pour nous à écrire et à opérer que celle de

$$A = x^2 + 1 \text{ dans } Z = 2A^3 - 5A$$

demeura une opération inconcevable – elle ne pouvait *se penser* – dans le cadre de l'écriture médiévale des mathématiques. Avec Leibniz, la substitution devint par contre un élément quotidien essentiel, découvrant un aspect majeur de ce qu'il appela le premier la *pensée symbolique*.

L'examen de l'avenir de l'exponentielle après Descartes permet d'introduire ce sujet à un niveau élémentaire. On évoquera la création des exponentielles à exposants fractionnaires sous la plume de Newton dans une lettre célèbre de juin 1676, l'*Epistola Prior*[11] adressée à Leibniz. Rien dans l'expérience préalable de Leibniz à cette époque, ni dans la définition cartésienne des

---

[8] Nous lui préférerons le terme de 'passage à l'indéterminé', épistémologiquement plus précis.

[9] Ce point est central dans la constitution de la pensée symbolique. L'analyse par Bardini 2003 (p. 83-87) d'un exercice proposé par L. Radford est particulièrement instructive à ce sujet. Il s'agit d'élaborer une généralisation 'à l'ordre *n*' de 'patrons numéro-géométriques', exercice dans lequel les élèves demandent naturellement "Qu'est *n* ?", et où l'enseignant affirme tout aussi naturellement que "*n* est un nombre quelconque", sans rencontrer d'abord ni compréhension ni assentiment.

[10] Cf. RS, Chapitre XIII, *L'Art Combinatoire. Substitutions et métamorphoses*, 285-321.

[11] Au moment de la querelle entre Leibniz et Newton, certaines des pièces importantes du procès furent spécifiquement dénommées. Ainsi distingue-t-on classiquement l'*Epistola Prior* de juin 1676 (= [Bw], 179-192) adressée par Newton à Leibniz par l'intermédiaire d'Oldenbourg, et l'*Epistola Posterior*, toujours de Newton à Oldenbourg, du 24 octobre 1676 (= [Bw], 203-225).

exponentielles – la seule évidemment qu'il connût – ne pouvait lui laisser pressentir dès l'abord quelle signification Newton pouvait bien apporter à des formes symboliques comme $3^{\frac{1}{2}}$ ou $(x+3)^{\frac{1}{2}}$ ou bien $5^{\frac{2}{3}}$ ou bien encore $\sqrt{2}^{-\frac{6}{7}}$ – dont le caractère interprétable aurait pourtant dû découler de l'écriture newtonienne. Tout essai de traduction rhétorique sur le mode cartésien conduisait droit à des absurdités : si la procédure de la « forme » 3^5 peut en effet être décrite par « multiplier le nombre de signe 3 cinq fois par lui-même », que pouvait bien signifier à propos de $3^{\frac{1}{2}}$: « multiplier ce nombre une demi-fois par lui-même » ? Il y eut donc un temps (momentané, mais significatif) d'incompréhension de la part de Leibniz devant des formes symboliques sans signification, qui fut dissipé par la suite de la lettre de Newton. Dans l'*Epistola Posterior* qui suivit, Newton persévéra allègrement, introduisant – cette fois, sans aucune tentative de définition – des exposants irrationnels, comme dans son exemple :

$$(x^{\sqrt{2}}+x^{\sqrt{7}})^{\sqrt{(3)\frac{2}{3}}}$$

Fin 1676, la situation de Leibniz était ainsi la suivante : tout juste sorti de l'écriture rhétorique des mathématiques de sa jeunesse, grecque et scolastique, il avait rencontré, deux ans auparavant seulement, dans la *Géométrie* de Descartes, l'écriture mathématique nouvelle, et aussi l'exposant cartésien, d'un emploi tout récent à cette époque. Or, dans la conception cartésienne, il avait été impératif qu'à la place de l'exposant vienne un chiffre simple. Ainsi Leibniz avait-il été tenu de se familiariser, rapidement et grandement, avec la symbolique nouvelle, fort éloignée pourtant des considérations de sa jeunesse. Or voici que deux ans après sa rencontre avec la *Géométrie*, et en moins de quatre mois (juillet-octobre 1676) il se trouva, du fait de Newton cette fois, devant la nécessité d'intégrer dans ses conceptions deux formes exponentielles encore nouvelles, obtenues par deux extensions de champ successives (rompus, puis sourds[12]) à partir de la même forme cartésienne initiale – de surcroît *littéralisée*[13]. Que la

[12] C'est à dire rationnel (rompu) ou irrationnel quadratique (sourd).

[13] Descartes avait écrit a^3, a^4, etc. Newton fut le premier qui «passa à l'indéterminé» et écrivit a^p. Ce fut, pour le temps, un saut épistémologique considérable ([RS], 255), corrélatif de celui de Viète, et dont nous

première version de l'exponentielle newtonienne, rompue, dans l'*Epistola Prior*, fut correctement et complètement définie, alors que la seconde, sourde, dans l'*Epistola Posterior* ne le fut aucunement, ne constitua guère un motif de préoccupation pour Leibniz, qui en tira par contre cette double conclusion : d'une part, que la morphologie de l'exponentielle cartésienne n'était certes pas figée, contrairement à ce que la force d'une tradition toute récente tendait à faire croire. D'autre part, que toutes les questions de signification étaient en vérité subalternes au regard de la puissance des réalités combinatoires (le primat de la « forme » exponentielle). Saisissant alors l'essence même du procédé newtonien, Leibniz s'employa dès ce moment à construire – par mimétisme – une exponentielle complètement neuve, a^z ou x^z, dont l'importance dépasserait ainsi, écrivait-il naïvement, celles de Descartes et Newton à la fois (!). La question était alors cependant : quelle pouvait bien être *à ce moment et pour lui* la signification d'une forme symbolique où, à la place de l'exposant, venait le signe d'un nombre *quelconque, indéterminé* ? Une exponentielle que nous dirons « leibnizienne », qui constitua pour lui le premier et le plus important des trois volets de ce qu'il dénomma ensuite la transcendance, au sens mathématique[14].

Comme on sait, on a aujourd'hui davantage encore exploré cette voie des substitutions en exposant, en y faisant par exemple venir une matrice carrée, selon

$$a^{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 14 \\ 4 & 3 & 38 \end{bmatrix}}$$

Une exponentielle certes bien éloignée des intentions cartésiennes initiales !

La question, évidemment cruciale, de l'origine, et surtout de la pertinence et de la fécondité[15] des définitions de ces nouveaux objets, doit être évidemment chaque fois posée, puis réexaminée. Quoi qu'il en soit, ces

avons peine à imaginer la difficulté qu'il suscita (un enfant demanderait : que vaut p?). En témoignent aujourd'hui certains travaux didactiques cités *supra*.

[14] Ainsi Leibniz qui était philosophe, aura-t-il ici importé en mathématiques un terme du vocabulaire philosophique (*transcendans* : qui dépasse le champ de l'expérience simple), mais dans son sens littéral et sans aucunement le charger des connotations philosophiques dont il était porteur. (Sur ce point, cf. [Breger 1986], 125, note 36). À lire Leibniz en détail, on ne peut s'empêcher de penser que c'est à lui-même, se comparant à Descartes et Newton, que Leibniz voulait en vérité appliquer ce terme de *transcendans*.

[15] Sur ce point, cf. ci-dessous notre dernière section.

diverses opérations s'analysent naturellement comme des *substitutions à la place de l'exposant* dans l'exponentielle cartésienne. D'une autre nature, d'autres exemples leibniziens de substitutions[16] vinrent conforter l'importance de la substituabilité. Ainsi, dans sa démonstration de ce qu'il appela la Quadrature Arithmétique du Cercle (cf.[Hofmann 1974]), Leibniz, utilisa, en la modifiant, la démonstration que Mercator avait donnée pour la quadrature de l'hyperbole. En termes modernes, pour «quarrer l'hyperbole», Mercator avait développé en série $\frac{1}{1+x}$ et intégré terme à terme. Pour «quarrer le cercle», Leibniz substitua x^2 à x et intégra terme à terme le développement de $\frac{1}{1+x^2}$. Une substitution qui va certes pour nous complètement de soi (!) mais était à l'époque profondément nouvelle. On a peine à imaginer aujourd'hui la somme des difficultés rencontrées par les esprits savants du temps, encore tout imprégnés de vérités géométriques «concrètes», pour concevoir une telle substitution portant sur le seul matériel symbolique. Elle fut, à ma connaissance, le premier exemple historique d'une substitution opératoire en calcul intégral. Il est à peine besoin de préciser à quel point une telle procédure nécessite le recours à l'écriture symbolique ! Ainsi se découvrit peu à peu l'émergence de cette nécessité : l'exécution d'une opération appelée substitution, dont l'importance et le rôle prééminents dans le registre «combinatoire»[17] vont demeurer sans équivalent aucun dans le registre des significations mathématiques. Alors que celui-ci verra en effet se découvrir une diversité d'opérations chaque jour plus étendue (addition, quotient, différentiation, sommation, passage à la limite, clôture topologique, etc.), le registre combinatoire, ne connaîtra guère en effet[18], qu'une seule opération : la substitution.

[16] Leibniz glorifia la substituabilité sous le nom d'Art Combinatoire, un terme qui fut mal très compris, tant par les contemporains que par la postérité.

[17] *Roughly speaking*, l'adjectif «combinatoire» connotera le registre de la matérialité des signes – il recouvre certes l'aspect syntaxique, mais ne coïncide pas avec lui. Sur l'opposition registre signifiant/registre combinatoire, cf ([RS], 34). Sur une distinction entre combinatoire et formel, cf ([RS], 402).

[18] A l'exception sans doute des embranchements. La création de l'embranchement haut, attaché à l'exponentielle cartésienne, est en effet une opération combinatoire spécifique, commandant une syntaxe précise. De même pour l'embranchement bas, aujourd'hui associé à la notation indicielle, introduit au cours du XVIIIe siècle. Cf. notre étude détaillée in 'Mathématiques et pensée symbolique chez Leibniz' = [Serfati 2001].

La faculté de substituer est ainsi devenue la clé de voûte de la pensée symbolique mathématique[19].

Pensée symbolique et création d'objets mathématiques[20].

On conclura sur un autre aspect de l'écriture symbolique, en décrivant l'émergence historique d'un procédé de construction de certains objets mathématiques à partir d'elle. On l'analysera *in statu nascendi* en retournant aux correspondances de 1676 entre Leibniz et Newton, et en revenant aux exponentielles «rompues» avec cette question : comment fournir une signification à la forme symbolique $a^{\frac{1}{2}}$ qui, pour Descartes ou Leibniz, n'en avait certainement aucune [21]? Une (reconstruction de la) méthode est alors celle-ci : le géomètre fait choix d'une formule valide pour l'exponentielle (cartésienne), parmi toutes celles que cette dernière était connue pour vérifier. Ce sera ici la «formule multiplicative»

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

valide si *r* et *s* sont les signes d'entiers naturels et *a* le signe d'un nombre positif quelconque. Une formule qui sera dite *élective* dans la suite. Si cependant *r* est interprété comme un nombre rationnel quelconque, soit $r = \frac{p}{q}$, alors « $a^{\frac{p}{q}}$ » est sans signification (c'est l'assembleur exponentiel qui en est dépourvu). La méthode consiste alors à *définir*, si c'est possible, la substance de $a^r = a^{\frac{p}{q}}$ comme un nombre *tel* que *la même formule* reste vraie pour toute valeur du couple de rationnels, de signes *r* et *s*. Pour ce faire, la méthode commencera par en affirmer la validité dans le cas particulier où le rationnel r est l'inverse d'un entier naturel, soit *r* = $\frac{1}{q}$. On montre alors simplement que la seule substance possible pour $a^{\frac{p}{q}}$ est ainsi celle de $(\sqrt[q]{a})^p$, c'est-à-dire celle proposée par Newton dans sa lettre[22]. Il y a donc au plus une solution satisfaisant l'extension de la formule.

[19] Deux exercices de Bardini (2003), S1 (p. 123) et S2 (p. 126) illustrent quelques aspects didactiques de la substituabilité. L'exercice S1 tire exhaustivement les conséquences d'un "monde sans grandes puissances" obtenu par le jeu d'une certaine substituabilité ($x^3 = 2x - 2$).

[20] Cf. RS, Chapitre XIV, «Formes» sans significations. Analogies et prolongements, 323-379.

[21] La question de l'exponentielle après Descartes est largement traitée dans RS, Chapitres XI et XIV.

[22] On doit bien souligner la contingence de la définition de Newton : la substance de $a^{\frac{p}{q}}$ pouvait ne pas être, ou bien différente de celle qu'il proposait, comme nous le soulignons par la qualification *d'élective* que nous

Dans cet exemple pourtant bien modeste, le géomètre peut sans doute croire avoir gagné sur deux tableaux : en premier lieu, il a fourni une signification à une forme symbolique qui n'en avait pas. Ainsi découvre-t-il une gestion rationnelle, scientifique, du non-sens –les ruptures de sens sont ici consubstantielles à la création (mathématique). En même temps, il a étendu *extra muros* (i.e. aux rationnels) le champ de validité de la formule multiplicative, qui peut ainsi apparaître comme dépositaire *per se* d'une forme supérieure de vérité, à la fois intrinsèque et élargie, et qui pourrait, par hypothèse, constituer l'essence d'un concept général d'« Exponentielle » – ainsi supposée préexister. Une position encore raffermie par l'examen des bénéfices de la procédure : le géomètre le géomètre peut constater par le calcul que la «formule exponentielle» $a^z a^t = a^{z+t}$ qui n'avait pas été visée par l'extension, était encore valide au regard de celle-ci, renforçant sans doute encore le sentiment (tout platonicien !) des protagonistes d'être en présence d'un concept « naturel ». Cette forme d'illusion se fonde en vérité sur l'occultation momentanée de la solidarité indissoluble de la méthode de la formule élective d'une part, de l'apport de significations d'autre part. Dans une autre étude – ce point excède en effet le cadre du présent article – nous examinerons le rôle, complexe et ambigu, que le schéma joue ainsi, au delà des apparences psychologisantes, à l'égard du platonisme mathématique.

J'ai certes bien conscience de la modestie de cet exemple exponentiel. Il fut pourtant décisif ([RS], 366-376) pour l'abstraction d'un schéma en trois temps (formes sans signification, formules électives et extensions analogiques) qui fut à l'œuvre dans de nombreuses créations d'objets, tant au XVIII^e siècle chez Euler (exponentielle complexe) que plus récentes (pseudo-inverses de Moore-Penrose, dérivation au sens des distributions – un exemple important la formule élective étant ici l'intégration par parties, etc.)

---

avons attribuée à la formule. Cependant, et dès lors que Newton affichait une définition, quelle qu'elle fût, il était nécessaire que les substances de a^3 et $a^{\frac{6}{2}}$ fussent dans tous les cas les mêmes. Dès 1676 donc, et avec la force de sa simplicité, l'exemple newtonien exposait ainsi à l'endroit de Leibniz cette leçon de philosophie qui vient articuler une distinction véritable entre nécessité et contingence.

Citons un autre exemple, lui aussi majeur en Analyse, mis en lumière par J-P. Kahane[23], le couple des relations de Fourier :

$$c_n = \int_0^1 e^{-2i\pi nu} f(2\pi u) du$$

$$f(x) = \sum_{n \in Z} c_n e^{inx}$$

qui organisent, dans sa terminologie, un « programme », composé de deux formules électives, inscrit dans une dualité structurelle canonique entre séries et intégrales. De telles constructions sont en vérité à la fois exemplaires du schéma, mais aussi contingentes — par leur abondance même.

On met ainsi en lumière une procédure de création d'objet par *extension analogique*, sur un mode qui demeure à notre connaissance entièrement spécifique de la mathématique, en même temps que consubstantiel à l'écriture symbolique. Un point que nous ne pourrons développer ici davantage (cf. [Serfati 2002]). En dernière analyse, la procédure est gouvernée par cette exigence primordiale, transcendant les réquisits d'une signification immédiate, de *permanence de certaines écritures symboliques mathématiques* (les formules électives), que rien, en soi, dans les fondements et les principes affichés de la mathématique effective[24], ne requiert pourtant *a priori* ([RS], 376). La reconnaissance visuelle d'une certaine permanence du symbolisme, comme immédiate, et libérée, dans un premier temps tout au moins, des nécessités du sens, est ainsi une conception épistémologiquement essentielle. Elle se range au registre de la synthèse, mais d'une synthèse particulière, synoptique[25]. Erigé ensuite en «principe» (c'est-à-dire en guide méthodologique contingent dans la recherche) le schéma montre ainsi à nouveau un des aspects sous lesquels l'avènement de l'écriture symbolique a contribué, dès le XVII^e siècle, à l'invention en mathématiques même, tâchant ainsi d'éclairer pour une part

[23] Dans son intervention au colloque 'La vertu créatrice du symbolisme mathématique' à l'Académie des Sciences, du 6 mai 2008.

[24]. La *Permanence des Formes Equivalentes* avait eté évoquée par Peacock [Peacock 1830]), mais de façon bien limitée et sans analyse épistémologique constructive.

[25]. Kirshner 2004 a expérimenté quelques aspects didactiques de cette conception.

la nature intime de ce «pouvoir de créer» chez les mathématiciens qu'évoque Dedekind et que relève Cavaillès[26].

Bibliographie

ARTIGUE, Michèle, 'Épistémologie et didactique', *Recherches en Didactique des Mathématiques 10* (2-3), 1991, 241-286.

BARDINI, Caroline, Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique. Thèse doct. didactique des mathématiques. Université Paris VII. 2003.

BREGER, Herbert, 'Leibniz Einfürhung der Transzendenten', 300 Jahre « Nova Methodus » von G.-W. Leibniz (1684- 1984) in *Studia Leibnitiana*, Sonderheft 14, Stuttgart, 1986.

CAJORI, Florian, *A History of Mathematical Notations*. Réimpress. (1 vol.). Dover. 1993.

CAVAILLÈS, Jean, *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*. Hermann. Paris. 1981

[A.T] DESCARTES, René, *Œuvres* (13 vol.), Éd. Adam-Tannery. Rééd. des 11 premiers volumes à partir de 1964. Vrin. Paris (éd. poche à partir de 1996). Les textes sont référencés A.T + numéro du volume en chiffres romains + page en chiffres arabes. *La Géométrie* de 1637 est dans [A.T VI], 367-485. Les *Regulae ad Directionem Ingenii* sont dans [A.T X], 349-469. Deux traductions françaises (*Règles utiles et claires pour la Direction de l'Esprit et la Recherche de la Vérité*) sont en éd. de poche— de Jacques Brunschwig. Livre de Poche. Paris. 1997 – de Joseph Sirven. Vrin. Paris. 2003.

HOFMANN, Joseph, *Leibniz in Paris. 1672-1676. His Growth to Mathematical Maturity*, Cambridge University Press. 1974. Traduction anglaise de *Die Entwicklungeschichte Mathematik während des Aufenthalts* in Paris (1672-1676). Oldenbourg. Munich. 1949.

KIRSHNER, David & AWRY, Thomas, 'Visual Salience of Algebraic Transformations', *Journ. Res. Math. Educ.,* 2004, Vol. 35, N° 4, 224-257.

[Bw] LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm, *Der Briefwechsel von G.W. Leibniz mit Mathematikern*. Réimpress. Olms. Hildesheim. 1962.

PEACOCK, George, *A Treatise on Algebra*. 2 vol. (I. Arithmetical Algebra, II. Symbolical Algebra). Londres. 1830. Réimpress. Dover 2005.

[Serfati 2008] SERFATI Michel,'A Note on the Geometry and Descartes's Mathematical Work', Notices of the American Mathematical Society, Vol. 55. N° I, jan. 2008, 50-53

= http// www.ams.org/notices/200801/tx080100050p.pdf

[Serfati 2006] SERFATI, Michel,'La constitution de l'écriture symbolique mathématique. Symbolique et invention', *Gazette des Mathématiciens 108* (avril 2006), Publ. Soc. Math. Fr., 101-118.=

26. [Cavaillès 1981], 57

http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2006/108/smf_gazette_108_101-118.pdf

[RS] SERFATI, Michel, La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique. Préface de Jacques Bouveresse. Paris. Pétra. 2005

[Serfati 2001] SERFATI Michel, 'Mathématiques et pensée symbolique chez Leibniz', Mathématiques et Physique leibniziennes (1ère partie) (M. Blay et M. Serfati dirs.), *Revue d'Histoire des Sciences*, 54-2 (2001), 165-222.

[Serfati 1999] SERFATI, Michel, 'La dialectique de l'indéterminé, de Viète à Frege et Russell', *La recherche de la vérité* (M. Serfati dir.). A.C.L. Paris. 1999, 145-174.

[Serfati 1995] SERFATI Michel, 'Infini "nouveau". Principes de choix effectifs', Infini des philosophes, infini des astronomes (F. Monnoyeur dir.) Belin. Paris. 1995, 207-238.

[Viète 1630] *La nouvelle algèbre de Monsieur Viète*, Corpus des œuvres de philosophie en langue française. Fayard. Paris. 1986. Réimpress. fac-sim. de deux trad. franç. de Viète par Vaulézard (1630), *l'Introduction en l'art analytic* (1591) et *Les cinq livres des Zététiques.*

MICHEL SERFATI

IREM-Université Paris VII

serfati@math.jussieu.fr