DEVELOPPEMENT HISTORIQUE DES TYPES DE PENSEE MATHEMATIQUE AUTOUR DU THEOREME DE THALES

SLIM MRABET
Institut Supérieur de l'Education
et de la Formation Continue de Tunis
mrabet_slim@yahoo.fr

Résumé. Le but de l'étude historique que nous menons est de prouver que la grande variété des énoncés du théorème de Thalès apparus dans l'histoire révèle des modèles de type de pensée mathématique différents que nous repérons. L'étude de quelques traités de géométrie dont les auteurs ont marqué une période de l'histoire des mathématiques nous permettra de discuter de la place laissée dans ces traités à la rigueur par rapport à l'intuition, du rôle et de la place de la figure autour du théorème de Thalès et de l'évolution de la niche écologique dans laquelle notre concept se place.

Mots-clés. Didactique des mathématiques, Histoire des mathématiques, Obstacles épistémologiques, Géométrie, Types de pensée mathématique, Rigueur, Intuition, Théorème de Thalès.

Introduction

Historiquement, l'évolution du théorème de Thalès a été accompagnée d'obstacles épistémologiques qui ont marqué des moments importants des mathématiques. Plus précisément, nous pouvons dire que l'étude des conditions d'apparition de ce concept et des différentes démonstrations qui lui sont associées nous fournit des éléments de réflexion pour aborder la question de la place du numérique dans le géométrique. Nous nous focalisons en particulier sur la place laissée à la rigueur par rapport à l'intuition et sur certains obstacles épistémologiques qui ont résisté suivant les époques. Même si dans l'enseignement actuel il n'est pas toujours possible d'expliciter les moyens de la rigueur, nous pensons que dans le cas du théorème de Thalès, on ne manque pas de prendre note de deux points importants qui ont résisté durant plus de deux décennies : la difficulté des rapports incommensurables et la conception de la droite réelle « sans trous ».

Dans ce qui suit, nous choisissons d'analyser des traités particuliers de géométrie depuis Euclide et jusqu'aux auteurs du XIXe siècle. Nous essayons d'interpréter la façon d'introduire, de démontrer et de se servir du théorème de Thalès dans un cadre plus large, celui d'un type de pensée caractérisant un auteur particulier ou une époque particulière. Notre choix des traités a tenu compte, en plus de la disponibilité de ces traités, de deux facteurs essentiels :

- l'influence du traité à une époque donnée, sur l'enseignement de la géométrie en général.
- l'existence des différences entre les traités qui nous permettent de mettre en évidence des systèmes axiomatiques différents suivant lesquels peuvent s'organiser les connaissances en géométrie.

Nous avons ainsi choisi d'étudier les œuvres d'Euclide, d'Arnauld, d'Hadamard, de Choquet et de Dieudonné.

1. Les énoncés du théorème de Thalès

Des travaux de recherche en didactique ont montré que, sous la même terminologie du théorème de Thalès, apparaît une variété d'énoncés de formes différentes auxquels sont attribués des objets ostensifs divers. Pour fixer les idées, dans notre analyse historique, nous désignons par *Théorème de Thalès* tout théorème qui parle des relations de proportionnalité entre les segments découpés par des lignes parallèles sur deux lignes sécantes dans un plan. La situation générale dont parle le théorème est représentée dans la Figure 1.

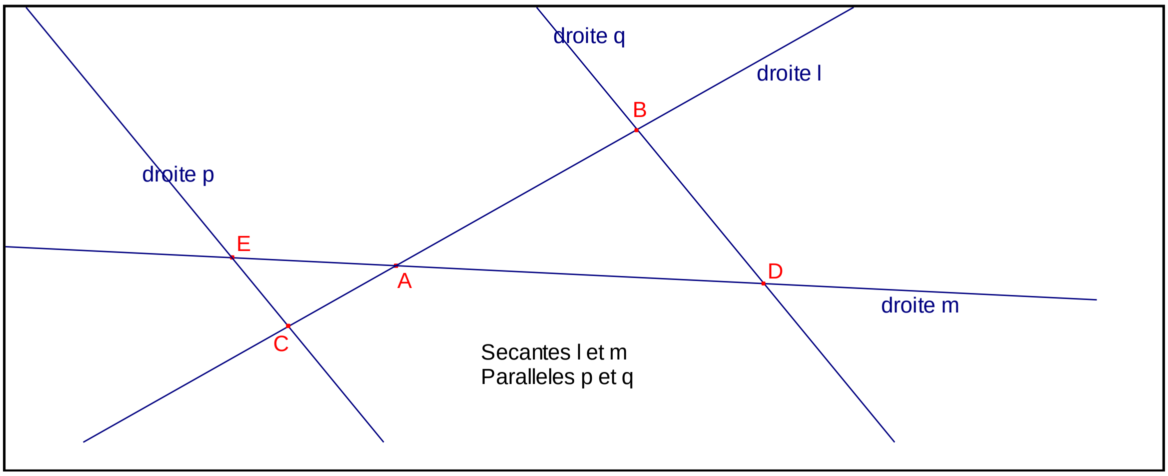


Fig. n°1. La situation géométrique qui fait l'objet du Théorème de Thalès : deux sécantes et deux droites parallèles qui les coupent.

Pour analyser ces théorèmes, nous nous inspirons des classifications de Brousseau (1995) et de Duperret (1995), et distinguons, essentiellement, deux approches à la situation de la Figure 1 : *l'approche par homothétie* et *l'approche par projection*.

Nous pouvons interpréter la situation dans la Figure 1 comme représentant une *homothétie* de centre *A* telle que *C* est l'image de *B*. Alors le théorème de Thalès permet de dire que, dans cette situation, *E* est nécessairement l'image de *D*. Cela peut se traduire en égalités vectorielles telles que, « si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AD}$ et donc $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{DB}$ ». Ou bien, si l'on pense aux triangles *ACE* et *ABD* comme semblables en vertu du fait que le premier est l'image par homothétie de l'autre, on peut parler en termes de proportions des rapports de longueurs de segments : $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{CE}{BD}$.

D'autre part, nous pouvons voir cette situation comme représentant une *projection* sur la droite *m* dans la direction commune des droites *p* et *q*. Cette direction peut être représentée par un axe de direction *p* et passant par *A*, donnant ainsi un système de coordonnées avec la droite *m* comme l'axe des abscisses. De ce point de vue, *D* est l'image, par cette projection, du point *B* et *E* est l'image du point *C*. Le Théorème de Thalès permet de faire alors deux constatations : 1) que la projection *conserve les abscisses*, ce qui se traduit par les égalités des rapports des segments sur la même sécante ($\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$), et 2) que la projection *conserve le rapport* des longueurs entre un segment et son image, ce qui se traduit par les égalités des rapports des segments pris sur les deux sécantes, à savoir, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

Certaines formulations du Théorème de Thalès font référence à un cas particulier de la situation de la Figure 1, réduite à un triangle. Cette situation semble être statique alors qu'en effet elle cache deux dynamiques qui ont pu la faire naître, correspondant aux approches *par homothétie* ou *par projection* (voir Figure 2).

Il est à noter que le Théorème de Thalès comprend non seulement les conclusions mentionnées ci-dessus mais aussi la réciproque menant des proportions à la situation géométrique de la Figure 1 ou 2 (voir Annexe).

2. Le Théorème de Thalès dans l'histoire

2.1 Les Eléments d'Euclide (vers 300 ans av. J.C)

Caractérisée par sa rigueur, son enchaînement logique et par une axiomatique qui se veut rigoureuse, la géométrie d'Euclide s'est basée sur la théorie des proportions d'Eudoxe pour faire face à la crise provoquée par les irrationnels apparue en lien avec le théorème de Pythagore, ce qui a permis d'éliminer le recours aux nombres autres que les entiers.

Dans le traité d'Euclide, un objectif essentiel est d'établir des relations entre les figures semblables (du plan ou de l'espace) et des proportions.

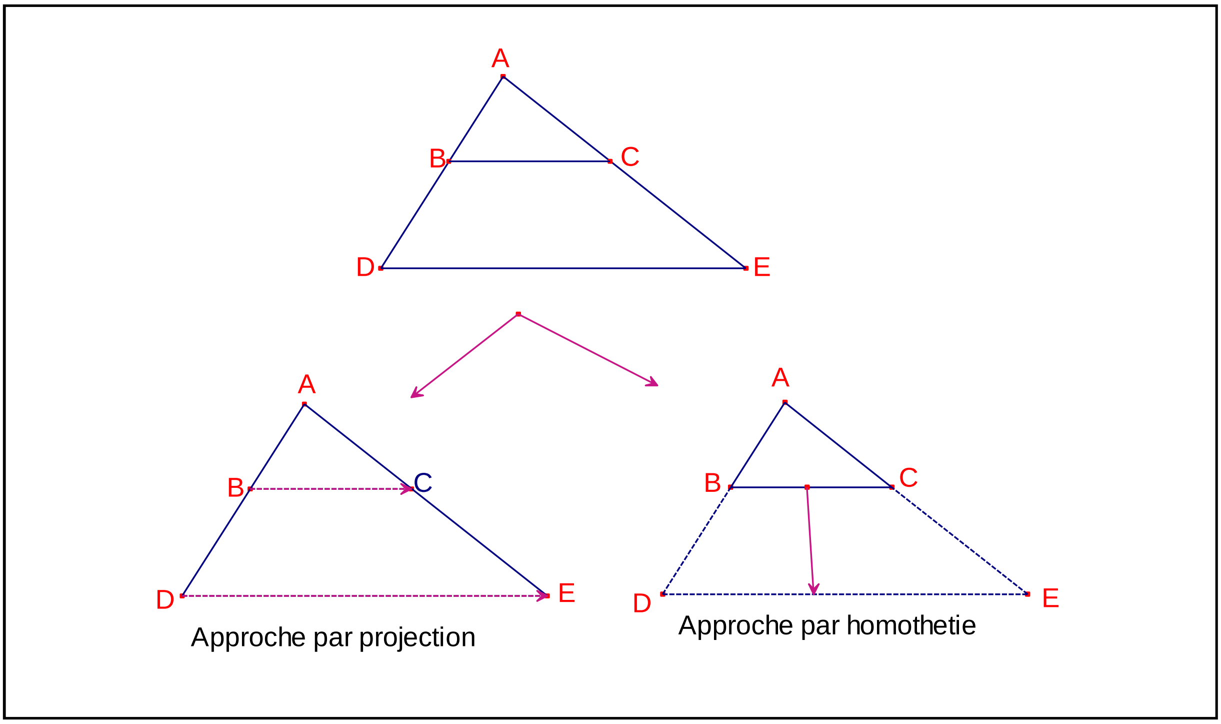


Fig. n° 2. Le cas particulier de la situation géométrique du Théorème de Thalès : Relations dans un triangle coupé par une droite parallèle à l'un des côtés

Le traité d'Euclide prend appui sur le monde sensible, utilise des raisonnements logiques tout en ayant souvent recours à des procédés empiriques. Pour traiter les situations relatives aux triangles et plus généralement aux polygones et à différentes courbes et surfaces, il utilise les cas d'égalité et de similitude des triangles. Le théorème de Thalès, connu à ce moment sous le nom de « proposition des lignes proportionnelles», nous semble un point essentiel de la géométrie d'Euclide puisqu'il permet de repérer des points forts sur lesquels se base cette géométrie. Le traité d'Euclide nous a fourni le premier énoncé dans l'histoire du théorème des lignes

proportionnelles. La proposition 2 du Livre VI relative à cet énoncé traite du cas d'un triangle et d'une droite parallèle à l'un de ses côtés :
Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle, et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle. (*Eléments*, Proposition 2, Livre VI)

Sa démonstration est basée sur une proposition précédente (Proposition 1, Livre VI) et sur un découpage et une reconstruction de figures (voir Annexe). Cette démonstration montre deux des points caractéristiques de la géométrie d'Euclide :

- *La méthode des aires* qui consiste à faire des découpages et des recompositions dans le but de comparer des aires. Ce procédé, rendu opérationnel par les cas d'égalités des triangles, est fréquemment utilisé chez Euclide et d'une façon générale chez les géomètres grecs (Bkouche, 1995). La méthode des aires utilisée par Euclide présente au moins deux avantages :
  - elle permet de contourner le problème des rapports incommensurables puisqu'elle ne nécessite pas la construction de l'ensemble des réels ;
  - elle interprète l'égalité des surfaces en termes de superposition et légitime la méthode empirique basée sur le découpage et la reconstruction de figures.
- *La théorie des proportions* élaborée pour résoudre le problème de l'égalité de deux rapports incommensurables. Elle est développée par Eudoxe et exposée au livre V des Eléments. Dans la théorie d'Eudoxe-Euclide, le rapport de deux grandeurs n'est possible que si ces grandeurs sont de même nature. Le cas du rapport de deux grandeurs incommensurables est à exclure et il n'est pas défini comme un nombre. Cette conception persiste jusqu'au XIXe siècle et trouve une solution par la construction des nombres réels.

Dans les travaux d'Euclide, la proposition 2 L VI ne semble pas être une fin en soi ; c'est son application immédiate aux triangles semblables qui est le plus souvent mobilisée.

2.2 Les *Eléments* d'Arnauld (1667)

Le traité d'Euclide a marqué une grande partie de l'histoire des mathématiques et il est source d'inspiration pour plusieurs auteurs. Mais au XVII^{e} siècle, ce traité ne semble pas satisfaire certains mathématiciens. A cette époque s'est développée une arithmétique qui a renouvelé la notion de grandeur et qui a établi le lien entre les opérations sur les nombres et celles sur les grandeurs, ce qui a permis à Arnauld de fonder une théorie des proportions au début de son ouvrage.

Remarquons que le lien entre grandeur et nombre est apparu bien avant Arnauld, avec Descartes (1628) pour qui il suffit de choisir une unité de longueur pour associer à toute longueur un nombre réel et inversement. Ainsi les calculs numérique et géométrique se rejoignent. Un exemple typique de l'algébrisation de la géométrie chez Descartes est lié à notre thème et consiste à montrer (Figure 3) comment se fait géométriquement le produit de deux réels (Bkouche, 1995).

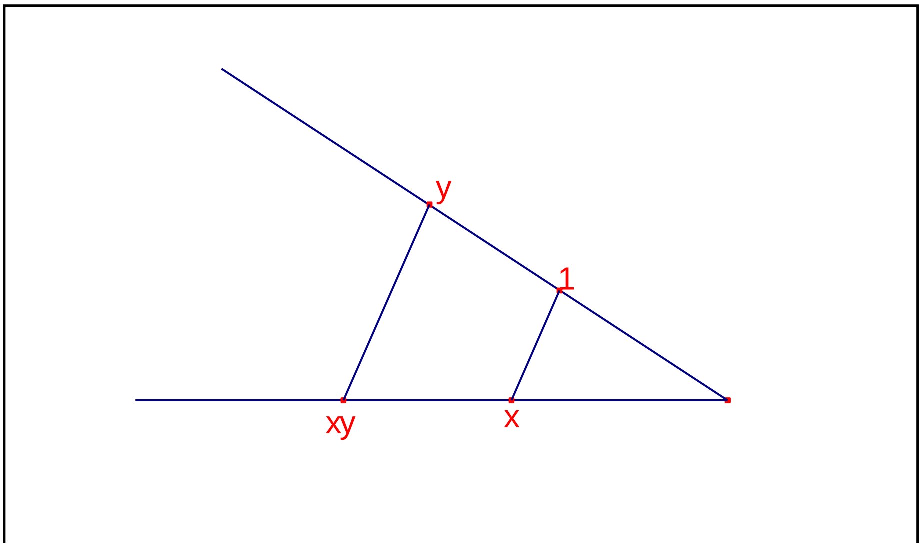


Fig. n^o 3. Construction du produit de deux réels

Il suffit de fixer une unité de longueur pour établir ce lien. Le théorème de Thalès a permis d'élargir le cadre des segments homogènes dans lequel Euclide s'est enfermé : le segment AB étant choisi comme unité, le produit des segments BC et BD est bien le segment BE.

Le lien entre nombre et grandeur constitue un point de différence essentiel entre la géométrie d'Euclide et celle d'Arnauld : dans la théorie des proportions d'Eudoxe-Euclide les grandeurs sont détachées de la pratique de la mesure puisqu'elles sont définies en se basant sur la notion d'ordre, sans recours au numérique. Cette théorie définit la mesure en se servant uniquement des grandeurs et de leur comparaison et se place ainsi dans une conception purement théorique.

A l'époque d'Arnauld sont apparus les nombres sourds comme étant le rapport de deux grandeurs incommensurables de natures différentes sans qu'ils aient un statut théorique bien défini. Arnauld se place du côté de la pratique de la mesure et pour lui, à une grandeur est associé un nombre comme étant le nombre de fois que cette grandeur contient l'unité ou une partie de l'unité avec éventuellement un résidu. De la même façon il définit le rapport de deux grandeurs homogènes en prenant comme unité une partie aliquote du premier. La relation entre les grandeurs et les réels commence à émerger, mais elle ne se concrétise que lors de la construction rigoureuse des réels, deux siècles plus tard.

Par ailleurs, le traité d'Euclide a été objet de critiques d'Arnauld et Nicole (1995). Selon ces auteurs, ce traité qui n'a pas manqué de rigueur, d'exhaustivité et d'enchaînement logique sans faire appel à des éléments de l'extérieur, s'intéresse plus à convaincre l'esprit qu'à l'éclairer. Arnauld considère que pour un souci de logique, les démonstrations d'Euclide montrent souvent des évidences, s'éloignent parfois de l'objet étudié et font un détour peu naturel. Les critiques les plus liées à notre thème portent sur le respect du vrai ordre de la nature : dans la démonstration du théorème de Thalès, Arnauld rejette le détour par les aires que fait Euclide (voir Annexe) et pose l'antériorité des lignes par rapport aux surfaces. Sa démonstration s'appuie sur le résultat qui stipule que sur toute sécante, des parallèles équidistantes déterminent des segments égaux. Dans l'axiome 32 du Livre V, Arnauld mentionne clairement que le vrai ordre de la nature impose l'antériorité des lignes par rapport aux triangles. Voici la citation exacte :

32. [….] Ce qui doit faire regretter le scrupule qu'on pourrait avoir de recevoir cette proposition comme claire d'elle même c'est qu'on ne peut faire autrement sans troubler l'ordre naturel des choses et employer les triangles pour employer les propriétés des lignes, c'est-à-dire se servir du plus composé pour expliquer le plus simple, ce qui est tout à fait contraire à la véritable méthode [….]. (Arnauld, Livre V)

Dans la résolution des problèmes, il renonce aux triangles chers à Euclide, comme moyen de traiter les situations qui relèvent du théorème de Thalès. Pour lui, l'inégalité triangulaire remplace les cas d'égalité par superposition et la notion d'angle occupe une place centrale.

La première forme ressemblant aux énoncés récents du théorème de Thalès apparaît dans un premier corollaire du premier théorème du Livre X. Ce corollaire représente l'approche *par projection* et se sert de plusieurs parallèles coupées par des sécantes dans une formulation conforme à la *conservation des abscisses*. Voir citation ci-dessus et Figure 4.

14. Plusieurs lignes étant diversement inclinées dans le même espace parallèle, si elles sont toutes coupées par des parallèles à cet espace, elles le sont proportionnellement, c'est-à-dire que chaque toute est à chacune de ses parties telle qu'est la première, ou la deuxième, ou la troisième etc., comme chaque autre toute est à la même partie, première, ou deuxième, ou troisième etc. (Arnauld, Livre X, premier corollaire du premier théorème)

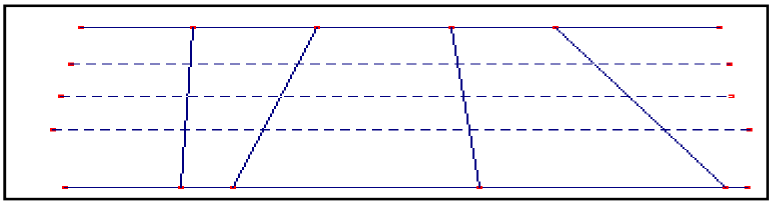


Fig. n° 4. Illustration du premier corollaire du premier théorème du Livre X d'Arnauld.

2.3 Le traité d'Hadamard (1928)

Au début de son ouvrage, Hadamard signale qu'il compte se démarquer d'Euclide en insistant sur les aspects pratiques et intuitifs de l'enseignement de la géométrie. Chez lui, la géométrie est considérée comme plus simple, plus accessible du point de vue du raisonnement et plus concrète que les théories abstraites de l'arithmétique et de l'algèbre. Une importance particulière est accordée à l'étude des figures et des relations qu'elles ont entre elles ce qui explique la fréquence élevée des problèmes de constructions géométriques qui occupent, en particulier, un chapitre entier (chapitre VI) du Livre III. Par ailleurs, la comparaison des figures et l'étude de leurs correspondances sont bien mises en avant en suivant deux méthodes :

- la méthode classique chère à Euclide et qui consiste à appliquer le principe de superposition. Pour cela, apparaît dès l'introduction la définition de deux figures égales comme étant deux figures superposables.

– la méthode « moderne » qui fait appel aux transformations du plan. Ainsi, symétrie orthogonale, rotation et translation sont introduites dès le premier Livre et cohabitent avec les objets traditionnels de la géométrie. Ceci a permis de traiter de nouveaux types de problèmes tels que la recherche des lieux de points. L'auteur indique également dans la préface de son traité que la définition du sens de rotation des angles lui permet de trouver la netteté et la généralité des énoncés proposés tout en conservant leur généralité.

Le premier énoncé du théorème de Thalès est conforme à l'approche *par projection* dans une correspondance de type *conservation des abscisses* :
Deux droites quelconques sont coupées en parties proportionnelles par des droites parallèles. (Hadamard, 1928 : 113, Théorème fondamental)

Le cas général de cet énoncé est préparé par un cas particulier où les segments sur la droite de départ sont égaux. Par rapport à la méthode classique par les aires, la démonstration d'Hadamard présente un nouveau point de vue par rapport à ses prédécesseurs : celui de la continuité et du passage à la limite pour montrer que les rapports de distances sont égaux s'ils sont égaux à $1/n$ près quelque soit n.

A l'instar de la majorité des démonstrations qu'on a repérées dans l'histoire, celle d'Hadamard pose la difficulté du passage du cas des segments commensurables au cas des segments incommensurables. La problématique de l'incommensurabilité fait obstacle à l'enseignement d'une démonstration du théorème de Thalès, puisque les techniques utilisées dans les démonstrations citées ne sont pas au niveau d'un élève de fin de collège ou du début du lycée, et puisqu'au moment où cet enseignement devient possible (en terminale), d'autres outils se substituent au théorème de Thalès, les similitudes notamment.

2.4 Le traité de Choquet

Avec Choquet, des conceptions nouvelles de la géométrie sont mises en place. Ces conceptions profitent de l'algébrisation de la géométrie et marquent l'abandon des traditions héritées d'Euclide et de ses successeurs. Selon Choquet, 23 siècles après Euclide, le plan est défini comme étant un espace affine de dimension 2 muni d'un produit scalaire. L'enseignement de la géométrie aux enfants doit progresser d'une façon qui parte des objets du monde concret qui nous entoure mais qui doit permettre de passer rapidement aux outils souples et féconds de l'algèbre. Dans cette conception, la géométrie est basée sur trois concepts essentiels : parallélisme, perpendicularité et distance. Ces concepts permettent un passage rapide aux structures algébriques du plan et de l'espace.

Dans la progression de l'enseignement de la géométrie entre les phases de l'enseignement, Choquet met l'accent sur la spécificité de la période du collège comme terrain propice d'initiation à l'apprentissage de la démonstration. Selon lui, dans cette période *s'éveillent une véritable soif de logique et une volonté d'apprentissage du raisonnement déductif* pour lesquelles la géométrie d'Euclide est, mal adaptée. En effet, basée sur les notions de longueur, d'angle et de triangle, l'axiomatique d'Euclide, complétée et élaguée par Hilbert, donne beaucoup d'importance aux cas d'égalités des triangles et aux droites remarquables dans un triangle, et cache la structure vectorielle de l'espace.

L'objectif de Choquet est de construire une axiomatique sous-jacente complète à partir d'axiomes simples qui permettent d'aboutir aux structures d'espace vectoriel, du produit scalaire et de ses propriétés. Il essaie « *d'habiller sobrement un squelette logique parfait, mais trop abstrait pour l'enfant pour en faire un être d'aspect familier et accueillant* » (Choquet, 1964).

Choquet critique l'usage abusif que font les enseignants des cas d'égalité des triangles, même dans des cas où la symétrie donne une solution immédiate. Il se propose dans son traité de donner à la symétrie la place qu'elle mérite, sépare les notions métriques et affines et propose au début de son traité des axiomes d'incidence et d'ordre qui, selon lui, doivent figurer dans toute axiomatique raisonnable du plan.

Dans l'axiomatique de Choquet les droites sont vues comme des sous-ensembles du plan. Chaque droite est munie de deux structures : une structure d'ordre et une structure algébrique. Les structures des diverses droites sont reliées entre elles par des axiomes de passage convenables.

Dans le traité de Choquet, le théorème de Thalès perd la place importante qu'il avait dans les traités classiques durant plus de 22 siècles. Un seul énoncé lui est proposé sous forme de lemme. L'énoncé lui-même ne paraît pas comme une fin en soi mais il sert à préparer le corollaire qui suit. Le lemme (18.1) relatif au théorème de Thalès est le suivant:
Soient *D* une droite passant par *O*, et δ une direction distincte de celle de *D*, et φ la projection oblique sur *D* parallèlement à δ. Pour tout $\lambda \in \Re$, $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$. (Choquet, 1964 : Lemme 18.1)

La démonstration du théorème passe par les cas du λ entier, décimal et rationnel. Le passage aux réels est admis.

Dans ce traité, le théorème de Thalès est peu investi. Nous pouvons dire qu'il ne sert qu'à légitimer la relation $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ qui le suit immédiatement ainsi que la linéarité de la projection oblique. Ceci permet de traiter plus tard l'homothétie et la dilatation. La niche écologique de notre concept est renouvelée et nous notons en particulier la disparition dans cette niche, des triangles semblables ainsi que de tous les concepts qui en découlent.

3. Les axiomatiques autour du théorème de Thalès

Dans les traités analysés, le théorème de Thalès a évolué dans des niches écologiques différentes. Deux raisons essentielles font apparaître ou disparaître un élément de l'environnement de notre concept :

- L'évolution des mathématiques et des choix d'ordre protomathématique chez les auteurs, comme celui de la démonstration. Cette évolution a permis de trouver des objets qui n'étaient pas mathématisés à l'époque d'Euclide, comme les vecteurs, l'homothétie, les relations métriques et la trigonométrie, de renouveler les méthodes de démonstration et en particulier de chercher le « vrai ordre de la nature ».
- Le changement des conceptions vis-à-vis de la géométrie : le traité de Choquet en est un bon exemple.

Des traités précédents nous pouvons ainsi distinguer deux axiomatiques qui relèvent de deux types de pensée différents autour du théorème de Thalès :

3.1 L’axiomatique euclidienne

Cette axiomatique, adoptée depuis Euclide et jusqu’à Hadamard, est essentiellement caractérisée par la grande place qu’occupe la figure et par la dominance du raisonnement qui l’emporte sur l’aspect calculatoire. Elle est relative à la géométrie classique à laquelle est ajouté un outil qui la modernise et qui permet une nouvelle perception des figures : les transformations. L’efficacité de cet outil provient du fait que les figures qui apparaissent figées chez Euclide, et qui ne peuvent qu’être découpées, superposées ou reconstruites, vont avoir un aspect *dynamique* et sont considérées dans leur mouvement. Dans cette axiomatique nous pouvons distinguer deux points de vue différents : classique et transformationnel.

3.1.1 Le point de vue classique

L’approche par l’homothétie du théorème de Thalès est privilégiée par rapport à celle de la projection. L’énoncé général se base sur les triangles en montrant l’idée de passage d’un triangle à l’autre et il n’apparaît pas comme une fin en soi : le lien avec les triangles semblables qui le suit immédiatement et plus généralement avec les figures semblables est un point caractéristique de ce point de vue.

Dans la géométrie classique, l’idée des figures semblables est une idée intuitive qui permet de décider si deux figures sont de même forme. Chez certains auteurs, trouver une figure semblable à une figure donnée de grandeur quelconque, plus grande ou plus petite est une notion de première évidence, aussi claire que le principe par superposition : John Wallis (1656) et Lazare Carnot (1803) traitent l’idée de figures semblables comme un postulat de la géométrie euclidienne vu sa clarté et son évidence (Abdeljaouad, 2001). Dans ce point de vue, la cohésion entre Thalès et les triangles semblables prend appui sur les cas d’égalité des triangles et donc sur le principe d’égalité par superposition qui est un principe fondateur de la géométrie chez les grecs. Ce principe qui se base sur un déplacement de figure pour assurer la superposition, fixe des critères d’égalité à partir desquels le mouvement des figures n’est plus utile :
Si, dans l’ouvrage d’Euclide, la démonstration du premier cas d’égalité des triangles fait appel explicitement au principe de l’égalité par superposition et par conséquent au mouvement, l’énoncé de ce premier cas d’égalité permet de se débarrasser du mouvement. (Bkouche, 2000)

3.1.2 Le point de vue des transformations

Dans la deuxième moitié du XIX^{e} siècle, la notion de « mouvement de figures » devient fondamentale et est insérée dans les démonstrations en géométrie marquant ainsi une rupture avec les traditions euclidiennes (Abdeljaouad, 2001). Pour ce point de vue, une première remarque consiste en la dissociation de la cohésion entre Thalès et les triangles semblables. Les triangles semblables sont bannis de la niche écologique du théorème de Thalès et l’approche essentielle de ce dernier est basée sur la *projection*.

Nous pouvons dire qu’une différence essentielle entre les deux points de vue réside dans le changement d’appréhension de la figure : dans la géométrie classique**,** nous regardons les figures comme étant des surfaces et nous les comparons en comparant leurs éléments (angles, côtés), mais ces figures sont statiques. La géométrie des transformations met en avant les droites et les points par rapport aux surfaces et favorise le mouvement et le transfert de propriétés entre des figures. Chasles (1889) définit ce point de vue comme permettant de retrouver les propriétés correspondantes à des propriétés caractéristiques d'une figure de départ par application d'une transformation :

Qu'on prenne une figure quelconque dans l'espace, et l'une de ses propriétés connues ; qu'on applique à cette figure l'un de ces modes de transformation, et qu'on suive les diverses modifications ou transformation qui éprouve le théorème qui exprime cette propriété, on aura une nouvelle figure et une propriété de cette figure qui correspond à celle de la première. (Chasles, 1889 : 268)

3.2 L'axiomatique de l'algèbre linéaire

La seconde axiomatique met en avant l'aspect algébrique du théorème de Thalès. La figure perd sa place et on ne peut trouver qu'une forme unique du théorème. Dans cette axiomatique s'inscrit le traité de Dieudonné qui accentue l'algébrisation de la géométrie présente chez Choquet et minimise tant qu'on peut le recours aux figures.

Le traité de Dieudonné est adressé aux enseignants. L'auteur part de son inquiétude quant à la rupture flagrante qui existe entre les méthodes d'enseignement secondaire et celles du supérieur. Il se propose de renouveler l'enseignement (de son époque) en se référant aux théories récentes. Pour lui, l'enseignement secondaire, loin des résultats des recherches en mathématiques, demeure rattaché essentiellement à la géométrie d'Euclide, à l'algèbre de Viète et de Déscartes avec une faible intervention du calcul infinitésimal qui est limité à la classe terminale. Cet enseignement invite les élèves à penser sur un grand nombre de notions ce qui ne leur permet pas de bien développer des techniques de pensée. Dieudonné recommande de limiter l'apprentissage au lycée à un nombre minimal de notions qui servent à préparer les élèves au futur et à leur apprendre des moyens de réflexion.

La géométrie basée sur l'algèbre linéaire se propose donc de remplacer l'ancien système d'axiomes par un système équivalent, plus simple et mieux adapté à un débutant. Avec un traité sans figures, Dieudonné se propose de planifier les thèmes d'enseignement de géométrie du collège au lycée et se centre sur les deux ou trois années terminales du lycée. Il explique que sans figures on peut s'en sortir et recommande de libérer, dès que possible, les élèves des figures traditionnelles (à l'exception du point, droite et plan) et de les initier à l'apprentissage des transformations géométriques du plan et de l'espace.

Selon l'auteur, dans les premières années du lycée, on doit apprendre aux élèves aussi bien les expériences géométriques que les outils de raisonnement qui leur permettent d'apprendre à déduire d'une proposition donnée d'autres aussi importantes. Pour y parvenir, il s'oppose à l'idée que, sous le prétexte que les axiomes de l'algèbre linéaire ont un niveau d'abstraction qui dépasse les capacités des élèves, nous devons faire le détour de Hilbert par un système d'axiomes qui leur soit plus accessible. Ce phénomène n'est autre qu'un « attachement sentimental » à la géométrie d'Euclide dont l'influence chez les spécialistes en mathématiques est encore remarquable.

Familiariser progressivement l'élève aux axiomes de l'algèbre linéaire lui permet de se préparer à accepter la construction de « l'édifice algébrico-géométrique » dont les propriétés pourraient être facilement vérifiées expérimentalement.

Le traité de Dieudonné se propose de montrer que, selon la méthode de l'algèbre linéaire, toute la géométrie euclidienne est indépendante de la mesure d'angle. Des théorèmes classiques tels que le théorème de Pythagore, la similitude et la trigonométrie, sont déduits des résultats de la géométrie affine. Dans ce traité, l'auteur fixe un ensemble d'axiomes relatifs à la géométrie plane euclidienne. Il suit une méthode axiomatique qu'il définit comme étant une méthode qui « *consiste à énumérer de façon exhaustive les propriétés que l'on veut admettre touchant les objets étudiés (les « axiomes ») et que l'on s'interdit ensuite de faire appel à autre chose qu'à ces propriétés et aux règles de la logique » (p.21)*.

Pour les concepts en relation avec le théorème de Thalès, les translations, les applications linéaires (ou homothéties linéaires) et les applications multilinéaires et affines (composée d'une translation et d'une application linéaire) sont définies après avoir introduit les espaces vectoriels et les espaces affines. Viennent ensuite les homothéties affines. Les propriétés de la géométrie euclidienne plane (produit scalaire, espace euclidien, norme, distance) se déduisent des propriétés de la géométrie affine plane (bases, matrices, vecteurs linéairement dépendants, libres, déterminant). Les vecteurs orthogonaux permettent d'introduire le théorème de Pythagore et la notion d'angle découle de la définition d'une rotation et débouche sur la définition du cosinus et du sinus d'un angle. Dans la géométrie de Dieudonné, les axiomes de départ font disparaître des éléments de base de la géométrie classique tels que les triangles superposables. Des outils fondamentaux dans la résolution des problèmes de géométrie d'autrefois deviennent ici des conséquences d'autres résultats basés sur les espaces vectoriels. Chez Dieudonné, nous notons en particulier que ce tourbillon *fait disparaître le théorème de Thalès* qui est une conséquence immédiate de la relation $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$ qui est l'axiome de distributivité de la multiplication d'un scalaire par rapport à l'addition des vecteurs.

Conclusion

Pour revenir à l'origine de la géométrie, Gonseth (1926) précise qu'elle « s'est constituée en science abstraite ». A côté de son caractère abstrait, nous pouvons dire que la géométrie d'Euclide, a montré les critères de rigueur, d'exhaustivité et d'enchaînement logique que peut apporter cette science. Les successeurs d'Euclide ont proposé des travaux de géométrie qui diffèrent du point de vue de la place accordée à l'intuition et plus généralement au monde « sensible » par rapport à celle de la rigueur ou du monde abstrait. Dans ce cadre, citons les travaux de Hilbert à la fin du XIX^{e} siècle sur « les fondements de la géométrie » qui, s'inspirant des conceptions de l'imaginaire et de l'idéal dont il rappelle la merveilleuse fécondité, traite la géométrie à partir d'un système complet d'axiomes et élabore une géométrie nouvelle basée sur l'abstraction dans laquelle le raisonnement mathématique ne repose plus sur les objets concrets mais sur les relations entre ces objets.

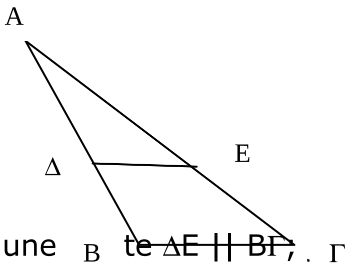
En géométrie, ces deux composantes (le concret et la rigueur) nous paraissent en concurrence continue. Le monde concret trouve sa légitimité dans notre besoin des mathématiques en tant qu'outils. Depuis des siècles, cette science a permis de résoudre des problèmes de la vie courante dont un exemple typique est celui du théorème de Thalès qui semble être issu d'une pratique sociale permettant de mesurer des longueurs inaccessibles. Le monde abstrait trouve son fondement dans la décontextualisation des problèmes et le détachement du monde réel dans lequel le domaine de validité est limité, pour chercher à identifier les relations entre les différentes données. Le monde des mathématiques est lui-même un objet d'étude. Dans l'enseignement du théorème de Thalès, il nous semble important de tenir compte de cette variété d'énoncés qui peuvent apparaître sous cette même appellation. Nous pensons que réduire le théorème de Thalès à un aspect unique, comme celui du triangle, cache le véritable rôle que ce concept a joué dans l'histoire comme charnière entre des types de pensées différents de la géométrie.

Annexe

Proposition 2 Livre VI (Euclide, édition 1993)

La parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les autres côtés des parties proportionnelles ; et si une sécante coupe les deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, cette sécante est parallèle au troisième côté du triangle.

Démonstration



Soit le triangle ABΓ et une te ΔE || BΓ; is que l'on a: BΔ: ΔA = ΓE: EA

Joignons les droites BE et ΓΔ. Les triangles BΔE et ΓΔE sont égaux, car ils ont la même base ΔE, et sont situés entre les mêmes parallèles ΔE et BΓ (I.38)

AΔE étant un autre triangle quelconque, nous avons: (BΔE) : (AΔE) = (ΓΔE) : (AΔE) (V.7) car les grandeurs égales à une même troisième ont même rapport.

Mais (BΔE) : (AΔE) = BΔ : ΔA (VI.1) car ces triangles ont la même hauteur, la perpendiculaire à AB issue du point E; ils sont donc dans le rapport de leurs bases.

Pour la même raison, nous avons (ΓΔE) : (AΔE) = ΓE: EA, d'où BΔ : ΔA = ΓE : EA (V.11).

Supposons maintenant que les côtés AB et AΓ du triangle ABΓ ont été partagés en parties proportionnelles vérifiant la relation précédente et joignons la droite ΔE; je dis que ΔE || BΓ. En effet, par la même construction, puisque BΔ : ΔA = ΓE : EA, BΔ : ΔA = (BΔE) : (AΔE) et ΓE : EA = (ΓΔE) : (AΔE) (VI.1), nous avons (BΔE) : (AΔE) = (ΓΔE) : (AΔE) (V.11). Ainsi chacun des triangles BΔE et ΓΔE a le même rapport au triangle AΔE. Par conséquent, les triangles BΔE et ΓΔE sont égaux, et ils ont la même base ΔE (V.9). Mais triangles égaux sur la même base sont aussi entre les mêmes parallèles (I.39). D'où ΔE || BΓ.

Bibliographie

ABDELJAOUAD, M. (2001). Les triangles semblables… ces mal- aimés, *Miftah al Hissab*, n° 96-97, Tunis.

ARNAULD, A. (1667). *Nouveaux éléments de géométrie*. Paris : Charles Savreux, Paris.

ARNAULD, A., NICOLE, P., (1995). 'La logique de Port-Royal'. In *Autour de Thalès* (1995), Bulletin Inter-IREM, Commission premier cycle.

BKOUCHE, R. (2000)., 'Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles »'. Bulletin de l'APMEP, n° 430, p. 617.

BKOUCHE, R. (1995)., 'Autour du théorème de Thalès : variation sur les liens entre le numérique et le géométrique'. In "Autour de Thalès'", Bulletin Inter-IREM, Commission premier cycle, p 7-67.

BROUSSEAU, G. (1995). 'Promenade avec Thalès, de la Maternelle à l'Université'. In *Autour de Thalès*, Bulletin Inter-IREM, Commission premier cycle, p 87-124.

CHASLES, M. (1889). *Aperçu historique des méthodes en géométrie*. Paris : Gauthier-Villars.

CHOQUET, G. (1964). *L'enseignement de la géométrie*. Paris : Hermann.

DIEUDONNE J. (1964). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris : Hermann.

Duperret, J. C. (1995). 'Pour un Thalès dynamique'. In *Autour de Thalès*, Bulletin Inter-IREM, Commission premier cycle, p 125-144.

EUCLIDE (1993). *Les œuvres d'Euclide*. Traduites littéralement par F. Peyrard. Nouveau tirage argumenté d'une importante introduction par M. Jean Itard. Librairie Scientifique et Technologique Albert Blanchard. Paris, 1993.

GONSETH, F. (1926). *Les fondements des mathématiques – De la géométrie d'Euclide à la relativité générale et à l'intuitionnisme de Brouwer*. Paris : Blanchard.

HADAMARD, J. (1928). *Leçons de géométrie élémentaire*. *10e édition*, Paris : Armand Colin et Cie.

SLIM MRABET

Institut Supérieur de l'Education
et de la Formation Continue de Tunis

mrabet_slim@yahoo.fr