



TITRE: MODIFICATION DE L'APPRENTISSAGE DES ÉLÈVES EN MODIFIANT LES MATHÉMATIQUES À ENSEIGNER : LE CAS DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES EN FRANCE

AUTEURS: MEGHERBI DJAMILA ET ARTAUD MICHÈLE

PUBLICATION: ACTES DU HUITIÈME COLLOQUE DE L'ESPACE MATHÉMATIQUE FRANCOPHONE – EMF 2022

DIRECTEUR: ADOLPHE COSSI ADIHOUE, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE (CANADA/BÉNIN) AVEC L'APPUI DES MEMBRES DU COMITÉ SCIENTIFIQUE ET DES RESPONSABLES DES GROUPES DE TRAVAIL ET PROJETS SPÉCIAUX

ÉDITEUR: LES ÉDITIONS DE L'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

ANNÉE: 2023

PAGES: 719 - 732

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Modification de l'apprentissage des élèves en modifiant les mathématiques à enseigner : le cas des fonctions trigonométriques en France

MEGHERBI¹ Djamila – ARTAUD² Michèle

Résumé – Ce que les élèves apprennent sur un thème donné dépend du contenu mathématique qui leur est enseigné. Or ce dernier n'est que très partiellement fixé par le programme et dépend du processus de transposition didactique *stricto sensu*, soit de la détermination par les professeurs d'une praxéologie mathématique à enseigner. C'est ce point que nous illustrerons à propos de l'enseignement des fonctions trigonométriques en classe de première en France.

Mots-clefs : Théorie anthropologique du didactique, praxéologie mathématique à enseigner, rapport en position d'élève, apprentissage, fonctions trigonométriques.

Abstract – What students learn depends on the mathematical content taught to them. However, the latter is only very partially fixed by the curriculum and depends on the process of didactic transposition strictly speaking, i.e., on the teachers' determination of a mathematical praxeology to be taught. This is the point we will illustrate in relation to the teaching of trigonometric functions in France (16-17 years old students).

Keywords: Anthropological Theory of the Didactic, mathematical praxeology to be taught, relation in student position, learning, trigonometric functions.

1. Lycée international Alexandre Dumas, Algérie, latmas@hotmail.com

2. Aix Marseille Université, France, michele.artaud@univ-amu.fr

Notre communication prend appui sur un travail de recherche mené lors du master 2 de didactique des mathématiques de l'université d'Aix-Marseille (Megherbi, 2021) qui s'intéressait à la question suivante : la trigonométrie du triangle peut-elle favoriser l'introduction des fonctions sinus et cosinus ou au contraire constitue-t-elle un obstacle à cette introduction ? En effet, parmi les travaux s'intéressant à la trigonométrie, certains s'interrogent sur le rôle fondamental accordé au cercle trigonométrique par les programmes, les manuels et les enseignants, comme par exemple celui de Ratha Loeng (2019) ; d'autres (Proulx, 2003 ; Groupe didactique des maths IREM d'Aquitaine, 2016 ; Nguyen Thi, 2011 ; Espindola & Trgalova, 2020) s'intéressent à des facteurs épistémologiques liés à des connaissances des programmes et des contenus des examens. Mais la plupart soulignent que le passage de la trigonométrie géométrique, introduite au collège dans le cadre du triangle rectangle, à celle de l'analyse étudiée au lycée paraît un point de difficulté sans qu'une praxéologie adaptée permettant de la surmonter ne se dégage clairement des travaux cités. Cette étude, menée dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992 & 2019), nous a conduites à nous intéresser aux apprentissages des élèves sur la trigonométrie et à proposer un parcours d'étude et de recherche pour la classe de première en France (élèves de 16-17 ans) de nature à améliorer ces apprentissages. Nous présenterons ici des éléments de ce travail qui mettent en évidence la dépendance de ces apprentissages relativement aux praxéologies (Chevallard, 1999) des enseignants, et notamment celles qui sont relatives à la préparation de la matière mathématique à enseigner – ce qui a trait au processus de transposition didactique. En effet, si les organisations de l'étude mises en place par les enseignants conditionnent le rapport en position d'élève – soit ce que les élèves ont appris –, ces organisations de l'étude dépendent notamment de la détermination des praxéologies mathématiques qui doivent être étudiées. Compte tenu de l'illusion de la transparence du savoir mise en évidence par la théorie de la transposition didactique, ces praxéologies ne peuvent être considérées comme allant de soi.

La trigonométrie dans les programmes français

Historiquement la trigonométrie est apparue pour les besoins de l'astronomie, dans le but de prédire des phénomènes astronomiques réguliers. Son origine est attribuée à l'astronome grec Hipparque qui a vécu au II^e siècle avant J.C, auquel on doit, semble-t-il, les premières tables trigonométriques (calcul de sinus, de cosinus et tangente d'un angle) et la mise au point d'une méthode pour mesurer le rapport des distances entre la terre, la lune et le soleil. Dans l'encyclopédie due à Denis Diderot (1713-1784) et Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), ce dernier définit la trigonométrie comme « l'art de trouver les parties inconnues d'un triangle par le moyen de celles qu'on connaît » (Diderot & D'Alembert, 1751, p. 640). C'est bien la démarche qui est demandée aux élèves du collège, comme en témoigne le programme du cycle 4 (élèves de 12-15 ans) qui, dans les connaissances du thème « utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer », cite les « lignes trigonométriques dans le triangle rectangle : cosinus, sinus, tangente » (MEN, 2020).

Mais au lycée, ce sont les fonctions trigonométriques qui sont introduites – fonctions qui sont apparues au XVIII^e siècle et dont la première synthèse semble due à Leonhard Euler, qui les introduit par le biais de leur développement en série (Euler, 1748). En effet, le domaine de l'analyse du programme de spécialité mathématique de première comprend un thème « fonctions trigonométriques » dont on reproduit le contenu ci-dessous :

Fonctions trigonométriques.

Contenus

- Cercle trigonométrique, Longueur d'arc, Radian ;
- Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique, Image d'un nombre réel ;
- Cosinus et sinus d'un nombre réel, Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle, Valeurs remarquables ;
- Fonctions cosinus et sinus, Parité, Périodicité, Courbes représentatives.

Capacités attendues

- Placer un point sur le cercle trigonométrique
- Lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique ;
- Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques ;
- Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de x , les cosinus et sinus d'angles associés à x .

Démonstration

- Calcul de : $\sin \pi/4$; $\cos \pi/3$; $\sin \pi/3$.

Exemple d'algorithme

- Approximation de π par la méthode d'Archimède. (MEN, 2019, p. 10-11)

Le thème est présenté ainsi dans l'introduction du domaine :

Les fonctions trigonométriques font l'objet d'une première approche, d'un point de vue principalement graphique, en lien avec les autres disciplines scientifiques. C'est aussi l'occasion de rencontrer la notion de fonction périodique, également utile dans les sciences sociales (variations saisonnières). (*Ibid.*, p. 8)

Et il fait l'objet du commentaire suivant dans la rubrique « Histoire des mathématiques » :

La trigonométrie a été utilisée chez les Anciens dans des problèmes de natures diverses (Géométrie, géographie, astronomie). Elle est à l'époque fondée sur la fonction corde, d'un

manièrement bien moins facile que les fonctions sinus et cosinus de la présentation actuelle.
(*Ibid.*, p. 9)

On voit donc apparaître dans le programme seulement les deux types de tâches suivants : « Placer un point sur le cercle trigonométrique » et « Déterminer, pour des valeurs remarquables de x , les cosinus et sinus d'angles associés à x ». On pourrait y ajouter un autre type de tâches, implicitement présent, qui est la détermination de l'image d'un nombre par le procédé d'enroulement de la droite sur le cercle. En revanche, l'environnement technologique est plus riche. On y trouve pêle-mêle les notions de cercle trigonométrique, longueur d'arc, radian, enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique, cosinus et sinus d'un nombre réel, fonctions cosinus et sinus, parité, périodicité, courbes représentatives. Il s'agit aussi d'établir certaines valeurs remarquables, de s'appuyer sur le sinus et le cosinus d'un angle dans le triangle rectangle pour produire la notion de cosinus et sinus d'un nombre réel, etc.

Cela laisse beaucoup de latitude au professeur dans la construction d'une praxéologie mathématique à enseigner relative aux fonctions trigonométriques. Nous avons donc cherché à avoir une vision plus nette de cette praxéologie trigonométrique à enseigner à travers l'étude de manuels scolaires.

La trigonométrie dans les manuels de première

Nous avons étudié quatre manuels, en analysant les parties qui permettent de délimiter l'organisation mathématique : les pages de cours et savoir-faire ainsi que les corpus d'exercices. Nous débuterons par le manuel de la collection *Décllic* (Beltramone & *al.*, 2019). Les fonctions trigonométriques font l'objet d'un chapitre, le septième et dernier du domaine « Fonctions et suites numériques » occupant quelques 28 pages. Le « cours » est scindé en trois parties :

1. Enroulement sur le cercle ;
2. Cosinus et sinus d'un nombre réel ;
3. Fonctions cosinus et sinus,

chacune occupant une page à laquelle renvoie une page « Méthode ». On trouve dans les pages « Méthode », sans surprise, les types de tâches « Placer un point sur le cercle trigonométrique » (*Ibid.*, p. 213) et « Déterminer les cosinus et sinus des valeurs remarquables » (*Ibid.*, p. 215). La troisième méthode (*Ibid.*, p. 217) est intitulée « Lier les courbes des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique ». L'énoncé proposé aboutit à la production du tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle $[0, 2]$ ainsi que du tableau de signes de cette même fonction sur le même intervalle. On a donc affaire ici à la réalisation d'un épisode du moment technologico-théorique, dont on pourrait discuter la pertinence de l'articulation avec le cours figurant en regard. La partie « j'applique » comporte le même travail à propos de la fonction cosinus, ajouté à deux autres énoncés. Le premier demande une évaluation de l'assertion « Pour tout réel x , $\cos x$ et $\sin x$ sont de même signe », tandis

que le second est un « vrai-faux » portant sur la comparaison de deux cosinus d'un nombre ou de deux sinus d'un nombre.

Les exercices permettent d'ajouter trois types de tâches relatifs aux fonctions trigonométriques elles-mêmes : « établir la parité ou la périodicité d'une fonction trigonométrique », « associer des expressions algébriques de fonctions trigonométriques à leurs courbes représentatives » et « tracer la courbe représentative d'une fonction trigonométrique » qui apparaît principalement comme sous-type de tâches des deux précédents.

Les auteurs du deuxième manuel étudié, celui de la collection *Barbazo* (Barbazo & Barnet, 2019), attribuent le premier chapitre du domaine analyse aux fonctions trigonométriques : le chapitre comporte 32 pages. La première partie du cours « Lecture sur le cercle trigonométrique » introduit dans l'environnement technologico-théorique les définitions et propriétés classiques (cercle trigonométrique, longueur d'arc, radian) à réinvestir dans la partie « Enroulement de la droite des réels » et « sinus et cosinus d'un nombre réel ». La quatrième partie « Fonctions sinus et cosinus » complète et enrichit cet environnement technologico-théorique par l'introduction de la définition des fonctions sinus et cosinus et de leurs représentations graphiques, ainsi que la définition de la périodicité d'une fonction trigonométrique et des propriétés de périodicité et de parité des fonctions sinus et cosinus. A chaque partie du cours est associée une page d'exercices résolus. Comme on peut le prévoir, on retrouve les types de tâches : « Placer un point sur le cercle trigonométrique » (*Ibid.*, p. 85) et « Déterminer les cosinus et sinus des valeurs remarquables » (*Ibid.*, p. 87). Ils sont accompagnés de deux autres types de tâches figurant dans la première partie du cours, « Calculer la longueur d'un arc » (*Ibid.*, p. 83) et « Déterminer la mesure en radian d'un angle dont on connaît la mesure en degré et inversement » (*Ibid.*, p. 83). Dans la quatrième partie du cours (*Ibid.*, p. 89) nous rencontrons le type de tâches « Résoudre une équation trigonométrique d'inconnue x de la forme $\cos x = a$ ou $\sin x = a$; sur un intervalle », le spécimen proposé étant relatif à la fonction cosinus sur l'intervalle $[0; 2\pi[$. La solution commentée propose d'utiliser la courbe représentative de la fonction cosinus, de tracer la droite d'équation $y = a$ et de faire une résolution graphique de l'équation. Cet énoncé renvoie vers l'exercice 28 (*Ibid.*, p. 102) où il est demandé de réaliser le même type de tâches à propos de la fonction sinus sur l'intervalle $]-\pi; \pi[$ et de contrôler le résultat obtenu en exploitant le cercle trigonométrique. On y trouve aussi les types de tâches « Étudier la périodicité d'une fonction trigonométrique » et « Montrer qu'une fonction est paire ou impaire » avec le même format – c'est-à-dire un exercice résolu qui renvoie vers un exercice comportant le même type de tâches. Deux pages « Démonstrations et raisonnement » clôturent le cours dans lesquelles trois points sont présents : comprendre une démonstration, rédiger une démonstration et utiliser différents raisonnements (*Ibid.*, p. 90). Là encore aucun des types de tâches demandé nécessite de manipuler les fonctions sinus ou cosinus. La partie exercices est répartie en quatre sections dont les trois premières, comportant 61 exercices, se voient attribuées des termes empruntés à la musique pour indiquer le tempo : *Va piano* ; *moderato* ; *allegro*, la quatrième partie se voyant attribuer l'intitulé « vers l'épreuve écrite ». L'examen de cette partie révèle 12 exercices sur 77 qui mettent en jeu des types de tâches faisant appel à des techniques justifiées par

les fonctions trigonométriques. L'exercice 28 (*Ibid.*, p. 102), nous l'avons dit plus haut, relève du type de tâches « Résoudre une équation trigonométrique d'inconnue de la forme $\cos x = a$ ou $\sin x = a$ sur un intervalle ». Il en va de même de l'exercice 30 (*Ibid.*, p. 102). L'exercice 29 (*Ibid.*, p. 102) demande quant à lui de résoudre sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ une inéquation d'inconnue de la forme $\cos x \geq a$ en s'aidant de la représentation graphique donnée de la fonction cosinus et en contrôlant le résultat obtenu avec le cercle trigonométrique. L'exercice 31 (*Ibid.*, p. 102) concerne également la résolution d'inéquations trigonométriques mais, bien qu'il se trouve dans la rubrique « Fonctions sinus et cosinus », il est demandé d'utiliser le cercle trigonométrique. L'exercice 32 (*Ibid.*, p. 102) demande de faire des conjectures sur la parité et la périodicité de fonctions à partir de leur représentation graphique. L'objet des exercices 33, 34 et 35 (*Ibid.*, p. 102) est d'établir la parité et la périodicité de fonctions trigonométriques définies par leur expression algébrique, l'un d'entre eux nécessitant de représenter la fonction à la calculatrice pour conjecturer sa période. On peut donc ajouter aux types de tâches identifiés dans l'ouvrage précédent les cinq suivants : « Calculer la longueur d'un arc de cercle », « Déterminer la mesure en radian d'un angle dont on connaît la mesure en degré et inversement », « Résoudre une équation trigonométrique d'inconnue x de la forme $\cos x = a$ ou $\sin x = a$ sur un intervalle », « Résoudre une inéquation d'inconnue x de la forme $\cos(x) < a$, $\cos(x) \leq a$ » et « Transformer des expressions trigonométriques ». La considération du programme de la spécialité mathématique de terminale laisse penser que la résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques ne fait pas partie de l'organisation mathématique à enseigner en classe de 1^{re} puisqu'elle figure dans les capacités attendues en terminale – sauf à employer les techniques graphiques dont les élèves disposent depuis la seconde et qui font donc partie du milieu pour l'étude.

Dans le manuel de la collection *Variations* des éditions Hatier (Roland & Darthos, 2019), le troisième que nous avons étudié, le chapitre « fonctions trigonométriques » est le quatrième et dernier chapitre du domaine analyse. Le cours est organisé autour de trois objectifs, chacun étant associé à un savoir-faire. On retrouve pratiquement le même environnement technologico-théorique que précédemment : cercle trigonométrique, tableau des valeurs remarquables, définitions du sinus et du cosinus d'un nombre réel, tableau de variations des fonctions sinus et cosinus ainsi que leurs courbes représentatives. On note cependant que le radian est introduit comme nouvelle unité de mesure d'angle par le biais d'une petite annotation dans la marge :

Lorsque le nombre réel α appartient à l'intervalle $[0; 2\pi]$, la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ au centre est proportionnelle à la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$. On dit aussi que l'angle $\widehat{IOM}$ mesure α radians. Le radian est une nouvelle unité d'angle. (Roland & Darthos, 2019, p. 192)

Les trois pages de savoir-faire comportent un exercice résolu et des « applications directes ». Se repérer sur le cercle trigonométrique est le savoir-faire associé au premier objectif « exploiter le cercle trigonométrique » ; déterminer le cosinus et le sinus d'un nombre réel est le type de tâches relatif à l'objectif 2, « définir le cosinus et le sinus d'un nombre réel » ; et le savoir-faire « traduire graphiquement la parité et la périodicité » pour le troisième objectif « étudier les fonctions trigonométriques ». On y

retrouve les types de tâches « placer sur le cercle trigonométrique un point associé à un réel donné », « déterminer le cosinus et le sinus d'un nombre réel » et « déterminer la périodicité et la parité d'une fonction trigonométrique » auxquels on peut ajouter « compléter sur l'intervalle J la courbe représentative d'une fonction trigonométrique donnée sur I inclus dans J ». La partie « exercices » commence par « les incontournables » (*Ibid.*, p. 201) pour vérifier que l'on maîtrise les savoir-faire contenant dix exercices, dont deux impliquant des types de tâches relatifs aux fonctions trigonométriques et mobilisant principalement les ingrédients technologiques pour compléter une assertion ou déterminer sa véracité. On y trouve ensuite 46 exercices classés sous les rubriques des objectifs du cours et rangés dans le même ordre. En ce qui concerne l'étude des fonctions trigonométriques, 14 exercices sont proposés et dans lesquels il s'agit principalement d'émettre des conjectures quant à la parité ou la périodicité de la fonction représentée et de les justifier. On note un ou deux exemplaires de « tracer la représentation graphique d'une fonction trigonométrique », « établir le tableau de variations d'une fonction trigonométrique » et « associer des expressions algébriques de fonctions trigonométriques à leurs courbes représentatives ».

Le dernier ouvrage que nous avons considéré est celui édité par *lelivrescolaire.fr* (De Sousa, 2019). La trigonométrie fait l'objet de deux chapitres, les 4^e et 5^e du domaine analyse, occupant un total de 43 pages. La seule différence notable avec les ouvrages précédents réside dans le fait que le chapitre sur les fonctions trigonométriques est structuré ainsi :

1. Définitions et premières propriétés
2. Fonctions cosinus et sinus ;
3. Courbes représentatives.
4. Etude des fonctions trigonométriques
5. Dérivées ;
6. Tableaux de signes et variations.

La dérivation des fonctions trigonométriques est nettement hors du programme de première puisqu'elle fait partie des contenus du programme de la spécialité de terminale. Cette « sortie de route » conduit les auteurs à donner, dans la rubrique « application et méthode », l'exercice suivant :

On considère la fonction $g: x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$

Donner l'ensemble de définition de g .

Dresser le tableau de variations de g sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. (*Ibid.*, p. 209)

Sa résolution est accompagnée de la méthode ci-après :

On identifie les fonctions de référence en jeu : ici, la fonction inverse et la fonction cosinus.

La fonction inverse étant définie pour tout réel non nul, il suffit d'écarter les zéros de la fonction cosinus ; c.à.d. x vérifiant $\cos(x) = 0$.

Une fois les valeurs interdites déterminées, la fonction g est alors définie pour tous les réels excepté ces valeurs.

On calcule la dérivée et on détermine son signe en faisant attention aux valeurs interdites.

On définit les variations de g à partir du signe de la dérivée. (*Ibid.*, p. 209)

On a là, nous semble-t-il, un effet classique d'un changement de programme qui, à la fois, enlève certaines notions et n'explique pas suffisamment la nouvelle organisation praxéologique à enseigner, ce qui conduit les auteurs à dépasser les frontières du programme faute d'arriver à compléter de façon substantielle l'organisation mathématique en restant dans les contours fournis par le programme. On notera à cet égard que la stratégie des auteurs de l'ouvrage de la collection *Barbazo*, consistant à faire de la trigonométrie le premier chapitre de l'analyse, permet à la fois de faire du neuf en introduisant deux nouvelles fonctions et la notion de périodicité, tout en réinvestissant les acquis de la classe de seconde sur l'étude des fonctions et la résolution d'équations et d'inéquations. Mais cela se heurte à une contrainte temporelle du niveau de la discipline puisque les fonctions trigonométriques sont l'un des chapitres qui ne figurent pas au programme de l'épreuve du baccalauréat passée par les élèves de première ne prenant pas la spécialité mathématique en terminale – épreuve abandonnée au profit du contrôle continu à partir de la rentrée 2022.

Praxéologie mathématique à enseigner

Nous l'avons vu, les ouvrages suivent la présentation du programme et scindent la praxéologie mathématique à enseigner en deux parties : une première autour du cercle trigonométrique permettant de définir le cosinus et le sinus d'un nombre réel ; une seconde autour de la définition des fonctions sinus et cosinus comme procédé associant à un nombre réel le cosinus ou le sinus de ce nombre, ainsi que les propriétés de parité de périodicité de ces fonctions. Cela met en évidence que le processus de transposition didactique n'a pas vraiment pris en compte le fait que l'on soit dans le domaine des fonctions et plus dans le domaine de la géométrie : bien que l'on traite l'enroulement de la droite des réels sur le cercle, le cercle trigonométrique matérialise le cosinus d'un angle comme le rapport de deux longueurs. Si l'introduction des fonctions passe par le cercle trigonométrique, le rapport créé disqualifie très fortement la notion de fonction : de fait ce rapport au cercle trigonométrique va gêner l'existence de la notion de fonction puisque l'on reste sur les angles, et les élèves ont peu de chance de se saisir de la notion de fonction qui à un nombre associe un nombre. Ceci a motivé la

constitution d'une praxéologie mathématique amalgamant les deux organisations mathématiques proposées par le programme : nous avons développé l'environnement technologico-théorique principalement autour des fonctions cosinus et sinus, d'une part pour améliorer l'existence des fonctions trigonométriques en augmentant le nombre de type de tâches dont la technique est produite ou justifiée par les fonctions trigonométriques et leurs propriétés ; d'autre part, pour pouvoir construire les fonctions cosinus et sinus directement à partir du sinus et cosinus d'un angle et ainsi mettre en évidence l'apport et la raison d'être mathématique des fonctions trigonométriques.

Nous en explicitons ci-après quelques éléments pour donner une idée plus précise du changement de rapport que cette praxéologie mathématique permet de créer. Elle comprend six types de tâches :

T_{IM} : Calculer l'image d'un nombre par la fonction sinus ou cosinus.

T_{per} : Déterminer la période d'une fonction trigonométrique.

T_{par} : Déterminer la parité d'une fonction trigonométrique.

T_{m} : Déterminer la mesure en radian d'un angle dont on connaît la mesure en degré et réciproquement.

T_{r} : Déterminer la mesure en radian d'un angle dont on connaît la mesure en degré ; Déterminer la mesure en degré d'un angle dont on connaît la mesure en radian,

T_{point} : Placer sur le cercle trigonométrique l'image d'un réel par le procédé d'enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique.

$T_{\text{réel}}$: Etant donné un point sur le cercle trigonométrique, déterminer les réels dont il est l'image par le procédé d'enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique.

Voici les techniques correspondant aux deux types de tâches T_{IM} et $T_{\text{réel}}$:

T_{IM} : Si l'on connaît son image, par l'autre fonction, calculer $\sqrt{1 - y^2}$; vérifier en calculant l'image à la calculatrice.

Sinon, représenter graphiquement la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus. Placer les valeurs remarquables $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$ et leurs images.

Si x est de la forme $\frac{a\pi}{2}, \frac{b\pi}{4}, \frac{c\pi}{3}$ ou $\frac{d\pi}{6}$, avec a, b, c et d entiers naturels, regarder si x appartient à $[0; 2\pi]$; sinon s'y ramener en enlevant un multiple de 2π soit $2k\pi$ avec k entier naturel pour obtenir y dans $[0; 2\pi]$ tel que $x = y + 2k\pi$.

Si x ou y dans $[0; \frac{\pi}{2}]$ lire la valeur sur la courbe ; sinon regarder dans quel intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$; $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$; $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ se situent x ou y , placer x ou y sur l'axe des abscisses et lire la valeur de

son image sur la courbe représentative. Vérifier en plaçant le point A de coordonnées $(\cos(x); \sin(x))$ ou $(\cos(y); \sin(y))$ sur le cercle trigonométrique et en contrôlant que l'angle $\widehat{IOA}$ mesure x rad ou y rad ; puis en entrant $\cos(x)$ ou $\cos(y)$ ou $\sin(x)$ ou $\sin(y)$ à la calculatrice en mode radian.

Si x est de la forme $-\frac{a\pi}{2}; -\frac{b\pi}{4}; -\frac{c\pi}{3}$ et $-\frac{d\pi}{6}$, a, b, c, d entiers naturels, déterminer $\cos(-x)$ ou $\sin(-x)$.

Sinon, déterminer une valeur approchée en entrant $\cos(x)$ ou $\cos(y)$ ou $\sin(x)$ ou $\sin(y)$ à la calculatrice en mode radian et contrôler avec la courbe représentative. Vérifier en plaçant le point A de coordonnées $(\cos(x); \sin(x))$ ou $(\cos(y); \sin(y))$ sur le cercle trigonométrique et en contrôlant que l'angle $\widehat{IOA}$ mesure x rad ou y rad.

$\tau_{\text{réel}}$: Représenter graphiquement la courbe représentative de la fonction cosinus et de la fonction sinus. Placer les valeurs remarquables : $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$ et leurs images.

Déterminer graphiquement les antécédents de a dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ par la fonction cosinus et ceux de b dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ par la fonction sinus.

Choisir l'antécédent commun de a et de b , x et écrire que les réels cherchés sont les réels de la forme, $x+2k\pi$ où k est un entier relatif.

Placer le point M sur le cercle et vérifier x que est la mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$.

Ces techniques matérialisent le changement d'environnement technologico-théorique que nous avons signalé, en mettant les fonctions, par le biais de leur courbe, comme principal ingrédient permettant de produire les techniques.

La définition des fonctions sinus et cosinus repose sur l'organisation mathématique étudiée au collège et sur la notion de périodicité, qui fait partie de cette définition.

La fonction cosinus est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π : pour tout x réel, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ Elle est définie sur $[0; 2\pi]$ par :

$$\cos x = \begin{cases} \cos(x \text{ rad}) & \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ -\sin\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ rad}\right) & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \\ -\cos((x - \pi) \text{ rad}) & \text{si } x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \\ \sin\left(\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \text{ rad}\right) & \text{si } x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \end{cases}$$

La fonction sinus est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π : pour tout x réel, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. Elle est définie sur $[0; 2\pi]$ par :

$$\sin x = \begin{cases} \sin(x \text{ rad}) & \text{si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ rad}\right) & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \\ -\sin((x - \pi) \text{ rad}) & \text{si } x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \\ -\cos\left(\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \text{ rad}\right) & \text{si } x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \end{cases}$$

Vers la question de l'organisation de l'Étude

La modification de l'apprentissage des élèves concernant les fonctions trigonométriques passe ainsi par une modification de l'organisation mathématique à enseigner : compte tenu des conditions et des contraintes prévalant dans le système scolaire français, cette modification est à la charge de la position de professeur. Bien entendu, l'apprentissage des élèves est également conditionné par l'organisation de l'étude constituée pour mettre en place l'organisation mathématique à enseigner. Ce que nous avons explicité met en évidence certains ingrédients relatifs au temps didactique, et notamment le fait de traiter le cercle trigonométrique après avoir introduit les fonctions trigonométriques. Dans le mémoire (Megherbi, 2021), nous proposons une organisation de l'étude satisfaisant à ces conditions et nous étudions certains aspects de sa réalisation dans deux classes de première. Cette étude met en évidence que si les praxéologies de direction de l'étude des enseignants sont essentielles pour créer un rapport en position d'élève aux fonctions trigonométriques clairement situé dans le domaine de l'analyse, la constitution préalable de l'organisation mathématique servant de support à ce rapport est cruciale. La distinction entre praxéologies mathématiques enjeu de l'étude et praxéologies didactiques dans l'analyse des observables est un aspect déjà mis en évidence (Artaud, 2019 ; Artaud & Cirade 2022 notamment) mais dont l'importance mérite d'être soulignée.

Références

- Artaud M. (2019) Praxeologies to be taught and praxeologies for teaching: a delicate frontier. In Marianna Bosch, Yves Chevallard, Francisco Javier García, John Monaghan (Eds), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education* (pp. 33-40). Londres : Routledge.
- Artaud M., & Cirade G. (2021) La TAD comme milieu pour l'étude de l'activité des institutions didactiques. *Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)* 11(1), 388-411. https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/762
- Barbazo É., & Barnet C. (Dir.) (2019) *Mathématiques, 1^{re} Spécialité*. Collection Barbazo. Paris : Hachette Éducation.
- Beltramone J.-P., et al. (2019) *Maths 1^{re} Spécialité*. Collection Déclic. Paris : Hachette Éducation.
- Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques* 12(1), 73–112. <https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/>
- Chevallard Y. (2019) On using the ATD: Some clarifications and comments. *Educação Matemática Pesquisa* 21(4), 1-17. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p001-017>
- Diderot D., & D'Alembert J. (1751) *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers. Tome seizième*. Neufchâtel : Samuel Faulche & Compagnie. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k50548c?rk=42918;4>
- Espindola E., & Trgalova J. (2019) Étude des facteurs de décisions didactiques dans l'enseignement de la trigonométrie dans une classe du lycée au Brésil. In S. Coppé, E. Roditi, et al. (Dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques* (pp. 663-672.). La pensée sauvage : Grenoble.
- https://www.researchgate.net/publication/340492478_Etude_des_facteurs_de_decisions_didactiques_dans_l%27enseignement_de_la_trigonometrie_dans_une_classe_du_lycee_au_Bresil [accessed Sep 03 2021].
- Groupe didactique des maths IREM d'Aquitaine. (2016) *Quelques idées pour enseigner la trigonométrie au lycée*. Talence : IREM d'Aquitaine. <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/BO/IBO16001/IBO16001.pdf>
- Proulx J. (2013) L'histoire de la trigonométrie comme outil de réflexion didactique. *Bulletin AMQ* Vol. XLIII n°3, 13-37. <https://www.amq.math.ca/ancien/archives/2003/3/2003-3-part6.pdf>
- De Sousa P. (Coord.) (2019) *Maths 1^{re}*. Lyon : lelivrescolaire.fr Éditions.
- Loeng R. (2019) *Les fonctions sinus et cosinus dans le secondaire en France et au Cambodge*. Thèse de doctorat de didactique des mathématiques de l'université Paris Cité.

Ministère de l'Éducation nationale (MEN). (2019) Programme de mathématiques de première générale. *Bulletin officiel de l'Éducation nationale spécial* n°1 du 22 janvier 2019. <https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm>

Ministère de l'Éducation nationale (MEN). (2020). Programme d'enseignement du cycle des approfondissement (cycle 4). *Bulletin officiel de l'Éducation nationale* n°31 du 30 juillet 2020. https://cache.media.education.gouv.fr/file/31/89/1/ensel714_annexe3_1312891.pdf

Roland, C., & Darthos, P. (Dir.) (2019) *1^{re} Spécialité Maths*. Collection *Variations*. Paris : Hatier.