Titre: Résoudre un problème par essais et ajustements : quelles exploitations des essais ?

Auteur: FAVIER Stéphane

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 693 - 704

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Résoudre un problème par essais et ajustements : quelles exploitations des essais ?

FAVIER[1] Stéphane

Résumé – Nous nous intéressons au processus de résolution de problèmes par essais et ajustements mis en œuvre par des élèves du primaire et du secondaire 1 du canton de Genève. Dans cette communication, nous mettons en évidence, au travers de l'analyse fine du travail d'un groupe d'élèves du primaire, que les ajustements ne vont pas de soi et que la manière d'exploiter les différents essais peut même évoluer au fil de la résolution. Il ressort notamment que les interprétations des rétroactions du milieu est un point à expliciter aux élèves.

Mots-clefs : Résolution de problèmes - Ajustements d'essais successifs – Rétroaction – Représentation

Abstract – I'm interested in the process of solving problems by trial and error for primary and secondary 1 pupils. In this paper, I show, through a detailed analysis of the work of a group of primary pupils, that the adjustments are not self-evident and that the way of exploiting the different trials may even evolve during the problem solving. In particular, it emerges that the interpretation of the retroaction of the milieu is a point to be made explicit to the pupils.

Keywords: Problem solving – Trial and error – Retroaction – Representation

1. * Université de Genève, Suisse, stephane.favier@unige.ch

Introduction

Lors de notre travail doctoral[2], nous avons, entre autres, étudié les processus de résolution de problèmes par essais et ajustements mis en œuvre par des élèves en classe de mathématiques, au primaire et secondaire 1 dans le canton de Genève (Suisse). Nous proposons ici de contribuer à la réflexion au sein de ce GT9 en nous intéressant à la manière d'ajuster des élèves : l'étude du travail effectif des élèves et la mise à jour de certaines difficultés nous amènent à émettre quelques pistes de réflexion relatives aux pratiques enseignantes en particulier en lien avec le processus d'institutionnalisation.

La stratégie ajustements d'essais successifs

La stratégie de résolution d'un problème en procédant à des ajustements d'essais successifs est inscrite au Plan d'études Romand[3] (PER) pour chacun des trois cycles que compte la scolarité obligatoire dans la Suisse romande et dans chacun des quatre axes thématiques (Espace, nombres, opérations, grandeurs et mesures) qui structurent le PER. Cette forte présence peut être interprétée comme le signe de l'importance que les prescripteurs souhaitent donner à cette stratégie. Nous y voyons également l'indication que cette stratégie nécessite un apprentissage long du fait de sa complexité.

Pour résoudre ces problèmes, les élèves doivent être en mesure de caractériser un essai, solution potentielle du problème, de pouvoir le confronter aux données du problème et ainsi de le (in)valider. L'invalidation et l'interprétation de la rétroaction du milieu (au sens de (Brousseau, 1998) de manière efficiente sont ce qui va permettre d'ajuster, c'est-à-dire caractériser un autre essai plus proche de la solution, voire la solution elle-même. C'est cet aspect de la démarche qui est mis en évidence par l'idée d'ajuster, ce qui a l'avantage de supprimer la connotation liée au hasard que pourrait induire l'expression « essais-erreurs » qui est un des synonymes présents dans la littérature. Cette idée d'ajuster nous semble également en lien avec « l'art de deviner » avancée par Pólya (1958): « [. . .] il devrait y avoir place dans l'enseignement des mathématiques pour l'art de deviner [. . .]. M'adressant à tous les professeurs de mathématiques quels qu'ils soient, je leur dis : apprenons à nos élèves à deviner. » (p. 271) Cette idée est défendue également par Posamentier & Krulik (2009), sous le label *Intelligent guessing and testing*, qui avancent : « Although this strategy does not sound very mathematical, it is a frequently used strategy. Some books refer to it as "trial and error." But it is more than that! This strategy is extremely powerful and quite sophisticated.» (p. 24) Ajuster n'est pas (encore) un savoir reconnu par la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques. Néanmoins, cette

2. Cette recherche s'est effectuée dans le cadre du projet financé par le Fonds national suisse de la recherche scientifique – FNS (Subside no 100019_173105 / 1) : « la résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au coeur des apprentissages dans la classe de mathématiques : un point de vue fédérateur à partir d'études dans différents contextes. »

3. Le PER est consultable ici : https://www.plandetudes.ch/web/guest/mathematiques

manière de résoudre des problèmes se rencontre fréquemment dans la vie de tous les jours (Elia et al., 2009; Posamentier & Krulik, 2009) ce qui nous amène à lui attribuer le statut de pratique sociale de référence (Chevallard, 1985). En effet, il existe de nombreuses situations qui peuvent nous amener à procéder à des ajustements : régler la température de l'eau, peser un ingrédient avec une balance Roberval ou préparer une certaine masse d'un ingrédient à l'aide d'une balance numérique, accorder une guitare, programmer un robot pour qu'il effectue un déplacement, positionner un cadre de niveau, mettre un meuble de niveau avec des cales, lancer des fléchettes, etc. C'est sans doute parce que les élèves sont confrontés à de telles situations que Stacey (1991) avance que « guess and check is an intuitive strategy available to all » (p. 6). Dans le même ordre d'idée, l'étude conduite par Elia et al (2009) montre que c'est la stratégie la plus largement efficace pour résoudre des problèmes lorsque les élèves n'ont pas encore appris les connaissances mathématiques ad hoc. Ces chercheurs expliquent que « when students are not explicitly taught any heuristic strategies, trial-and-error may be the only strategy they can use, as it does not entail high cognitive demands and it is widely used in a variety of mathematical and everyday situations. » (p. 616) Stacey (1991) relativise ces résultats en mettant en évidence deux obstacles à l'utilisation de cette stratégie. Le premier concerne la difficulté à savoir quoi deviner c'est-à-dire à caractériser un essai. Le deuxième concerne l'identification des contraintes qui peuvent être utilisées pour contrôler un essai. Elle nous met également en garde sur le fait de ne pas utiliser cette stratégie de manière systématique ou automatique ce qui constituerait un frein à l'utilisation d'outils mathématiques plus puissants.

À la lumière de ces quelques éléments tirés de la littérature, les questions qui guident notre réflexion sont : Comment les élèves exploitent-ils leurs essais ? De quelle manière les ajustent-ils?

Méthodologie

Recueil des données

Notre recherche s'est effectuée dans le canton de Genève Nous avons mené notre recueil de données auprès de six classes différentes : deux classes pour le degré 4P (élèves de 7-8 ans), deux pour le degré 8P (élèves de 11-12 ans) et deux pour la 10e année (élèves 13-14 ans). Au total, le travail de 38 groupes de deux ou trois élèves a pu être recueilli. Un problème différent pour chaque degré a été proposé. Le problème proposé aux élèves de 4P s'intitule *Jeu de cartes*[4] et s'énonce ainsi :

> Chaque carte de mon jeu représente soit un triangle, soit un carré. Je tire au hasard 15 cartes. Je compte tous les côtés des figures dessinées sur les cartes que j'ai tirées et je trouve 49. A ton avis, combien ai-je tiré de triangles et de carrés ?

4. Ce problème est une adaptation d'un problème extrait des documents d'application des programmes français (Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2005, p. 7-9)

Ce problème et ceux[5] proposés aux autres degrés ont bien en commun de pouvoir se résoudre par des ajustements d'essais successifs même pour les 10e qui n'avaient pas encore appris à résoudre des systèmes d'équations. En ce qui concerne les conditions de passation, les enseignant-e-s menaient la séance dans les conditions habituelles de classe. Les élèves travaillaient individuellement pendant quelques minutes avant d'unir leurs efforts par groupe de 2 ou 3 élèves. Pour recueillir des données au plus près du travail des élèves, nous avons équipé un élève de chaque groupe d'une caméra embarquée installée sur sa tête. Ce dispositif nous permet d'avoir des données audiovisuelles de l'espace de travail des élèves avec leur propre point de vue ainsi que la chronologie complète de leur résolution.

Méthode d'analyse

Les données de chaque problème offrent un milieu suffisamment antagoniste c'est-à-dire qu'il permet que chaque essai soit suivi d'une rétroaction qui va informer l'élève sur la validité de l'essai, ce qui caractérise le *caractère rétroactif* du milieu (Hersant, 2010, p. 43). Ainsi, les rétroactions vont permettre aux élèves de valider ou d'invalider leurs essais mais elles peuvent aussi être interprétées de manière qualitative (en déterminant si l'écart est en plus ou en moins), voire même quantitative (en déterminant exactement cet écart). C'est l'exploitation des interprétations de ces rétroactions par l'élève qui doit lui permettre, théoriquement, d'ajuster de manière pertinente afin de se rapprocher voire de trouver la solution. En conséquence, pour analyser les essais et ajustements, nous faisons le choix de :

- Décrire les essais réalisés et, si nos données le permettent, d'illustrer chaque essai par une photographie de la production des élèves ;
- Décrire les éléments qui sont en lien avec le test de l'essai et donc avec la rétroaction ainsi que les éléments en lien avec l'interprétation de la rétroaction : ces éléments peuvent être des verbalisations, des gestes, des bruits, des intonations de la voix, etc. ;
- Analyser chacune des rétroactions à la lumière de l'interprétation précédente.

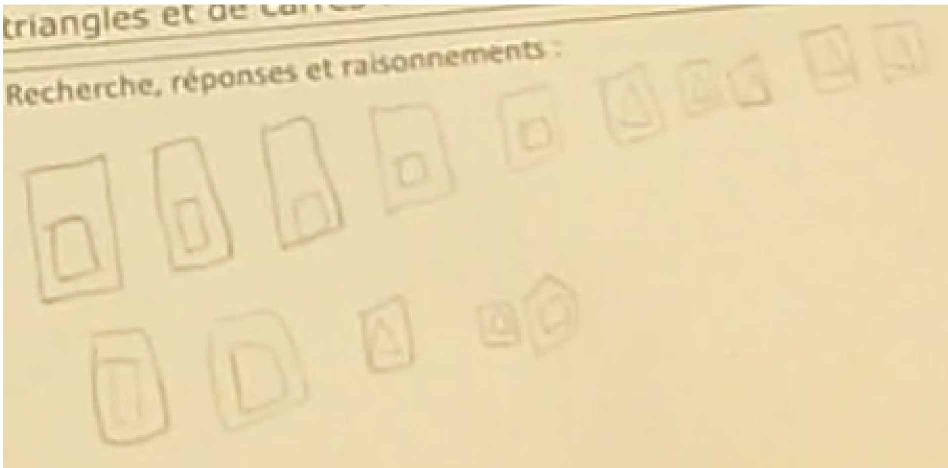
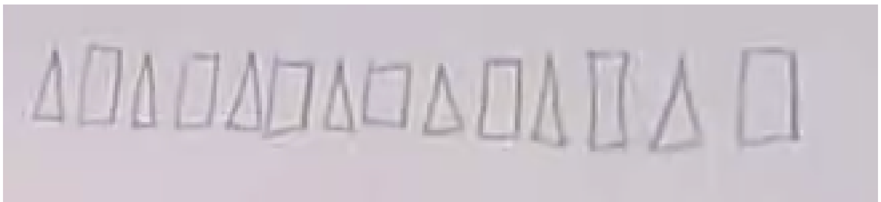
Ces différentes rubriques constituent, dans cet ordre, les trois premières colonnes du tableau qui présente les analyses. Une quatrième colonne intitulée « remarques » est prévue pour renseigner des éléments complémentaires qui pourraient être pertinents pour mieux comprendre et interpréter le travail des élèves (enrichissement du milieu hors ajustements, éléments relatifs aux erreurs, aux régulations, etc.). Chaque essai est numéroté de manière à pouvoir s'y référer plus facilement lors des synthèses. Un indicateur temporel est précisé, il correspond au début de la caractérisation de chaque essai. Dans le cas où les élèves travaillent séparément, le prénom de l'élève qui réalise l'essai est indiqué. Il peut arriver également que deux élèves réalisent deux essais différents de manière simultanée. Entre de tels essais, nous considérons qu'il n'y a pas d'ajustement et, de fait, nous les numérotons

5. Pour les énoncés des autres problèmes et leur analyse a priori, se référer à Favier (2022).

par un bis, par exemple ‘essai 3’ suivi de ‘essai 3bis’. Enfin, dans la 2e colonne du tableau qui présente les analyses, nous faisons le choix de séparer ce qui concerne le test de l’essai et la rétroaction de l’interprétation de la rétroaction par la flèche « → ».

Nous allons illustrer notre travail à partir de l’analyse des essais d’un binôme de 4P sélectionné pour la richesse de la diversité des ajustements réalisés.

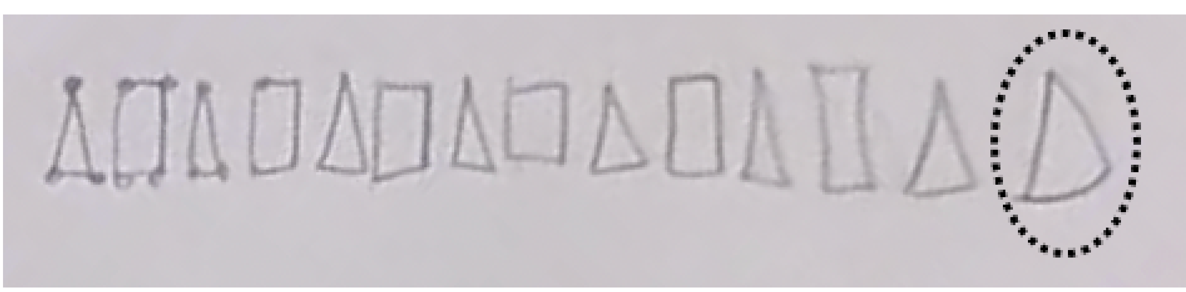
Analyse[6] du groupe composé de Naelle et Cyril

Éléments descriptifs de l’essai	Description factuelle de la rétroaction et de l’interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l’interpréta-tion de la rétroaction	Remarques
Essai 1 (Cyril 00:44) 			
Dessin de 15 figures	Compte tous les côtés, s’arrête à 49 alors qu’il reste un certain nombre de côtés à dénombrer→ fait non de la tête et barre l’essai (2:44)	Invalidation sur le nombre total de côtés	
Essai 1bis (Naelle 4:45) 			

6. Étant donné les contraintes d’espace à prendre en compte dans la rédaction de cette proposition, nous ne proposons pas l’analyse de tous les essais mais nous nous limitons à ceux qui nous paraissent les plus évocateurs.

Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
Essai* réalisé pendant la phase de travail individuelle	1. Compte les côtés (50 au lieu de 49) → Cyril propose de remplacer le dernier carré par un triangle « parce que là c'est 4 et là 3 ça va faire 49 » (5 :43) 2. Naelle ne tient pas compte de cette idée et recompte les côtés (49). Cyril recompte également (49). → Naelle applaudit et Cyril dit « je dois recopier » (6:50)	1. L'interprétation de la rétroaction proposée par Cyril est adéquate, l'ajustement est de type quantitatif 2. Validation de l'essai. (Le nombre de figures n'est pas vérifié.)	*Production de l'essai non enregistré. Hypothèse : Naelle a dessiné une figure de chaque catégorie en comptant au fur et à mesure le nombre de côtés, arrêt à 49 côtés.

La confrontation des essais 1 (de Cyril) et 1bis (de Naelle) met en évidence deux représentations différentes du problème. Cyril, qui dessine 15 cartes vierges puis les figures, a une représentation du problème qui prend en compte les deux grandeurs de ce problème. De plus, sur l'essai 1bis de sa voisine, il propose de remplacer le dernier carré par un triangle « parce que là c'est 4 et là 3 ça va faire 49 » (5:43). Cet ajustement révèle qu'il traite ces deux grandeurs de manière simultanée. Naelle réalise un premier essai qui compte bien 49 côtés mais pour 14 figures seulement. Sa représentation du problème se caractérise ainsi par la prise en compte d'une seule donnée du problème. De plus, l'essai se présente sous la forme de la succession d'une figure de chaque catégorie ce qui constitue une contrainte supplémentaire pour ce problème.

Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
Essai 2 (8:28) 			
Sur son essai, Naelle remplace le dernier carré par un triangle	Compte tous les côtés (48) → geste rageur du point, puis elle dit « peut-être qu'il faut remplacer aussi un triangle par un carré » (9:07)	Invalidation sur le nombre total de côtés L'ajustement proposé n'est pas pertinent puisqu'il ramène à la situation de départ.	Manière d'agir en lien avec la proposition précédente de Cyril

<table>
<tr><th>Éléments descriptifs de l’essai</th><th>Description factuelle de la rétroaction et de l’interprétation de la rétroaction par les élèves</th><th>Analyse de l’interprétation de la rétroaction</th><th>Remarques</th></tr>
<tr><td colspan="4">Essai 3 (9:08)

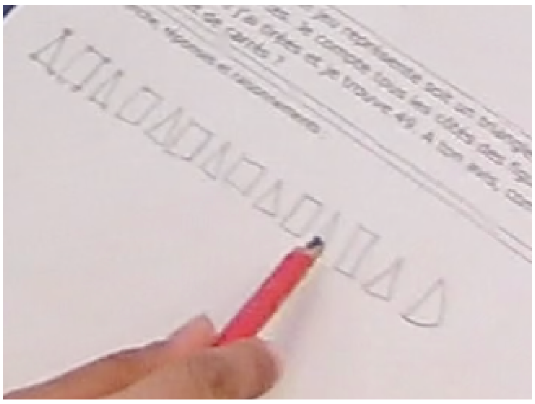



Photo a

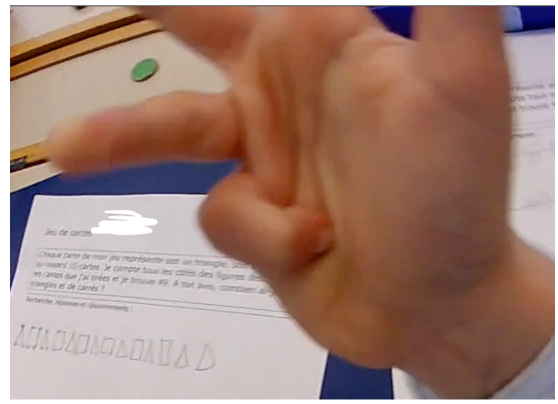
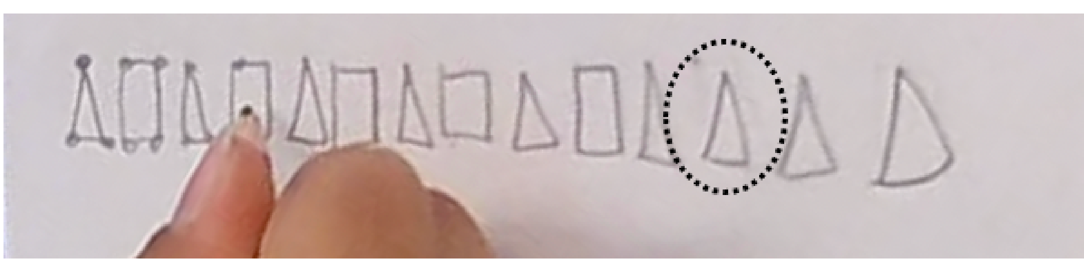
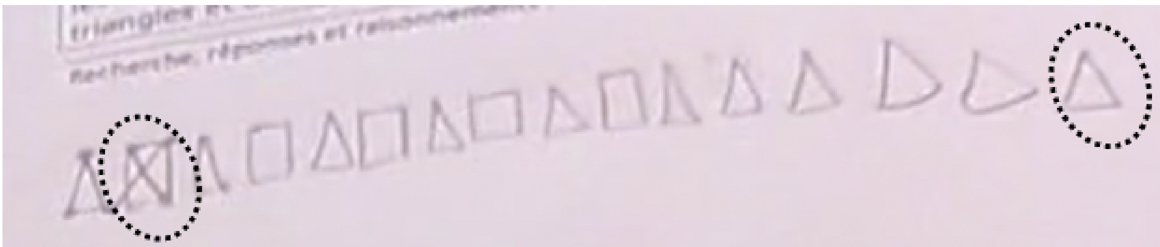
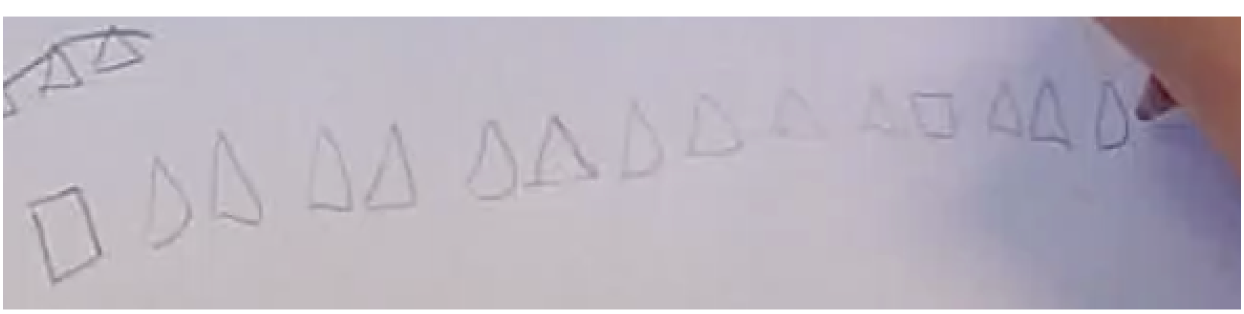



Photo b</td></tr>
<tr><td>L’idée du remplacement d’un triangle par un carré est évoquée seulement en désignant (photo a) un triangle à remplacer</td><td>Cyril surcompte (photo b) à partir de 48 les 4 côtés du carré (52) → Naelle efface un carré et dessine un triangle à la place</td><td>Invalidation sur le nombre total de côtés
L’ajustement proposé n’est pas pertinent puisqu’il éloigne de la solution.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Essai 4 (9:20)
</td></tr>
<tr><td>Naelle remplace un carré par un triangle sur son essai</td><td>Compte les figures (14) → « ah ce travail il m’énerve » (9:34) puis elle dessine un triangle supplémentaire</td><td>Invalidation sur le nombre total de figures. Ajustement pertinent du point de vue du nombre de figures.</td><td></td></tr>
</table>

Pour les essais 2, 3 et 4, Naelle ajuste en mettant en œuvre le même mode d’action que celui proposé par Cyril (remplacement d’une figure par une autre) mais dans des situations où ce n’est pas pertinent c’est-à-dire relativement à des essais qui ne comptent que 14 figures. Ce n’est qu’à l’issue de l’essai 4 que la représentation du problème semble évoluer vers la prise en compte des deux grandeurs. À ce stade nous faisons l’hypothèse que, sur le début de la recherche, Naelle ne met pas en lien le remplacement de figures et l’effet qu’il peut avoir.

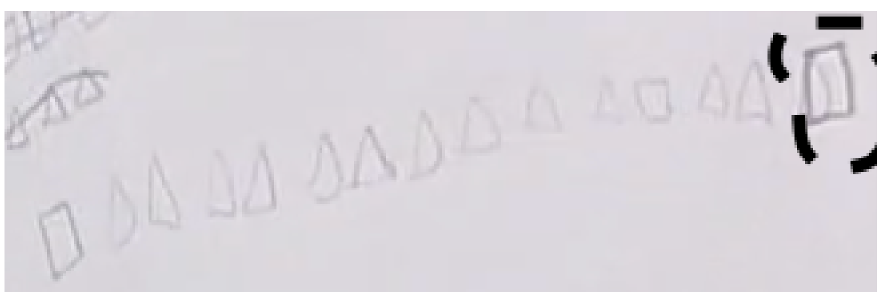
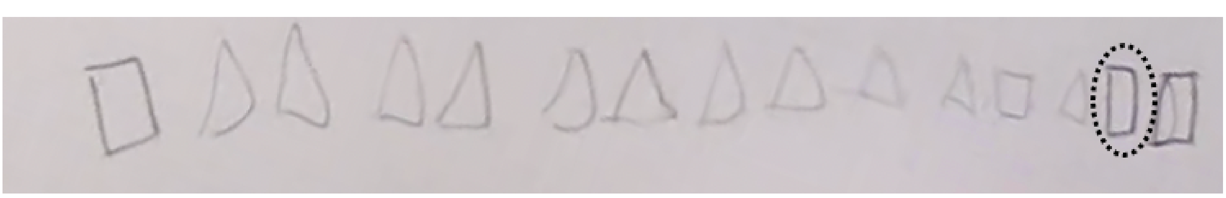
Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
Essai 6 (10:22)			
			
Naelle barre le 1er carré de la série et rajoute un triangle à la fin	Compte tous les côtés (47* au lieu de 49) → surcompte sur ses doigts jusqu'à 49 « ça m'énerve » (Naelle, 11:02), « si jamais il y avait une forme avec deux côtés là » (Cyril, 11:05) → compte tous les côtés de son essai recopié à la suite de l'essai 1bis (52) « on est mort » et il barre cet essai (12:06)	Invalidation, calcul de l'écart à la solution avec l'idée d'un ajustement pertinent par ajout d'une figure Relecture de l'énoncé	*Erreurs de dénombrement : deux sommets sont pointés pour un seul mot nombre à deux reprises

À l'essai 6, ce même mode d'action est pertinent et permet d'ailleurs d'obtenir la solution. L'ajustement se fait dans la bonne direction. L'erreur de dénombrement ne permet cependant pas à Naelle de valider cet essai. Le fait qu'elle ne décèle pas l'erreur révèle qu'elle n'anticipe pas le nombre total de côtés qu'elle aurait dû obtenir. Ainsi, si l'effet du remplacement de figures commence à émerger, cet effet se limite à l'aspect qualitatif et ne concerne pas l'aspect quantitatif c'est-à-dire relativement au nombre total de côtés en plus ou en moins.

Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
Essai 10 (22:24)			
			

Éléments descriptifs de l’essai	Description factuelle de la rétroaction et de l’interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l’interpréta-tion de la rétroaction	Remarques
Cyril dessine un autre essai de 15 figures	Compte tous les côtés (47) → Intonation particulière, Naelle surcompte de 3 côtés sur ses doigts pour arriver à 50 puis fait un geste de rage, « on est mort » (Cyril, 24:26) puis elle compte jusqu’à 4 en pointant le dernier triangle et après un temps de réflexion de quelques secondes annonce « je crois que j’ai trouvé » (24:38)	Invalidation sur le nombre total de côtés Cherche à ajuster en ajoutant une figure puis propose un ajustement pertinent du point de vue de la bonne direction.	Cet assortiment semble un peu le fruit du hasard.

L’essai 10 proposé par Cyril est une remise à zéro, ne s’appuyant sur aucun autre essai.

Éléments descriptifs de l’essai	Description factuelle de la rétroaction et de l’interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l’interpréta-tion de la rétroaction	Remarques
Essai 11 24:46) 			
Naelle dessine un carré sur un triangle sur l’essai de Cyril	Compte tous les côtés (48)→ geste de rage Compte à nouveau (48) → propose de remplacer un triangle par un carré	Invalidation sur le nombre total de côtés	
Essai 12 (26:20) 			
Naelle remplace un triangle par un carré	Compte tous les côtés (49)→ « quarante-neuf j’ai trouvé » Puis Cyril compte le nombre de figures (15) → ils applaudissent	Validation de l’essai- Solution trouvée	

Les ajustements des essais 11 et 12 sont dans la bonne direction ce qui confirme que le remplacement de figures est utilisé de façon adéquate du point de vue qualitatif. Ceci étant, avant l'ajustement pertinent de l'essai 11, Naelle s'exclame « je crois que j'ai trouvé » (24:38) et son geste de rage lorsque le test de l'essai donne 48 indique qu'elle s'attendait vraiment à obtenir la bonne réponse. Le remplacement de figures n'est pas mis en relation quantitativement avec son effet précis sur le nombre total de côtés.

Discussion et conclusion

Le processus d'ajustements d'essais successifs que ce groupe donne à voir est d'une grande richesse. Il permet de se rendre compte du fait que tous les essais ne sont pas nécessairement le fruit d'ajustements comme l'illustre l'essai 10 de Cyril. Certains ajustements peuvent même ne pas être pertinents c'est-à-dire que soit il n'y a pas d'interprétation qualitative ou quantitative de la rétroaction, soit l'interprétation de la rétroaction est erronée du fait, selon nous, de l'absence de règle qui mette en relation un changement de figures et son effet sur le nombre total de côtés. C'est l'évolution de la manière d'ajuster de Naelle qui met en évidence cette construction progressive de l'effet du remplacement d'une figure par une autre sur le nombre total de côtés. Cet aspect illustré par ce groupe n'est pas anecdotique parmi les différents groupes analysés et ce, même en ce qui concerne des groupes d'élèves plus âgés. La connaissance de ces règles semble cachée pour les élèves alors même qu'elle est complètement évidente pour les enseignants. Nous proposons ainsi de faire formuler ces règles par les élèves au cours du processus d'institutionnalisation. Par exemple, pour le problème du *Jeu de cartes*, cela correspondrait à des formulations du type : « Si je remplace un carré par un triangle alors le nombre total de côtés diminue de 1 » ou « Pour augmenter le nombre total de côtés il faut remplacer un triangle par un carré ». Bien que dans un premier temps, ces règles soient très contextualisées au problème travaillé, les élèves devraient pouvoir transférer cet aspect à d'autres problèmes.

Enfin, nous allons relever en guise d'ouverture, quelques effets inhérents au travail collaboratif de ce groupe d'élèves. D'une part, du point de vue de la représentation du problème (au sens de Julo (1995)), celle de Naelle évolue rapidement vers une représentation adéquate c'est-à-dire correspondant à la prise en compte simultanée des deux grandeurs. Nous pensons que c'est la confrontation avec la représentation de Cyril qui a provoqué cette évolution. En ce qui concerne la manière d'ajuster, tout se passe comme si Naelle disposait d'un mode d'action, introduit dans le milieu par Cyril au début du travail de groupe, mais sans vraiment en connaître les effets sur le nombre total de côtés. C'est la répétition d'essais obtenus avec ce même mode d'action qui a permis à Naelle de progresser vers la solution.

Ces analyses nous permettent de relativiser l'idée de Stacey (1991). En effet, cette manière de résoudre des problèmes est sans doute intuitive et accessible à tous mais elle n'en nécessite pas moins un apprentissage dont l'explicitation des règles qui lient les effets aux changements effectués est une composante.

Références

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La pensée sauvage.

Elia, I., Den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM, 41*(5), 605-618.

Favier, S. (2022). *Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève* (Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation, Université de Genève). Université de Genève, Genève. Consulté à l'adresse https://archive-ouverte.unige.ch/unige:159466

Hersant, M. (2010). *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : De l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires*. Note de synthèse HDR, Nantes, Université de Nantes.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Rennes: Presses universitaires de Rennes.

Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche. (2005). *Documents d'accompagnement des programmes*. Paris: Scéren édition.

Pólya, G. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement plausible* (L. Couffignal & R. Vallée, Trad.). Paris: Gauthiers-Villars.

Posamentier, A. S., & Krulik, S. (2009). *Problem solving in mathematics, grades 3-6 : Powerful strategies to deepen understanding*. USA: Corwin Press.

Stacey, K. (1991). The effects on students' problem solving behaviour of long-term teaching through a problem solving approach. In F. Furinghetti (Éd.), *Proceedings of the 15th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, p. 278-285). Assisi: PME.