**Titre:** La double transposition de la méthode d'Euler dans un environnement informatique et son impact sur les pratiques des étudiants à l'Université

**Auteurs:** BRINSI Lamjed et BEN NEJMA Sonia

**Publication:** Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

**Directeur:** Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

**Éditeur:** Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

**Année:** 2023

**Pages:** 579 - 592

**ISBN:** 978-2-7622-0366-0

**URI:**

**DOI:**

# La double transposition de la méthode d'Euler dans un environnement informatique et son impact sur les pratiques des étudiants à l'Université

BRINSI[1] Lamjed – BEN NEJMA[2] Sonia

**Résumé –** Dans cette intervention nous présentons les résultats d'une analyse didactique portant sur les pratiques des étudiants de première année universitaire lors de la résolution numérique des équations différentielles par la méthode d'Euler dans l'environnement informatique Maple. Cette étude s'inscrit dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique nourrie par d'autres approches, notamment, le modèle de la double transposition didactique et informatique, l'approche sémiotique en termes de registres et l'approche instrumentale. Ces considérations théoriques permettant de mettre en lumière les enjeux épistémologiques et didactiques relatives à la mise en œuvre de cette méthode numérique et les effets de son intégration dans le cadre des travaux pratiques de mathématiques appliquées.

**Mots-clefs :** Double transposition- méthode d'Euler-pratiques- environnement informatique

**Abstract –** In this paper we present the results of a didactic analysis of the practices of first year university students when solving differential equations numerically by Euler's method in the Maple computer environment. This study is part of the anthropological theory of didactics, which is nourished by other approaches, in particular the model of the double didactic and computer transposition, the semiotic approach in terms of registers and the instrumental approach. These theoretical considerations allow us to highlight the epistemological and didactic stakes relative to the implementation of this numerical method and the effects of its integration in the framework of practical work in applied mathematics.

**Keywords:** Double transposition - Euler's method - practices - computer environment

1. Université virtuelle de Tunis, ISEFC, ISET Jendouba, Tunisie, lamjedbrinsi72@gmail.com

2. Université de Carthage, Laboratoire Larina, Faculté des sciences de Bizerte, Tunisie, sonia.bennejma@fsb.u-carthage.tn

## Introduction et problématique

L'enseignement des mathématiques dans les institutions d'études technologiques tunisiennes (ISET) est intégré au contexte général d'un enseignement technique à vocation professionnelle. Il s'agit essentiellement des notions de base utiles dans l'enseignement des disciplines techniques. Certaines institutions ont introduit depuis quelques années, dans le cadre des licences appliquées, un élément constitutif des unités d'enseignements en mathématiques intitulé : « *Ateliers de Mathématiques Appliquées* ». Ce module d'enseignement est destiné aux étudiants de 1ère année de licence et apparait comme un moyen de renforcer l'enseignement de certaines notions mathématiques rencontrées au cours des séances de cours intégrés par le biais de logiciels de calculs symboliques et numériques tels que « Maple et Matlab ». Il s'agit d'un environnement hybride à l'interface des mathématiques et de l'informatique qui se présente comme des « travaux pratiques spécialisés en mathématiques ». Dans ce contexte particulier, nous nous intéressons aux pratiques des étudiants dans l'environnement Maple, comment s'approprient-ils cet instrument au cours du processus de transposition informatique (Balacheff, 1994 ; Bronner & Briant, 2015), de quelle façon l'utilisation de cet artefact technologique impacte-t-elle la conceptualisation des notions liées aux équations différentielles (variable, fonction, dérivé, primitive…) ? Dans quelle mesure contribue-t-elle à développer une certaine flexibilité entre les environnements d'enseignement (papier crayon et informatique) ? Comment les étudiants mobilisent-ils des connaissances acquises autour des équations différentielles pour modéliser des problèmes dans l'environnement Maple ? Quelles difficultés rencontrent-ils pour passer d'une résolution mathématique à son exécution sur machine ?

Pour aborder cette problématique qui s'inscrit dans le cadre du master de recherche en didactique des mathématiques du premier auteur, (Brinsi, 2020) nous avons fait le choix d'une notion mathématique particulière suggérée par les programmes officiels relatifs à cette institution universitaire autour des équations différentielles linéaires (ED). Nous nous sommes focalisés sur la résolution numérique par la méthode d'Euler. Cette notion présente l'intérêt d'articuler plusieurs registres de représentation sémiotique (Duval, 1996) et d'être exploitée dans un environnement informatique. De plus, elle se caractérise par son aspect « unificateur » dans la mesure où elle met en jeu plusieurs concepts et objets mathématiques de l'analyse (variable, équations, fonction, primitive, graphique…) qui interviennent dans les techniques de résolution algébrique, numérique et graphique. L'environnement technologique qu'offrent les ateliers de mathématiques nous semble un lieu privilégié permettant de renforcer les acquis des étudiants autour des techniques de résolution mais également une occasion pour l'enseignant d'analyser le fonctionnement des connaissances des étudiants lorsqu'ils passent d'une résolution mathématique à une résolution informatique.

Ainsi, les questions de recherche ayant guidé cette étude sont les suivantes. Quelles sont les caractéristiques de la méthode d'Euler dans l'environnement papier crayon ? Comment se caractérise le passage de l'environnement classique à l'environnement technologique ? Quelles difficultés particu-

lières peuvent être rencontrées par les étudiants lors de la résolution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler ?

Dans cette intervention, nous présentons les outils théoriques qui ont étayé cette étude et la méthodologie suivie puis nous livrons les principaux résultats autour des pratiques des étudiants lors de la résolution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler avant de conclure.

## Cadre théorique

Nous faisons référence dans cette étude à la théorie anthropologique du didactique (TAD, chevallard, 1999) enrichie par d'autres approches en didactique des mathématiques, l'approche instrumentale (Rabardel, 1995), l'approche sémiotique (Duval, 1993) et le modèle de la double transposition didactique et informatique (Briant & Bronner, 2015). Ces théories fournissent des outils permettant d'analyser des aspects épistémologiques et didactiques relatifs au savoir à enseigner et les pratiques des étudiants. En effet, la modélisation des choix institutionnels et des connaissances des étudiants renvoie à une description des praxéologies mathématiques et didactiques développées dans une activité mathématique, dans notre cas, la résolution numérique des équations différentielles. Cette modélisation met l'accent sur les techniques mobilisées pour accomplir ce type de tâches et se focalise sur la fonction technologique du savoir (fonctions de production, de justification et d'intelligibilité des techniques) qui mettent en évidence un système de conditions et de contraintes qui agissent sur la présence ou l'absence d'une technique, en une institution donnée. Par exemple la tâche du type T : « concevoir un programme pour résoudre un problème mathématique » exige l'accomplissement de deux sous types de taches, T1 : « créer un algorithme informatique » ou « adapter un algorithme mathématique » à partir de la résolution mathématique du problème en question dans l'environnement « classique » papier/crayon. Ceci renvoie à une transposition algorithmique et T2 : « adapter l'algorithme informatisé en un programme informatique, implanté sur un système informatique donné. Les sous types de taches ne sont pas forcément séquentiels, des aller-et-retour peuvent survenir. Par ailleurs, la prise en compte des ostensifs et des non-ostensifs dans l'analyse praxéologique d'une activité mathématique est un élément essentiel dans la mesure où leur co-activation est omniprésente à tous les niveaux d'une praxéologie mathématique, aussi bien technique que technologico-théorique. « La mise en œuvre d'une technique se traduit par une manipulation d'ostensifs réglée par des non ostensifs » (Bosch & Chevallard 1999, p. 87) et la technologie consiste en des idées, des concepts des notions qui renvoient à des non ostensifs. Par exemple une technique algébrique de résolution d'une équation différentielle (ED) homogène du premier ordre fait appel à des ostensifs qui renvoient à la fonction primitive constituant ingrédient de la technologie qui la justifie. La dimension sémiotique du travail algébrique peut être abordée en termes de registres (Duval, 1993). Un registre de représentation sémiotique assure les trois activités cognitives : formation, traitement et conversion formant un système sémiotique. Dans le cas de la technique d'Euler plusieurs registres peuvent être mis en avant, le registre numérique, le registre algébrique, le registre du tableau et le registre graphique qui permet de visualiser les solutions approchées d'une ED ou la solution exacte selon sa nature. Considérant

ainsi une technique comme une manipulation régulée de représentations sémiotiques ou d'objets ostensifs, Rabardel (1995) les ramène à leur nature matérielle ou symbolique : des artefacts. Ainsi nous pouvons considérer qu'une technique n'est autre qu'une manière d'articuler des artefacts qui suppose la mobilisation de schèmes d'utilisation, ce qui en fait des instruments. Par conséquent un objet ostensif pourra être considéré comme un instrument possible de l'activité humaine, c'est-à-dire comme une entité qui permet, en association avec d'autres, de conformer des techniques permettant d'accomplir certaines tâches. Cette distinction entre artefact et instrument permet à son tour de modéliser deux processus croisés et imbriqués dans une activité mathématique : l'instrumentalisation et l'instrumentation. Le premier est relatif à la personnalisation de l'artefact par le sujet et le second est lié aux schèmes d'utilisation chez le sujet. Béguin et Rabardel (2001) distinguent trois types de schèmes d'utilisation, les schèmes d'usage renvoyant à l'interaction du sujet avec l'artefact, les schèmes d'action instrumentés dirigés vers l'objet de l'activité et convoquant les schèmes d'usages pour atteindre les buts poursuivis et les schèmes d'action collectives instrumentées, en référence à l'utilisation d'artefacts par plusieurs sujets, simultanément ou conjointement. Dans notre étude, cette diversité d'approche apporte une contribution à la fois théorique et empirique permettant d'éclairer le développement de cette praxéologie selon le type d'environnement d'enseignement : papier crayon et informatique. La prise en compte de l'hybridation des deux environnements, dans le cas particulier de travaux pratiques de mathématiques, nous a conduit à prendre en compte l'aspect algorithmique dans le passage d'un environnement à l'autre lors de la mise en œuvre de cette technique numérique. Les travaux de Briant et Bronner, (2015) qui mettent en avant la distance qui sépare l'activité initiale de résolution d'un problème mathématique dans l'environnement habituel (papier/crayon), de sa programmation apportent une distinction supplémentaire entre algorithme informatisé (le langage « pseudo-code ») et « programme informatique » (en langage informatique). En effet, « lorsqu'une tâche de type « concevoir un programme pour résoudre un problème » est donnée, nous voyons émerger une double transposition, associée à des techniques différentes, justifiées par des technologies relevant du domaine mathématique, du domaine informatique, ou des deux conjointement » (Briant & Bronner, 2015, p. 236). Trois types de résolution sont définis dans le processus de la double transposition, la résolution mathématique engagée dans l'environnement classique papier-crayon qui donnera lieu à un premier algorithme (algorithme mathématique), la résolution algorithmique qui consiste à transposer l'algorithme mathématique en un algorithme informatique, écrit en pseudo-code (1ère transposition) et la résolution informatique qui consiste à transposer l'algorithme informatisé en un programme via un langage informatique adapté au logiciel (2$^{e}$ transposition).

Nous émettons l'hypothèse selon laquelle, l'introduction de l'approche numérique de résolution des ED par la méthode d'Euler, dans un environnement hybride permet de mettre en évidence, chez les étudiants, des conceptualisations erronées que l'environnement informatique permet de déceler.

## Analyse épistémologique

### *La méthode d'Euler dans le savoir à enseigner*

La méthode d'Euler est une occasion de développer chez les étudiants des compétences en rapport avec la résolution numérique. On ramène l'équation différentielle du premier ordre à la forme : (E) :y'=f(x,y) où f est une fonction numérique à deux variables réelles. La solution lorsqu'elle existe sur un intervalle I représente une fonction u dérivable sur I et vérifiant : $\forall x \in I$, u'(x)= f(x,u(x)). La mise en œuvre d'une telle technique met en avant une solution approchée qui se présente sous forme d'une fonction affine par morceaux sur I. Ainsi, l'étudiant manipule des ostensifs qui renvoient à des fonctions de nature différentes : la fonction numérique y de la variable x, la fonction numérique f à deux variables réelles (x, y), la fonction affine par morceaux (solution d'Euler) et la fonction solution exacte dans le cas d'un problème de Cauchy, accessible avec les techniques algébriques. Il s'agit ainsi d'une procédure qui permet d'approcher la solution d'une EDL du premier ordre connaissant une condition initiale présentée sous la forme suivante $\begin{cases} y' = f(x,y), x_0 \le x \le x_0 + T \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ (problème de Cauchy). Les objets mathématiques et les relations en jeu sont en général accessibles pour des étudiants de première année universitaire, de plus cette méthode a un caractère algorithmique et programmable ce qui justifie la raison d'être de cette approche dans les programmes de cette institution universitaire. C'est une méthode approximative basée sur la discrétisation de la variable x. L'intervalle $[x_0, x_0+T]$ est divisé en un nombre N de subdivisions de même longueur $h = \frac{T}{N}$ , finalement la méthode d'Euler renvoie la liste $(y_0,y_1,\ldots,y_N)$ des valeurs approchées des $y(x_i)$ où $x_i$=x0+ih et y désigne la solution « exacte » de l'ED. La courbe (d'Euler) polygonale reliant les points $M_i$ $(x_i,y_i)$, est une approximation graphique de la solution « exacte ». Elle offre une vision approximative du comportement de la fonction y(t) solution « exacte » sur l'intervalle $[x_0, x_0+T]$. Ainsi, si l'on souhaite que cette vision soit bonne, le choix du pas de discrétisation h doit être suffisamment petit, et par conséquent le nombre N des itérations (le nombre de valeurs à calculer) peut devenir important. Cela impose une certaine économie, une rapidité de calcul et une mémorisation importante d'où la nécessité de l'outil informatique. La méthode d'Euler suppose que la solution visée y du problème de Cauchy existe et pour une valeur raisonnablement petite de h et $x \in [x_0,x_0+T[$, l'expression y(x)+h.f(x ,y(x)) est une bonne approximation de y(x+h). C'est à dire $y(x+h) \approx y(x)+h.f(x ,y(x))$ (formule d'Euler). Cette formule peut être obtenue en supposant que la solution visée y est dérivable et par suite admet un développement limité au moins à l'ordre 1 au voisinage de tout point x de l'intervalle $[x_0 , x_0+T[$. On peut donc écrire que : y(x+h)=y(x)+h.y' (x)+o(h) , ou en supposant simplement la dérivabilité de la solution visée en tout point $x \in [x_0,x_0+T[$ c'est à dire $\lim_{h\to 0}\left(\frac{y(x+h)-y(x)}{h}\right) = y'(x)$ et alors pour h≈0 on a : $\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \approx y'(x) = f(x,y)$ ou encore en intégrant l'équation sur l'intervalle $[x, x+h]$ $y(x+h)-y(x) = \int_x^{x+h} y'(s)ds = \int_x^{x+h} f(s,y(s))ds \approx h.f(x,y)$, pour h assez petit, comme l'illustre le graphique suivant.

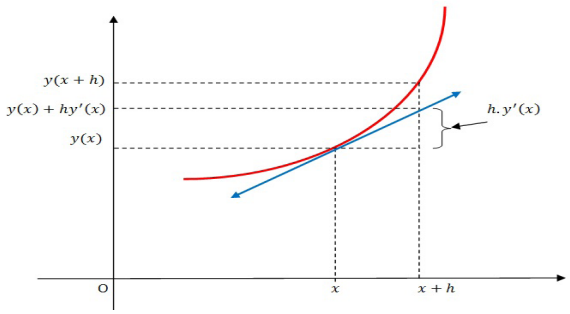


**Figure 1–** Illustration graphique de la méthode d'Euler

### *Les enjeux sémiotiques de l'application de la méthode d'Euler dans les environnements papier-crayon et Maple*

La mise en œuvre de la méthode d'Euler passe par trois étapes. La première consiste à construire une suite de points à partir de l'équation différentielle ; il s'agit d'un passage du continu au discret. La deuxième consiste en la détermination d'une liste ou d'une table de valeurs numériques. La dernière renvoie à un passage du discret au continu permettant d'obtenir la construction graphique. Chaque étape requière un changement de registre de représentation sémiotique (Duval, 1996) que nous utilisons dans notre analyse pour différencier ces deux aspects. Nous résumons les registres convoqués dans la résolution des ED par la méthode d'Euler et les caractéristiques marquantes dans le passage d'une étape à l'autre selon l'environnement de travail dans le tableau 1.

| Environnement papier- crayon | | Environnement Maple | |
|---|---|---|---|
| Etape1 | | Etape2 | Etape3 |
| Registre algébrique continu → | Registre algébrique discret → | Registre numérique → | Registre graphique |
| Equation différentielle $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y' = f(x,y) \end{cases}$ | Suites numériques $x_k = x_0 + k.h$ ; $y_{k+1} = y_k + h.f(x_k, y_k)$ | Liste des valeurs numériques approchées des $x_k$ et des $y_k$ | Courbe des points isolés discrets $M_k(x_k, y_k)$ ↓ Courbe polygonale reliant les points $M_k(x_k, y_k)$ |

**Tableau 1 –** Les registres de représentations sémiotiques impliqués dans la méthode d'Euler dans les environnements classiques et informatiques (Ben Nejma & Brinsi, 2021, 2022)

Pour déterminer la liste (ou le tableau) des valeurs approchées des termes de la suite d'Euler, les étudiants ont recours au logiciel Maple suggéré par le programme officiel de l'ISET. Ce logiciel permet d'effectuer les calculs des valeurs numériques des termes de la suite, de construire une ou plusieurs

courbes approchées (courbes d'Euler) et de les superposer dans un même repère. Il permet aussi la détermination de la solution exacte dans le cas où une telle équation est accessible avec une technique algébrique. En superposant la courbe « exacte » avec des courbes approchées obtenues avec différentes valeurs du pas h, puis en considérant l'écart entre les différentes courbes et la courbe exacte, on pourra constater l'effet du pas choisi (ou du nombre de subdivisions de l'intervalle d'étude). Comme l'illustre la figure suivante :

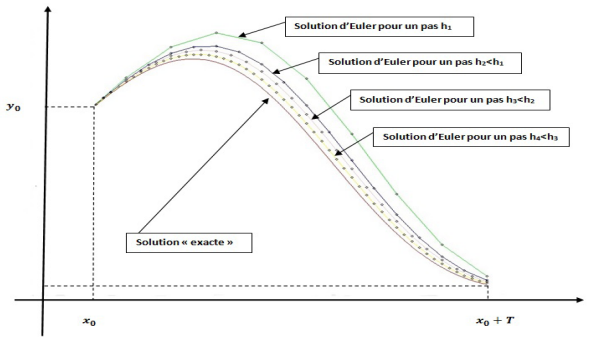


**Figure 2–** L'usage de Maple dans l'approximation des solutions d'une EDL par la méthode d'Euler

## Cadre d'analyse et méthodologie

### *Une adaptation du modèle de la double transposition à la méthode d'Euler*

En s'inspirant du modèle de la double transposition développé par Briant et Bronner (2015), nous avons d'abord procédé à une description des techniques de résolution mathématique, algorithmique et informatique impliquées dans la méthode d'Euler que nous proposons de développer.

- La résolution mathématique consiste en la résolution du problème dans le cadre classique de l'environnement papier-crayon. Cette résolution peut donner lieu à un premier algorithme : « algorithme mathématique ».

- La résolution algorithmique : une fois la résolution mathématique achevée, une première transposition aura lieu pour déterminer un algorithme informatisé, écrit en pseudo-code. Dans certains cas l'algorithme mathématique, utilisé habituellement dans l'environnement papier-crayon, nécessite des connaissances relatives à l'objet mathématique en question, qui ne sont pas généralement implantées de base dans un logiciel quelconque de programmation. Si le cas se présente, il est exigé d'en chercher d'autres qui tiennent compte des actions élémentaires réalisables par la machine ou le logiciel de programmation intégré. C'est ce que les auteurs (2015) nomment « algorithme informatisé ».

- La résolution informatique : elle correspond à l'opération qui aboutit à l'écriture du programme avec un langage informatique adéquat au logiciel en jeu, à la suite de la première transposition. Nous synthétisons ces caractéristiques dans le tableau suivant en adaptant ce modèle à la méthode d'Euler (Ben Nejma & Brinsi, 2021 ; 2022).

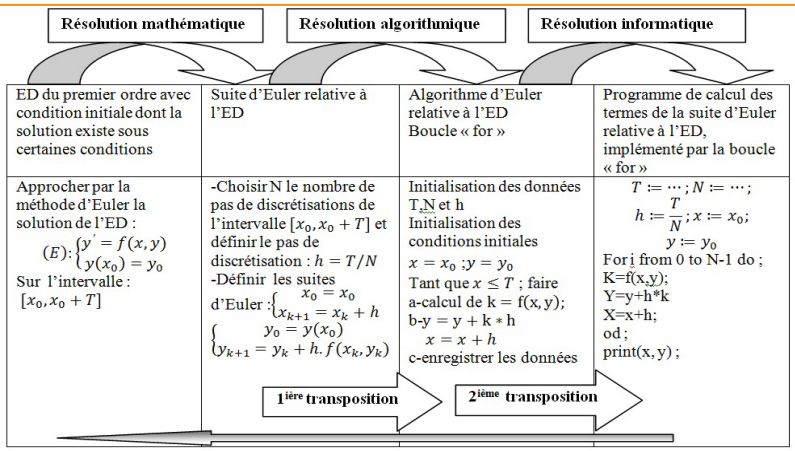


**Tableau 2 –** La double transposition dans la résolution numérique d'une EDL par la méthode d'Euler (Ben Nejma & Brinsi, 2021, 2022)

La première transposition « *transposition algorithmique* » se fait à différents niveaux. Au *niveau du langage* : il s'agit de passer d'un langage mathématique, c'est-à-dire *le langage utilisé usuellement par les écrits mathématiques* (Modeste 2012, p. 62) à un langage en *pseudo-code* semblable au langage de programmation, débarrassé de ses problèmes de syntaxe. *Au niveau des techniques*, elles différent d'un algorithme à un autre, de même les technologies-théories sous-jacentes s'en trouvent alors modifiées. La seconde transposition : « *transposition informatique* » se fait à son tour à deux niveaux. Celui *du langage* où il s'agit de passer du langage en pseudo-code de l'algorithme à un langage informatique, c'est-à-dire un langage de programmation. Cela nécessite une reformulation pour donner un équivalent qui soit compréhensible par la machine, selon sa structure interne et dans son langage. La transposition se fait aussi au *niveau des variables*. Les variables mathématiques utilisées dans les algorithmes vont céder la place aux variables informatiques dans le programme informatique. Ces variables font partie de la technologie des praxéologies informatiques. L'existence de la transposition algorithmique est un aspect didactique important pour comprendre certains phénomènes liés à l'apprentissage des mathématiques en général. Ce concept est intimement lié, comme nous l'avons déjà évoqué, aux organisations mathématiques mises en œuvre au niveau des pratiques d'apprentissage. Nous souhaitons recueillir des informations sur la manière dont les étudiants gèrent ces deux environnements pour accomplir les tâches proposées. Comment organisent-ils le travail mathématique, algorithmique et informatique dans l'environnement EIAH ? Quelles sont les difficultés inhérentes à la transposition informatique ?

## *Contexte de l'expérimentation et recueil de données*

Notre expérimentation s'est déroulée au dernier trimestre de l'année universitaire 2018- 2019 avec des étudiants de première année universitaire, section génie électrique. Nous nous intéressons aux pratiques des étudiants autour de la résolution des EDL, notamment par la méthode d'Euler dans les environnements papier-crayon et « Maple ». Nous analysons les productions écrites et numérisées en

réponse à un test de contrôle (Situation1) proposé par le professeur de mathématiques qui assure l'enseignement au sein des ateliers. Ce problème comporte deux parties. Une « partie théorique », à accomplir dans l'environnement papier- crayon, a pour objectif d'évaluer les compétences des étudiants à résoudre des équations différentielles linéaires du premier ordre avec données initiales. Une « partie pratique » a pour objectif d'analyser les apprentissages des étudiants autour de la résolution algébrique et numérique via Maple. Nous soulignons le fait que la plupart des étudiants en cette période de l'année universitaire se sont familiarisés avec ce logiciel en manipulant des fonctionnalités prédéfinies et en appliquant des programmes concernant les notions de fonctions, dérivées, primitives, intégrales, suites…. De plus, la passation du test a lieu en salle informatique équipée d'ordinateurs. Les étudiants du groupe sont répartis en 4 binômes qui sont autorisés à accéder sans restriction à la manipulation de cet artefact. Les binômes d'étudiants sont amenés à présenter leurs productions en fin de la séance (dont la durée est de 1h30), composées de comptes rendus écrits et de fichiers numériques comportant le travail accompli dans l'environnement informatique « Maple » et enregistré sur machines. Nous analysons ces productions en confrontant les traces écrites sur papier avec les résultats obtenus avec Maple, en tenant compte des trois phases de résolution. Pour chaque étape de la transposition, il s'agit d'identifier les techniques mobilisées par les étudiants et de repérer les erreurs commises ou les schèmes développés. L'approche numérique via la méthode d'Euler va solliciter la coordination des schèmes liés au graphique et des schèmes algébriques et éventuellement analytiques liés ou non à l'environnement Maple. Nous restituons la façon dont ces schèmes sont activés par les étudiants lors de ce processus. Ces schèmes peuvent se manifester dans le registre de représentation (discursif, graphique, algébrique, analytique) et avoir différentes fonctions (Trouche, 2005) : *une fonction heuristique* (contrôle, organisation de l'action), une *fonction pragmatique* (action, transformation) et *une fonction épistémique* (prise d'information, compréhension).

### *Méthodologie*

Une analyse a priori de la situation a été conduite en référence aux outils théoriques en considérant deux organisations mathématiques locales dans l'environnement p/c relatives à : (RA) Résolution algébrique et (RG) représentation graphique de l'allure de la courbe de la solution. Nous faisons l'hypothèse que, dans l'environnement Maple, le processus d'instrumentation modifie en partie ces deux organisations mathématiques locales, les techniques et les procédures de réalisation ne fonctionnant pas de la même manière que dans l'environnement papier/crayon. Nous identifions les stratégies possibles attachées aux processus d'instrumentation pouvant permettre la modélisation du problème dans Maple. Nous mettons en avant deux organisations mathématiques locales, RGI : représentation graphique de la solution et RGE : représentation graphique de la solution par la méthode d'Euler. Quatre critères relatifs à RGE sont identifiés :

C1 : Le programme est correctement appliqué, la courbe est tracée et le développement des calculs est pertinent.

C2 : La représentation graphique est minimale ou approximative et les calculs algébriques pertinents.

C3 : La représentation graphique est minimale et les calculs algébriques ne sont pas pertinents.

C4 : La représentation graphique est présentée sans développement de calcul associé.

Notons que le degré d'élaboration de la représentation graphique par la méthode d'Euler est l'aboutissement d'un programme de calcul ou d'un algorithme de résolution appliqué correctement. L'interprétation de la courbe, la résolution numérique de l'équation différentielle et l'approche de certaines valeurs numériques renvoient à l'enjeu que le graphique représente par rapport à la résolution du problème. Si les étudiants font une courbe relativement vague ou erronée, celui-ci ne peut être qu'une entrée dans le problème de façon intuitive, cette courbe ne sert alors à rien dans la mise en place de la résolution numérique de l'équation différentielle ou encore dans l'interprétation de la résolution algébrique. Lorsque la courbe est élaborée correctement, cela renvoie à une application correcte du programme de résolution par la méthode d'Euler et une maitrise des commandes de Maple. L'interprétation du graphique sera l'indice de l'interaction qu'il peut y avoir entre la représentation graphique et la résolution algébrique ou numérique de l'ED en jeu.

## Principaux résultats relatifs aux pratiques des étudiants

L'analyse des productions des étudiants a permis de dégager des éléments importants pour notre problématique.

### *Dans l'environnement papier-crayon*

- Une mise en œuvre de techniques algébriques automatisées sans prise en compte des informations qui figurent dans l'énoncé (nature de l'ED, condition initiale), ce qui engage les étudiants dans des démarches dépourvues de sens.

- Un travail dans le registre graphique pauvre et non outillé par des éléments technologiques explicites dans l'environnement papier-crayon moyennant un travail mathématique autour de l'étude de la fonction solution.

- Les étudiants semblent recourir à une résolution informatique pour avoir l'allure de la courbe solution de l'EDL sans se soucier du travail mathématique convoqué par la question dans l'environnement papier-crayon. Ils développement ainsi un schème graphique de nature heuristique en confrontant ce qu'ils perçoivent sur l'écran avec la fonction solution.

- Le quart des étudiants concernés semblent maitriser la résolution algébrique de l'ED, bien qu'il s'agisse dans cette situation d'une EDL du premier ordre homogène. Les étudiants se mettent à la recherche d'une solution particulière en mobilisant la technique de la variation de la constante. Le schème développé par la plupart est que « toute EDL du premier ordre possède une solution particulière obtenue par la méthode de la variation de la constante ».

- Les traces retrouvées dans les copies des étudiants concernant l'algorithme d'Euler montrent une maitrise insuffisante de la technique mathématique et des confusions dans l'emploi des variables mathématiques et informatiques. Ces constats sont soutenus par les ostensifs employés à plusieurs étapes de la résolution algorithmique entamée.

- On ne retrouve aucune trace écrite d'un contrôle des résultats erronés, ce qui confirme les difficultés des étudiants à identifier certains objets mathématiques dans un même registre ou à percevoir les changements de registres sémiotiques convoqués par l'énoncé.

- Quant à l'interprétation de la courbe d'Euler en tant qu'approximation de la solution exacte, en termes d'amplitude du pas et d'erreurs d'estimation, on ne trouve aucune trace dans la production des étudiants. Il semble que ceux-ci ne perçoivent pas l'algorithme d'Euler comme méthode de résolution numérique approchée d'EDL.

### *Dans l'environnement technologique*

L'analyse du travail accompli par les étudiants à partir des enregistrements et des traces écrites dans les comptes rendus des travaux pratiques a permis d'apporter quelques éléments de réponse à nos questions de recherche.

- Les étudiants rencontrent plusieurs difficultés pour produire correctement l'algorithme relatif à la méthode d'Euler. En effet, de nombreuses erreurs ont été relevées par rapport aux ostensifs employés, renvoyant à des non ostensifs de nature différentes : fonction affine par morceaux d'Euler relative à l'ED, fonction à deux variables qu'exige la mise en équation relative au problème de Cauchy, fonction y inconnue, et fonction solution exacte de l'équation différentielle.

- Le passage du cadre numérique (discret) au cadre algébrique (continue), source de difficultés dans l'environnement papier crayon, persiste dans l'environnement informatisé et se donne à voir au niveau de la transposition algorithmique. En effet nous trouvons des confusions chez les étudiants dans l'emploi des variables, en particulier celle en rapport avec le compteur i « discret » et la variable x « continue ».

- La plupart des erreurs retrouvées au niveau des productions ou des fichiers informatisés semblent de nature cognitive : des confusions dans la résolution algorithmique apparaissent notamment entre les objets de savoirs : équation, fonction, courbe, expression algébrique de la fonction… L'illusion de

transparence, phénomène didactique mis en avant dans les travaux de Artigue (1995) est renforcé par les analyses conduites dans le cadre de cette recherche.

## Conclusion et discussion

À la lumière des analyses réalisées dans le cadre de ces ateliers de mathématiques prescrits par l'institution universitaire (ISET), il a été possible d'identifier des constats intéressants pour la poursuite de la recherche. La plupart des schèmes développés par les étudiants semblent renvoyer à une maitrise insuffisante de la technique numérique de résolution des ED et des concepts mathématiques sous-jacents à la méthode d'Euler. Par ailleurs, l'analyse du processus de la double transposition didactique et informatique témoigne des difficultés rencontrées par les étudiants pour réaliser un traitement adapté à chaque registre (numérique, graphique, algébrique, algorithmique) puis pour convertir les représentations sémiotiques d'un environnement de travail à un autre. Les pratiques des étudiants semblent répondre, en partie, à des choix d'enseignement qui privilégient le traitement algébrique au détriment des dimensions algorithmique et informatique. La technique algébrique est, en effet, celle qui fait l'objet d'enseignement explicite et se limite au registre algébrique. Le travail graphique est rarement présent voire absent des praxéologies mathématiques développées autour de la résolution des équations différentielles. La méthode d'Euler nous semble ainsi une occasion de convoquer plusieurs registres sémiotiques en vue de renforcer l'appréhension des concepts mathématiques en jeu. Les outils de programmation numériques seraient, de ce fait, un moyen de réaliser cette flexibilité entre registres.

## Références


Artigue, M. (1995) Un regard didactique sur l'utilisation d'outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques. *Repères IREM, 19*, 77–108

Balacheff N. (1994) Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques 14*(1), 9-42.

Ben Nejma, S & Brinsi, L. (2022). La résolution des équations différentielles dans un environnement informatique. *Mathematice Revue Sesamath. Vol 78* Article 1472-http://revue.sesamath.net/spip.php.

Brinsi, L. (2020) *La résolution numérique des équations différentielles dans un environnement informatique en première année d'université : pratiques enseignantes et genèse instrumentale des étudiants* [mémoire de master, ISEFC-Université virtuelle de Tunis].

Briant, N. & Bronner, A. (2015). Étude d'une transposition didactique de l'algorithmique au lycée : une pensée algorithmique comme un versant de la pensée mathématique. In Theis L. (Ed.) Actes du colloque EMF2015 – GT3 : *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*, (pp. 231-246).

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné, *La pensée sauvage*, Grenoble.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en didactique des mathématiques, 19* (2), 221-266. La pensée Sauvage.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives 5*. 37-65. IREM de Strasbourg.

Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* [Thèse de doctorat- Université de Grenoble].

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.